数学百科全书

第四卷

Orb — Sti

科学出版社

数 学 百 科 全 书

第四卷

Orb—Sti

科 学 出 版 社

1 9 9 9

内 容 简 介

本书由三类条目组成。首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目(采用了一种很好的分科办法)，对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状；这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读，根据专业需要，还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读。其次，是一些中等篇幅的条目，专门介绍某些具体的数学问题和方法，这类条目内容较深，是为水平较高的读者而写的。最后，还有一类简短的条目，可供查阅定义时参考。本书附有主题索引，其中不仅包括所有条目的标题，还包括在前两类条目中给出定义的许多概念，以及在条目中提到的一些最重要的结果。多数条目附有参考文献。这部大型数学工具书的功能是很齐全的，读者范围是十分广泛的。

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И. М. ВИНОГРАДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

图字：01－96－1567 号

责任编辑　杜小杨　夏墨英　张鸿林
特邀编辑　葛显良　戴中器　沈海玉

数学百科全书

第四卷

《数学百科全书》编译委员会 编译
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1999年12月第 一 版　开本：787×1092　1/16
1999年12月第一次印刷　印张：66
印数：1—3 000　字数：2 358 000
ISBN 7-03-006426-7/O・984
定价：148.00 元

數學百科全書

蘇步青題



《数学百科全书》

（第四卷）

编译委员会

序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外“数”与“形”，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种“活”的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身

出 版 说 明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有12年至14年之久。一些自然科学领域，如天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩如烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从1977年到1986年，历时10年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家 ИМ 维诺格拉多夫（Виноградов）主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》（Математическая энциклопедия），约900万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德尔出版公司出版了由180位西方数学家参加翻译的英文版（Encyclopaedia of mathematics）。英文版增补了大量最新成果、重要的西方文献和编者注，因而其内容更加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者）、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要求，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为

中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引，此外还增加了600余篇数学家小传。

本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢!

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

《数学百科全书》编译委员会

本书由河北省雄县电脑服务部排版。谨此致谢!

轨道[orbit: орбита]，点 x 对于（左侧）作用于集合 X 上的群 G 的

集合

$$G(x)=\{g(x): g\in G\}.$$

集合

$$G_x=\{g\in G: g(x)=x\}$$

是 G 中一子群，称为点 x 对于 G 的稳定化子（stabilizer）（或平稳子群（stationary subgroup））. 映射 $g\mapsto g(x)(g\in G)$ 诱导出 G/G_x 和轨道 $G(x)$ 之间的一一对应. X 中任意两点的轨道或者不相交或者重合；换句话说，轨道定义了集合 X 的一个分划. 对于这一分划所定义的等价关系的商称为 X 由 G 给出的轨道空间（orbit space）并记为 X/G. 把每个点对应它的轨道，这定义了一个典范映射 $\pi_{X,G}: X\to X/G$. 同一轨道中不同点的稳定化子在 G 中相互共轭，确切地说，$G_{g(x)}=gG_xg^{-1}$. 若 X 中只有一个轨道，则 X 是群 G 的齐性空间（homogeneous space of the group）而称 G 传递地作用于 X 上. 若 G 为一**拓扑群**（topological group），X 为一拓扑空间并且作用是连续的，则 X/G 也就被赋予了拓扑，其中 $U\subset X/G$ 是 X/G 中开集，当且仅当集合 $\pi_{X,G}^{-1}(U)$ 在 X 中是开的.

例. 1) 设 G 是平面 X 的绕定点 a 的旋转群，则轨道就是全部以 a 为心的圆（也包括点 a 自身）.

2) 设 G 为一有限维实向量空间 V 的全体非奇异线性变换组成的群，设 X 为 V 上全体对称双线性型的集合，并设 G 在 X 上的作用由

$$(gf)(u,v)=f(g^{-1}(u),g^{-1}(v)),\ 对一切\ u,v\in V$$

定义，则 G 在 X 上的轨道是有相同的秩和相同的符号差的型的集合.

设 G 为光滑地作用在**微分流形**（differentiable manifold）X 上的实 **Lie 群**（Lie group）（见 **Lie 变换群**（Lie transformation group））. 对每一点 $x\in X$，轨道 $G(x)$ 是 X 中一浸入子流形，它微分同胚于 G/G_x（这一微分同胚由映射 $g\mapsto g(x)(g\in G)$ 诱导出来）. 这一子流形在 X 中不一定是闭的（即不一定是嵌入的）. 典型的例子是"环面的卷绕"，即加法群 $\mathbf{R}$ 按公式

$$t(z_1,z_2)=(e^{it}z_1,e^{i\alpha t}z_2),\ t\in\mathbf{R}$$

在环面

$$T^2=\{(z_1,z_2): z_i\in C,\ |z_i|=1,\ i=1,2\}$$

上的作用，其中 α 为一无理实数；其轨道的闭包与 T^2 重合. 若 G 为紧的，则所有的轨道都是嵌入的子流形.

若 G 为一个**代数群**（algebraic group）而 X 为代数闭域 k 上的一个**代数簇**（algebraic variety），且 G 正则作用于 X 上（见**变换的代数群**（algebraic group of transformations）），则每个轨道 $G(x)$ 是一个光滑的代数簇并在其闭包 $\overline{G(x)}$ 中是开集（在 Zariski 拓扑内），同时 $\overline{G(x)}$ 总包含 G 的一个闭轨道（见[5]）. 在此情况下，态射 $G\to G(x)$，$g\mapsto g(x)$，诱导出代数簇 G/G_x 和 $G(x)$ 的同构，当且仅当它是可分的（这个条件在 k 的特征为零时总是满足的，见**可分映射**（separable mapping））. 极大维的轨道组成 X 中的一个开集.

一个给定作用的轨道结构的描述通常归结为在每个轨道内给出唯一代表元 x、给出稳定化子 G_x 的描述、再给出一个适当的函数类，它们在一个轨道内取常数（不变量（invariant））并能区分不同的轨道；这些函数使得能以描述轨道在 X 中的位置（轨道是它们的水平集的交）. 这一程序通常称为轨道分解问题（problem of orbit decomposition）. 许多分类问题可归结为这一问题. 于是例 2) 就是对称双线性型的等价分类问题；此时不变量 —— 秩和符号差 —— 是"离散的"，而稳定化子 G_f 当 f 为非退化时是相应的正交群. 矩阵的 Jordan 正规形式的经典理论（以及矩阵其他正规形式的理论、见**正规形式**（normal form））可以在这一框架内加以解释：Jordan 正规形式是**一般线性群**（general linear group）$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ 按共轭 $Y\mapsto AYA^{-1}$ 作用于全部（$n\times n$）复矩阵空间上的轨道的典范代表元（不计 Jordan 块的次序）；矩阵 Y 的特征多项式的系数是重要的不变量（但它们不足以区分开任意两个轨道）. 把等价的对象看成一个群的轨道的想法常用于许多分类问题中，例如在代数（参）**模理论**（moduli theory）（见[10]），在图的交的理论中（见[2]）等等.

若 G 和 X 是有限的，则

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}\,g|,$$

其中 $|Y|$ 是集合 Y 中元素的个数，且

$$\mathrm{Fix}(g)=\{x\in X: g(x)=x\}.$$

设 G 为光滑地作用于连通光滑流形 X 上的紧 Lie 群，则 X 的轨道结构是局部有限的，即对任意 $x \in X$，有一个邻域 U，使得不同的稳定化子 $G_y(y \in U)$ 的共轭类个数是有限的．特别若 X 是紧的，则稳定化子 $G_y(y \in X)$ 的不同共轭类的个数是有限的．对 G 的任意子群 H，每个集合

$$X_{(H)} = \{x \in X: G_x \text{ 在 } G \text{ 中与 } H \text{ 共轭}\}$$

是 X 内一个开的和一个闭的 G 不变的子集的交．在此情况下，研究 $X_{(H)}$ 可导致作用的分类（见[1]）．

类似的结果在不变量的几何理论中也已获得（见**不变量理论**（invariants, theory of））（见[3]）．若 G 为正则地作用于仿射代数簇 X（基域 k 为代数闭的且特征为零）上的约化代数群．任一轨道的闭包中包含唯一的闭轨道．存在一个把 X 分解成有限个局部闭的不变的互不相交的子集的分划 $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$，使得：a）若 $x, y \in X_\alpha$ 且 $G(x)$ 是闭的，则 G_y 在 G 中与 G_x 的一个子群共轭，若 $G(y)$ 也是闭的，则 G_y 在 G 中与 G_x 共轭；b）若 $x \in X_\alpha$，$y \in X_\beta$，$\alpha \neq \beta$，且 $G(x)$ 和 $G(y)$ 是闭的，则 G_x 和 G_y 在 G 中不共轭．若 X 是一光滑代数簇（例如，G 在向量空间 $V = X$ 中的有理线性表示的重要情形），则 X 中有一个非空开子集 Ω，使得对任意的 $x, y \in \Omega$，G_x 与 G_y 在 G 中共轭，这个结果是关于 X 中处于一般位置的点（point in general position），即一个非空开集内的点的性质的一个断言；还有一些类似的其他断言．例如，对于半单群 G 在一个向量空间 V 中的有理线性表示，在一般位置的点的轨道是闭的，当且仅当它们的稳定化子是约化的（见[7]）；当 G 为不可约时，对于处于一般位置的点的稳定化子的具体刻画也已找到（见[8]，[9]）．在这方面轨道闭包的研究是重要的．这里，其轨道的闭包包含 V 中元素 O 的点 $x \in V$ 的集合与 V 上所有非常数不变多项式的零点的簇重合；在许多情况下，特别是不变量理论在模论的应用中，这个簇起重要作用（见[10]）．任何两个不同的闭轨道可由不变量多项式分开．轨道 $G(x)$ 是闭的，当且仅当点 x 相对于 $G(x)$ 在 G 中的正规化子的轨道是闭的（见[4]）．非闭的轨道的出现与 G 的性质有关：若 G 是幂幺的（且 X 为仿射的），则任何轨道都是闭的（见[6]）．不变量理论的一个方面就是研究各种具体作用（特别是线性表示）的轨道分解问题．其中之一——约化群的伴随表示——已经详细地研究过（见，例如[11]）．这一研究与群 G 的表示理论有关，见**轨道方法**（orbit method）．

参考文献

[1] Palais, R., The classification of G-spaces, Amer. Math. Soc., 1960.

[2] Harary, F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969.

[3] Luna, D., Slices étales, *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1973), 81 – 105

[4] Luna, D., Adhérence d'orbite et invariants, *Invent. Math.*, **29** (1975), 3, 231 – 238.

[5] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[6] Steinberg, R., Conjugacy classes in algebraic groups, Lecture notes in math., 336, Springer, 1974.

[7] Попов, В. Л., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **34** (1970), 523 – 531.

[8] Попов, А. М., 《Функц. анализ и его прилож.》, **12** (1978), 2, 91 – 92

[9] Элашвили, А. Г., 《Функц. анализ и его прилож.》, **6** (1972), 2, 65 – 78.

[10] Mumford, D. and Fogarty, J., Geometric invariant theory, Springer, 1982.

[11] Kostant, B., Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 3, 327 – 404.

[12] Humphreys, J., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Popov, V. L., Modern developments in invariant theory, in Proc. Internat. Congress Mathematicians, Berkeley, 1986, Amer. Math. Soc., 1988, pp 394 – 406.

[A2] Kraft, H., Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Vieweg, 1984.

[A3] Kraft, H. Slodowy, P. and Springer, T. A. (eds), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Seminar, 13, Birkhäuser, 1989.

李慧陵 译

轨道方法[orbit method; орбит метод]

研究 Lie 群的酉表示的一种方法．幂零 Lie 群的酉表示（unitary representation）理论是利用轨道方法而发展起来的，并且这种方法被证明也可以用于其他的群（见[1]）．

轨道方法基于以下的"经验"事实：一个 Lie 群 G 的不可约酉表示与它在**余伴随表示**（coadjoint representation）中的轨道之间存在着密切的联系．利用轨道方法，表示论中基本问题的解由以下方式实现（见[2]）．

不可约酉表示的构成和分类．令 Ω 是实 Lie 群 G 在余伴随表示中一个**轨道**（orbit）．令 F 是这个轨道的一个点（它是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上一个线性泛函），令 $G(F)$ 是 F 的**稳定化子**（stabilizer），而 $\mathfrak{g}(F)$ 是群 $G(F)$ 的 Lie 代数．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}_c$（见 **Lie 代数的复化**（complexification of a Lie algebra））内一个复子代数 $\mathfrak{h}$ 称为点 F 的一个极化

(polarization)，当且仅当它具有以下性质：

1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - (1/2)\dim \Omega$;

2) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ 包含在 $\mathfrak{g}$ 上泛函 F 的核里；

3) $\mathfrak{h}$ 对于 $\mathrm{Ad}\,G(F)$ 不变.

令 $H^0 = \exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g})$ 而 $H = G(F) \cdot H^0$. 极化 $\mathfrak{h}$ 称为实的(real)，如果 $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$；称为纯复的(purely complex)，如果 $\mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}(F)$. 泛函 F 按以下公式定义群 H^0 的一个特征标(一个一维酉表示) χ_F^0:

$$\exp X \mapsto \exp 2\pi i < F, X > .$$

将 χ_F^0 开拓为 H 的一个特征标 χ_F. 如果 $\mathfrak{h}$ 是一个实极化，则令 $T_{F, \mathfrak{h}, \chi_F}$ 是群 G 由子群 H 的特征标 χ_F 所诱导的表示(见**诱导表示**(induced representation)). 如果 $\mathfrak{h}$ 是一个纯复极化，则令 $T_{F, \mathfrak{h}, \chi_F}$ 是作用在 G/H 上全纯函数的空间上的全纯诱导表示.

第一基本假设(first basis hypothesis)是表示 $T_{F, \mathfrak{h}, \chi_F}$ 为不可约的(见**不可约表示**(irreducible representation))，并且它的等价类仅依赖于轨道 Ω 和特征标 χ_F^0 的开拓 χ_F 的选取. 这个假设已对幂零群和可解 Lie 群被证明(分别见[1]和[5]). 对于单例外群 G_2 的某些轨道来说，这个假设不成立([7]). 开拓的可能性和它的不确定的程度依赖于轨道的拓扑性质：轨道的 2 维上同调类对于开拓起着阻碍作用，而与此同时轨道的 1 维上同调类则可以用来作为列举不同的开拓的一个参数. 更确切地说，令 B_Ω 是轨道 Ω 上一个典范 2 形式. 存在一个开拓的必要且又充分条件是 B_Ω 属于整同调类(即它的沿着任意 2 维循环的积分都是整数)；如果这个条件成立，那么开拓的集合由这个轨道的基本群的特征标参数化.

第二基本假设(second basic hypothesis)是所考虑的群 G 的所有不可约酉表示都可以由所说的方法得到. 直到 1983 年，唯一不符合这条假设的例子是所谓半单 Lie 群表示的补系列.

轨道和表示之间关系的泛函性质. 在表示论里最重要的问题就是将一个表示分解为不可约分支的问题：给定群 G 的一个子群 H，这样的分解如何通过 G 的一个不可约表示限制到 H 上和 H 的一个不可约表示诱导到 G 上而得到? 轨道方法通过一个自然射影 $p: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ (这里 $*$ 表示到伴随空间的转移；射影 p 是把一个泛函由 $\mathfrak{g}$ 限制到 $\mathfrak{h}$ 上)给出这个问题的答案. 事实上，令 G 是一个指数 Lie 群(对于这样的群来说，轨道和表示的关系是一对一的关系，见**指数 Lie 群**(Lie group, exponential)). G 的对应于轨道 $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ 的不可约表示，当限制到 H 上时，分解成对应于在 $p(\Omega)$ 内的那些轨道 $\omega \in \mathfrak{h}^*$ 的不可约分支，当 G 的一个表示由群 H 的一个对应于轨道 $\omega \in \mathfrak{h}^*$ 的不可约表示所诱导时，分解成对应于与前象 $p^{-1}(\omega)$ 有非空交的那些轨道 $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ 的不可约分支. 这些结论有两个重要推论：如果不可约表示 T_i 对应于轨道 $\Omega_i (i = 1, 2)$，则张量积 $T_1 \otimes T_2$ 分解成对应于在算术和 $\Omega_1 + \Omega_2$ 内那些轨道 Ω 的不可约分支，G 在 G/H 上一个函数空间内一个拟正则表示分解成对应于这样的轨道 $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ 的不可约分支，Ω 的象 $p(\Omega) \subset \mathfrak{h}^*$ 包含零.

特征标理论. 对于不可约表示的特征标(作为群上广义函数)来说，以下的通用公式已被提出(见[2])：

$$\chi(\exp X) = \frac{1}{p(X)} \int_{\Omega} e^{2\pi i < F, X >} \beta(F), \qquad (*)$$

这里 $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到群 G 内的指数映射，$p(X)$ 是在典范坐标下 G 上不变 Haar 测度的密度的平方根而 β 是轨道 Ω 上通过关系 $\beta = B_\Omega^k / k! (k = (\dim \Omega)/2)$ 与典范 2 形式 B_Ω 相关联的体积形式. 这个公式对于幂零群，类型 1 的可解群，紧群，实半单群表示的离散系列和复半单群表示的主系列来说是正确的. 对于 $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ 表示的某些退化系列来说，这个公式不成立. 公式(*)为计算对应于轨道 Ω 的不可约表示 T_Ω 的无穷小特征标提供了一个简单的公式；再者，对于 G 上每一个 Laplace 算子 Δ 有 $\mathfrak{g}^*$ 上一个 $\mathrm{Ad}^* G$ 不变多项式 P_Δ 与之相关联，使得表示 T_Ω 的无穷小特征标在元素 Δ 的值等于 P_Δ 在 Δ 的值.

群 G 沿着它在余伴随表示内轨道 Ω 的不可约酉表示的构造. 这种构造可以视作一个 Hamilton 系统的量子化运算，Ω 在这里扮演着相空间的角色而 G 在这里扮演一个多维非交换时间(或对称的群)的角色. 在这些条件下，余伴随表示内的 G 轨道都是 G 齐次辛流形，它们容许量子化. 于是第二基本假设可以如此叙述：每一个具有时间(或对称的群) G 的初等量子系统都可以由相应的典型系统通过量子化而得到(见[2]).

与完全可积 Hamilton 系统理论的一个联系也已被发现(见[11]).

参考文献

[1] Кириллов, А. А., 《Успехи матем. наук》, 17 (1962), 57 – 110.

[2] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978(英译本：Kirillov, A. A. Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[3] Dixmier, J. Enveloping algebras, North-Holland, 1974(译自法文).

[4] Simms, D. J. and Woodhouse, N. M. J., Lectures on geometric quantization, Springer, 1976.

[5] Auslander, L. and Kostant, B.. Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, *Invent. Math.*, **14**(1971), 255 – 354.

[6] Moore, C. C., Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups, *Ann. of Math.*, **82**(1965), 1, 146 – 182.

[7] Rothschild, L. P. and Wolf, J. A., Representations of semi-simple groups associated to nilpotent orbits, *Ann. Sci. Ecole Norm Sup. Ser.* 4, 7(1974), 155 – 173.

[8] Bernat, P. et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, 1972.

[9] Гинзбург, В. А., 《Докл. АН СССР》, **249**(1979), 3, 525 – 528.

[10] Kirillov, A. A., Infinite dimensional groups, their representations, orbits, invariants, in Proc. Internat Congress Mathematicians, Helsinki 1978, Vol. 2, Acad. Sci. Fennica, 1980, 705 – 708.

[11] Reyman, A. G. and Semenov-Tian-Shansky, M. A., Reduction of Hamiltonian systems, affnie Lie algebras and Lax equations, *Invent. Math.*, **54**(1979), 1, 81 – 100.

[12] Kirillov, A. A. (ed.), Representation theory and non-commutative harmonic analysis, Ⅰ, Ⅱ, Springer, 1994、1995(译自俄文).

A. A. Кириллов 撰　郝钢新 译

轨道稳定性[**orbit stability** 或 orbital stability; **орбитальная устойчивость**]

常微分方程自治系统(autonomous system)

$$\dot{x}=f(x),\ x\in\mathbf{R}^n \qquad (*)$$

的(解 $x(t)$ 的)轨道 ξ 的如下性质: 对每一个 $\varepsilon>0$ 均存在一个 $\delta>0$, 使得每一个由轨道 ξ 的 δ 邻域发出的正半轨道均含于轨道 ξ 的 ε 邻域内. 这里, 轨道(trajectory)就是方程组(*)之解 $x(t)$ 当 $t\in\mathbf{R}$ 时所取的值之集合, 而正半轨道(positive half-trajectory)就是解 $x(t)$ 当 $t\geqslant 0$ 时所取的值的集合. 若解 $x(t)$ 具有**Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability), 则其轨道是轨道稳定的.

轨道 ξ 称为渐近轨道稳定的(asymptotically orbital stable), 如果它不仅是轨道稳定的, 而且存在一个 $\delta_0>0$, 使得方程组(*)的每一个由轨道 ξ 的 δ_0 邻域出发的解(即适合 $d(x(0),\xi)<\delta_0$ 的解) $x(t)$ 的轨道, 当 $t\to+\infty$ 时都趋向轨道 ξ, 即有

$$\lim_{t\to+\infty}d(x(t),\xi)=0,$$

这里

$$d(x,\xi)=\inf_{y\in\xi}d(x,y)$$

是由点 x 到集合 ξ 的距离($d(x,y)$ 则是点 x 和 y 之间的距离).

渐近轨道稳定这个概念之所以有用, 是基于以下的事实. (*)之周期解决非渐近稳定的. 但若此方程组的周期解的一切**乘子**(multipliers)之模(除去 1 之外)均小于 1, 则这个周期解的轨道是渐近轨道稳定的(Андронов-Витт 定理(Andronov-Witt theorem)). 还有更一般的 Демидович 定理(Demidovich theorem)(见[3]): 令 $x_0(t)$ 是方程组(*)的一个有界解; 此外设

$$\inf_{t\geqslant 0}|\dot{x}_0(t)|>0.$$

且沿 $x_0(t)$ 的变分方程组是正则的(见**正则线性方程组**(regular linear system)), 而其所有的 **Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponent)除一个以外均为负, 则解 $x_0(t)$ 的轨道是渐近轨道稳定的.

参考文献

[1] Андронов, А. А., Собр. трудов, М., 1956.

[2] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959 (中译本: A. A. 安德罗诺夫等, 振动理论, 上、下册, 科学出版社, 1973–1974).

[3] Демидович, Б. П., 《Дифференциальные урав.》, 4 (1968), 4, 575 – 588; 8, 1359 – 1373.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 也可考虑周期轨道内部(或外部)的轨道稳定性.

参考文献

[A1] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill, 1955.

[A2] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

齐民友 译

阶(或次, 序, 序模, 数量级)[**order**; **порядок**]

1) **代数曲线** $F(x,y)=0$ 的次(order of an algebraic curve)(这里 $F(x,y)$ 是 x 与 y 的多项式), 就是 $F(x,y)$ 的各项的最高次数. 例如椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 是二次曲线, 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 是四次曲线(见**代数曲线**(algebraic curve)).

2) 无穷小量 α 关于无穷小量 β 的阶(order of an infinitesimal quantity)是一个数 n(如果存在的话), 使得极限 $\lim\alpha/\beta^n$ 存在, 并且不是无穷大或零. 例如当 $x\to0$ 时 $\sin^2 3x$ 是关于 x 的二阶无穷小量, 因为 $\lim_{x\to0}(\sin^2(3x)/x^2)=9$. 如果 $\lim\alpha/\beta=0$, 则称 α 对于 β 是高阶无穷小, 如果 $\lim\alpha/\beta=\infty$, 则称 α 对于 β 是低阶无穷小. 类似地, 可定义无穷大量的阶(见**无穷小演算**(infinitesimal calculus)).

3) 函数 f 的零点(或极点) a 的阶(order of a

zero）是一个数 n，使得极限 $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^n$（或相应地，$\lim(x-a)^n f(x)$）存在，并且不是无穷大或零（见**解析函数**（analytic function）；**亚纯函数**（meromorphic function），**极点（函数的）**（pole (of a function)）；**有理函数**（rational function））.

4）导数的阶（order of derivative）是指为了得到这个导数需对函数求导的次数．例如 y'' 是二阶导数，$\partial^4 z/\partial^2 x\partial^2 y$ 是四阶导数．类似可定义微分的阶（见**微分学**（differential calculus）.

5）微分方程的阶（order of a differential equation）是方程中导数的最高阶．例如 $y'''y'-(y'')^2=1$ 是三阶方程，$y''-3y'+y=0$ 是二阶方程（见**常微分方程**（differential equation, ordinary））.

6）方阵的阶（order of a square matrix）是它的行数或列数（见**矩阵**（matrix））.

7）有限群的阶（order of a finite group）是群的元素个数（见**有限群**（finite group））．如果群 G 无限，则称之为无限阶的群．不要把群的阶与群上的序（order on a group）相混淆（见**序群**（ordered group）；**偏序群**（partially ordered group））.

8）群的元素的阶（order of an element of a group）是由这个元素生成的循环子群的元素个数．当这个子群为无限时，阶是 ∞，否则是一个正整数（亦见**循环群**（cyclic group））．当子群无限时，这个元素是无限阶的．如果元素 a 的阶有限且等于 n，则 n 是使 $a^n=1$ 的最小正数.

9）环 Q 内的右序模（right order in a ring）是 Q 的一个子环 R，使得对任意的 $x\in Q$ 存在 $a,b\in R$，其中 b 在 Q 内可逆，$x=ab^{-1}$．换句话说，R 是 Q 的子环，使得 Q 是 R 的右经典分式环（见**分式环**（fractions, ring of））.

10）如果在某种研究或计算中，把某个微小的量的 $(n+1)$ 次以及更高次的幂忽略不计，就说这个研究或计算精确到 n 阶（order）的量．例如在研究弦的微小振动时，把位移及其导数的二次和更高次的项忽略不计后，就得到一个线性方程（问题的线性化）.

11）"阶"也被用在差分演算（不同阶的差分，见**有限差分演算**（finite-difference calculus））、许多特殊函数的理论（例如 n 阶**柱函数**（cylinder functions））等等之中.

12）在测量时，常说一个量（quantity）的数量级（order）为 10^n，就是指它包含在 $0.5\cdot 10^n$ 与 $5\cdot 10^n$ 之间.

取自 БСЭ-3 中同名条目

【补注】 以上内容并没有穷尽"order"一词在数学中的多种含义.

13）如果 (V, B) 是平衡不完全区组设计（balanced incomplete block design），或具有参数 v, b, r, k, λ 的设计（design）（见**区组设计**（block design）），则 $n=r-\lambda$ 称为设计的阶（order）.

14）一个有限射影平面是 k 阶的，是指它的每条直线恰有 $k+1$ 个点（从而恰有 k^2+k+1 个点以及 k^2+k+1 条直线）.

15）设 $\mathfrak{M}=\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$（$M_\lambda\subset S$）是子集 $A\subset S$ 的一个覆盖，即 $A\subset\bigcup_\lambda M_\lambda$．如果 k 是这样的最小整数，使得 $\mathfrak{M}$ 中任意一个由 $k+1$ 个元素构成的子族的交集都是空集，则称这个覆盖是 k 阶（order）的.

16）设 $f(z)$ 是**超越整函数**（entire function）．对每个实数 $r>0$，令 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$，则超越整函数 $f(z)$ 的阶（order of the transcendental entire function）定义为

$$\rho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

若 ρ 有限，则函数是有限阶（finite order）的，否则是无限阶（infinite order）的.

17）椭圆函数的阶（order of an elliptic function）是它在周期平行四边形中取每个值的次数，见**椭圆函数**（elliptic function）.

18）设 $f(z)$ 是 $|z|<R\leqslant\infty$ 内的**亚纯函数**（meromorphic function）．对每个可能的值 α（含 ∞ 在内），令

$$N(r,\alpha)=\int_0^r\frac{n(t,\alpha)-n(0,\alpha)}{t}\,dt+n(0,\alpha)\log r,$$

$$m(r,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-\alpha}\right|d\theta,$$

当 $\alpha\neq\infty$ 时，

$$m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

这里 $n(r,\alpha)$ 是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 内的 α 点（α-point），即使得 $f(z)=\alpha$ 的点的个数，并计人重数．函数 N 和 m 分别称为计数函数（counting function）和邻近函数（proximity function）．函数 $T(r)=m(r,\infty)+N(r,\infty)$ 称为 $f(z)$ 的阶函数（order function）或特征函数（characteristic function）．当 $r\to\infty$ 时，对所有的 α 有 $T(r)=m(r,\alpha)+N(r,\alpha)+O(1)$（Nevanlinna 第一定理（Nevanlinna first theorem））．也有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r},$$

这里 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$，如同 16）中所述．亚纯函数 $f(z)$ 的阶（order of the meromorphic function）定义为 $\limsup_{r\to\infty}(\log r)^{-1}\log T(r)$.

19) $[a, b]$ 上连续函数 f 的 k 阶连续模 (k-th order modulus of continuity) 定义为

$$\omega_k(f; t) = \sup_{\substack{|h| \leqslant t \\ a \leqslant x \leqslant b \\ a \leqslant x+kh \leqslant b}} \left| \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} f(x+ih) \right|.$$

亦见**连续模**(continuity, modulus of); **光滑模**(smoothness, modulus of).

20) 考虑区间 $[a, b]$ 上的常微分方程组 $dy^i/dx = f^i(x, y^1(x), \cdots, y^n(x))$ 以及在网格点 (mesh points) $x_k = a + kh$ 上计算y^i的数值解法，使得步长 (stepsize) 为 h. 设 y_k^i 是 y^i 在 x_k 处的计算值，$y^i(x_k)$ 是"真值"，$e_k^i = y_k^i - y^i(x_k)$. 如果当 $h \to 0$ 时，$e_k^i = O(h^r)$，则此解法是 r 阶的.

21) 考虑 E^2 中的寻常曲线 (ordinary curve) C，也就是说，C 是相交于有限多个点的有限条简单弧的并. 对于点 $p \in C$，p 的充分小邻域的边界与 C 交于有限多个点，其个数与邻域无关. 这个数称为 p 在 C 上的阶 (order). 一阶点是端点 (end point)，二阶点是寻常点 (ordinary point)，$n(n \geqslant 3)$阶的点是分支点 (branch point).

22) 设 M^n 是 n 维流形，Z^{n-1} 是 M^n 内的 $n-1$ 维闭链，它也是一个边缘. 不在 Z^{n-1} 的底空间 $|Z^{n-1}|$ 内的点 P 关于 Z^{n-1} 的**环绕系数** (linking coefficient) $\mathrm{Lk}(P, Z^{n-1})$ 称为点 P 关于 Z^{n-1} 的阶. 当 $M^n = \mathbf{R}^2$，Z^{n-1} 是一条闭曲线 $\{f(t): 0 \leqslant t \leqslant 1\}$，$f(0) = f(1)$ 时，这就是 f 绕 P 的**旋转数** (rotation number).

23) 词"order"也可用作为集合上一个序关系 (order relation) 或排序 (ordering) 的同义词 (亦见**序 (集合的)** (order (on a set))).

24) 关于函数在一个点 (包括 ∞) 的大小的序的概念以及与此相关的概念，见**序关系** (order relation).

25) 考虑 **Dirichlet 级数** (Dirichlet series) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-\lambda_n z)$，设 S 是 f 的收敛横坐标 (abscissa of convergence). 即当 $\mathrm{Re}(z) > S$ 时级数收敛，$\mathrm{Re}(z) < S$ 时发散. 如果 $x = \mathrm{Re}(z) > S$，则 $f(z) = o(|y|)$ 当 $|y| \to \infty$ 时. H. Bohr 在他的学位论文中引入了

$$\mu(x) = \limsup_{|y| \to \infty} \frac{\log|f(x+iy)|}{\log|y|}.$$

并称为 f 在直线 $\mathrm{Re}(z) = x$ 上的阶 (order). 函数 $\mu(x)$ 是非负、凸、连续且单调递减的. Bohr 发现 f 在这条直线上的值有某种周期性质，这就开创了**殆周期函数** (almost-periodic function) 的理论.

26) 设 A 是一个 Dedekind 整环 (Dedekind domain)，即 (不一定交换的) 整环，其中每个理想都可唯一地分解为素理想 (亦见 **Dedekind 环** (Dedekind ring)). 设 B 是 A 的分式域 F 上的有限次可分代数. B 内的 A 格 L 是 B 的有限生成 A 子模，使得 $FL = B$. 包含 A 且是 B 的子环的 A 格称为 A 序模 (A-order)，极大序模 (maximal order) 就是不含于其他序模中的序模. 这样的极大序模总是存在的. 如果 B 是交换的，则它是唯一的.

当 F 是整体或局部域，A 是它的整元的环，B 是 F 的有限域扩张时，极大序模是 B 的整元的环 (ring of integers)，它是 A 在 B 内的整闭包 (integral closure) (见**环的整扩张** (integral extension of a ring)). 它也被称为主序模 (principal order).

27) 在某些文献，主要是物理文献中，用到 Lie 群的阶 (order of a Lie group)，就是指使它参数化所需的参数个数，即这种意义下 Lie 群 G 的阶就是 G 的维数 (亦见 **Lie 群** (Lie group)).

参考文献可参见直接或间接关联的各条目.

陈志杰 译

序 (集合上的) [order (on a set); порядок], 序关系 (order relation)

某一集合 A 上的**二元关系** (binary relation)，通常用符号 $\leqslant$ 表示，并且具有下列性质：1) $a \leqslant a$ (自反性 (reflexivity))；2) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$，则 $a \leqslant c$ (传递性 (transitivity))；3) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$，则 $a = b$ (反对称性 (anti-symmetry)). 若 $\leqslant$ 是一个序，则当 $a \leqslant b$ 且 $a \neq b$ 时，由 $a < b$ 定义的关系 $<$ 称为严格序 (strict order). 严格序可以定义为具有性质 2) 和下述性质 3') 的一种关系：3') $a < b$ 和 $b < a$ 不能同时出现. 表达式 $a \leqslant b$ 通常读作"a 小于或等于 b"，或者"b 大于或等于 a"；而 $a < b$ 读作"a 小于 b"或者"b 大于 a". 一个序称为全的 (total)，如果对任何 $a, b \in A$，或者 $a \leqslant b$，或者 $b \leqslant a$. 具有性质 1) 和 2) 的关系称为前序 (pre-order) 或拟序 (quasi-order). 若 $\lhd$ 是一个拟序，则由条件 $a \lhd b$ 和 $b \lhd a$ 定义的关系 $a \approx b$ 是一个等价 (equivalence) 关系. 在依这个等价作成的商集上通过假设 $[a] \leqslant [b]$ 可以定义一个序，其中 $[a]$ 是包含元素 a 的类，如果 $a \lhd b$. 例子和文献见**偏序集** (partially ordered set).

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 全序也称为**线性序** (linear order)，赋予了全序的集合有时称为**链** (chain) 或**全序集** (totally ordered set). 需强调的是，一个序，不 (一定) 是全序时，常常称为偏序 (partial order)，一些人使用符号 $a \| b$ 表示 $a \leqslant b$ 和 $b \leqslant a$ 都不成立.

杜小杨 译

阶关系[**order relation**; **порядка соотношение**], 函数的比较 (comparison of functions), O-o 关系 (O-o relations), 渐近关系 (asymptotic relations)

研究一个函数在某点(该点可以是无穷远点)的邻域内关于另一函数的性态时产生的一个概念.

设 x_0 为**集合 E 的极限点** (limit point of a set). 对两个函数 f 和 g, 如果存在常数 $c>0$ 和 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 且 $x\neq x_0$ 时, $|f(x)|\leqslant c|g(x)|$, 则称 f 在 x_0 的某个去心邻域内关于 g 是有界的, 记为

$$f(x)=O(g(x)),\ \text{当}\ x\to x_0\ \text{时}$$

(读为"f 为 g 的大 O 阶"); $x\to x_0$ 表示所考虑的性质仅在 x_0 的某个去心邻域内成立. 上述定义可以类似地应用于 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的情形.

若对两个函数 f 和 g, 当 $x\to x_0$ 时, 有 $f=O(g)$ 并且 $g=O(f)$, 则称这两个函数当 $x\to x_0$ 时是同阶函数 (functions of the same order). 例如, 若对两个函数 α 和 β, 当 $x\neq 0$ 时, $\alpha(x)\neq 0$, $\beta(x)\neq 0$, 且极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$$

存在, 则当 $x\to x_0$ 时, 它们有相同的阶.

两个函数 f 和 g 称为当 $x\to x_0$ 时是等价的 (equivalent) (渐近相等的 (asymptotically equal)) (写成 $f\sim g$), 如果在 x_0 的某个邻域内, 可能除去 x_0 外, 存在函数 φ, 使得

$$f=\varphi g\ \text{且}\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1. \qquad (*)$$

两个函数等价性的条件是对称的, 即当 $x\to x_0$ 时若 $f\sim g$, 则 $g\sim f$, 此外还是传递的, 即当 $x\to x_0$ 时若 $f\sim g$, 且 $g\sim h$, 则 $f\sim h$. 若在点 x_0 的某邻域内, 当 $x\neq x_0$ 时 $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$, 则 $(*)$ 等价于以下两条件中的任何一个:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,\ \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1.$$

若 $\alpha=\varepsilon f$, 其中 $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$, 则称 α 关于 f 是一个无穷小函数 (infinitely-small function), 记为

$$\alpha=o(f),\ \text{当}\ x\to x_0\ \text{时}$$

(读为"α 为 f 的小 o 阶"). 若当 $x\neq x_0$ 时, $f(x)\neq 0$, 且 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)/f(x)=0$, 则 $\alpha=o(f)$. 若当 $x\to x_0$ 时, f 是无穷小函数, 则称函数 $\alpha=o(f)$ 当 $x\to x_0$ 时为比 f 高阶的无穷小函数 (infinitely-small function of higher order). 假设 g 和 $[f]^k$ 是具有相同阶的两个量, 那么称 g 是关于 f 的一个 k 阶量 (quantity of order k). 上述各种类型公式都称为渐近估计 (asymptotic estimates); 它们对于无穷小和无穷大函数特别有意义.

例: $e^x-1=o(1)$ $(x\to 0)$; $\cos x^2=O(1)$; $(\ln x)^\alpha=o(x^\beta)$ $(x\to\infty$; α,β 为任意正数); $[x/\sin(1/x)]=O(x^2)(x\to\infty)$.

下面是符号 o 和 O 的一些性质:

$$O(\alpha f)=O(f)\ (\alpha\ \text{为非零常数});$$

$$O(O(f))=O(f);$$

$$O(f)O(g)=O(f\cdot g);$$

$$O(o(f))=o(O(f))=o(f);$$

$$O(f)o(g)=o(f\cdot g);$$

若 $0<x<x_0$ 且 $f=O(g)$, 则

$$\int_{x_0}^{x}f(y)dy=O\left[\int_{x_0}^{x}|g(y)|dy\right]\ (x\to x_0).$$

含有符号 o 和 O 的公式, 总是从左往右读; 当然这并不排除某些公式从右往左读时仍然正确. 对于复变函数以及多元函数, 符号 o 与 O 也可以象上述对于一元实变函数那样引入. М. И. Шабунин 撰

【补注】 符号 o 和 O("小 oh"和"大 Oh")("little oh" and "big Oh")是由 E. Landau 引入的.

参考文献

[A1] Hardy, G. H., A course of pure mathematics, Cambridge Univ. Press, 1975.

[A2] Landau, E., Grundlagen der Analysis, Akad. Verlagsgesellschaft., 1930 (中译本: 艾·兰道, 分析基础, 高等教育出版社, 1958).

王斯雷 译

顺序统计量[**order statistic**; **порядковая статистика**]

基于观测结果的有序统计量序列(亦称**顺序统计量序列** (variational series))中的每一项. 假设被观测随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中取值 $x=(x_1,\cdots,x_n)$; 此外, 假设在 $\mathbf{R}^n$ 中按如下规则给出一函数 $\varphi(\cdot)$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$

$$\varphi(x)=x^{(\cdot)},\ x\in\mathbf{R}^n,$$

其中 $x^{(\cdot)}=(x_{(n1)},\ \cdots,\ x_{(nn)})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中由向量 x 将其坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 按递增顺序排列得到的向量, 即向量 $x^{(\cdot)}$ 的分量 $x_{(n1)},\ \cdots,\ x_{(nn)}$ 满足关系式

$$x_{(n1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(nn)}. \qquad (1)$$

在这种情形下, 统计量 $X^{(\cdot)}=\varphi(X)=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 是一 顺序统计量的系列或向量 (series (or vector) of order statistics), 而其第 k 个分量 $X_{(nk)}(k=1,\cdots,n)$ 称为第 k 个顺序统计量 (k-th order statistic).

在顺序统计量的理论中, 随机向量 X 的分量 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立同分布随机变量的情形研究的最充分,

以下仅限于考虑这种情形．假如 $F(u)$ 是随机变量 X_i $(i=1,\cdots,n)$ 的分布函数，则第 k 个顺序统计量 $X_{(nk)}$ 的分布函数 $F_{nk}(u)$ 由如下公式给出：

$$F_{nk}(u)=\mathrm{P}\{X_{(nk)}<u\}=I_{F(u)}(k,n-k+1), \quad (2)$$

其中

$$I_y(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^y x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

是不完全 B 函数（incomplete beta-function）．由式（2）可见，如果分布函数 $F(u)$ 有概率密度 $f(u)$，则第 k 个顺序统计量 $X_{(nk)}(k=1,\cdots,n)$ 的概率密度 $f_{nk}(u)$ 也存在且由如下公式给出：

$$f_{nk}(u)=$$
$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(u)]^{k-1}[1-F(u)]^{n-k}f(u),$$
$$-\infty<u<\infty. \quad (3)$$

在概率密度存在的条件下，导出了顺序统计量 $X_{(nr_1)},\cdots,X_{(nr_k)}$ 的联合概率密度 $f_{r_1\cdots r_k}(u_1,\cdots,u_k)(1\leqslant r_1<\cdots<r_k\leqslant n,\ k\leqslant n)$，其表达式为

$$f_{r_1\cdots r_k}(u_1,\cdots,u_k)=$$
$$=\frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\cdots(n-r_k)!}\times$$
$$\times F^{r_1-1}(u_1)f(u_1)[F(u_2)-F(u_1)]^{r_2-r_1-1}f(u_2)\times$$
$$\times\cdots[1-F(u_k)]^{n-r_k}f(u_{r_k}), \quad (4)$$
$$-\infty<u_1<\cdots<u_k<\infty.$$

由式（2）－（4）可以导出所谓极值顺序统计量（extremal order statistics）或称样本极小值（sample minimum）和样本极大值（sample maximum）

$$X_{(n1)}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}(X_1,\cdots,X_n) \text{ 和 } X_{(nn)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(X_1,\cdots,X_n)$$

的分布，以及所谓极差统计量（range statistic）或样本极差（sample range）$W_n=X_{(nn)}-X_{(n1)}$ 的分布．例如，如果分布函数 $F(u)$ 是连续的，则 W_n 的分布为

$$\mathrm{P}\{W_n<w\}=$$
$$=n\int_{-\infty}^{\infty}[F(u+w)-F(u)]^{n-1}dF(u),\ w\geqslant 0. \quad (5)$$

同抽样法的一般理论一样，式（2）－（5）表明，当分布函数 $F(u)$ 未知时，顺序统计量的精确分布无法用于统计推断．正因如此，在观测向量维数 n 无限增大情形下，顺序统计量分布函数的渐近研究方法得到了广泛发展．在顺序统计量的渐近理论中，对适当标准化了的顺序统计量序列 $\{X_{(nk)}\}$，当 $n\to\infty$ 时的极限分布进行了研究；一般说来，这时顺序号 k 可能随 n 变化而变化．假如随着 n 的增大，极限 $\lim_{n\to\infty}k/n$ 存在且不为 0 和 1，则所考察序列 $\{X_{(nk)}\}$ 中相应的顺序统计量 $X_{(nk)}$，称为中心顺序统计量（central order statistics）或平均顺序统计量（mean order statistics）；若 $\lim_{n\to\infty}k/n$ 等于 0 或 1，则称之为极值顺序统计量（extreme order statistics）．

在数理统计中，中心顺序统计量用于根据随机向量 X 的实现，来建立未知分布函数 $F(u)$ 之分位数（quantile）的相合估计量（consistent estimator）序列；或换句话说，用中心顺序统计量来估计函数 $F^{-1}(u)$．例如，假设 x_p 是分布函数 $F(u)$ 的水平为 $P(0<P<1)$ 的分位数，关于 $F(u)$ 已知其概率密度 $f(u)$ 连续且在点 x_P 的某邻域内严格为正，则在这种情形下，序号为 $k=[(n+1)P+0.5]$ 的中心顺序统计量序列 $\{X_{(nk)}\}$，当 $n\to\infty$ 时是分位数 x_P 的相合估计量列，其中 $[a]$ 是实数 a 的整数部分．此外，该顺序统计量序列 $\{X_{(nk)}\}$ 具有渐近正态分布，其参数为

$$x_P \text{ 和 } \frac{P(1-P)}{f^2(x_P)(n+1)},$$

即对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left\{\frac{X_{(nk)}-x_P}{\sqrt{P(1-P)/(n+1)}}f(x_P)<x\right\}=$$
$$=\Phi(x), \quad (6)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数．

例 1. 设 $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 是基于随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的顺序统计量向量．假设向量 X 的分量是独立的且服从同一概率分布的随机变量，其概率密度连续且在中位数 $x_{1/2}$ 某邻域内严格为正．这时，对于任意 $n\geqslant 2$，设 $\{\mu_n\}$ 是由

$$\mu_n=\begin{cases} X_{(n,m+1)}, & \text{若 } n=2m+1 \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{2}(X_{(nm)}+X_{(n,m+1)}), & \text{若 } n=2m \text{ 为偶数} \end{cases}$$

定义的样本中位数序列．那么，当 $n\to\infty$ 时，序列 $\{\mu_n\}$ 具有渐近正态分布，参数为

$$x_{1/2} \text{ 和 } [4(n+1)f^2(x_{1/2})]^{-1}.$$

特别地，如果

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$
$$|a|<\infty,\ \sigma>0,$$

即如果 X_i 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$，则序列 $\{\mu_n\}$ 渐

近正态分布，其参数为 $x_{1/2}=a$ 和 $\sigma^2\pi/(2(n+1))$. 如果将统计量序列 $\{\mu_n\}$ 与正态分布均值 a 的最优无偏估计量 (unbiased estimator) 序列

$$\{\bar{X}_n\},\ \bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

作比较，则应选序列 $\{\bar{X}_n\}$，因为对于 $n\geqslant 2$，有

$$\mathrm{D}\,\bar{X}_n=\frac{\sigma^2}{n}<\frac{\sigma^2\pi}{2(n+1)}\approx\mathrm{D}\,\mu_n.$$

例 2. 设 $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 是基于随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的顺序统计量向量，而 X 的分量独立且在区间 $[a-h,a+h]$ 上均匀分布，其中参数 a 和 h 未知. 对于 $n\geqslant 2$，记

$$Y_n=\frac{1}{2}\ (X_{(n1)}+X_{(nn)}),$$

$$Z_n=\frac{n+1}{2(n-1)}\ (X_{(nn)}-X_{(n1)}).$$

那么，统计量序列 $\{Y_n\}$ 和 $\{Z_n\}$ 相应为参数 a 和 h 的相合超有效无偏估计量序列 (见**超有效估计量** (superefficient estimator)). 此外，有

$$\mathrm{D}\,Y_n=\frac{2h^2}{(n+1)(n+2)},$$

$$\mathrm{D}\,Z_n=\frac{2h^2}{(n-1)(n+2)}.$$

可以证明，在用顺序统计量表示的线性无偏估计类中，在平方风险最小的意义下，序列 $\{Y_n\}$ 和 $\{Z_n\}$ 决定 a 和 h 的最优估计量.

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

[2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Princeton Univ. Press, 1950.

[3] David, H. A., Order statistics, Wiley, 1970.

[4] Gumble, E. J., Statistics of extremes, Columbia Univ. Press, 1958.

[5] Hajek, J. and Sidak, Z., Theory of rank test, Acad. Press, 1967.

[6] Гнеденко, Б. В., 《Докл. АН СССР. Новая серия》, 32 (1941), 1, 7 - 9.

[7] Gnedenko, B. V., Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. of Math.*, 44 (1943), 3, 423 - 453.

[8] Смирнов, Н. В., 《Тр. Матем. ин-та》, 25 (1949), 5 - 59.

[9] Смирнов, Н. В., 《Теория вероятн. и её примен.》, 12 (1967), 2, 391 - 392.

[10] Чибисов, Д. М., 《Теория вероятн. и её примен.》, 9 (1964), 1, 159 - 165.

[11] Craig, A. T., On the distributions of certain statistics, *Amer. J. Math.*, 54 (1932), 353 - 366.

[12] Tippett, L. H. C., On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population, *Biometrika*, 17 (1925), 364 - 387.

[13] Pearson, E. S., The percentage limits for the distribution of ranges in samples from a normal population ($n\leqslant 100$). *Biometrika*, 24 (1932), 404 - 417.

М. С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Serfling, R., Approximation theorems of mathematical statistics, Wiley, 1980.

周概容 译

序拓扑 [order topology; порядковая топология]

具有线性序 $<$ 的线性序集 X 上的拓扑 $\mathscr{T}_<$，并且 $\mathscr{T}_<$ 有一个由 X 的所有可能的区间构成的基.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 这里"区间"通常是在"开区间"，即在形如

$$\{x\in X:\ a<x<b\}$$

的集合的意义下使用，其中 $a,b\in X$ (可能 $a=-\infty$，或 $b=\infty$，或 $a=-\infty$ 且 $b=\infty$). 如同在线性序集上一样，也可以考虑偏序集上的序拓扑. 在线性序集上它与以诸闭区间

$$\{x\in X:\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

作为闭集的子基的区间拓扑 (interval topology) 相同，但在一般偏序集上两种拓扑是不同的. 在一个完全线性序集上，序拓扑可以由序收敛 (order convergence) 来刻画，即一个网 (见广义序列 (generalized sequence)) $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 收敛到一个点 x，当且仅当存在一个递增网 (l_α) 和一个递降网 (u_α) (其指标集皆为有向集 A)，使得对所有 α 有 $l_\alpha\leqslant x_\alpha\leqslant u_\alpha$，并且 $\sup_\alpha l_\alpha=x=\inf_\alpha u_\alpha$.

参考文献

[A1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer Math. Soc., 1973.

[A2] Frink, O., Topology in lattice, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 51 (1942), 569 - 582.

[A3] Ward, A. J., On relations between certain intrinsic topologies in partially ordered sets, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51 (1955), 254 - 261.

卢景波 译 王世强 校

序型 [order type; порядковый тип]，全序集 A 的

集合 A 的表征任何相似于 A 的全序集 B 的性质. 两个分别由关系 R 和 S 全序的全序集 A 和 B 称为相

似的(similar),如果存在一个使 A 和 B 建立一一对应的函数 f,且使得对所有点 x, $y\in A$, $xRy \Leftrightarrow f(x)Sf(y)$. G. Cantor 定义的作为全序集性质的序型,当不考虑它的元素的性质而仅仅考虑它们的序的性质时保持不变.为了标志仅在这种程度的抽象,Cantor 引进符号 $\bar{\bar{A}}$ 以表示集合 A 的序型.经常遇到的集合的序型用特殊字母表示.例如,如果 $\mathbf{Z}^+$ 是用关系 $\leqslant$ 序化的自然数集,那么 $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}^+=\omega$.如果有理数集 $\mathbf{Q}$ 也用关系 $\leqslant$ 序化,那么 $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}=\eta$.一个全序集 A 有序型 ω,当且仅当:1) A 有一个首元 a_0; 2) A 的每一个元素 x 有一个后继 $x+1$; 并且 3) 如果 $a_0\in X\subset A$ 并且如果 X 包含它的每一个元素的后继,那么 $X=A$.稠密的、可数的并且既无首元又无末元的非空集仅有一个序型 η (Cantor 定理 (Cantor theorem)).一个全序集的序型为 λ(实数集的序型),如果它是连续的并且包含一个序型为 η 的稠密子集 A.

可以在序型上定义运算,它在某种程度上类似于算术运算.

设 α 和 β 是两个序型,并且设 A 和 B 都是全序集且 $\bar{\bar{A}}=\alpha$, $\bar{\bar{B}}=\beta$ 和 $A\cap B=\phi$.和(sum) $\alpha+\beta$ 理解为序型 $\alpha+\beta=\overline{\overline{A\cup B}}$,其中集合 $A\cup B$ 这样序化: A 的所有元素在 B 的元素的前面,A 与 B 元素的原有次序不变.特别地,如果 α 和 β 都是正整数,那么序型和的定义与正整数和的定义一致.下面的等式成立: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$,其中 0 是空集的序型.一般说来,交换律不成立,例如,$\omega+1\neq1+\omega$.

设 $\alpha=\bar{\bar{A}}$, $\beta=\bar{\bar{B}}$.积(product) $\alpha\cdot\beta$ 理解为序型 $\alpha\cdot\beta=\overline{\overline{A\times B}}$,其中 $A\times B$ 这样序化:如果 $\{x, y\}$, $\{x_1, y_1\}$ 是它的两个元素,如果 $y<y_1$ 或者(纵坐标相同时)如果 $x<x_1$(异末元素原则),那么第一个元素在第二元素的前面.下面等式成立: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$, $\alpha\cdot1=1\cdot\alpha=\alpha$, $\alpha\cdot0=0\cdot\alpha=0$,其中 1 是一个元素的集合的序型.乘法一般也不是交换的,例如 $\omega\cdot2\neq2\cdot\omega$.有一侧分配律成立: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.积 $(1+\lambda+1)\cdot\lambda$ 表示一个连续统势的连续序型,它不包含可数稠密子集.

与序型的和与积密切相关的是序型的任意序集的和(见有序和(ordered sum))以及序型良序集的字典积.设 $\{A_m: m\in M\}$ 是一族全序集,其指标集 M 为良序集(well-ordered set),并且设 $A=\prod\{A_m: m\in M\}$ 是这个族的 Descartes 积.族 $\{A_m: m\in M\}$ 的字典积(lexicographic product)是赋予下面顺序的一个集合 A.如果 $\{a_m\}$ 和 $\{b_m\}$ 都是 A 的元素,那么 $\{a_m\}<\{b_m\}$,当且仅当:或 $a_1<b_1$,或存在 $m_0\in M$,使得对所有 $m<m_0$, $a_m=b_m$,并且 $a_{m_0}<b_{m_0}$ (异首元素原则).如果 $\alpha_m=\bar{\bar{A}}_m$ 并且 A 是族 $\{A_m: m\in M\}$ 的字典积,那么 $\alpha=\prod\{\alpha_m: m\in M\}=\bar{\bar{A}}$ 称为序型族 $\{\alpha_m: m\in M\}$ 的积(product of the family of order types $\{\alpha_m: m\in M\}$).利用字典积和广义连续统假设(continuum hypothesis),对每一个基数(cardinal number) τ 可以构造一个基数为 τ 的全序集 η_τ,使得基数 $\leqslant\tau$ 的任意一全序集都相似于 η_τ 的一个子集.如果 τ 是强不可达的,那么为证明这个定理,广义连续统假设是不必要的.特别是对于 $\tau=\aleph_0$,这个集合可以是序型 η 的任意全序集.

参考文献

[1] Jech, T. J. Set theory, Acad. Press, 1978(译自德文)

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 亦见序数(ordinal number)的参考文献.

参考文献

[A1] Kunen, K., Set theory, North-Holland, 1980.

卢景波 译 王世强 校

可序群[orderable group; упорядочиваемая группа]

一个群 G,其上可以定义一个全序 $\leqslant$(见全序群(totally ordered group)),使得对任意 a, b, x, $y\in G$, $a\leqslant b$ 蕴涵 $xay\leqslant xby$.一个群 G 是一个可序群,当且仅当存在一个具有如下性质的子集 P: 1) $PP\subseteq P$; 2) $P\cap P^{-1}=\{1\}$; 3) $P\cup P^{-1}=G$; 4) 对任意 $x\in G$, $x^{-1}Px\subseteq P$.

设 $S(a_1, \cdots, a_n)$ 是 G 的由 $a_1, \cdots, a_n$ 生成的正规子半群.群 G 是一个可序群,当且仅当对 G 的任意不含单位元的有限个元素 $a_1, \cdots, a_n$,都能找到数 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 适合 $\varepsilon_i=\pm1$ $(i=1, \cdots, n)$,使得子半群 $S(a_1^{\varepsilon_1}, \cdots, a_n^{\varepsilon_n})$ 不含单位元.每一个可序群是元素开方有唯一性的群.Abel 无挠群,局部幂零无挠群,自由群,和自由可解群都是可序群.对每一非单位元 x, $1\notin S(x)$ 的两步可解群是可序群.

可序群类对取子群和直积是封闭的,它是局部封闭的,因此是一个拟簇(quasi-variety).可序群的自由积还是一个可序群.

参考文献

[1] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972(英译本: Kokorin, A. I. and Kopytov, V. M., Fully ordered groups, Israel Program Sci. Transl., 1974).

[2] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

В. М. Копытов 撰 卢景波 译 王世强 校

序域[ordered field; упорядоченное поле]

一全序环(ordered ring),它同时是一个域.最经典的例子是按通常次序的实数域.作为反例,复数域

不能成为序域，因为一个域容许一个序使之成为序域，当且仅当 -1 不能是个平方和．一个域，在其中 -1 不能表为有限个平方之和，就称这域为形式实域（formally real field）．实数域是形式实域的模型．更一般地，每个序域是形式实域．

序域 k 的扩张 P 称为序（ordered）扩张，是指 P 为一序域且包有 k 作为序子域．这恰恰发生在 -1 不能写为形如 λx^2 的元素之和的情形，其中 $\lambda \in k$，$\lambda > 0$，$x \in P$．序域称为实闭的（real-closed）是指它没有真的序代数扩张．实闭域中的序是唯一确定的．下述条件在序域 k 上是等价的：1) k 是实闭的；2) 扩张 $k(i)$ 是代数闭的，其中 $i^2 = -1$，3) k 中每个正元素是一平方元且每个 k 上奇次多项式在 k 上有一根．每个形式实域有一个实闭的序代数扩张．

若 k 为序域，则可按通常方式定义基本列（见实数（real number））．基本列全体，在适当的等价以及运算和序的转换定义下，作成 k 的扩张 $\bar{k}$，如果 k 是 Archimedes 域，则 $\bar{k}$ 作为序域同构于实数域．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, 2. Algebra, Polynomial and field. Ordered groups, Hermann, 1974（译自法文）.

[2] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1 – 2, Springer, 1967 – 1971（译自德文）.

[3] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

Л. А. Скорняков 撰
冯绪宁 译

序群 [ordered group; упорядоченная группа]

一个群（group）G，带有序关系 $\leqslant$，使得对任意的 $a,b,x,y \in G$，由不等式 $a \leqslant b$ 可推出 $xay \leqslant xby$．若此处的序是全序（相应地，偏序），则称为**全序群**（totally ordered group）（相应地，**偏序群**（partially ordered group））．

（偏）序群 G 到序群 H 内的序同态（order homomorphism）是 G 到 H 内的同态（homomorphism）φ，使得 $x \leqslant y$，$x,y \in G$，推出 $x\varphi \leqslant y\varphi$ 在 H 中成立．序同态的核是凸正规子群（见**凸子群**（convex subgroup）；**正规子群**（normal subgroup））．全序群 G 关于凸正规子群 H 的右陪集的集合可以全序化：令 $Hx \leqslant Hy$，当且仅当 $x \leqslant y$．若 H 为全序群 G 的凸正规子群，则上述序关系使商群 G/H 成为全序群．

全序群的凸子群系 $\Sigma(G)$ 具有以下性质：a) $\Sigma(G)$ 在包含关系下也是全序的，并且它在交和并的运算下封闭；b) $\Sigma(G)$ 是外不变的（infra-invariant），即对任意 $H \in \Sigma(G)$ 和任意 $x \in G$，定有 $x^{-1}Hx \in \Sigma(G)$；c) 若 $A < B$ 是 $\Sigma(G)$ 中一个跳跃（jump），即 $A,B \in \Sigma(G)$，$A \subset B$，但再没有凸子群介于两者之间，那么 A 在 B 内是正规的，商群 B/A 为一 **Archimedes 群**（Archimedean group）且

$$[[N_G(B), N_G(B)], B] \subset A,$$

其中 $N_G(B)$ 表示 B 在 G 中的正规化子（见**正规化子**（normalizer））；d) $\Sigma(G)$ 内的所有子群是强孤立的（strongly isolated），即对任意有限集 $x, g_1, \cdots, g_n \in G$ 和任意子群 $H \in \Sigma(G)$，关系

$$xg_1^{-1}xg_1 \cdots g_n^{-1}xg_n \in H$$

可推出 $x \in H$．

序群 H 被序群的扩张 G（见**群的扩张**（extension of a group））仍是序群，只要 H 的序在 G 的所有内自同构下是稳定的．序群 H 被有限群的扩张 G 是序群，如果 G 是无挠的而且 H 的序在 G 的所有内自同构下是稳定的．

可数序群的序型有形状 $\eta^\alpha\xi$，其中 η，ξ 分别为整数集合和有理数集合的序型而 α 为任意可数基数．每一个序群对于区间拓扑是一**拓扑群**（topological group），在此拓扑下开集基由开区间

$$(a,b) = \{x \in G : a < x < b\}$$

组成．在这个拓扑下序群的**凸子群**（convex subgroup）是开的．

参考文献

[1] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972（英译本：Kokorin, A. I. and Kopytov, V. M., Fully ordered groups, Isreal Program Sci Transl., 1974）.

В. М. Копытов 撰

【补注】 若偏序群的序关系定义一个格（lattice）（即对所有的 $a,b \in G$ 有最大下界 $a \wedge b$ 和最小上界 $a \vee b$），则也说它是**格序群**（lattice-ordered group）或 l 群（l-group），亦见**序半群**（ordered semi-group）．这些都自然地出现于许多数学分支中．关于这一领域的现状，参见 [A1] – [A3]．

参考文献

[A1] Anderson, M. and Feit, T., Lattice-ordered groups, An introduction, Reidel, 1988.

[A2] Glass, A. M. W. and Holland, W. Ch. (eds), Lattice-ordered groups, Advances and techniques, Kluwer, 1989.

[A3] Martinez, J. (ed.), Ordered algebraic structures, Kluwer, 1989.

李慧陵 译

序广群 [ordered groupoid; упорядоченный группоид]

一个广群（groupoid）H，其元素由关系 $\leqslant$ 偏序且满足公理

$$a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc,\ ca \leqslant cb,\ 对所有\ c \in H.$$

如果一个序广群 H 满足更强的公理

$$a<b \Rightarrow ac<bc,\ ca<cb,\ 对所有\ c\in H,$$

那么 H 上的序称为严格的（strict），H 称为严格偏序广群（strictly partially ordered groupoid）．一个偏序广群 H 称为强的（strong），如果

$$ac \leqslant bc\ 并且\ ca \leqslant cb \rightarrow a \leqslant b.$$

一个强偏序广群总是严格的，并且对全序广群，两个概念是一致的．

序广群 H 的一个元素称为正的（positive）（严格正的（strictly positive）），如果不等式 $ax \geqslant x$ 和 $xa \geqslant x$（$ax>x$ 和 $xa>x$）对所有 $x\in H$ 成立．负的（negative）和严格负的（strictly negative）元素用相反的不等式定义．序广群称为正（负）序的，如果其元素都是正（负）的．某些特殊类型的序广群有特殊意义（见**自然序广群**（naturally ordered groupoid），**序半群**（ordered semi-group），**序群**（ordered group））．

О А. Иванова 撰

【补注】 上面的定义涉及到名词**广群**（groupoid）两个意义中的第一个．第二种意义下的广群也自然地在与序相联系的各种场合出现：例如，一个代数或拓扑结构的所有部分自同构的广群（也就是它的子结构之间的同构——例如一个光滑流形开子集之间微分同胚的广群）是以自然的方式由关系 $\leqslant$ 序化：$f\leqslant g$，如果 f 是 g 在其定义域的子集上的限制．这种类型的序广群在微分几何中是重要的（见[A1]）．更一般地，任意**逆半群**（inversion semi-group）S 可以看作一个广群，其对象是 S 的幂等元，并且一个元素 s 的域和上域分别是 $s^{-1}s$ 和 ss^{-1}；这里的对象有一个自然的交半格序，并且序也可以用自然的方式定义在态射上（见[A2]）．

参考文献

[A1] Ehresmann, C., Structures locales et catégories ordonnés, in Oeuvres complètes et commentées, Supplément aux Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle Catégoriques, 1980.

[A2] Howie, J. M., An introduction to semigroup theory, Acad. Press, 1976.

卢景波 译 王世强 校

序环[**ordered ring**; **упорядоченное кольцо**]，偏序环（partially ordered ring）

一个环 R（不一定是结合的），按加法是一个**偏序群**（partially ordered group），并且对任意 $a,b,c\in R$，不等式 $a\leqslant b$ 和 $c\geqslant 0$ 蕴涵 $ac\leqslant bc$ 和 $ca\leqslant cb$．对于平凡序，每一个环是一个序环．作为序环的例子，可以取一个**序域**（ordered field）；一个集合 X 上的实函数环，其中 $f\leqslant g$ 意味着对所有 $x\in X$，$f(x)\leqslant g(x)$；或一个序环 R 上的矩阵环，其中定义 $\|a_{ij}\|\leqslant\|b_{ij}\|$，如果对所有 i,j，$a_{ij}\leqslant b_{ij}$．如果 R 是一个序环，那么集合

$$P=\{x:\ x\in R,\ x\geqslant 0\}$$

称为它的正锥（positive cone）．一个序环的正锥完全确定了它的序：$x\leqslant y$，当且仅当 $y-x\in P$．环 R 的一个子集 P 可以作为某一个序的正锥，当且仅当

$$P\cap(-P)=\{0\},\ P+P\subseteq P,\ 并且\ PP\subseteq P.$$

方程 $P\cup(-P)=R$ 等价于序为全序（见**全序集**（totally ordered set））．

一个序环若是全序的或格序的，则相应地被称为全序环（totally ordered ring）或格序环（lattice-ordered ring）（亦见 **Archimedes 环**（Archimedean ring）．格序环是分配格，并且它们的加群都是无挠的（见**格序群**（lattice ordered group））．结合环论中的，特别是根论中的某些问题，在结合格序环中有类似问题．容许一个格序环结构的环类不能公理化．如果 a,b,c 都是一个格序环的元素，并且 $c\geqslant 0$，那么下列关系成立：

$$(a\vee b)c\geqslant ac\vee bc,\ c(a\vee b)\geqslant ca\vee cb,$$

$$(a\wedge b)c\leqslant ac\wedge bc,\ c(a\wedge b)\leqslant ca\wedge cb.$$

格序环中的理想，若又是其加群的**凸子群**（convex subgroup），则称为 l 理想（l-ideal）．由一个 l 理想导出的商环可以用自然的方式变为一个格序环．同态定理成立．

一个格序环 R 称为函数环（functional ring）或 f 环（f-ring），如果它满足下列等价条件中的任意一个：1）R 同构于全序环直积的一个格序子环；2）对任意 $a,b,x\in R$，蕴涵式

$$(a\wedge b=0\ 并且\ x\geqslant 0)\Rightarrow(a\wedge bx=a\wedge xb=0)$$

成立；3）对 R 的任意子集 X，集合

$$\{y:\ y\in R,\ \forall x\in X x\wedge y=0\}$$

是一个 l 理想；4）对任意 $a,b\in R$，

$$(a\vee 0)(b\vee 0)\wedge(-a\vee 0)=$$

$$=(b\vee 0)(a\vee 0)\wedge(-a\vee 0)=0.$$

条件 4）表明 f 环形成表征为$\{+,-,0,\cdot,\vee,\wedge\}$的一个簇．在这个条件中，每个方程都不是另一个方程的推论．不是每一个 f 环都能嵌入一个有单位元的 f 环中．如果 a,b,c 都是一个 f 环的元素，并

且 $c>0$，那么有

$$(a \vee b)c = ac \vee bc, c(a \vee b) = ca \vee cb.$$

$$(a \wedge b)c = ac \wedge bc, c(a \wedge b) = ca \wedge cb,$$

$$(a \vee (-a))(b \vee (-b)) = ab \vee (-ab),$$

$$a^2 \geqslant 0$$

以及蕴涵式 $(a \wedge b = 0) \Rightarrow (ab = 0)$.

具有正锥 P 的序环 R 的序可以扩充为一个全序，使得 R 变成一个全序环，当且仅当对 R 的任意有限子集 $a_1, \cdots, a_n$，可以选取 $\varepsilon_i = 1$ 或 -1，使得在由 P 和元素 $\varepsilon_1 a_1, \cdots, \varepsilon_n a_n$ 生成的半环中任意两个非零元素的和不为零．特当 $P = \{0\}$ 时就得到环上有全序可能性的一个判别准则．

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Soc., 1973.

[2] Виноградов, А. А., 《Матем. заметки》, 21 (1977), 4, 449 − 452.

[3] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

[4] Bigard, A., Keimel, K. and Wolfenstein, S., Groupes et anneaux reticulés, Springer, 1977.

[5] Brumfiel, G., Partially ordered rings and semi-algebraic geometry, Cambridge Univ. Press, 1979.

[6] Steinberg, S. A., Radical theory in lattice-ordered rings, Symp. Mat. Ist. Naz. Alta Mat., 21 (1977), 379 − 400.

[7] Steinberg, S. A., Examples of lattice-ordered rings, *J. of Algebra*, 72 (1981), 1, 223 − 236.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Martinez, J. (ed.), Ordered algebraic structures, Kluwer, 1989.

卢景波 译 王世强 校

序半群[ordered semi-group; упорядоченная полугруппа]

具有一个序（一般说是偏序）≤ 的**半群**（semi-group），其序相对于半群的运算是稳定的，即对任意元素 a, b, c，由 $a \leqslant b$ 必有 $ca \leqslant cb$ 和 $ac \leqslant bc$. 如果序半群 S 上的关系 ≤ 是一个全序，那么 S 称为全序半群（totally ordered semi-group）（亦见**全序集**（totally ordered set））．如果 S 上的关系 ≤ 定义一个**格**（lattice）（具有与 ≤ 相应的运算并 ∨ 和交 ∧），且满足等式

$$c(a \vee b) = ca \vee cb, (a \vee b)c = ac \vee bc,$$

那么 S 称为格序半群（lattice-ordered semi-group）．把格序半群看作具有半群和格的运算的代数，那么所有格序半群的类是一个簇（亦见**群簇**（variety of groups））．在一个格序半群上，等式

$$c(a \wedge b) = ca \wedge cb, (a \wedge b)c = ac \wedge bc$$

一般说来不成立，于是由此二等式可以从所有格序半群簇中区分出一个真子簇．

序半群产生于各种数值半群、函数和二元关系半群、子集半群（或各种代数系统的子系统，例如环及半群中的理想）等的研究中．每一个序半群同构于一个二元关系半群，把后者视为其序由集合论的包含关系规定的序半群．格序半群的传统例子是一任意集合上的所有二元关系组成的半群．

序半群的一般理论可分为两个主要发展方向：全序半群理论和格序半群理论．尽管每一个全序半群是格序的，但两个理论的发展在很大程度上是独立的．全序半群所致力于研究的性质在很大范围内不能被格序半群所享用，而且，一般说来格序半群研究的性质当利用到全序半群时就变为退化的情况．半群的一个重要类型由**序群**（ordered group）构成，其理论形成了代数的一个独立部分．与序群不同的是，任意序半群 S 上的序关系一般说来不能由其正元（positive element）（即对所有 $x \in S$，使得 $ax \geqslant x$ 和 $xa \geqslant x$ 成立的元素 a）集合定义．

全序半群．一个半群 S 称为可序的（orderable），如果在其上可以定义一个全序使得它变为一个全序半群．可序的一个必要条件是半群中没有有限阶非幂等元．如果在一个可序半群中所有幂等元素的集合是非空的，那么它是一个子半群．在可序半群中有自由半群，自由可换半群和自由 n 步幂零半群．序化有限秩 $\geqslant 2$ 的自由半群的方式有连续统多种．任意半群可序性的某些充分必要条件已经找到；同样，对一些已知类的半群（例如幂等半群，逆半群）也已找到．

幂等元全序半群的结构已经完全地刻画，特别是把这种半群分解为矩形半群（见**幂等元半群**（idempotents, semi-group of））的半格，其矩形分支是奇异的，而对应的半格是树．完全单纯全序半群已用**右群**（right group）和左群详尽无遗地论述，并是全序群和右（左）零全序半群的字典积（见**字典序**（lexicographic order））．利用归约到全序群，全序半群的一种描述已经用 **Clifford 半群**（Clifford semi-group）类得到，用这种方法同样刻画了逆全序半群（见**逆半群**（inversion semi-group））．由两个彼此互反的元素生成的全序半群的所有类型已经被分类（见**正则元**（regular element））．

在全序半群研究中提出的条件时常要附加运算和序关系之间的联系．用这种方法区分全序半群的下列

基本类型：**Archimedes 半群**（Archimedean semi-group），**自然序广群**（naturally ordered groupoid），正序半群（positive ordered semi-groups）（其中所有元素都是正的），整全序半群（integral totally ordered semi-group）（对所有 x、$x^2 \leqslant x$）．每一个 Archimedes 自然全序半群是可换的，它们的结构已被完全刻画．一个任意全序半群的结构在很大程度上由它分解为 **Archimedes 类**（Archimedean class）的特性来决定．对于一个周期全序半群，这种分解与分解为挠类相同，而且进而，每一个 Archimedes 类是**诣零半群**（nil semi-group）．一个任意的全序诣零半群是凸幂零子半群的一个递增序列的并；特别地，它是局部幂零的．

全序半群的一个**同态**（homomorphism）$\varphi: A \to B$ 称为 o 同态（o-homomorphism），如果 φ 是 A 到 B 的一个**保序映射**（isotone mapping）．全序半群上的一个合同关系（见**合同（代数学中的）**（congruence (in algebra)））称为 o 合同（o-congruence），如果它的所有类皆为凸子集；o 同态的核合同恰是 o 合同．一全序半群 S 分解为 Archimedes 类不总定义 o 合同，即它们不总是一个带（见**半群的带**（band of semi-groups））．但例如，如果 S 是周期的并且它的幂等元可换，或者如果 S 是一个正全序半群时，这种情况是对的．

对全序半群，这里有一个涉及到序的简单性附加条件（见**单半群**（simple semi-group））．一个如此条件是没有真凸理想（凸理想单半群或 o 单半群（convex ideally-simple, or o-simple, semi-groups））；这种全序半群的一个平凡例子是全序群．具有最小元 s 和最大元 g（特别，是有限）的一个全序半群 S 是凸理想单的，当且仅当 s 和 g 同时是 S 的左零和右零．任意一个全序半群可以（o 同构）保序嵌入一个凸理想单全序半群．存在满足消去律，不能嵌入一个群的全序半群；但是一个满足消去律的交换全序半群可以 o 同构地嵌入一个 Abel 全序群，而且从 o 同构的观点来看，存在唯一一个分式群．一个全序半群可 o 同构地嵌入实数加群，当且仅当它满足消去律并且不包含非正规对（abnormal pair）（即元素 a, b 使得对所有 $n>0$, $a^n<b^{n+1}$, $b^n<a^{n+1}$，或者对所有 $n>0$, $a^n>b^{n+1}$, $b^n>a^{n+1}$）．

格序半群．如对一个序半群中的两个元素 a 和 b，存在一个最大元素 x，具有性质 $bx<a$，那就称它是一个右商（right quotient），记为 $a:b$．类似地定义左商（left quotient）$a:b$．一个格序半群 S 称为一个带除法格序半群（lattice-ordered semi-group with division），如果对 S 中的任意元素对都存在右商和左商．此种半群作为格是完全格序半群，它们的格零也是乘法零，并且它们满足无限分配律 $a(\vee_\alpha b_\alpha)=\vee_\alpha ab_\alpha$，$(\vee_\alpha b_\alpha)a=\vee_\alpha b_\alpha a$．带除法格序半群的一个重要例子是一个结合环的理想的乘法半群．格序半群理论中一个值得注意的方向是把结合环中理想理论的很多性质和结果转移到格序半群的情况（格序半群唯一分解为素因子，素元，准素元，极大元，主元素等等）．例如，可换环理论中熟知的 Artin 关系可以如下转移到有一个 1 的带除法格序半群中：设 $a\sim b \Leftrightarrow 1:a=1:b$．如果所考虑的格序半群 S 是可换的，那么关系 $\sim$ 是其上的一个合同，进而，商半群 $S/\sim$ 是一个（格序）群，当且仅当 S 是整闭的（integrally closed），即对任意 $a\in S$, $a:a=1$．

格序半群同群的联系的研究是考虑格序半群到格序群的嵌入问题．例如，每一个满足消去律及 Ore 条件（见**半群的嵌入**（imbedding of semi-groups））并且乘法相对于格的两个运算是分配的格序半群，可以嵌入到一个格序群中．

已经开始从簇的理论观点来研究格序半群理论：已经刻画了自由格序半群，格序半群的极小簇已经找到，等等．

参考文献

[1] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

[2] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[3] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972(英译本：Kokorin, A. I., Kopytov, V. M., Fully ordered groups, Israel Program Sci. Transl., 1974).

[4] Itogi Nauk. Algebra. Topol. Geom., 1965 (1967), 116 – 120.

[5] Itogi Nauk. Algebra. Topol. Geom., 1966 (1968), 99 – 102.

[6] Satyanarayana, M., Positively ordered semigroups, M. Dekker, 1979.

[7] Gabovich, E. Ya., Fully ordered semigroups and their applications, Russian Math. Surveys, 31 (1976), 1, 147 – 216 (Uspekhi Mat. Nauk, 31 (1976), 1, 137 – 201).

Л. Н. Шеврин 撰　卢景波 译　王世强 校

序集［ordered set；упорядоченное множество］

一个集合，在其上给出了序关系（见**序（集合上的）**（order (on a set)））；亦见**全序集**（totally ordered set）；**偏序集**（partially ordered set））．

序和［ordered sum；упорядоченная сумма］，偏序集的

与不相交偏序集 $\{P_\alpha: \alpha\in L\}$ 系统相关的一种运

算，其中指标集 L 也是偏序集；一个新的**偏序集**（partially ordered set）

$$P=\sum_{\alpha\in L}P_{\alpha},$$

其元素是诸集合 P_{α} 的集合论并集的元素，其上的序定义如下：在集合 P 上 $a\leqslant b$，当且仅当 $a, b\in P_{\alpha}$，并且在 P_{α} 中 $a\leqslant b$，或者 $a\in P_{\alpha}, b\in P_{\beta}$，并且 $\alpha<\beta$. 序和的重要特殊情形是基数和（cardinal sum）及序数和（ordinal sum）. 当 L 有平凡序，也就是它的每一个元素仅仅与自身可比较时，就得到基数和；而当 L 是一个**全序集**（totally ordered set）时，就得到序数和. 于是在两个不相交偏序集 X 和 Y 的基数和中，关系 $\leqslant$ 保持它在分支 X 和 Y 中的意义，而 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 不能比较；在 X 和 Y 的序数和中，序关系在分支中仍保持，并且对所有 $x\in X$, $y\in Y$, $x\leqslant y$.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, М., 1970（英译本：Skornyakov, L. A., Elements of Lattice theory, Hindushtan Publ. Comp., 1977）.

Т. С. Фофанова 撰 卢景波 译

序数[**ordinal number** 或 ordinal；**порядковое число**]，超穷数（transfinite number）

良序集（well ordered set）的**序型**（order type）. 这一概念由 G. Cantor 于 1883 年（见[2]）引入. 例如所有正整数组成的集合在关系 $\leqslant$ 下的序数为 ω. 对 $n=1,2,\cdots$，由 1 和所有形如 $1-1/n$ 的数组成的集合在关系 $\leqslant$ 下的序数为 $\omega+1$. 称序数 α 等于（小于）序数 β，$\alpha=\beta(\alpha<\beta)$，如果序型为 α 的集合相似于序型为 β 的集合（的真前节）. 对任意序数 α 和 β，有且只有下列可能之一成立：或者 $\alpha<\beta$，或者 $\alpha=\beta$，或者 $\alpha>\beta$. 所有小于 α 的序数组成的集合 $\{\beta:\beta<\alpha\}$ 被关系 $\leqslant$ 良序且序型为 α. 此外，任一序数的集合被关系 $\leqslant$ 良序，即任一非空序数集合均含有最小序数. 对任一序数的集合 Z，存在大于 Z 中任一序数的序数. 因此，所有序数组成的集合是不存在的. 序数 α 之后的最小序数称作 α 的后继（successor），记为 $\alpha+1$. 序数 α 称作 $\alpha+1$ 的前导（predecessor）. 如果一个序数没有前导，则称它为极限（序）数（limit (ordinal) number）. 于是，0 是极限序数. 任一序数可表示成 $\alpha=\lambda+n$，其中 λ 是极限序数，n 为整数，这里的加法应理解为序型意义下的加法（见**序型**（order type））.

序型为 α 的**超限序列**（transfinite sequence），或 α 序列（α-sequence），是定义在 $\{\beta:\beta<\alpha\}$ 上的函数 φ. 如果该序列的值是序数且 $\gamma<\beta<\alpha$ 蕴涵 $\varphi(\gamma)<\varphi(\beta)$，则称它为递增序列（ascending sequence）. 令 φ 表示一 λ 序列，其中 λ 为极限序数. 则大于任一 $\varphi(\gamma)$ $(\gamma<\lambda)$ 的最小序数称作序列 $\varphi(\gamma)$ $(\gamma<\lambda)$ 的极限（limit）且记作 $\lim_{\gamma<\lambda}\varphi(\gamma)$. 如 $\omega=\lim_{n<\omega}n=\lim_{n<\omega}n^{2}$. 序数 λ 与一极限序数 α 共尾，如果 λ 是一递增 α 序列的极限：$\lambda=\lim_{\xi<\alpha}\varphi(\xi)$. 序数 $\mathrm{cf}(\lambda)$ 是与 λ 共尾的最小序数.

一序数是正则的（regular），如果它不与小于它的任一序数共尾，否则称其为奇异的（singular）. 一无限序数称作是基数 τ 的初始序数（initial ordinal number），如果它是具有基数 τ 的序数（即基数为 τ 的良序集的序型）中的最小者. 于是，ω 是最小的初始序数. 势为 τ 的初始序数记作 $\omega(\tau)$. 所有小于 τ 的无限基数的初始序数组成的集合 $\{\omega(\delta):\aleph_0\leqslant\delta\leqslant\tau\}$ 是良序集. 如果它的序型是序数 α，则记 $\omega(\tau)=\omega_{\alpha}$. 于是每一初始序数都有一指标，它等于所有小于该初始序数的初始序数组成集合的序型. 特别地，$\omega_0=\omega$. 不同的指标对应于不同的初始序数. 每一序数都是某一初始序数的指标. 如果 λ 是极限序数，则 $\mathrm{cf}(\lambda)$ 是一正则的初始序数.

称初始序数 ω_{α} 是弱不可达的（weakly inaccessible），如果它是正则的且其指标 α 是极限序数. 例如，$\omega=\omega_0$ 是弱不可达的，但 ω_{ω} 是奇异的，从而不是弱不可达的. 如果 $\alpha>0$，则 ω_{α} 是弱不可达的，当且仅当 $\alpha=\omega_{\alpha}=\mathrm{cf}(\alpha)$.

弱不可达序数的分类与不可达基数的分类相似（见**基数**（cardinal number））. 两个序数的和与乘积仍是序数. 如果指标集是良序的，则序数的良序和也是序数. 利用**超限归纳法**（transfinite induction）可以引进幂运算：$\gamma^{0}=1$, $\gamma^{\xi+1}=\gamma^{\xi}\cdot\gamma$, $\gamma^{\lambda}=\lim_{\xi<\lambda}\gamma^{\xi}$，其中 λ 是极限序数. 称 γ^{α} 是 γ 的幂，γ 为幂底，α 为幂指数. 例如，如果 $\gamma=\omega$, $\alpha_0=1$，可得 $\alpha_1=\gamma^{\alpha_0}=\omega$, $\alpha_2=\omega^{\omega}$, $\alpha_3=\omega^{\omega^{\omega}}$, $\cdots$. 该序列的极限 $\varepsilon=\lim_{n<\omega}\alpha_n$ 是函数 ω^{ξ} 的临界数（critical number），即满足 $\omega^{\alpha}=\alpha$ 的最小的 α. 使这一等式成立的 α 称作 ε 序数（epsilon-ordinal）.

类似于正整数的十进制表示，幂也可以用来表示序数. 如果 $\gamma>1$, $1\leqslant\alpha<\gamma^{\eta}$，则存在一正整数 n 及序列 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$，使得

$$\alpha=\gamma^{\eta_1}\beta_1+\cdots+\gamma^{\eta_n}\beta_n, \qquad (1)$$

$$\eta>\eta_1>\cdots>\eta_n,\ 0\leqslant\beta_i<\gamma, \qquad (2)$$

$i=1,\cdots,n$. 对于满足条件（2）的 β_i 和 η_i，公式（1）称作以 γ 为底的序数 α 的表示（representation of the ordinal number）. β_i 称为数码，η_i 称为该表示的指

数. 对于给定的底, 序数的表示是唯一的. 以 ω 为底的序数的表示可用来定义序数的通常加法和乘法.

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948.

[2] Cantor, G., Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, Dover, reprint, 1952 (译自德文).

[3] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea, 1978 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

[4] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

[5] Sierpinski, W., Cardinal and ordinal numbers, PWN, 1958.

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 序数 $\mathrm{cf}(\lambda)$, 即与 λ 共尾的最小序数, 称为 λ 的共尾度 (cofinality).

序数 ω 以及每一具有后继指标的初始序数 (根据**选择公理** (axiom of choice)) 是正则的. 一般地, 具有极限指标的初始序数是奇异的. 更确切地, 如果 ZF 集合论是协调的, 则加上如下公理之后仍是协调的, 该公理指出, 所有具有极限指标 >0 的初始序数是奇异的. 于是, 如果 ZF 公理协调, 则它不能证明存在不等于 ω 的弱不可达基数.

关于可数序数, 亦见**描述集合论** (descriptive set theory).

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1972 (译自波兰文).

[A2] Jech, T. J., Set theory, Acad. Press, 1978.

[A3] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977.

[A4] Levy, A., Basic set theory, Springer, 1979.

赵希顺 译

纵坐标 [ordinate; ордината]

一个点的 Descartes 坐标 (coordinates) 之一 (亦见 **Descartes 直角坐标系** (Cartesian orthogonal coordinate system)).

定向 [orientation; ориентация]

曲线上方向概念的形式化和深远的推广. 一些特殊类型空间的定向已定义 (见**流形** (manifold); **向量丛** (vector bundle); **Poincaré 复形** (Poincaré complex), 等等). 定向的近代观点在**广义上同调论** (generalized cohomology theories) 中给出.

在古典数学中, 定向 (orientation) 是坐标系等价类的选择, 两个坐标系如果 (在一个特定的意义下) 是正的关系, 它们就属于同一类.

在有限维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的情形, 坐标系是由基给出的, 如果从一个基到另一个基的变换矩阵的行列式是正的, 那么, 这两个基具有正关系. 这里存在两个类. 在具有复基 $e_1,\cdots,e_n$ 的复空间 $\mathbf{C}^n$ 中, 将该空间看作 $\mathbf{R}^{2n}$, 而由 $e_1,\cdots,e_n, ie_1,\cdots,ie_n$, 给出了 $\mathbf{R}^{2n}$ 的实基. 任何用这种方法从复基产生的两个实基是正关系的 (即一个复结构在 $\mathbf{R}^{2n}$ 上确定了一个定向).

在直线、平面或一般地在实的仿射空间 E^n 中, 坐标系是通过 (原) 点和基的选择给出的. 坐标的改变由平移 (改变原点) 和基的改变来定义. 如果基变换的矩阵有正的行列式, 则变换就是正的. (例如, 基中向量的偶置换.) 如果两个坐标系中之一能连续地转换到另一个, 即如果存在一族连接给定的坐标系 O_0, e_0 和 O_1, e_1 的一族连续地依赖于 $t\in[0,1]$ 的坐标系 O_t, e_t, 则它们定义了相同的定向. $(n-1)$ 维平面中的反射给出了反定向, 即另一类定向.

坐标系的分类可用不同的几何图形来定义. 如果将图 X 用特定的法则与一个坐标系联系起来, 则它的镜象应在这同一法则下与这个具有反定向的坐标系相联系. 用这种方法, X(遵循给定的法则) 定义了一个定向. 例如, 在平面 E^2 中, 一个具有给定横截的定向的圆定义了一个坐标系, 通过一个法则: 原点在圆的中心, 任取第一个基向量, 而取第二基向量, 使得从第一到第二个转过一个较小角的旋转就是在圆上横截的方向. 在 E^3 中一个标架关系到一个螺旋. 第一个向量选取螺旋拧进时运动的方向, 从第二向量到第三向量的旋转与螺旋拧进时的转动一致 (假设所有的螺旋用同样的方法得到). 一个基 (标架) 也可用众所周知的右手规则方法定义.

如果给定 E^n 的一个定向, 那么每个半平面 E^n_+ 就定义了边界平面 E^{n-1} 上的一个定向. 例如, 如果定向基中最后的 $n-1$ 个向量在 E^{n-1} 中, 而第一个向量指向 E^n_+ 的外部, 那么最后的 $n-1$ 个向量就确定了 E^{n-1} 的定向. 在 E^n 中, 定向可由 n 维单形 (E^2 中的三角形, E^3 中的四面体) 的顶点次序来定义. 通过将原点选在第一个顶点, 而基的向量是此顶点指向另外的顶点来定义一个基. 两个顺序决定相同的定向, 当且仅当它们差一个偶置换. 具有差一个偶置换的顶点的排列次序的单形被说成是已定向的 (oriented). 一个定向单形的每一个 $(n-1)$ 维面 σ^{n-1} 有一个诱导定向: 如果第一个顶点不属于 σ^{n-1}, 则其它顶点的排列次序取作 σ^{n-1} 的正向.

在连通流形 M 上, 坐标系取图册的形式: 覆盖 M 的坐标卡 (chart) 的集合. 如果在两个坐标卡之间的坐标变换都是正的, 则称图册是定向的 (orienting).

在微分流形的条件下，这意味着，在每一点处的任何两个坐标卡之间的坐标变换的 Jacobi 行列式是正的．如果存在一个定向的图册，那么 M 是可定向的（orientable）．在此情形中，所有的定向图册分成两类，使得从一个图册的坐标卡到另一个图册的坐标卡的转移是正的，当且仅当两个图册属于同一个类．这个类的一个选择称为流形的定向（orientation of the manifold）．这个选择可通过选取一个坐标卡或者在点 x_0 处的局部定向（含 x_0 的连通的坐标卡自然地分成两类）做到．在微分流形的情形下，局部的定向可以通过选择点 x_0 处的切平面上的基定义（例如，在圆周上的旋转方向可由选取一个切向量定义）．如果 M 有边界并且是定向了的，那么边界也是可定向的，例如依照法则：在边界上的一点处，取一个定向 M 的基，从 ∂M 指向它的第一个向量，而其它的向量处在边界的切平面上；后面的这些向量形成了边界的一个定向基．

沿任何一条道路 $q:[0,1]\to M$，可选坐标卡的链，使得两个相邻的坐标卡是正相连的．因此，点 $q(0)$ 处的一个定向确定了点 $q(1)$ 处的一个定向．当端点固定时，这种关系依赖于道路 q 仅差一个连续的形变．如果 q 是一闭路，即 $q(0)=q(1)=x_0$，那么，当这些定向为相反时，q 就称作反转定向的闭路（orientation-reserving loop）．由此产生了一个基本群 $\pi_1(M,x_0)$ 到阶为二的群的同态：反转定向的闭路被送到 -1，而其他的被送到 $+1$．通过这个同态产生了一个覆叠，在不可定向流形的情形下，这是一个两层覆叠．称它为定向的（因为覆叠空间是可定向的）．同一个同态定义了 M 上的一个线丛，它是平凡的，当且仅当 M 是可定向的．对于微分流形 M，它可以定义为 n 阶微分形式的丛 $\Lambda^n(M)$．仅在可定向的情形下有非零的截面，并因此使这样一个截面同时定义了 M 上的体积形式和一个定向．该丛有一个分类映射 $k:M\to \mathbf{R}P^n$．流形 M 是可定向的，当且仅当类 $\mu\in H^{n-1}(M,\mathbf{Z})$ 不等于零，这 $H^{n-1}(M,\mathbf{Z})$ 是对偶于 $\mathbf{R}P^{n-1}\subset\mathbf{R}P^n$ 的类的象．它对偶于一个闭链，其支集是取**一般位置**（general position）作为 $\mathbf{R}P^{n-1}$ 在映射 k 下的原象的流形．由于该闭链的补集是可定向的，因此就称它是定向的．如果 M 通过闭链被切割，那么就可得到一个可定向的流形，M 本身是可定向（不可定向）的，当且仅当它被切割后得到一个不连通的流形（连通的补集）．例如，在 $\mathbf{R}P^2$ 中，一条射影直线 $\mathbf{R}P^1$ 充作定向的闭链．

如果一个三角剖分流形 M（或一个伪流形）可以将所有的 n 维单形定向，使具有 $(n-1)$ 维公共面的两个单形在该面上诱导了相反的定向，则它是可定向的．n 维单形（它们中每两个相邻的 n 维单形具有公共的 $(n-1)$ 维面）的闭链称为反转定向的（orientation-reversing），如果这些单形可以如此定向，使第一个和最后一个单形在公共面上导出相同的定向，而其他相邻的单形在公共面上导出相反的定向．

定向可以用同调论的语言定义为：对于一个无边连通可定向流形，**同调群**（homology group）$H_n(M,\mathbf{Z})$（有闭支集）同构于 $\mathbf{Z}$，且选择两个生成元之一定义了一个定向．对带边的连通流形，用 $H_n(M,\partial M;\mathbf{Z})$ 也是对的．在第一种例子中，可定向性是 M 的同伦不变量，而在第二种例子中可定向性是偶对 $(M,\partial M)$ 的同伦不变量．所以 **Möbius 带**（Möbius strip）和圆环有一个相同的同伦型，但如果考虑边界时，就有不同的同伦型了．流形局部的定向也可通过在同构于 $\mathbf{Z}$ 的群 $H_n(M,M\setminus x_0;\mathbf{Z})$ 中的生成元的选择定义．定向的同调解释使这个概念可以用于广义**同调流形**（homology manifold）．

设具有标准纤维 F^n 的纤维化 $p:E\to X$ 唯一地定义在空间 X 上．如果所有纤维的定向可以被选取使得任何由道路 $\gamma:(0,1)\to X$（至多差一个非奇异同伦）定义的（非奇异）映射 $p^{-1}(\gamma(0))\to p^{-1}(\gamma(1))$ 保持定向，那么，纤维化就定向了，而纤维的定向的选择是纤维化的定向（orientation of the fibration）．例如，Möbius 带，看作在圆周上的一个向量丛就不具有定向，而柱面的侧面就有定向．

定向的概念对以无限维的 Banach 空间或拓扑向量空间为模型的无限维流形的情形也允许有一个自然的推广．这要求限制到线性算子上，该线性算子是从一个坐标卡到另一个坐标卡转换的微分，它们不必简单属于结构空间的所有同构的一般线性群，该结构空间（在一致拓扑中）对大多数的分类向量空间是同伦平凡的、但必须也包含在一般线性群的非连通子群中．给定子群的连通分支也就提供了定向的"符号"．通常选择的子群是结构空间的那些同构组成的 Fredholm 群，对于它，于恒同同构的差别是一个**完全连续算子**（completely-continuous operator）．

广义上同调理论中的定向．设 E^* 是一个乘法广义上同调理论（往后，简称理论）．存在一个单位 $i\in\widetilde{E}^0(S^0)$，对于它已给的**纬垂**（suspension）同构 $\widetilde{E}^0(S^0)\approx\widetilde{E}^n(S^n)$，存在相应的元素 $\gamma_n\in\widetilde{E}^n(S^n)$，其中 S^n 是 n 维球面．

设 ξ 是道路连通空间 X 上的一个 n 维向量丛，$T\xi$ 是 ξ 的 **Thom 空间**（Thom space）．设 $i:S^n\to T\xi$ 是标准嵌入，即是点 $x_0\in X$ 处的"纤维"上的一个同胚．如果 $i^*(u)=\varepsilon\gamma_n$，那么元素 $u\in\widetilde{E}^n(T\xi)$ 称为一个定向（orientation）或丛（bundle）ξ 的 **Thom 类**（Thom class），其中 $\varepsilon\in\widetilde{E}^0(S^0)$ 是一个可逆元素（例如，$\varepsilon=1$）．具有一个定向的丛在理论 E^* 中是可定向的（orientable）、简称 E 可定向（E-orientable），而具有已选 E

定向的丛是已 E 定向的（E-oriented）．**Thom 同构**（Thom isomorphism）$\widetilde{E}^*(T\xi)=E^*(X)$ 是有效的（见[6]）．X 上给定的 E 定向丛 ξ 的定向的集合与群 $\widetilde{E}^0(X)+(\widetilde{E}^0(S^0))^*$ 的元素成一一对应，其中，$(\ )^*$ 是环（ ）的可逆元素的群．

平凡的 n 维丛 θ^n 在任何理论 E^n 中具有一个定向，并且，如果三个丛 $\xi,\eta,\xi\oplus\eta$ 中任何两个是 E 可定向的，那么第三个也是 E 可定向的（见[7]）．此外，ξ 的 E 可定向性必伴有 $\xi\oplus\theta^n$ 的 E 可定向性．

E 可定向性的概念也可在 Hurewicz $p:M\to B$ 的意义下对任何丛引人，Hurewicz 的纤维同伦等价于球面．映射 p 的锥称为该丛的 Thom 空间（Thom space）；进一步的定义是类似的．一个向量丛 ξ 的定向的定义简化到这样，如果（在 ξ 上的某个 Riemann 度量中）与 ξ 相联系的单位球面的丛当作 M．E 可定向性是向量（球面）丛上稳定纤维状同伦型的不变量．在一个理论中可定向的丛在另一个理论中不必是可定向的，但给定了理论的环同态 $E^*\to F^*$，E 可定向性的性质从 F 可定向性得到．

例 1）在理论 $H^*(-;\mathbf{Z}_2)$ 中，任何向量（球面）丛是可定向的．

2）在理论 $H^*(-;\mathbf{Z})$ 中，那些使 Stiefel-Whitney 示性类 $W_1(\xi)=0$ 的丛 ξ 是可定向的，即在分类的意义下，那些丛是可定向的．

3）在实 K 理论（K-theory）中的向量丛 ξ 的可定向性等价于 $W_1(\xi)=W_2(\xi)=0$ 这个事实，而在复 K 理论中，它等价于 $W_1(\xi)=0$ 和 $W_2(\xi)$ 是一个整类（[8]）这个事实．对球面丛是 K 可定向，这个条件是必要的，但不充分．

4）在稳定上同调群的理论 π^* 中，只有平凡稳定纤维状同伦型的丛是可定向的．

在描述给定理论中的可定向的丛的类的问题中，下列一般结论成立．设拓扑群 G 作用在 $\mathbf{R}^n$ 上和设 E^* 是某个理论，存在空间 $B(G,E)$，在其上具有万有 E 定向丛（见[7]，其中，明显构造已给出），它将具有结构群 G 的 E 定向向量丛分类，即对任何（道路连通的）空间 X，X 上的 E 定向 G 向量丛集合与映射 $X\to B(G,E)$ 的同伦类的集合 $[X,B(G,E)]$ 是自然地一一对应的．这对球丛和"好"的幺半群 G 也是对的．

相反的问题是由描述在其中已给的丛（或丛的类）是可定向的理论组成的．熟知，如果在理论 E^* 中，所有的向量丛都是可定向的，则

$$E^*(X)\approx H^*(X;\widetilde{E}(S^0)).$$

此外，$2E\ (S^0)=0$．关于这一点，理论 E^* 上的条件被削弱了．例如，乘法的可交换性被省掉了，等等．对任何理论 E^*，在其中，所有的复丛是可定向的，存在理论的一个同态 $U^*\to E^*$，其中，U^* 是酉**配边**（cobordism）的理论，而该同态由空间 $\mathbf{C}P^\infty$ 上的典型丛 η 的 E 定向所完全确定．对 Sp 丛（见**配边**）同样是正确的．对已给向量丛的类，构造一个映到任何其他使丛的类可定向的理论上的万有理论，已经完成（1989）．

使得由 $X\to Z\cap X$ 给出的同态 $E^i(M)\to E_{n-i}(M)$（见[9]）是一个同构的这个元素 $z\in E_n(M)$ 称为在理论 E 中的闭 n 维流形 M（或更一般地，形式 n 维 Poincaré 复形）的一个定向（orientation）（或基本类（fundamental class））．这个同构也称作 Poincaré 对偶同构．一个流形（Poincaré 复形）是 E 可定向的，当且仅当它的法丛是 E 可定向的．对带边流形（Poincaré 复形）定向也已定义．

参考文献

[1] Дубровин, В. А., Новиков, С. П., Фоменко, А. Т., Современная геометрия, М., 1979（英译本：Dubrovin, B. A., Novikov, S. P. and Fomenko, A. T., Modern geometry, 1－2, Springer, 1984－1985）.

[2] Введение в топологию, М., 1980.

[3] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977（英译本：Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology, Geometric chapters, Springer, 1984）.

[4] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

[5] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966（中译本：斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）.

[6] Dold, A., Coll. Algebraic topology, August 1－10, 1962, Inst. Math. Aarhus Univ., 1962, 2－9.

[7] May, J., E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra, Springer, 1977.

[8] Stong, R., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[9] Whitehead, G. W., Recent advances in homotopy theory, Amer. Math. Soc., 1970.

[10] Rudyak, Yu. B., On the orientability of spherical, topological, and piecewise-linear fibrations in complex K-theory, *Soviet Math. Dokl.*, 37（1988）, 1, 283－286（*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 298（1988）, 6, 1338－1340）.

Ю. Б. Рудяк, А. В. Чернавский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.

徐森林 译

Orlicz 类[**Orlicz class**; **Орлича класс**]

满足条件

$$\int_G M(x(t))dt < \infty$$

的函数 $x(t)$ 的集合 L_M，其中 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集，dt 是 **Lebesgue 测度**(Lebesgue measure)，$M(u)$ 是一个偶的**凸函数（实变量的）**(convex function (of a real variable))，它对正的 u 是增函数，且

$$\lim_{u\to 0} u^{-1}M(u) = \lim_{u\to\infty} u[M(u)]^{-1} = 0.$$

这些函数称为 N 函数(N-functions)．函数 $M(u)$ 可表成

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(v)dv,$$

其中 $p(v) = M'(v)$ 在 $[0, \infty)$ 上不减，

$$p(0) = \lim_{v\to 0} p(v) = 0,$$

且当 $v > 0$ 时 $p(v) > 0$．函数 $M(u)$ 和

$$N(u) = \int_0^{|u|} p^{-1}(v)dv$$

称为互补函数(complementary functions)，其中 $p^{-1}(v)$ 是 $p(v)$ 的反函数．例如，如果 $M(u) = u^p/p$，$1 < p < \infty$，则 $N(u) = u^q/q$，其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$．对一对互补函数，Young 不等式(Young inequality)

$$ab \leqslant M(a) + N(b)$$

成立．

函数 $M(u)$ 称为满足 Δ_2 条件(Δ_2-condition)，如果存在 C 和 u_0 使得对所有 $u \geqslant u_0$ 有 $M(2u) \leqslant CM(u)$．一个 Orlicz 类是线性的，当且仅当 $M(u)$ 满足 Δ_2 条件．L_M 的凸性由 **Jensen 不等式**(Jensen inequality)推出．

设 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 是两个 N 函数．为了 $L_{M_1} \subset L_{M_2}$，必要充分条件是对某一 C 和充分大的 u 有 $M_2(u) \leqslant CM_1(u)$．

Orlicz 类由 W．Orlicz 和 Z．Birnbaum 在[1]中作了考察．

参考文献

[1] Birnbaum, Z. and Orlicz, W., Ueber die Verallgemeinerungen des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, *Studia Math.*, 3 (1931), 1－67.

[2] Красносельский, М. А., Рутицкий, Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958 (英译本: Krasnosel'skiĭ, M. A. and Rutitskiĭ, Ya. B., Convex functions and Orlicz spaces, Noordhoff, 1961).

Е. М. Семенов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., Riesz spaces, 1, North-Holland, 1971.

葛显良 译　吴绍平 校

Orlicz 空间 [**Orlicz space**; **Орлича пространство**]

由 W．Orlicz([1])引进的一种可测函数的 **Banach 空间**(Banach space)．设 $M(u)$ 和 $N(u)$ 是一对互补的 N 函数(见 **Orlicz 类**(Orlicz class))又设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界闭集．Orlicz 空间 L_M^* 是在 G 上满足

$$\|x\|_M = \sup\left\{\int_G x(t)y(t)dt : \int_G N(y(t))dt \leqslant 1\right\} < \infty$$

的 Lebesgue 可测函数 x 的集合．Orlicz 空间是关于范数 $\|x\|_M$ 完全的赋范空间，该范数称为 Orlicz 范数(Orlicz norm)．当 $M(u) = u^p$，$1 < p < \infty$ 时，L_M^* 与 **Riesz 空间**(Riesz space)L_p 一致，且相差一个标量因子外，$\|x\|_{L_p}$ 与 $\|x\|_M$ 一致．

如果 $M_1(u)$ 和 $M_2(u)$ 是 N 函数，则包含关系 $L_{M_1}^* \subset L_{M_2}^*$ 成立，当且仅当对某一常数 C 和所有充分大的 u，不等式 $M_2(u) \leqslant M_1(Cu)$ 成立．对每一个 Orlicz 空间 L_M^*，包含关系 $L_\infty \subset L_M^* \subset L_1$ 成立．每一个可和函数属于某个 Orlicz 空间．

空间 L_M^* 是可分的，当且仅当 $M(u)$ 满足 Δ_2 条件(见 **Orlicz 类**(Orlicz class))．一般地，L_∞ 在 L_M^* 中不是稠密的，且 L_∞ 在 L_M^* 中的闭包表示成 E_M 且总是可分的．如果 $x \in L_M^*$，则

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\mathrm{mes}(E)=r}\|x\chi_E\|_M = \rho(x, E_M),$$

其中

$$\chi_E(t) = \begin{cases} 1, & t \in E, \\ 0, & t \notin E. \end{cases}$$

如果 $M(u)$ 和 $N(u)$ 是互补的 N 函数且 $x \in L_M^*$，$y \in L_N^*$，则以下的 **Hölder 不等式**(Hölder inequality)的类似式成立:

$$\int_G x(t)y(t)dt \leqslant \|x\|_{(M)}\|y\|_{(N)},$$

这里 $\|x\|_{(M)}$ 是 **Luxemburg 范数**(Luxemburg norm)．E_M 上每一个连续线性泛函 f 能表成形式

$$f(x) = \int_G x(t)y(t)dt,$$

其中 $y \in L_N$ 且 $\|f\| = \|y\|_{(N)}$．

对空间 L_p 的 M．Riesz 和 A．Н．Колмогоров 的紧性准则也能应用于 E_M．以下的诸条件是等价的:

1) 空间 L_M^* 是自反的;

2) $M(u)$ 和 $N(u)$ 满足 Δ_2 条件;

3) L_M^* 中存在无条件基(basis);

4) **Haar 函数系**（Haar system）构成 L_M^* 中无条件基;

5) 三角函数系是 L_M^* 的一个基且 Haar 函数系是 E_M 中的一个基.

序列空间 l_M^* 按同样方式定义，但是 l_M^* 的性质依赖于函数 $M(u)$ 在 0 的渐近性质. L_M^* 和 l_M^* 的许多几何性质在[5]中作了研究；例如，对任意的函数 $M(u)$，使得 l_p 同构地可嵌入于 L_M^* 中的所有 p 的集合能够找到.

Orlicz 空间用于研究积分算子性质，多变量可微函数理论以及分析的其他领域.

参考文献

[1] Orlicz, W., Ueber eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B., *Bull. Intern. Acad. Pol. Ser. A*, **8/9** (1932), 207 − 220.

[2] Красносельский, М. А., Рутицкий, Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958 (英译本: Krasnosel'skiǐ, M. A. and Rutitskiǐ, Ya. B., Convex functions and Orlicz spaces, Noordhoff, 1961).

[3] Гапошкин, В. Ф., «Функц. анализ и его прилож.», **1** (1967), 4, 26 − 32.

[4] Крейн, С. Г., Петунин, Ю. И., Семенов, Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978 (英译本: Krein, S. G., Petunin Yu. I. and Semenov, E. M., Interpolation of linear operators, Amer. Math. Soc., 1982).

[5] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classial Banach spaces, 1 − 2, Springer, 1977 − 1979.

Е. М. Семенов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., Riesz spaces, 1, North-Holland, 1971.

葛显良 译 吴绍平 校

Ornstein-Chacon 遍历定理 [Ornstein-Chacon ergodic theorem; Орнстейна-Чекона эргодическая теорема]

设 (W, μ) 是具有 σ 有限测度的空间，T 是 $L_1(W, \mu)$ 上的正线性算子，其 L_1 范数 $\|T\| \leqslant 1$. 如果 $f, g \in L_1(W, \mu)$ 且几乎处处有 $g \geqslant 0$，则极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} T^k f(w)}{\sum_{k=0}^{n} T^k g(w)}$$

几乎处处存在且在分母对充分大的 n 异于零的集合即至少有一个数 $T^k g(w) > 0$ 的集合上为有限.

此定理系 D. S. Ornstein 和 R. V. Chacon 所表述并证明（[1]，亦见[2]，[3]）；嗣后也已得到对于连续时间的类似定理（见[4]）.

在 Ornstein-Chacon 遍历定理的直接推论中，有 **Birkhoff 遍历定理**（Birkhoff ergodic theorem）及其此前提出的种种推广，但也有一些遍历定理独立于 Ornstein-Chacon 遍历定理，而它们却从属于 Birkhoff 遍历定理的各种推广（见[5]，[6]以及**算子遍历定理**（operator ergodic theorem）的参考文献）. 在 Birkhoff 定理的所有推广中，最常用的是 Ornstein-Chacon 遍历定理.

有时把 Ornstein-Chacon 遍历定理以及其他涉及两个依赖于时间的平均之比的极限的定理称为比率遍历定理.

参考文献

[1] Chacon, R. V., Ornstein, D. S., A general ergodic theorem, *Illinois J. Math.*, **4** (1960), 2, 153 − 160.

[2] Hopf, E., On the ergodic theorem for positive linear operators, *J. Reine Angew. Math.*, **205** (1960), 101 − 106.

[3] Neveu, J., Mathematical foundations of the calculus of probabilities, Holden-Day, 1965 (译自法文).

[4] Alaoglu, M. A., Cunsolo, J., An ergodic theorem for semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24** (1970), 1, 161 − 170.

[5] Chacon, R. V., Convergence of operator averages, 载于 Ergodic Theory. Proc. Internat. Symp. New Orleans, 1961, Acad. Press, 1963, 89 − 120.

[6] Terrell, T. R., A ratio ergodic theorem for operator semigroups, *Boll. Un. Mat. Ital.*, **6** (1972), 2, 175 − 180.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 在西方文献中，本定理常称为 Chacon-Ornstein 遍历定理（Chacon-Ornstein ergodic theorem）. 关于各类遍历定理的概览，见[A1]. [A2]中有 Chacon-Ornstein 遍历定理的出色阐述.

参考文献

[A1] Krengel, U., Ergodic theorems, de Gruyter, 1985.

[A2] Garcia, A., Topics in almost everywhere convergence, Markham, 1970.

沈永欢 译

Ornstein-Uhlenbeck 过程 [Ornstein-Uhlenbeck process; Орнштейна-Уленбека процесс]

一种具有零期望值和形如

$$\mathrm{E}\, V(t)V(t+\tau) = B(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|T|), \ \alpha > 0,$$

的指数衰减的相关函数的 Gauss 平稳随机过程 $V(t)$. Ornstein-Uhlenbeck 过程也可以定义为随机方程（Langevin 方程）

$$m\,dV(t) + \beta V(t)\,dt = dW(t) \qquad (*)$$

的平稳解，其中 $W(t)$ 是 **Wiener 过程**(Wiener process)(亦即过程 $dW(t)/dt = W'(t)$ 是**白噪声**(white noise)过程)，而 β 和 m 是正常数且 $\beta/m = \alpha$.

方程(*)近似地描述了一个自由质点在流体中的一维 **Brown 运动**(Brownian motion)；这里 $V(t)$ 解释为质点的速度，m 是它的质量，$-\beta V(t)$ 是正比于速度的粘性摩擦力(对一个直径为 a 的球形质点，系数 β 等于 $6\pi\eta a$，其中 η 是由 Stokes 流体动力学定律测定的流体的粘度)，而白噪声 $W'(t)$ 是一"随机力"，它由流体分子在热运动中混乱地撞击而产生，是导致 Brown 运动的基本原因．在由 A. Einstein 和 M.V. Smoluchowski 在 1905－1906 年创建的 Brown 运动的原始理论中，不考虑质点的惯性力，即 m 取为 0，方程(*)导出 Brown 质点的坐标

$$X(t) = \int_0^t V(t')dt'$$

等于 $\beta^{-1}W(t)$ 的结论，即它是一 Wiener 过程．于是 Wiener 过程就描述了 Brown 运动的 Einstein-Smoluchowski 模型(因此它的另一名字是 Brown 运动过程(Brownian motion process))；因为这个过程是不可微的，在 Einstein-Smoluchowski 理论中的 Brown 质点就没有有限的速度．改进了的 Brown 运动理论，它依托方程(*)而 $m \neq 0$，是由 L. S. Ornstein 和 G. E. Uhlenbeck 在[1]中提出的(亦见[2])，相同的理论接着由 C. H. Бернштейн([3])和 A. И. Колмогоров([4])发展了．在 Ornstein-Uhlenbeck 理论中，Brown 质点的速度 $V(t)$ 是有限的，但加速度是无限的(因为 Ornstein-Uhlenbeck 过程是不可微的)．对于加速度是有限的情形，该理论必须通过考虑随机力不同于理想化的白噪声过程 $W'(t)$ 加以进一步改进．

方程(*)也可用作描述谐振子的一维 Brown 运动，如果忽略它的质量，$V(t)$ 就解释为振子的坐标．$-(m\,dV/dt)$ 是粘性摩擦力，$-\beta V$ 是规则的弹性力，它迫使振子回到其平衡位置，而 $W'(t)$ 是随机力，它可能由分子的冲撞引起．以这种方式，Ornstein-Uhlenbeck 过程对进行 Brown 运动的谐振子也提供了一个波动模型，类似于自由质点的 Brown 运动的 Einstein-Smoluchowski 模型．

Ornstein-Uhlenbeck 过程是关于时间齐次的扩散型 Марков 过程(见**扩散过程**(diffusion process))；另一方面，如果一个过程 $V(t)$ 同时是平稳随机过程，Gauss 过程，Марков 过程，则它必定是一个 Ornstein-Uhlenbeck 过程．作为 Марков 过程，Ornstein-Uhlenbeck 过程可以方便地用其转移概率密度 $p(t,x,y)$ 来表征．它是与形如

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha\frac{\partial(yp)}{\partial y} + \alpha\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

的 Fokker-Planck 方程(即向前 **Колмогоров 方程**(Kolmogorov equation))相对应的基本解，结果用公式

$$p(t,x,y) =$$

$$= \frac{1}{[2\pi\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})]^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{(y-xe^{-\alpha t})^2}{2\sigma^2(1-e^{-2\alpha t})}\right\}$$

给定．

Ornstein-Uhlenbeck 过程 $V(t)$ 的许多性质(包括它的 Марков 性)，利用过程

$$W_0(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sigma}V\left[\frac{\ln t}{2\alpha}\right]$$

是标准 Wiener 过程的事实，可以由 Wiener 过程的已知性质导出(见[5])．因此，特别得出：Ornstein-Uhlenbeck 过程的实现以概率 1 是连续且无处可微的，并且以概率 1，

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{|V(t)-V(0)|}{\sqrt{4\alpha\sigma^2 t\ln\ln(1/t)}} = 1,$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|V(t)|}{\sqrt{2\sigma^2\ln t}} = 1.$$

参考文献

[1] Uhlenbeck, G. E. and Ornstein, L. S., On the theory of Brownian motion, *Phys. Rev.*, **36** (1930), 823－841.

[2] Chandrasekhar, S., Stochastic problems in physics and astronomy, *Rev. Modern Phys.*, **15** (1943), 1－89.

[3] Бернштейн, С. Н., 《Докл. АН СССР》, 1 (1934), 1, 1－9; 7, 361－365.

[4] Kolmogorov, A. N., Zufällige Bewegungen (zur Theorie der Brownschen Bewegung), *Ann. of Math.*, **35** (1934), 116－117.

[5] Doob, J. L., The Brownian movement and stochastic equations, *Ann. of Math.*, **43** (1942), 351－369.

A. M. Яглом 撰

【补注】 上述参考文献[1]，[2]，[3]在[A1]中重印．把 Ornstein-Uhlenbeck 过程看作是仅有的平稳、Gauss、Марков 过程这一特征有点不准确．一个精确的命题，有时以 Doob 定理闻名，陈述如下([5])：具有均值 m 和方差 σ^2 的平稳、Gauss、Марков 过程 $V(t)$ 是如下两种类型之一：

a) 如果 $t_1 < \cdots < t_n$，则 $V(t_1),\cdots,V(t_n)$ 是相互独立 Gauss 随机变量，具有均值 m 和方差 σ^2；

b) 存在常数 $\alpha > 0$，使得如果 $t_1 < \cdots < t_n$，则 $V(t_1),\cdots,V(t_n)$ 具有 n 维 Gauss 分布，具有共同的均值 m 和方差 σ^2，且相关函数 $\mathrm{E}\{[V(t+\tau)-m]\cdot[V(t)-m]\} = \sigma^2\exp(-\alpha|\tau|)$.

对 n 维情形的推广见在[A1]中重印的 M. C.

Wang 和 G. E. Uhlenbeck 的文章. 不必平稳的 Gauss、Марков 过程的刻画见[A2]. 与 Wiener 过程的关系也在[A3]中讨论.

设 μ 是(可能是无穷维)局部凸空间 E 上的任一 Gauss 测度, 则利用 Mehler 公式(Mehler formula)

$$P_t(x,f)=\int_E f(e^{-t/2}x+\sqrt{1-e^{-t}}\,y)\mu(dy),\quad (x\in E)$$

可以定义一个 Марков 半群, 其中 f 表示 E 上的连续有界函数. 这个半群容许测度 μ 作为一个对称不变测度, 且在有限维的情形归结为上述主要文章描述的那种 Ornstein-Uhlenbeck 半群. 因为在无穷维的情形没有 Lebesgue 测度(常用 Gauss 测度来代替), Ornstein-Uhlenbeck 半群和作为无穷维 Laplace 算子的生成元, 近来在无穷维分析中起着相当重要的作用, 见[A4], [A5]. 对于 Ornstein-Uhlenbeck 过程到无穷维情形的其他推广, 见[A6], [A8]-[A10]. 有关历史和物理背景见[A7], 亦见 **Langevin 方程**(Langevin equation).

参考文献

[A1] Wax, N. (ed.), Selected papers on noise and stochastic processes, Dover, 1954.

[A2] Iranpour, R. and Chacon, P., Basic stochastic processes, The Marc Kac lectures, MacMillan, 1988.

[A3] Cox, D. R. and Miller, H. D., The theory of stochastic processes, Methuen, 1965.

[A4] Malliavin, P., Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, in K. Itô (ed.): Proc. Internat. Conf. Stochastic Differential Equations Kyoto, 1976, Wiley, 1978, 195-263.

[A5] Stroock, D. W., The Malliavin calculus, a functional analytic approach, *J. Funct. Anal.*, **44**(1981), 212-257.

[A6] Schmuland, B., Regularity of l^2-valued Ornstein-Uhlenbeck processes, *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Canada*, **10**(1988), 119-124.

[A7] Nelson, E., Dynamical theories of Brownian motion, Princeton Univ. Press, 1967.

[A8] Röckner, M., Traces of harmonic functions and a new path space for the free quantum field, *J. Funct. Anal.*, **79**(1988), 211-249.

[A9] Kolsrud, T., Gaussian radom fields, infinite dimensional Ornstein-Uhlenbeck processes, and symmetric Markov processes, *Acta Appl. Math.*, **12** (1988), 237-263.

[A10] Meyer, P. A., Transformations de Riesz pour les lois Gaussiennes, in J. Azéma and M. Yor (eds.): Sém. Prob. XVII, Lecture notes in math., Vol. 1059, Springer, 1984, 179-193.

[A11] Rogers, L. C. G. and Williams, D., Diffusion, Markov Processes and martingales, I-II, Wiley, 1987.

[A12] Karatzas, I. and Shreve, S. E., Brownian motion and stochastic calculus, Springer, 1988.

刘秀芳 译 陈培德 校

Orr-Sommerfeld 方程[Orr-Sommerfeld equation; Орра-Зоммерфельда уравнение]

一个线性常微分方程

$$\varphi^{(4)}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi=$$
$$=i\alpha R[(w-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-w''\varphi],\quad (1)$$

其中 R 是 **Reynolds 数**(Reynolds number), $w(y)$ 是给定的函数(未扰流动的速度剖面), 它通常在复 y 平面上区段 $[-1,1]$ 的邻域中被取为单调的, $\alpha>0$ 是常数, c 是谱参数. 对 Orr-Sommerfeld 方程研究过边值问题

$$\varphi(-1)=\varphi'(-1)=\varphi(1)=\varphi'(1)=0.\quad (2)$$

Orr-Sommerfeld 方程是由 W. Orr([1]) 和 A. Sommerfeld([2]) 在研究平面 Poiseuille 流动的线性近似中的稳定性时产生的, Poiseuille 流动是粘性不可压缩液体在具有刚性边界的管道 $-\infty<x<\infty$, $-1<y<1$ 中的流动; 对于流函数, 扰动取形式 $\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)}$.

问题(1), (2)的本征值一般说是复数; 如果对所有的本征值有 $\mathrm{Im}\,c<0$, 则流动是稳定的; 如果对它们中的某个值有 $\mathrm{Im}\,c>0$, 则流动是不稳定的. 曲线 $\mathrm{Im}\,c(\alpha,R)=0$ 称为中性曲线(neutral curve). 在小 Reynolds 数时 Poiseuille 流动是稳定的. W. Heisenberg([6]) 首先提出, 在大 Reynolds 数时 Poiseuille 流动是不稳定的, 并算出了中性曲线的四个点. 对二次的速度剖面已证实, 当 $\alpha R\gg 1$ 时流动是不稳定的.

Orr-Sommerfeld 方程的渐近理论是建立在假设 $(\alpha R)^{-1}\to 0$ 为小参数的基础上的. 点 y_c, 在此点 $w(y_c)=c$, 是一个扭转点(见小参数方法(small parameter, method of the)). 合适的参数是 $\varepsilon=(\alpha R w_c')^{-1/3}$. 在当地坐标 $\eta=(y-y_c)/\varepsilon$ 中, 方程变为 $i\varphi^{\mathrm{iv}}+\eta\varphi''=0$, 具有以下形式的解:

$$\varphi(\eta)=\int_{-\infty}^{\eta}\int_{-\infty}^{\eta''}(\eta')^{1/2}H_{1/3}^{(1)}[2(i\eta')^{2/3}/3]\,d\eta'\,d\eta'',$$

它在 $\eta>0$ 时是正确的. 一般地说, 在距 $y=y_c$ 的有限距离上, 得到以下形式的基本解组

$$\varphi_{1,2}(y)=\varphi_{1,2}^{0}(y)+O((\alpha R)^{-1}),$$

$$\varphi_{3,4}(y)=\exp\left[+\int\sqrt{\frac{i(w-c)}{\alpha R}}\,dy\right]\times$$

$$\times[(w-c)^{-5/4}+O((\alpha R)^{-1/2})],$$

其中 $\varphi_1^0(y)$, $\varphi_2^0(y)$ 是非粘性(即 $\alpha R=0$)方程

$$(w-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-w''\varphi=0$$

的基本解组. 对问题(1), (2)的研究会碰到例如以下困难: 1)非粘性方程在 $y=y_c$ 的邻域中有正则解和具有对数奇异性的解, 2)对小的 $|c|$(即在最重要情况下)扭转点与区间 $[-1, 1]$ 的端点相重合(例如, 对二次速度剖面 $w=1-y^2$).

当 $\alpha R>>1$ 时, 已得到了不稳定性的严格证明(见[3], [4]).

参考文献

[1A] Orr, W. McF., The stability or instability of the steady motions of liquid I, *Proc. R. Irish Acad. A*, 27 (1907), 9 – 68.

[1B] Orr, W. McF., The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid II, *Proc. R. Irish Acad. A*, 27 (1907), 69 – 138.

[2] Sommerfeld, A., *Proc. fourth Internat. Congress of Mathematicians Rome*, 1908, 1909, 116 – 124.

[3] Lin, C. C., Theory of hydrodynamic stability, Cambridge Univ. Press, 1955.

[4] Birkhoff, G., et al. (eds.), Hydrodynamic instability, Proc. Symp. Appl. Math., 13, Amer. Math. Soc., 1962.

[5] Gersting, J. M. and Janowski, D. F., Numerical methods for Orr-Sommerfeld problems, *Internat. J. Numer. Methods Eng.*, 4 (1972), 195 – 206.

[6] Heisenberg, W., *Ann. of Phys.*, 74 (1924), 15, 577 – 627.

М. В. Федорюк 撰

【补注】 亦见 **Poiseuille 流**(Poiseuille flow).

参考文献

[A1] Betchov, R. and Criminale, W. O., Stability of parallel flows, Acad. Press, 1967.

[A2] Schlichting, H., Fluid dynamics 1, in S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. VIII/1, Springer, 1959, 351 – 450.

[A3] Georgescu, A., Hydrodynamic stability theory, Martinus Nijhoff, 1985.

李维新 译

垂心 [orthocentre; ортоцентр], 三角形的

三角形的三高线的交点. 三角形的垂心位于 **Euler 线**(Euler straight line)上. 三角形的三边的中点、连接垂心与三顶点的线段的中点以及三高线的垂足位于同一圆上, 此圆称为九点圆(nine-point circle). 垂心是垂心三角形(orthocentric triangle)(即以给定三角形的三高线的垂足为顶点的三角形)的内切圆的圆心.

П. С. Моденов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1 – 2, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一 – 五卷, 科学出版社, 1987 – 1991)

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

杜小杨 译

正交阵列 [orthogonal array; ортогональная таблица], 正交表(orthogonal table), $OA(N, k, n, t, \lambda)$

一个 $(k\times N)$ **矩阵**(matrix), 其元素是数 1, …, n, 并且有如下性质: 在它的每一个 $(t\times N)$ 子矩阵中, 以 1, …, n 为坐标的 n^t 个可能的 t 维列向量中的每一个在这个子矩阵中恰好出现 λ 次. 正交阵列的这个定义蕴含着 $N=\lambda n^t$. 人们常考虑 $t=2$ 和 $\lambda=1$ 的特殊情况, 这时的 $OA(N, k, n, t, \lambda)$ 用 $OA(n, k)$ 表示. 当 $k>3$ 时, 正交阵列 $OA(n, k)$ 等价于 $k-2$ 个两两正交拉丁方(orthogonal Latin squares)的集合. 对给定的 n, t, λ, 仅在某些特殊情况下参数 k 的最大值被确定, 例如当 $t=2$ 时 $k\leqslant(\lambda n^2-1)/(n-1)$ 或者当 λ 是奇数且 $n=2$ 时, $k_{\max}=t+1$.

参考文献

[1] Dénes, J. and Keedwell, A. D., Latin squares and their applications, Acad. Press, 1974.

[2] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.

В. М. Михеев 撰

【补注】 关于存在性, 当 $t=2$ 和 $\lambda\neq1$ 时, 仅有的一般结果是: 对所有 $n\geqslant2$, $OA(\lambda n^2, 7, n, 2, \lambda)$ 存在(H. Hanani, 见[A1]). 对 $\lambda=1$, 见**正交拉丁方**(orthogonal Latin squares). 按几何术语, $OA(\lambda n^2, k, n, 2, \lambda)$ 等价于**横截设计**(transversal design)或**网**(net); 关于某些基本结果和最近的综述文章分别参见[A1]和[A2].

参考文献

[A1] Beth, T., Jungnickel, D. and Lenz, H., Design theory, Cambridge, Univ. Press, 1986.

[A2] Jungnickel, D., Latin squares, their geometries and their groups. A survey, in Proc. IMA workshops on Coding and Design Theory Minneapolis, 1988, Springer, to appear.

刘振宏 译 李 乔 校

正交基 [orthogonal basis; ортогональный базис]

Hilbert 空间 X 中两两正交的非零元素 e_1, …, e_n, … 的系统, 使得任一元素 $x\in X$ 可(唯一地)表

成按范数收敛的级数的形式

$$x = \sum_i c_i e_i,$$

该级数称为元素 x 关于系 $\{e_i\}$ 的 Fourier 级数（Fourier series）. 基 $\{e_i\}$ 通常选取使得 $\|e_i\|=1$，因而称为规范正交基（orthonormal basis）. 这时数 c_i 称为元素 x 关于规范正交基 $\{e_i\}$ 的 Fourier 系数（Fourier coefficients），且取形式 $c_i=(x, e_i)$. 一个正交规范系是基的一个必要充分条件是 Parseval-Стеклов 等式（Parseval-Steklov equality）

$$\sum_i |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2,$$

对任何 $x \in X$ 成立. 有规范正交基的 Hilbert 空间是可分的，且反之，任何可分 Hilbert 空间中存在规范正交基. 如果任意给定的数系 $\{c_i\}$ 满足 $\sum_i |c_i|^2 < \infty$，则在具有基 $\{e_i\}$ 的 Hilbert 空间情况下，级数 $\sum_i c_i e_i$ 按范数收敛到一个元素 $x \in X$. 按此方式任一可分 Hilbert 空间与空间 l_2 之间建立起一个同构（Riesz-Fisher 定理（Riesz-Fisher theorem））.

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965（中译本：Л. А. 刘斯铁尔尼克，В. И. 索伯列夫，泛函分析概要，第二版，科学出版社，1985）.

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы Теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981（中译本：А. Н. 柯尔莫果洛夫，С. В. 佛明，函数论与泛函分析初步，上、下册，高等教育出版社，1992）.

[3] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966.

В. И. Соболев 撰

参考文献

[A1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）.

葛显良 译 吴绍平 校

正交追赶法 [**orthogonal double-sweep method; ортогональной прогонки метод**]

基于未知数正交变换的追赶法（double-sweep method）的一种变形. 对于 $a \leqslant x \leqslant b$，研究一对线性常微分方程的边值问题

$$y'(x) = a_1(x)y(x) + b_1(x)z(x) + f_1(x), \quad (1)$$

$$z'(x) = a_2(x)y(x) + b_2(x)z(x) + f_2(x), \quad (2)$$

边界条件为

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 z(a) = \gamma_1,\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad (3)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 z(b) = \gamma_2,\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1. \quad (4)$$

设已知函数 $a_i(x)$、$b_i(x)$、$f_i(x)$ $(i=1,2)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上连续. 应用正交追赶法，边值问题（1）-（4）的解可由下述过程给出.

Ⅰ）求解辅助 Cauchy 问题

$$s'(x) = c(x)r(x),\ c'(x) = -s(x)r(x),$$

$$r(x) = s^2(x)b_1(x) + s(x)c(x)(b_2(x) - a_1(x)) + \\ - c^2(x)a_2(x), \quad (5)$$

$$u'(x) = \overline{a}_1(x)u(x) + \overline{f}_1(x), \quad (6)$$

$$s(a) = \alpha_1,\ c(a) = \beta_1,\ u(a) = \gamma_1, \quad (7)$$

其中

$$\overline{a}_1(x) = a_1(x)s^2(x) + b_2(x)c^2(x) + \\ + (b_1(x) + a_2(x))s(x)c(x),$$

$$\overline{f}_1(x) = f_1(x)s(x) + f_2(x)c(x)$$

（直接追赶（direct double-sweep））.

Ⅱ）验证条件 $\Delta = \alpha_2 c(b) - \beta_2 s(b) \neq 0$ 是否成立. 若成立，则 Cauchy 问题

$$v'(x) = \overline{a}_2(x)u(x) + \overline{b}_2(x)v(x) + \overline{f}_2(x), \quad (8)$$

$$v(b) = \frac{\gamma_2 - [\alpha_2 s(b) + \beta_2 c(b)]u(b)}{\Delta}, \quad (9)$$

其中

$$\overline{a}_2(x) = 2(a_1(x) - b_2(x))s(x)c(x) + \\ + (b_1(x) + a_2(x))(c^2(x) - s^2(x)),$$

$$\overline{b}_2(x) = a_1(x)c^2(x) + b_2(x)s^2(x) + \\ - (b_1(x) + a_2(x))s(x)c(x),$$

$$\overline{f}_2(x) = f_1(x)c(x) - f_2(x)s(x),$$

在从 $x=a$ 至 $x=b$ 的方向上是可解的（逆追赶（inverse double-sweep））.

Ⅲ）所求的函数用下式计算

$$y(x) = s(x)u(x) + c(x)v(x),$$

$$z(x) = c(x)u(x) - s(x)v(x).$$

如果边值问题（1）-（4）的解 $y(x)$, $z(x)$ 存在且唯一，而且关于问题中的系数和自由项的小的变化是稳定的，则 $\Delta \neq 0$，而且问题的解法也是稳定的（见[2]）.

线性代数方程组

$$y_{k+1} = A_k y_k + B_k z_k + F_k, \quad (10)$$

$$z_{k+1} = C_k y_k + D_k z_k + G_k,\ k = 0, \cdots, n-1, \quad (11)$$

$$\alpha_0 y_0 + \beta_0 z_0 = \gamma_0, \tag{12}$$

$$\alpha_n y_n + \beta_n z_n = \gamma_n, \tag{13}$$

其中 $A_k D_k \neq B_k C_k$, $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$, $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1$, 根据下列规则是可解的．

1）应用公式

$$s_{k+1} = \frac{C_k c_k - D_k s_k}{\rho_k},$$

$$c_{k+1} = \frac{B_k s_k - A_k c_k}{\rho_k},$$

$$\rho_k = \sqrt{(C_k c_k - D_k s_k)^2 + (B_k s_k - A_k c_k)^2},$$

$$u_{k+1} = (A_k s_k s_{k+1} + B_k c_k s_{k+1} + $$
$$+ C_k s_k c_{k+1} + D_k c_k c_{k+1}) u_k +$$
$$+ (F_k s_{k+1} + G_k c_{k+1}),$$

$$s_0 = \alpha_0,\ c_0 = \beta_0,\ u_0 = \gamma_0,$$

量 $s_{k+1}, c_{k+1}, u_{k+1}$ 对于 $k = 0, \cdots, n-1$ 递推地计算（**直接追赶**）．

2）检验条件 $\Delta_n = \alpha_n c_n - \beta_n s_n \neq 0$，如果满足，则

$$v_n = \frac{\gamma_n - (\alpha_n s_n + \beta_n c_n) u_n}{\Delta_n},$$

且

$$v_k = \frac{1}{\rho_k}\{v_{k+1} + [(C_k s_k + D_k c_k) s_{k+1} +$$
$$- (A_k s_k + B_k c_k) c_{k+1}] u_k +$$
$$+ (G_k s_{k+1} - F_k c_{k+1})\}$$

对于 $k = n-1, n-2, \cdots, 1$ 进行计算（**逆追赶**）．

3）所求方程组（10）－（13）的解用下面公式计算

$$y_k = u_k s_k + v_k c_k,$$
$$z_k = u_k c_k - v_k s_k.$$

如果（10）－（13）的解存在且唯一，而且关于系数和自由项的小的变化是稳定的，那么问题的正交追赶解法也是稳定的（见[2]）．

基于使用目的在于对边界条件进行转换的齐次方程组的**基本解组**（fundamental system of solutions）的一些方法，有时也称作 **正交追赶法**（orthogonal double-sweep method）（见[1]，[3]）．但是，这些方法实际上是**打靶法**（shooting method）的变形．

参考文献

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

[2] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы высшей математики, т. 2, Минск, 1975.

[3] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978（英译本：Samarskii, A. A. and Nikolaev, E. S., Numerical methods for grid equations, 1－2, Birkhäuser, 1989）.

А. Ф. Шапкин 撰

【补注】 上面介绍的算法中，某些步骤需要小心，那里可能出现严重的抵消现象（例如在 Δ 中）．另外，方法要求解非线性方程，而实际上解算的方程组是简单的和线性的．应用 Riccati 法（Riccati method）（或者**不变嵌入**（invariant imbedding））也具有这个特点，但它只用一个非线性方程，与"正交追赶法"有类似思想的其他变形可在[A2]中找到．

参考文献

[A1] Ascher, U. M., Mattheij, R. M. M. and Russell, R. D., Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations, Prentice-Hall, 1988.

[A2] Meyer, G. M., Continuous orthonormalization for boundary value problems, *J. Comput. Phys.*, 62 (1986), 248－262.

张宝琳 袁国兴 译

正交群[orthogonal group; ортогональная группа]

域 k 上一 n 维**向量空间**（vector space）V 的保持 V 上一给定非奇异**二次型**（quadratic form）Q 不变的全部线性变换（即对所有 $v \in V$ 使 $Q(\varphi(v)) = Q(v)$ 成立的线性变换）所组成的群．正交群是一种**典型群**（classical group）．正交群的元素称为 V 的（相对于 Q 的）**正交变换**（orthogonal transformation），亦称型 Q 的**自同构**（automorphism of the form）．并且，设 $\operatorname{char} k \neq 2$（关于特征 2 的正交群，见[1]，[7]）．并设 f 为由公式

$$f(u,v) = \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(v) - Q(u))$$

定义的 V 上的非奇异对称双线性型．则正交群由全体保持 f 不变的线性变换组成，它记作 $O_n(k, f)$，或（当域 k 和型 f 已经指明时）简记作 O_n．若 B 为 f 相对于 V 的某个基的矩阵，则正交群可等同于全体系数在 k 中的满足关系 $A^T B A = B$（^{T}表示转置）的 $n \times n$ 矩阵 A 组成的群．

正交群的代数结构的描述是一个经典问题．O_n 中的元素的行列式等于 1 或 －1．行列式为 1 的元素称为**旋转**（rotation），它们组成正交群的一个指数 2 的正规子群 $O_n^+(k, f)$（或记作 O_n^+），称为**旋转群**（rotation group）．$O_n \setminus O_n^+$ 中的元素称为**反演**（inversion）．每个旋转（反演）是 O_n 中偶数个（相应的，

奇数个)反射的积.

用 Z_n 表示空间 V 中全体位似 $\varphi_\alpha: v \mapsto \alpha v(\alpha \in k, v \in V, \alpha \neq 0)$ 所组成的群, 则 $O_n \cap Z_n$ 是 O_n 的中心; 它由两个元素组成: φ_1 和 φ_{-1}. 若 n 为奇数, 则 O_n 为其中心和 O_n^+ 的直接积. 设 $n \geqslant 3$, 则当 n 为奇数时 O_n^+ 的中心为平凡的, 而当 n 为偶时 O_n^+ 的中心与 O_n 的中心重合. 若 $n=2$, 群 O_n^+ 为交换的, 并且或者同构于 k 的乘法群 k^*(当 f 的 Witt 指数 v 等于 1 时), 或者同构于 $k(\sqrt{-\Delta})$ 中模为 1 的元素组成的群, 其中 Δ 为 f 的判别式(当 $v=0$). $O_n(k,f)$ 的换位子群记作 $\Omega_n(k,f)$, 或简记作 Ω_n; 它由 O_n 中元素的平方生成. 当 $n \geqslant 3$ 时, O_n^+ 的换位子群就是 Ω_n. Ω_n 的中心是 $\Omega_n \cap Z_n$.

与正交群有关的其他典型群包括 O_n^+ 和 Ω_n 在射影群 (projective group) 里的标准同态象; 它们记作 $PO_n^+(k,f)$ 和 $P\Omega_n(k,f)$(或简记为 PO_n^+ 和 $P\Omega_n$), 并分别同构于 $O_n^+/(O_n^+ \cap Z_n)$ 和 $\Omega_n/(\Omega_n \cap Z_n)$.

关于代数结构的最基本的经典事实是描述正交群的下列正规子群序列的相邻两项的商的:

$$O_n \supset O_n^+ \supset \Omega_n \supset \Omega_n \cap Z_n \supset \{e\}.$$

群 O_n/O_n^+ 为 2 阶的. O_n/Ω_n 中每个非单位元素的阶为 2, 因而这个群可被其基数完全决定, 而基数可能是无限也可能是形如 2^a 的有限数, 其中 a 为一整数. 其余的商群的描述实际上有赖于型 f 的 Witt 指数 v.

首先设 $v \geqslant 1$. 当 $n>2$ 时 $O_n^+/\Omega_n \simeq k^*/k^{*2}$, 这一同构由旋量模给出, 它定义了由 O_n^+ 到 k^*/k^{*2} 的满同态而以 Ω_n 为核. 群 $\Omega_n \cap Z_n$ 是非平凡的(且由变换 φ_1 和 φ_{-1} 组成), 当且仅当 n 为偶的, 而且 $\Delta \in k^2$. 当 $n \geqslant 5$ 时, 群 $P\Omega_n = \Omega_n/(\Omega_n \cap Z_n)$ 为单的. $n=3,4$ 的情况要分开研究. 即 $P\Omega_3 = \Omega_3$ 同构于 $PSL_2(k)$(见**特殊线性群** (special linear group)) 且当 k 有至少 4 个元素时也是单的(群 O_3^+ 同构于射影群 $PGL_2(k)$). 当 $v=1$ 时, $P\Omega_4 = \Omega_4$ 同构于 $PSL_2(k(\sqrt{\Delta}))$ 并且是单的(在这时 $\Delta \notin k^2$), 而在 $v=2$ 时群 $P\Omega_4$ 同构于 $PSL_2(k) \times PSL_2(k)$ 且非单群. 在 $k=\mathbf{R}$ 且 Q 为惯性指数 $(3,1)$ 的二次型时群 $P\Omega_4 = \Omega_4 \simeq PSL_2(\mathbf{C})$ 称为 Lorentz 群 (Lorentz group).

当 $v=0$(即 Q 为非迷向型)时这些结论一般不再成立. 例如若 $k=\mathbf{R}$ 而 Q 为正定的, 则 $\Omega_n = O_n^+$, 虽然 $\mathbf{R}^*/\mathbf{R}^{*2}$ 中有两个元素; 当 $k=Q$, $n=4$ 可能有 $\Delta \in k^2$ 但 $\varphi_{-1} \notin \Omega_4$. $v=0$ 时正交群及其有关的群的构造依赖于 k. 例如若 $k=R$, 则 PO_n^+, $n \geqslant 3$, $n \neq 4$, $v=0$, 为单群(而 PO_4^+ 同构于两个单群的直积 $O_3^+ \times O_3^+$); 若 k 为 p 进数域且 $v=0$ 时在 O_3(以及 O_4)中有一个具 Abel 商的无限正规群列. 重要的特殊情况是当 k 为局部紧域或代数数域时. 若 k 为 p 进数域, 当 $n \geqslant 5$ 时 $v=0$ 是不可能的. 若 k 为代数数域则没有这样的限制, 而基本结论之一是当 $v=0$ 且 $n \geqslant 5$ 时 $P\Omega_n$ 是单群. 在此情况下, 正交群的研究与二次型的等价理论有紧密的联系. 这一理论的基础是研究由 Q 经过把系数域扩充成 k 的赋值所定义的局部域而得到的那些二次型 (Hasse 原理 (Hasse principle)).

若 k 为 q 个元素的有限域 $\mathbf{F}_q$, 则正交群为有限的. n 为奇数时 O_n^+ 的阶等于

$$(q^{n-1}-1)q^{n-2}(q^{n-3}-1)q^{n-4}\cdots(q^2-1)q,$$

而 $n=2m$ 为偶时 O_n^+ 的阶等于

$$(q^{2m-1}-\varepsilon q^{m-1})(q^{2m-2}-1)q^{2m-3}\cdots(q^2-1)q.$$

这里 $\varepsilon=1$ 如 $(-1)^m\Delta \in \mathbf{F}_q^2$, 而 $\varepsilon=-1$ 在其他情况. 这两个公式以及关于 $v \geqslant 1$ 时正交群的一般结论使我们可以计算 Ω_n 和 $P\Omega_n$ 的阶, 因为 $n \geqslant 3$ 时 $v \geqslant 1$, 而 k^*/k^{*2} 的阶等于 2. 群 $P\Omega_n(n \geqslant 5)$ 是一种单的有限的典型群(亦见 **Chevalley 群** (Chevalley group)).

关于正交群的自同构有如下基本结论: 若 $n \geqslant 3$, O_n 的每个自同构 φ 有形状 $\varphi(u) = \chi(u)gug^{-1}$, $u \in O_n$, 其中 χ 为 O_n 到其中心内的固定的同态而 g 为 V 到自身的一个固定的一一半线性映射并对一切 $v \in V$ 满足 $Q(g(v)) = r_g Q^\sigma(v)$, 这里 $r_g \in k^*$ 而 σ 为 k 的自同构. 当 $v \geqslant 1$ 且 $n \geqslant 6$ 时 O_n^+ 的每个自同构可由 O_n(见[1], [3]) 的一自同构诱导得到.

和其他典型群一样, (在某些假设下)正交群也有几何的刻画. 实际上, 设 Q 为非迷向型且使 $Q(v) \in k^2$ 对一切 $v \in V$ 成立. 此时 k 是 Pythagoras 可序域. 对 k 的一个取定的序, 由一个线性无关基 $(h_s)_{1 \leqslant s \leqslant n}$ 可构造 V 中一个 n 维的关联半空间链 (chain of incident half-spaces) $(H_s)_{1 \leqslant s \leqslant n}$, 这里 H_s 为所有的形如 $\sum_{j=1}^s \lambda_j h_j$, $\lambda_s \geqslant 0$, 的线性组合的集合. 正交群 O_n 有自由流动性 (property of free mobility), 即对任意两个 n 维的关联半空间链, 有 O_n 中的唯一的变换把第一个链映到第二个链. 这个性质完全刻画了正交群: 若 L 为任意有序斜域而 G 为 $GL_n(L)(n \geqslant 3)$ 的一个具有自由流动性的子群, 则 L 为 Pythagoras 域而 $G = O_n(L,f)$, 其中 f 为非迷向对称双线性型且使 $f(v,v) \in L^2$ 对一切向量 v 成立.

用 $\bar{k}$ 表域 k 的一取定的代数闭包. 型 f 就可自然地开拓成为 $V \otimes_k \bar{k}$ 上的一个非奇异对称双线性型 $\bar{f}$, 而正交群 $O_n(\bar{k},\bar{f})$ 是定义在 k 上的一个**线性代数群** (linear algebraic group), 并以 $O_n(k,f)$ 为 k 点群.

如此(对不同的 f)定义的线性代数群在 $\bar{k}$ 上是同构的(但一般说来在 k 上不同构);相应的 $\bar{k}$ 上的线性代数群称为正交代数群(orthogonal algebraic group)$O_n(\bar{k})$.其子群 $O_n^+(\bar{k},\bar{f})$ 也是 $\bar{k}$ 上的线性代数群,称为 $O_n(\bar{k})$ 的真正交群(properly orthogonal group)或特殊正交代数群(special orthogonal algebraic group)(记号为 $SO_n(\bar{k})$);它是 $O_n(\bar{k})$ 的单位元的连通分支.群 $SO_n(\bar{k})$ 是几乎单的代数群(即它不包含无限的代数正规子群),当 $n=2s+1(s\geqslant 1)$ 时它是 B_s 型的,而当 $n=2s(s\geqslant 3)$ 时为 D_s 型的.SO_n 的万有覆叠群是一旋量群(spinor group).

若 $k=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 或 p 进域,则 $O_n(k,f)$ 有实的,复的或 p 进域的解析群(analytic group)的标准结构.Lie 群 $O_n(\mathbf{R},f)$ 在同构意义下由 f 的惯性指数定义;若惯性指数为 (p,q), $p+q=n$,则 $O_n(\mathbf{R},f)$ 记作 $O(p,q)$ 并称为伪正交群(pseudo-orthogonal group),它可等同于所有满足

$$A^T I_{p,q} A = I_{p,q}, \quad \text{其中 } I_{p,q} = \left\| \begin{matrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{matrix} \right\|$$

(I_s 表示 $(s\times s)$ 单位矩阵)的 $(n\times n)$ 实矩阵 A 组成的 Lie 群.该群的 Lie 代数是所有满足条件 $X^T I_{p,q} = -I_{p,q}X$ 的 $(n\times n)$ 实矩阵组成的 Lie 代数.在 $q=0$ 的特殊情况下,群 $O(p,q)$ 记作 $O(n)$ 并称为实正交群(real orthogonal group);它的 Lie 代数由所有反对称 $(n\times n)$ 实矩阵组成.Lie 群 $O(p,q)$ 在 $q\neq 0$ 时有四个连通分支而在 $q=0$ 时有两个.其中包含单位元的连通分支是其换位子群,而在 $q=0$ 时它正好与 $O(n)$ 的子群 $SO(n)$ 重合,后者由所有行列式为 1 的变换组成.仅当 $q=0$ 时 $O(p,q)$ 为紧群.$SO(n)$ 的拓扑不变量已经被研究过.经典结果之一是流形 $SO(n)$ 的 Betti 数的计算:在 $n=2m+1$ 时其 Poincare 多项式形如

$$\prod_{s=1}^{m}(1+t^{4s-1}),$$

而在 $n=2m$ 时形如

$$(1+t^{2m-1})\prod_{s=1}^{m-1}(1+t^{4s-1}).$$

流形 $SO(n)$ 的基本群为 $\mathbf{Z}_2$.高维的同伦群 $\pi_i(SO(n))$ 的计算与球上的局部平凡主 $SO(n)$ 纤维化的分类直接有关.在拓扑 K 理论(K-theory)中周期性定理是一个重要内容,根据这个定理,当 $N\gg n$ 时,有一个同构关系

$$\pi_{n+8}(O(N))\cong\pi_n(O(N)),$$

并且当 $n=0,1$ 时

$$\pi_n(O(N))\simeq\mathbf{Z}_2;$$

当 $n=3,7$ 时

$$\pi_n(O(N))\cong\mathbf{Z};$$

而在 $n=2,4,5,6$ 时

$$\pi_n(O(N))=0.$$

群 $O(p,q)$ 的拓扑的研究实际上化成为上述情况,因为 $O(p,q)$ 的单位元的连通分支微分同胚与 Euclid 空间上的积 $SO(p)\times SO(q)$.

参考文献

[1] Dieudonné, J. A., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955.
[2] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
[3] Автоморфизмы классических групп, пер. с англ. и франц., М., 1976.
[4] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946.
[5] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.
[6] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Modules. Rings, Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt, 4; 5; 6,(译自法文).
[7] O'Meara, O. T., Introduction to quadratic forms, Springer, 1973.
[8] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

В. Л. Попов 撰

【补注】 一个域称为 Pythagoras 域,若其中两个平方元之和仍是平方元.

参考文献

[A1] Dieudonné, J., On the automorphisms of the classical groups, Mem. Amer. Math. Soc., 2, Amer. Math. Soc., 1951.

李慧陵 译

正交拉丁方[orthogonal Latin squares; ортогональные латинские квадраты]

一对 n 阶拉丁方(Latin square)$A=\|a_{ij}\|$ 和 $B=\|b_{ij}\|$,对一切 $i,j,k,l\in S=\{1,\cdots,n\}$,若对 $(i,j)\neq(k,l)$,有 $(a_{ij},b_{ij})\neq(a_{kl},b_{kl})$,则 A 和 B 称为正交伴侣(orthogonal mates).把 A 重叠置到 B 上得到的方阵,其元素是 S 中元素的所有 n^2 个有序对,称为希腊-拉丁方(Greco-Latin square)或 Euler 方(Euler square).A 和 B 正交用 $A\perp B$ 表示.以下是 $n=3$ 时一对正交拉丁方和它们的 Euler 方的例子:

$$\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}11&22&33\\23&31&12\\32&13&21\end{matrix}$$

一个 n 阶拉丁方 A 有正交伴侣,当且仅当 A 中存在 n 个互不相交的横截(见拉丁方(Latin square)).一

个 $4t+2$(或 $4t+1$) 阶的拉丁方 A，如果它有一个 $2t+1$ (或 $2t$) 阶子拉丁方，其中除去可能的 t(或 $[(t-1)/2]$) 个空位外，其余位置至多填入 $2t+1$(或 $2t$) 个元素，那么 A 没有正交伴侣. 对所有 $n>2$ 且 $n\neq 6$，存在一对正交拉丁方的例子，而对 $n=6$，经检查所有可能性证明不存在一对正交拉丁方([3]).

在若干同阶拉丁方中，如果任意两个是正交的，则称它们为**两两正交的**(pairwise orthogonal)或**相互正交的**(mutually orthogonal). 如果 $N(n)$ 是两两正交的 n 阶拉丁方的最大个数，则 $N(n)\leqslant n-1$.

$n-1$ 个两两正交的 n 阶拉丁方的集合称为**完全的**(complete). 当 $n>4$ 时，总能使 $n-3$ 个两两正交拉丁方的集合成为完全的. 到目前为止，只知道对 $n=p^k$ 时有完全集，其中 k 为自然数而 p 为素数(即 $N(p^k)=p^k-1$). 下面是 $N(n)$ 的已知下界:

$n\geqslant$	7	52	53	63	90
$N(n)\geqslant$	2	3	4	5	6

另外还有: $N(12)\geqslant 5$, $N(33)\geqslant 3$, $N(35)\geqslant 4$, $N(40)\geqslant 4$, $N(45)\geqslant 4$, 并且已证明，当 $n\to\infty$ 时有 $N(n)\to\infty$; 例如当 n 充分大时，有 $N(n)>n^{1/17}-2$(见[2]). 如果 $n\equiv 1 \pmod 4$ 或 $n=2 \pmod 4$，并且数 n 的非平方因子中即使包含一个素因子 $p\equiv 3 \pmod 4$，则不存在两两正交的 n 阶拉丁方的完全集. 例如，对 $n=2p$, $p\equiv 3 \pmod 4$ 就不存在完全集.

由于完全集也可解释为有限射影平面(见[2])，所以两两正交拉丁方的完全集在构造具有参数 $v=n^2+n+1$, $k=n+1$, $\lambda=1$ 的对称平衡不完全区组设计(见**区组设计**(block design))上有统计的应用.

已提出构造正交拉丁方的许多方法(见[2]). 其目的都在于得到两两正交 n 阶拉丁方的最大可能的集合. 所有方法分为两类: 第一类(直接构造)方法，其特征在于提供构造一个"基本"拉丁方的方法，并说明如何交换各行和各列以得到其正交伴侣. 第二类(递归)方法是利用构造低阶正交拉丁方的已知方法去构造给定阶的正交拉丁方.

如果 $A=\|a_{ij}\|$ 是集合 S 上的 n 阶拉丁方，那么对于 $i\in S$ 由方程 $\sigma_i(j)=a_{ij}$ 定义的置换 σ_i 的有序集唯一地确定了 A. 但并非置换的每一个有序集都对应于一个拉丁方. 如果 $A=[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]$ 和 $B=[\tau_1,\cdots,\tau_n]$ 是按上述方式由集合 S 的置换 σ_i 和 τ_i 定义的两个拉丁方，那么 $A\perp B$，当且仅当 $[\sigma_1^{-1}\tau_1,\cdots,\sigma_n^{-1}\tau_n]$ 是一个拉丁方. 如果对 S 的置换 α 和 β 定义乘积 $\alpha A=[\alpha\sigma_1,\cdots,\alpha\sigma_n]$ 和 $A\beta=[\sigma_1\beta,\cdots,\sigma_n\beta]$，则例如 $A\perp\alpha A$，当且仅当 $[\sigma_1^{-1}\alpha\sigma_1,\cdots,\sigma_n^{-1}\alpha\sigma_n]$ 是一个拉丁方.

当 A 是一个有限群 G 的乘法表时，即 $a_{ij}=g_ig_j$，其中 $g_i,g_j\in G$, $i,j\in S$，常使用第一类方法; 两种方法之间的差别在于群 G 的选择、群 G 到其自身的一一映射 α 和 β 的选择、以及乘积 αA, $A\beta$, $\alpha^{-1}A\alpha$ 的运用等等.

如果 G 是一个加法群，那么条件 $A\perp\alpha A$ 化为 α 是 G 的**正交态射**(orthomorphism)，即 G 到自身的一一映射，使得对 $g_1,g_2\in G$，若 $\alpha(g_1)-g_1=\alpha(g_2)-g_2$，则 $g_1=g_2$. 例如，5 个两两正交的 12 阶拉丁方，是通过定义 Abel 群的 4 个非平凡的正交态射而找到的，这个 Abel 群是 6 阶和 2 阶循环群的直积([2],[6]).

如果 G 是有限域 $GF(p^r)=\{a_0=0, a_1=1, a_2,\cdots,a_{n-1}\}$ 的加法群，其中 $n=p^r$，则所有构造方法都大为简化，并得到下列两两正交拉丁方的完全集:

$$A_k=\|a_{ij}^k\|,\ a_{ij}^k=a_ia_k+a_j;$$
$$i,j\in\{0,\cdots,n-1\},\ k\in\{1,\cdots,n-1\}.$$

注意，当且仅当 $n\neq 2,3,6$ 时，存在一个 n 阶拉丁方 A 使 $A\perp A^T$(即一个**自正交拉丁方**(self-orthogonal Latin square)).

运用拉丁方的直积是构成下述第二类方法的基础. 设 A_1 和 B_1 是集合 X 上的 n 阶正交拉丁方，A_2 和 B_2 是集合 Y 上的 m 阶正交拉丁方，那么矩阵的直积 $A_1\times A_2$ 和 $B_1\times B_2$ 是集合 $X\times Y$ 上的 mn 阶正交拉丁方. 如果 $n=p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$，那么这个方法得到估计 $N(n)\geqslant\min(p_i^{k_i}-1)$.

下述的构造方法是第二类中许多其他方法的基础. 设 A_1, B_1, C_1 是集合 $S_1=\{1,\cdots,m\}$ 上两两正交的 $m\geqslant 2n$ 阶的拉丁方，A_2 和 B_2 是集合 $S_2=\{m+1,\cdots,m+n\}$ 上的 n 阶正交拉丁方. 为了得到集合 $S=S_1\cup S_2$ 上的两个 $m+n$ 阶拉丁方 A 和 B，通过对 A_1 增加空位的第 $m+1,\cdots$，第 $m+n$ 行和列，得到一个左上角为 A_1 的 $m+n$ 阶部分拉丁方. A_1 和 B_1 中与 C_1 中包含元素 i 所在位置相应的那些位置，构成了 A_1 和 B_1 的一个公共的 i 横截，$i=1,\cdots,m$. 对于 $i=1,\cdots,n$，A_1 的 i 横截的元素都改成 $m+i$ 后再按它们在 A_1 中行(列)的顺序放置在第 $m+i$ 列(行). 然后把 A_2 放置在这个部分拉丁方的右下角而得到 A.

按相同的方法由 B_1 和 B_2 构造 B，不过此时用 $n+1,\cdots,2n$ 横截. 方阵 A 和 B 是拉丁方，但它们不一定正交. 如果 $m=p^k\neq 13$、p 是奇数且 $n=(m-1)/2$，那么总能得到一对 $m+n$ 阶的正交拉丁方; 应用上述构造方法，当 $n\equiv 2 \pmod 4$, $n>6$,

已经知道如何得到一对 n 阶正交拉丁方(见[2]).

正交拉丁方在统计学、信息论和试验设计中的应用([2])要求构造一些特殊形式的正交拉丁方，并且正交性概念转移到其他学科里．因此，**正交阵列**(orthogonal array)就是正交拉丁方的一种推广．两个同阶的部分拉丁方是正交的(orthogonal)，如果把它们叠置后各位置上的元素的有序对都不相同．一个部分拉丁方 A，如果与拉丁方 B 的某个子矩阵相同(A 的空位除外)，则称拉丁方 A 嵌入(imbedded) B．两两正交部分拉丁方集合中每一个拉丁方能嵌入到一个拉丁方，使得到的诸拉丁方正交([6]).

参考文献

[1] Сачков, В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

[2] Dénes, J. and Keedwell, A. D., Latin squares and their applications, Acad. Press, 1974.

[3] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, reprint, 1986.

[4] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Math. Assoc. Amer., 1963(中译本：H. J. 赖瑟，组合数学，科学出版社，1983).

[5] Hedayat, A. and Seiden, E., On the theory and application of sum composition of Latin squares and orthogonal Latin squares, *Pacif. J. Math.*, **54** (1974) 2, 85 − 113.

[6] Lindner, Ch., Embedding orthogonal partial Latin squares, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **59** (1976), 1, 184 − 186.

В. М. Михеев 撰

【补注】 不存在两个 6 阶正交拉丁方的完整证明见[A1]．关于 $N(n)$ 的另外一些界如下：

1．对于头几个非素数幂有：$N(14)\geqslant 3$，$N(15)\geqslant 4$，$N(18)\geqslant 3$，$N(20)\geqslant 4$，$N(21)\geqslant 4$，$N(22)\geqslant 3$，$N(24)\geqslant 4$，见[A1]或[A2]，这两个参考文献还有 $n\leqslant 100$ 时 $N(n)$ 下界的一个表.

2．除上述主要文章提到的外，还有(见[A1])

$n=$	11	77	181	65279
$N(n)\geqslant$	3	6	7	30

3．目前最好的渐近界是 $N(n)\geqslant n^{1/148}$(见[A3]).

4．Bruck-Ryser 定理断言：当 $n\equiv 1$或$2 \pmod 4$ 且 n 的非平方因子中有一个素数 $p\equiv 3 \pmod 4$，那么不存在两两正交拉丁方的完全集．联系于 Bruck 的完全性定理，这个不存在性的结果给出了关于 $N(n)$ 的几个仅知的非平凡上界，如 $N(n)\leqslant n-4$，$n=6$，14，21，22；及 $N(n)\leqslant n-5$，$n=30$，33，38，42，46，54，57，62，…(见[A1]).

k 个两两正交的 n 阶拉丁方(MOLS)集合等价于一个 n 阶 $k+2$ 度网(或对偶地，一个横截设计)．这就使人们能把 MOLS 的研究作为有限几何的一部分，并将其与几何不变量联系起来(如自同构群和射影的群)．有关的基本结果见[A1]，近期的一个综述见[A2].

4个已知的 15 阶的 MOLS 也是应用正交态射得到的．用 n 阶加群的正交态射构造 MOLS，能更方便地用 G 上的"差矩阵"描述．设 D 是由 G 中元素构成的 k 行 n 列矩阵．如果这 n 个差 $d_{ij}-d_{hj}$ 含 G 中每一个元素恰好一次(对 D 的行 h 和 i 的所有选择)，则 D 称为差矩阵(difference matrix)．D 可以用于构造 $k-1$ 个 n 阶的 MOLS．大部分直接构造方法都是这种处理的更复杂形式(见[A1]和[A2])，并因此被称为"差方法".

最重要的递归构造方法更多地涉及和应用 MOLS 作为横截设计的几何解释，见[3]和[A1].

关于自正交拉丁方的存在性见[A1]；关于正交拉丁方的应用亦见[A4].

参考文献

[A1] Beth, T., Jungnickel, D. and Lenz, H., Design theory, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A2] Jungnickel, D., Latin squares, their geometries and their groups. A survey, in Proc. IMA Workshops on Coding and Design Theory Minneapolis. 1988, Springer, To appear.

[A3] Beth, T., Eine Bemerkung Zur Abschäftzung der Anzahl orthogonaler lateinischer Quadrate mittels siebverfahren, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **53** (1983), 284 − 288.

[A4] Hedayat, A. S. and Stufken, J., Orthogonal arrays and their applications, To appear.

【译注】 关于 $N(n)$ 的渐近界的目前最好记录属于中国学者陆鸣皋，他的结果是当 $n\to\infty$ 时 $N(n)\geqslant n^{\frac{10}{143}}-2$(见[B2])．[B1]是专著[2]的新版.

参考文献

[B1] Denes, J. and Keedwell, A. D., Latin square, new developments in the theory and applications, *Ann. Discrete Math.*, **46** (1991).

[B2] 陆鸣皋, Maximum number of mutually orthogonal Latin squares, *Chinese Sciense Bulletin*, **30** (1985), 154 − 159.

刘振宏 译 李 乔 校

正交矩阵 [**orthogonal matrix**; **ортогональная матрица**]

具有单位元 1 的交换环 R 上的一个**矩阵**(matrix)，其**转置矩阵**(transposed matrix)与逆矩阵相同．正交矩阵的行列式等于 ± 1．R 上的所有 n 阶正交矩阵的集合构成**一般线性群**(general linear group) $\mathrm{GL}_n(R)$ 的一个子群．对任何实正交矩阵 a，存在一个实正交矩阵 c，使得

$$cac^{-1} = \mathrm{diag}[\pm 1, \cdots, \pm 1, a_1, \cdots, a_t],$$

其中

$$a_j = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{matrix} \right\|.$$

一个非退化复矩阵 a 相似于一个复正交矩阵，当且仅当其**初等因子**（elementary divisors）系具有下列性质：

1）对 $\lambda \neq \pm 1$，初等因子 $(x-\lambda)^m$ 和 $(x-\lambda^{-1})^m$ 重复相同的次数；

2）每个形如 $(x\pm 1)^{2l}$ 的初等因子都重复偶数次．

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975（英译本：Mal'tsev, A. I., Foundations of linear algebra, Freeman, 1963）．

Д. А. Супруненко 撰

【补注】 由正交矩阵 A 关于标准基 $\alpha(x) = Ax(x\in \mathbf{R}^n)$ 定义的映射 $\alpha: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，保持标准内积不变，因此定义了一个正交映射（orthogonal mapping）．更一般地，若 V 和 W 是具有内积 $\langle, \rangle_V$，$\langle, \rangle_W$ 的内积空间，则使得 $\langle\alpha(x), \alpha(y)\rangle_W = \langle x, y\rangle_V$ 的线性映射 $\alpha: V\to W$ 称为正交映射．

任何非奇异（复或实）矩阵 M 允许一个**极分解**（polar decomposition）$M = SQ = Q_1S_1$，其中 S 和 S_1 对称，Q 和 Q_1 正交．

参考文献

[A1] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, М., 1953（中译本：Φ. P. 甘特马赫尔，矩阵论，上、下册，高等教育出版社，1955）．

[A2] Noll, W., Finite dimensional spaces, Nijhoff, 1987.

[A3] Turnball, H. W. and Aitken, A. C., An introduction to the theory of canonical matrices, Blackie & Son, 1932.

杜小杨 译

正交网 [orthogonal net; ортогональная сеть]

曲面上两族切方向彼此正交的曲线网．正交网的例子包括极小曲面上的**渐近网**（asymptotic net）和由曲率线构成的网（见**曲率线网**（curvature lines, net of））．

【补注】

参考文献

[A1] Millman, R. S. & Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977, p. 101（中译本：R. S. 密尔曼，G. D. 派克，微分几何原理，广东高等教育出版社，1987年）．

А. Б. Иванов 撰　沈一兵 译

正交多项式 [orthogonal polynomials; ортогональные многочлены]

一个多项式系 $\{P_n\}$，满足正交性条件

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)h(x)dx = 0,\ n\neq m,$$

其中每个多项式 P_n 的次数等于它的指标 n，在区间 (a, b) 上或者（当 a 和 b 有限时）在区间 $[a, b]$ 上权函数（权）$h(x)\geqslant 0$．一个正交多项式系称为规范化的（normalized），并且记为 $\{\hat{P}_n\}$，如果其中每个多项式的首项系数都是正的，并且规范化条件（normalizing condition）

$$\int_a^b \hat{P}_n^2(x)h(x)dx = 1$$

成立．如果每个多项式的首项系数都等于 1，则这个多项式系记为 $\{\tilde{P}_n\}$．

正交多项式系 $\{\hat{P}_n\}$ 唯一确定，如果权函数（微分权（differential weight））$h(x)$ 在 (a, b) 上是 Lebesgue 可积的，且不等于零，在无界区间 (a, b) 的情况下，具有有限矩

$$h_n = \int_a^b x^n h(x)dx.$$

代替微分权 $h(x)$，可以考察积分权（integral weight）$d\sigma(x)$，其中 $\sigma(x)$ 是具有无穷多个增长点的有界非减函数（在这种情况下，正交性条件中的积分应理解为 Lebesgue-Stieltjes 意义下的积分）．

为使 n 次多项式 P_n 属于具有权 h 的正交多项式系 $\{P_n\}$，其必要和充分条件是：对于任何 $m(<n)$ 次多项式 Q_m，条件

$$\int_a^b P_n(x)Q_m(x)h(x)dx = 0$$

成立．如果正交性区间 (a, b) 关于坐标原点是对称的，权 h 是偶函数，则每个多项式 P_n 仅包含这样一些 x 的幂，它们与数 n 具有相同的奇偶性，也就是说，有恒等式

$$P_n(-x) \equiv (-1)^n P_n(x).$$

在无界区间 (a, b) 的情况下，正交多项式的零点都是实的、不同的，且分布在 (a, b) 内，在多项式 P_n 的两个相邻零点之间存在多项式 P_{n-1} 的一个零点．正交多项式的零点常常取作插值公式和求积公式的结点．

一个正交多项式系的任何三个相继多项式由下列递推公式相联系：

$$P_{n+1}(x) = (a_nx+b_n)P_n(x) - c_nP_{n-1}(x),$$

$$n = 1, 2, \cdots,$$

其中

$$P_0(x) = \mu_0,$$

$$P_1(x) = \mu_1 x + \nu_1, \cdots,$$

$$P_n(x) = \mu_n x^n + \nu_n x^{n-1} + \cdots,$$

$$a_n = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}, \; b_n = a_n\left[\frac{\nu_{n+1}}{\mu_{n+1}} - \frac{\nu_n}{\mu_n}\right],$$

$$c_n = \frac{\mu_{n+1}\mu_{n-1}}{\mu_n^2} \cdot \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}, \; d_n^2 = \int_a^b P_n^2(x)h(x)dx.$$

数 d_n^{-1} 是多项式 P_n 的正规化因子，使得多项式系 $\{d_n^{-1}P_n\}$ 规范正交化，即

$$d_n^{-1}P_n(x) = \hat{P}(x).$$

对于正交多项式，有 Christoffel-Darboux 公式 (Christoffel-Darboux formula)：

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{d_k^2} P_k(x)P_k(t) =$$

$$= \frac{1}{d_n^2} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}.$$

正交多项式可以通过权函数 $h(x)$ 的矩 $\{h_k\}$ 由公式

$$\hat{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \psi_n(x)$$

来表示，其中

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_n \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix},$$

而行列式 Δ_{n-1} 是由 $\psi_n(x)$ 去掉最后一行和最后一列而得到的，Δ_n 是由 $\psi_{n+1}(x)$ 用同样方式得到的.

在首项系数为 1 的 n 次多项式 $\widetilde{Q}_n$ 的集合上泛函

$$F(\widetilde{Q}_n) = \int_a^b \widetilde{Q}_n^2(x)h(x)dx$$

达到极小值，当且仅当

$$\widetilde{Q}_n(x) \equiv \widetilde{P}_n(x);$$

并且，这个极小值等于 d_n^2.

如果多项式 $\{P_n\}$ 在区间 $[a, b]$ 上关于权 h 为规范正交的，则当 $p > 0$ 时多项式

$$\hat{Q}_n(t) = \sqrt{p}\,\hat{P}_n(pt+q), \; n = 0, 1, \cdots$$

在区间 $[A, B]$ 上关于权 $h(pt+q)$ 为规范正交的，其中区间 $[A, B]$ 经过线性变换 $x = pt + q$ 之后变换为区间 $[a, b]$. 因此，当研究正交多项式的渐近性质时，首先考虑标准区间 $[-1, 1]$ 的情况，然后再把这样得到的结果推广到其他情况.

在解数学物理边值问题时遇到的一些最重要的正交多项式就是所谓的**经典正交多项式** (classical orthogonal polynomials)：**Laguerre 多项式** (Laguerre polynomials) $\{L_n(x;\alpha)\}$ (其中 $h(x) = x^\alpha e^{-x}(\alpha > -1)$，正交性区间为 $(0, \infty)$)、**Hermite 多项式** (Hermite polynomials) $\{H_n(x)\}$ (其中 $h(x) = \exp(-x^2)$，正交性区间为 $(-\infty, \infty)$)；**Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials) $\{P_n(x;\alpha,\beta)\}$ (其中 $h(x) = (1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\beta$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$，正交性区间为 $[-1, 1]$) 及其特殊情况：**超球多项式** (ultraspherical polynomials) 或 Gegenbauer 多项式 $\{P_n(x, \alpha)\}$ (其中 $\alpha = \beta$)，**Legendre 多项式** (Legendre polynomials) $\{P_n(x)\}$ (其中 $\alpha = \beta = 0$)，以及第一类和第二类 **Чебышев 多项式** (Chebyshev polynomials) $\{T_n(x)\}$ (其中 $\alpha = \beta = -1/2$) 和 $\{U_n(x)\}$ (其中 $\alpha = \beta = 1/2$).

经典正交多项式 $\{K_n(x)\}$ 的权函数 $h(x)$ 满足 Pearson 微分方程 (Pearson differential equation)

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} = \frac{A(x)}{B(x)},$$

$$x \in (a, b),$$

并且在正交性区间的端点上条件

$$\lim_{x \downarrow a} h(x)B(x) = \lim_{x \uparrow b} h(x)B(x) = 0$$

成立.

多项式 $y = K_n(x)$ 满足微分方程

$$B(x)y'' + [A(x) + B'(x)]y' - n[p_1 + (n+1)q_2]y = 0.$$

对于经典正交多项式来说，有广义 Rodrigues 公式 (generalized Rodrigues formula)

$$K_n(x) = \frac{c_n}{h(x)} \frac{d^n}{dx^n}[h(x)B^n(x)],$$

其中 c_n 是规范化系数，以及微分公式

$$\frac{d}{dx} L_n(x;\alpha) = -L_{n-1}(x;\alpha+1),$$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} P_n(x;\alpha,\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1)P_{n-1}(x;\alpha+1,\beta+1).$$

对于经典正交多项式的一些特殊情况，存在下列通过**超几何函数**（hypergeometric function）的表示式：

$$P_n(x, \alpha, \beta) =$$

$$= \left[\frac{n+\alpha}{n} \right] F\left[-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2} \right],$$

$$P_n(x) = F\left[-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2} \right],$$

$$T_n(x) = F\left[-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2} \right],$$

$$U_n(x) = (n+1) F\left[-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2} \right]$$

以及通过**退化超几何函数**（degenerate hypergeometric function）的表示式：

$$L_n(x; \alpha) = \left[\frac{n+\alpha}{n} \right] \Phi(-n; \alpha+1; x),$$

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi\left[-n; \frac{1}{2}; x^2 \right],$$

$$H_{2n+1}(x) =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2x\Phi\left[-n; \frac{3}{2}; x^2 \right].$$

在历史上，最先研究的正交多项式是 Legendre 多项式．后来出现的是 Чебышев 多项式，一般 Jacobi 多项式，Hermite 多项式和 Laguerre 多项式．所有这些经典正交多项式在许多应用问题中都起着重要的作用．

正交多项式的一般理论是由 П．Л．Чебышев 建立的．他所用的基本研究工具是积分

$$\int_a^b \frac{h(t)}{x-t} dt$$

的**连分数**（continued fraction）展开式；这个连分数的渐近分数的分母构成一个在区间 (a, b) 上具有权函数 $h(t)$ 的正交多项式系．

在研究正交多项式时，人们把最大的注意力放在它们的渐近性质上，因为 **Fourier 级数（关于正交多项式的）**（Fourier series (in orthogonal polynomials)）的收敛条件依赖于这些性质．

经典多项式的渐近性质首先由 В．А．Стеклов 在 1907 年进行了研究（见[8]）．他应用并改善了 Liouville 方法，这种方法从前曾被用来研究 Sturm - Liouville 方程的解．Liouville - Стеклов 方法后来得到了广泛应用，其结果之一，就是对 Jacobi，Hermite 和 Laguerre 正交多项式的渐近性质进行了深入研究．

对于在区间 $[-1, 1]$ 上关于满足某些定性条件的任意权的正交性的一般情况，G．Szegö 于 1920 — 1924 年首先发现了一些正交多项式的渐近公式．他引入了一些在圆上正交的多项式，研究了它们的基本性质，找到了用在圆上正交的多项式来表示在 $[-1, 1]$ 上正交的多项式的一个极其重要的公式．当研究在圆上正交的多项式的渐近性质时，Szegö 发展了以应用解析函数论的方法和结果来表示非负三角多项式的 Fejér 定理的特殊推广为基础的一种方法．

1930 年，С．Н．Бернштейн（[2]）在他的关于正交多项式的渐近性质的研究中使用了函数逼近论的方法和结果．他考察了权函数的形式为

$$h(x) = \frac{h_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1, 1) \qquad (1)$$

的情况，其中函数 $h_0(x)$ 称为三角权（trigonometric weight），满足条件

$$0 < c_1 \leqslant h_0(x) \leqslant c_2 < \infty.$$

如果函数 $h_0(x)$ 在整个区间 $[-1, 1]$ 上满足阶为 $\gamma = 1+\varepsilon$（其中 $\varepsilon > 0$）的 Dini - Lipschitz 条件（Dini - Lipschitz condition），即

$$|h_0(x+\delta) - h_0(x)| \leqslant \frac{M}{|\ln|\delta||^\gamma},$$
$$x, x+\delta \in [-1, 1],$$

则对于在整个区间 $[-1, 1]$ 上关于权（1）正交的多项式 $\{\hat{P}_n\}$，有渐近公式

$$\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi h_0(x)}} \cos(n\theta + q) + O\left[\frac{1}{(\ln n)^\varepsilon} \right],$$

其中 $\theta = \arccos x$，且 q 依赖于 θ．

在研究关于正交多项式的 Fourier 级数的收敛性时，产生了正交多项式在一点上，在一个集合 $A \subset [-1, 1]$ 上，或者在整个正交性区间 $[-1, 1]$ 上的有界性条件的问题，即考察在怎样的条件下类型为

$$|\hat{P}_n(x)| \leqslant M, \ x \in A \subseteq [-1, 1] \qquad (2)$$

的不等式才会出现．В．А．Стеклов（1921）首先提出了这个问题．如果三角权 $h_0(x)$ 在集合 A 上下有界，下界大于零，即如果

$$h_0(x) \geqslant c_3 > 0, \ x \in A \subseteq [-1, 1], \qquad (3)$$

且满足某些附加条件，则不等式（2）成立．在一般情况下，当 $A = [-1, 1]$ 时，不需附加条件，便可从（3）得到

$$|\hat{P}_n(x)| \leqslant \varepsilon_n \sqrt{n}, \ \varepsilon_n \to 0, \ x \in [-1, 1]. \quad (4)$$

权函数的零点是下述意义下的奇点：序列 $\{\hat{P}_n\}$ 的性质在零点和在正交性区间的其他点上本质上是不

同的．例如，设权函数具有形式

$$h(x)=\frac{h_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\gamma_k},$$

$$\gamma_k>0,\ x_k(-1,1).$$

这时，如果函数 $h_1(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是正的，且满足 Lipschitz 条件，则序列 $\{\hat{P}_n\}$ 在每个不含点 $\{x_k\}$ 的区间 $[a,b]\subset[-1,1]$ 上是有界的，而在零点上不等式

$$|\hat{P}_n(x_k)|\leqslant c_4(n+1)^{\gamma_k/2},\ k=1,\cdots,m$$

成立．

对权函数的零点处于正交性区间端点的情况，С. Н. Бернштейн 进行了研究（[2]）．其结果之一是：如果权函数具有形式

$$h(x)=h_1(x)(1-x)^{\alpha}(1+\alpha)^{\beta},\ x\in[-1,1],$$

其中函数 $h_1(x)$ 是正的、且满足 Lipschitz 条件，则对于 $\alpha>-1/2$，$\beta>-1/2$，正交多项式存在下列加权估计：

$$(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}|\hat{P}_n(x)|\leqslant c_5,$$

$$x\in[-1,1],$$

而在点 $x=\pm1$ 上它们分别以速度 $n^{\alpha+1/2}$ 和 $n^{\beta+1/2}$ 增加．

在正交多项式的理论中，常常研究所谓比较定理．其中之一是 Korous 比较定理（Korous comparison theorem）：如果在区间 $[\dot{a},\dot{b}]$ 上关于权 $p(x)$ 正交的多项式 $\{\hat{\omega}_n(x)\}$ 在集合 $A\subset[-a,a]$ 上是一致有界的，则关于权 $h(x)=p(x)q(x)$ 正交的多项式 $\{\hat{P}_n(x)\}$ 在这个集合上也是有界的，其中乘子 $q(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是正的，且满足阶 $\alpha=1$ 的 Lipschitz 条件．类似地，当给定关于 $q(x)$ 的某些条件时，渐近公式以及其他渐近性质可以从正交多项式系 $\{\hat{\omega}_n\}$ 转移到 $\{\hat{P}_n\}$．而且，如果 $q(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 m 次非负多项式，则多项式 $\{\hat{P}_n\}$ 可以通过多项式 $\{\hat{\omega}_n\}$ 用 $m+1$ 阶行列式来表示（见 [8]）．对于形式为

$$\frac{1}{Q_m(x)\sqrt{1-x^2}},\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{Q_m(x)},$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \frac{1}{Q_m(x)}.$$

的权函数，其中 $Q_m(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的任意正多项式，也得到了一些关于正交多项式的有效公式（见 [8]）．在大多数情况下，对于大的指标 n，计算具有任意权的正交多项式是困难的．

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М. - Л., 1947, 103 - 126, 314 - 334; 335 - 341 357 - 374.

[2] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954 7 - 106.

[3] Геронимус, Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М. - Л., 1950.

[4] Суетин, П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979.

[5] Никифоров, А. Ф., Уваров, В. Б., Специальные функции математической физики, М., 1978 (英译本: Nikiforov, A. F. and Uvarov, V. B., Special functions of mathematical physics, Birkhäuser, 1988).

[6] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 2. Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials, McGraw - Hill, 1953 (中译本: A. 爱尔台里等编，高级超越函数，上海科学技术出版社，1957，1958).

[7] Jackson, D., Fourier series and orthogonal polynomials, Math. Assoc. Amer., 1971.

[8] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[9] Справочник по специальным функциям , М., 1979 (译自英文).

[10] Shohat, J. A., Hille, E. and Walsh, J. L., A bibliography on orthogonal polynomials, Nat. Acad. Sci. USA, 1940.

П. К. Суетин 撰

【补注】 亦见 **Fourier 级数（关于正交多项式的）**（Fourier series (in orthogonal polynomials)）．另外两本教科书是 [A3] 和 [A2]．关于经典正交多项式历史的更多的信息，见 [A1]．关于经典正交多项式的渐近性质，应当注意到 Стеклов 以前的许多作者（P. S. Laplace, E. Heine, G. Darboux, T. J. Stieltjes, E. Hilb 等），但是 Стеклов 首先采用了 Liouville 方法．

关于正交多项式的许多方面的完善综述，见 [A5]．特别是，在有界区间上具有权函数的正交多项式的一般理论已取得很大进展，亦见 [A4]．

参考文献

[A1] Askey, R., Discussion of Szego's paper "An outline of the history of orthogonal polynomials", in R. Askey (ed) G. Szegö, Collected Works. Vol. 3, Birkhäuser, 1982, 866 - 869.

[A2] Chihara, T. S., An introduction to orthogonal polynomials. Gordon & Breach, 1978.

[A3] Freud, G., Orthogonal polynomials, Pergamon. 1971.

[A4] Lubinsky, D. S., A survey of general orthogonal polynomials for weights on finite and infinite intervals, *Acta Applic. Math.*, 10 (1987), 237 - 296.

[A5] Nevai, P. (ed.), Orthogonal polynomials; theory and practice, Kluwer, 1990.

杜小杨　张鸿林 译

正交多项式（复域上的）[**orthogonal polynomials on a complex domain**; **ортогональные многочлены в комплексной области**]

在圆上、围道上以及区域上正交的多项式的统称．与实域上正交多项式的情形不同，以上三类多项式都可以有虚数系数，而且每一个独立变量考虑取遍所有的复数值．在复域上正交这一情形的独特之处在于：复变量的解析函数，如果在解析区域的边界的一个邻域内满足某些补充条件，则通常总能展成关于这些正交多项式系的 Fourier 级数（见 **Fourier 级数（关于正交多项式的）**（Fourier series (in orthogonal polynomials)））.

圆上的正交多项式．多项式系 $\{\varphi_n\}$，其中的每一个 φ_n 具有正首项系数且满足正交性（通常是规范正交性）条件：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,d\mu(\theta)=\delta_{nm},$$

这里，μ 是区间 $[0,2\pi]$ 上具有无穷多个增点的有界非减函数（称为分布函数（distribution function）），δ_{nm} 是 Kronecker 符号．与在区间上正交的情形相同，关于 $\{\varphi_n\}$ 的递推关系式以及和 **Christoffel-Darboux 公式**（Christoffel-Darboux formula）类似的公式成立．

渐近性质是在条件

$$\int_0^{2\pi}\ln\mu'(\theta)\,d\theta>-\infty$$

下进行研究的．作为一种周期情形，圆上正交性已被充分详尽地讨论，而且，用三角多项式逼近周期函数的结果已被成功地使用．

设多项式系 $\{P_n\}$ 在区间 $[-1,1]$ 上关于微分权函数 h 规范正交，并设权函数在圆上有表达式：

$$\mu'(\theta)=h(\cos\theta)|\sin\theta|,$$

则对于 $x=(z^2+1)/2z$，Szegö 公式（Szegö formula）

$$P_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{\varphi_{2n}(0)}{\alpha_{2n}}\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{z^n}\varphi_{2n}(z)+z^n\varphi_{2n}\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

成立，其中的 α_{2n} 是多项式 φ_{2n} 的首项系数．

如果在圆盘 $|z|<1$ 内解析的函数 f 在圆周 $|z|=1$ 上具有非切向边界值，则在某些补充条件下，展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(z),\quad |z|<1 \tag{1}$$

成立．其中的系数 a_n 由公式

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}\,d\mu(\theta)$$

定义．形式（1）的级数是 Taylor 级数的直接推广．如果 $\mu(\theta)=\theta$ 及 $\varphi_n(z)\equiv z^n$．对于分布函数 μ 给出某些条件，则级数（1）和同一函数 f 的 Taylor 级数在圆 $|z|=1$ 的点上同时收敛或发散．换言之，关于这两个级数同等收敛性的定理成立．

围道上的正交多项式．多项式系 $\{P_n\}$，其中的每一个 P_n 具有正首项系数且满足条件

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma P_n(z)\overline{P_m(z)}h(z)|dz|=\delta_{nm},$$

这里，Γ 是复平面上一条可求长的（通常是闭的）Jordan 曲线，权函数 h Lebesgue 可积且在 Γ 上几乎处处取正值．

设 G 是单连通有界区域，其边界是曲线 Γ．设函数 f 在 G 内解析且 f 在围线 Γ 上的边界值关于权函数 h 平方可积．应用系数公式

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(\zeta)\overline{P_n(\zeta)}h(\zeta)|d\zeta|,$$

则对应函数 f，有一个关于正交多项式的 Fourier 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(z). \tag{2}$$

这级数是关于单连通区域情形中正交性的 Taylor 级数的自然推广，而且被用来表示解析函数．如果完全性条件（completeness condition）

$$\inf_{\{Q_n\}}\int_\Gamma h(z)|f(z)-Q_n(z)|^2|dz|=0$$

（其中的下确界遍历所有的多项式 Q_n）得以满足，则级数（2）在围道 Γ 上加权 h 平均收敛于函数 f，而且在某些补充条件下，在区域 G 的内部也如此．

区域上的正交多项式．多项式系 $\{K_n\}$，其中的每一个 K_n 具有正首项系数并满足条件

$$\iint_G K_n(z)\overline{K_m(z)}h(z)\,dx\,dy=\delta_{nm},$$

其中的权函数 h 非负，在有界区域 G 上关于面积可积而且不恒为零．如果完全性条件（completeness condition）

$$\inf_{\{Q_n\}}\iint_G h(z)|f(z)-Q_n(z)|^2\,dx\,dy=0$$

（其中的下确界遍历所有多项式 Q_n 的集合）得以满足，则在单连通区域 G 内解析的函数 f 的关于多项

式系 $\{K_n\}$ 的 Fourier 级数，(关于区域 G 的面积)加权 h 平均收敛于 f，而且在某些补充条件下，在区域 G 的内部也如此．

参考文献

[1A] Szegö, G., Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen, I. *Math. Z.*, 6(1920), 167 – 202. Also Collected Works, Vol. 1, Birkhäuser, 1982, 237 – 272.

[1B] Szegö, G., Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Forme, II. *Math. Z.*, 9(1921), 167 – 190. Also Collected Works, Vol. 1, Birkhäuser, 1982, 279 – 305.

[1C] Szegö, G., Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören, *Math Z.*, 9 (1921), 218 – 270. Also: Collected Works, Vol. 1, Birkhäuser, 1982, 316 – 368.

[2] Carleman, T., Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen. *Ark. för Mat. Astr. och Fys.*, 17(1922 – 1923), 1 – 30.

[3] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[4] Геронимус, Я. Л., Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., 1958 (英译本: Geronimus, Ya. L., Palynomials orthogonal on a circle and interval, Pergamon, 1960).

[5] Смирнов, В. И., 《Журнал Ленинградского физико-матем. об-ва》, 2(1928), 155 – 179.

[6] Коровкин, П. П., 《Матем. сб.》, 9 (1941), 469 – 485.

[7] Суетин, П. К., 《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 41 – 88.

[8] Суетин, П. К., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 100(1971), 1 – 96.　　П. К. Суетин 撰

【补注】 也见最新水平的文章 [A2] (关于理论) 及 [A1] (关于数字信号处理方面的应用)．

参考文献

[A1] Delsarte, Ph. and Genin, Y., On the role of orthogonal polynomials on the unit circle in digital signal processing applications, in P. Nevai (ed.): Orthogonal Polynomials: theory and practice, Kluwer, 1990, 115 – 133.

[A2] Saff, E. B., Orthogonal polynomials from a complex perspective, in P. Nevai (ed.), Orthogonal Polynomials: theory and practice, Kluwer, 1990, 363 – 393.

朱学贤 译　刘和平 校

正交投影算子 [orthogonal projector 或 orthoprojector; ортогональный проектор]

Hilbert 空间 (Hilbert space) H 到其子空间 L 上的一个映射 P_L 使得 $x - P_L x$ 正交于 $P_L x$: $x - P_L x \perp P_L x$. 正交投影算子是作用在 Hilbert 空间 H 上的有界自伴算子，使得 $P_L^2 = P_L$ 和 $\|P_L\| = 1$. 另一方面，如果给定一个作用在 Hilbert 空间 H 上使得 $P^2 = P$ 的有界**自伴算子** (self-adjoint operator)，则 $L_P = \{Px: x \in H\}$ 是一个子空间，且 P 是到 L_P 上的正交投影算子．两个正交投影算子 P_{L_1}, P_{L_2} 称为正交的 (orthogonal)，如果 $P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_2}P_{L_1} = 0$; 这等价于条件 $L_1 \perp L_2$.

正交投影算子的性质．1) 为了两个正交投影算子的和 $P_{L_1} + P_{L_2}$ 本身是正交投影算子，其必要充分条件是 $P_{L_1}P_{L_2} = 0$. 在这情况下 $P_{L_1} + P_{L_2} = P_{L_1 \oplus L_2}$; 2) 为了复合 $P_{L_1}P_{L_2}$ 是正交投影算子，其必要充分条件是 $P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_2}P_{L_1}$，在这情形下 $P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_1 \cap L_2}$.

正交投影算子 $P_{L'}$ 称为正交投影算子 P_L 的一个部分 (part of an orthogonal projector)，如果 L' 是 L 的子空间．在这情形下 $P_L - P_{L'}$ 是 $L \ominus L'$ (L' 在 L 中的正交补 (orthogonal complement)) 上的正交投影算子．特别地，$I - P_L$ 是在 $H \ominus L$ 上的正交投影算子．

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд. М., 1965 (中译本: Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概要, 第二版, 科学出版社, 1985).

[2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966.

[3] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955 (译自法文) (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980).　　В. И. Соболев 撰

【补注】 亦见**投影算子** (projector)．

葛显良 译　鲁世杰 校

正交级数 [orthogonal series; ортогональный ряд]

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \in X \tag{1}$$

的级数，其中 $\{\varphi_n\}$ 是一个关于测度 μ 的函数的**规范正交系** (orthonormal system):

$$\int_X \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,d\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j, \\ 1, & \text{当 } i = j. \end{cases}$$

自 18 世纪以来，在研究数学、天文学、力学和物理学的各种问题 (行星运动，弦、膜的振动等等) 时，某些特殊的规范正交系和函数对于它们的展开出现于 L. Euler, D. Bernoulli, A. Legendre, P. Lap-

lace, F. Bessel 和其他一些人的研究工作中. 以下的一些研究工作对正交级数理论的创立有着决定性的影响.

a) J. Fourier 的研究工作(1807 – 1822)(解数学物理边值问题的 **Fourier 法**(Fourier method))以及 J. Sturm 和 J. Liouville 与此相关的工作(1837 – 1841);

b) П. Л. Чебышев 关于插值和矩问题的研究工作(19 世纪中叶),这导致他创立**正交多项式**(orthogonal polynomials)的一般理论;

c) D. Hilbert 关于积分方程的研究工作(20 世纪初,见**具有对称核的积分方程**(integral equation with symmetric kernel)),其中他特别地建立了关于函数对一个规范正交系展开成级数的一般理论;

d) H. Lebesgue 对测度论和 **Lebesgue 积分**(Lebesgue integral)的创立,导致正交级数理论的现代形式.

在 20 世纪中正交级数理论活跃的发展由于在各种各样极其不同的科学领域(数学物理,计算数学,泛函分析,量子力学,数理统计学,算子演算,自动调节与控制,各种技术问题,等等)中规范正交函数系及关于它们的级数的应用而被增强了.

正交级数理论中典型的结果和研究方向. 1) 设 $X=[a, b]$, $d\mu(x)=dx$ 是 Lebesgue 测度,又设 $\{\varphi_n\}$ 是一规范正交系. 如果 $f\in L_2(a, b)$,则数

$$a_n(f)=(f, \varphi_n)=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$$

称为 Fourier 系数(Fourier coefficients),而带有系数 $a_n=a_n(f)$ 的级数(1)称为 f 关于系 $\{\varphi_n\}$ 的 Fourier 级数(Fourier series).

函数系 $\{\varphi_n\}$ 在空间 L_2 中是闭的(closed),如果对任一函数 $f\in L_2$ 和任一数 $\varepsilon>0$,能找到一个多项式

$$\Phi(x)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi_n(x)$$

使得范数 $\|f-\Phi\|_2<\varepsilon$. 函数系 $\{\varphi_n\}$ 相对于 L_2 是完全的(complete),如果由条件 $f\in L_2$ 和对所有的 $n\geqslant 0$, $a_n(f)=0$ 推出几乎处处 $f(x)=0$,即 f 是空间 L_2 的零元.

如果对一函数 $f\in L_2$,等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2(f)=\int_a^b f^2(x)dx \qquad (2)$$

成立,则此函数 f 称为满足 **Ляпунов-Стеклов 闭包条件**(Lyapunov-Steklov closure condition)或 **Parseval 恒等式**(Parseval identity). 这条件等价于 f 的 Fourier 级数的部分和按 L_2 的范数收敛于 f.

封闭性和完全性的定义,以及闭包条件,对更一般的空间和测度可以同样方式给出.

正交级数理论中最重要的问题之一是一个函数用其 Fourier 系数来唯一确定的问题. 对空间 L_2,此问题是与式(2)对所有函数 $f\in L_2$ 满足密切相关的.

方程(2)是由 M. Parseval 于 1805 年对**三角函数系**(trigonometric system)提出的(虽然没有证明),而于 1828 年,Bessel 建立了

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2(f)\leqslant\int_a^b f^2(x)dx \qquad (3)$$

(**Bessel 不等式**(Bessel inequality)). 1896 年,A. M. Ляпунов 对 Riemann 可积函数证明了(2)式,然后 P. Fatou 对 $f\in L_2$ 的情况证明了此式.

B. A. Стеклов(1898 – 1904)提出了一般规范正交系的封闭性问题,又对很多正交函数系肯定地解决了此问题(球面函数,Sturm-Liouville 算子的本征函数,正交 Hermite 多项式系,Laguerre 多项式系,Lamé 函数系以及其他).

不等式(3)已被证明对任意规范正交系和 $f\in L_2$ 是正确的.

1907 年,F. Riesz 和 E. Fisher 证明了:对任一规范正交系 $\{\varphi_n\}$ 和任一数列 $\{a_n\}\in l_2$,可找到一个函数 $f\in L_2$ 使得 $a_n(f)=(f, \varphi_n)=a_n$ 且式(2)成立. 由此定理和 Bessel 不等式推出对任一规范正交系,完全性和封闭性在 L_2 中是等价的;对 $1<p<\infty$,空间 L_p 中的封闭性等价于空间 $L_{p'}$ 中的完全性,其中 $1/p'+1/p=1$ (S. Banach, 1931).

Bessel 不等式和 Riesz-Fischer 定理被 G. H. Hardy, J. E. Littlewood 和 R. Paley 推广到空间 L_p. 事实上,设 $\{\varphi_n\}$ 是一规范正交系,$|\varphi_n(x)|\leqslant M$,且设 $1<p<2$. 则有:

a) 如果 $f\in L_p$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(f, \varphi_n)|^p n^{p-2}\leqslant A\|f\|_p^p.$$

b) 如果一个给定序列 $\{a_n\}$ 满足

$$I\equiv\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p n^{p-2}<\infty,$$

则可找到一个函数 $f\in L_p$ 使得 $(f, \varphi_n)=a_n$ 且 $\|f\|_p^p\leqslant AI$,其中 A 仅依赖于 p 和 M.

2) 正交级数理论中另一个重要问题是函数展开成简单函数的级数问题,该级数按某个空间的范数收敛到这函数. B 空间 E 中的一元素系 $\{\varphi_n\}$ 称为一个**基**(basis)(**无条件基**(unconditional basis)),如果每一个元素 $f\in E$ 可唯一地表成按空间 E 的范数收敛(无条件收敛)于 f 的级数形式

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n,\ a_n=a_n(f). \qquad (4)$$

如果$\{\varphi_n\}$是 E 中一个基，则 $a_n(f)$ 是 E 上连续线性泛函，且如果 $E=L_p(0,1)$, $1<p<\infty$，则具有形式

$$a_n(f)=\int_0^1 f(t)\psi_n(t)dt,$$

其中$\{\psi_n\}$是 $L_{p'}(0,1)$ 中的一个基且$\{\varphi_n,\psi_n\}$是双正交规范系（Banach）. 特别地，如果 $\varphi_n=\psi_n$，即如果$\{\varphi_n\}$是规范正交系，则 L_p 中一个正交基自动地是所有的空间 L_r 的基，其中 r 是 p 和 p' 之间的任一数.

这个问题的研究有两个方向：

α）对一给定的规范正交系$\{\varphi_n\}$，求以$\{\varphi_n\}$为基的空间；

β）对一给定的空间 E，确定它的基或正交基.

在两种情况下，寻求函数 f 的性质与其展开式之间的相互联系.

至于三角函数系，它不是连续函数空间 C 中的一个基（P. du Bois-Reymond, 1876），但是它是空间 $L_p(1<p<\infty)$ 中的一个基（M. Riesz, 1927）. du Bois-Reymond 的结果已推广到所有的一致有界规范正交系.

当 $p\in(4/3, 4)$ 时 Legendre 多项式的规范正交系是空间 L_p 中的一个基，而在其他的空间 L_q 中不是如此（1946－1952, H. Pollard, J. von Neumann 和 W. Rudin）.

1910年，构造了一个规范正交系$\{\chi_m\}_{m=0}^{\infty}$使得每一个连续函数 $f\in C(0,1)$ 可以对这函数系唯一地展成一致收敛的 Fourier 级数（A. Haar）. 然而，**Haar 函数系**（Haar system）$\{\chi_m\}$不是 $C(0,1)$ 中的基，因为当 $m>1$ 时函数 χ_m 是不连续的. 对系$\{\chi_m\}$积分，G. Faber (1910) 证实函数系

$$\{f_n(t)\}\equiv\left\{1, \int_0^t \chi_m(x)dx\right\}$$

是 $C(0,1)$ 中的一个基，从而连续函数空间中的第一个基被找到了. Faber 的结果被 J. Schauder 重新发现（1927），后者也确定了 $C(0,1)$ 中与基$\{f_n\}$同类型的一类基；为纪念后者，术语"Schauder 基"被引入，虽然更正确地应称它为"Faber-Schauder 基".

这些基不是正交的. $C(0,1)$ 中的第一个规范正交基$\{F_n\}$是 Ph. Franklin (1928) 得到的，他用 Schmidt 方法（见**正交化**（orthogonalization））把 Faber-Schauder 系$\{f_n\}$正交化而得到$\{F_n\}$. 在此方向（正交化和积分法）已经引入和研究新的一类基. $C(0,1)$ 中的所有规范正交基自动地是所有 $L_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 的基.

当 $1<p<\infty$, Haar 函数系$\{\chi_m\}$是在所有空间 L_p 中的一个无条件基（1931－1937, Paley, J. Marcinkiewicz）. 对 Franklin 函数系（Franklin system）$\{F_n\}$同样结果也成立.

一般地，在空间 C 和 L 中没有无条件基. 在空间 L_p 中当 $1<p<\infty$ 且 $p\neq 2$ 时，既没有规范化的无条件基，也没有一致有界的无条件基.

3）很多研究致力于三角级数和正交级数的几乎处处收敛问题.

1911年，Н. Н. Лузин 给出系数趋于零的几乎处处发散的三角级数的第一个例子. 这种类型的 Fourier 级数被 А. Н. Колмогоров (1923) 构造出来. Лузин 的结果已经推广到任意的完全规范正交系，而 Колмогоров 的结果已经推广到对一致有界的规范正交基在正测度集上.

具有 $\omega(n_0)>0$ 和 $\omega(n)\uparrow$ 的非负序列$\{\omega(n)\}$称为关于系$\{\varphi_n\}$的级数的几乎处处收敛性的 Weyl 乘子（Weyl multiplier），如果只要

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2(\omega_n)<\infty,$$

每一级数（1）在 $X\equiv[0,1]$ 上几乎处处收敛. 如果 $\omega(n)\equiv 1$ 是 Weyl 乘子，则$\{\varphi_n\}$称为几乎处处收敛的函数系（system of almost-everywhere convergence）. 序列$\{\omega(n)\}$称为关于级数（1）的几乎处处收敛性的正合 Weyl 乘子（exact Weyl multiplier），如果$\{\omega(n)\}$是 Weyl 乘子，而每一个 $\tau(n)=o(\omega(n))$ $(n\to\infty)$ 不是. 关于其他形式的收敛性和可和性的 Weyl 乘子的定义用同样方式给出（依测度收敛，无条件几乎处处收敛，以及其他）.

对某些函数系 Weyl 乘子已经找到. 1913 年，M. Plancheral 证明了$\{\log^3 n\}$是关于任一正交规范系$\{\varphi_n\}$的级数的几乎处处收敛性的 Weyl 乘子，而于1922年，Д. Е. Меньшов 和 H. Rademacher 证实$\{\log^2 n\}$可取作 Weyl 乘子. 最重要地，Меньшов 证明了在正交规范系的整个类上这个结果不能再改进，即$\{\log^2 n\}$是关于某些规范正交系的正合 Weyl 乘子.

随后，$\{\omega(n)\}$是关于正交级数的几乎处处（平均意义下，等等）收敛性或 $(C,1)$ 可和性的 Weyl 乘子的必要充分条件已经找到. 例如，已经证明函数系$\{\operatorname{sign}\sin\pi n x\}$不是几乎处处收敛系. 1975年，构造出了第一个强收敛的完全规范正交系$\{\varphi_n\}$，即级数（1）在 $X=[0,1]$ 上几乎处处收敛当且仅当$\{a_n\}\in l_2$.

在 1927 年，证实了序列 $\omega(n)=\tau(n)\log^2 n$ 是关于任何正交级数的几乎处处无条件收敛性的 Weyl 乘子，如果

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\tau(n)\log n} < \infty .$$

这个结果不能再加强.

1960年证明了 Haar 函数系 $\{\chi_n\}$ 不是几乎处处无条件收敛系. 在此结果的基础上, 也证明了很多函数系 (L_2 中的基, 完全规范正交系, 等等) 不是几乎处处无条件收敛系. 对函数系 $\{\chi_n\}$, 序列 $\{\omega(n)\}$ 是关于几乎处处无条件收敛性的 Weyl 乘子仅当

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n\omega(n)} < \infty .$$

由于这个缘故, 不是每一个完全规范正交系有关于几乎处处无条件收敛性的正合 Weyl 乘子.

针对用几乎处处收敛, 依测度收敛或其他方式收敛的级数来表示函数的问题, 已经进行了大量的研究. 这样, 在 1957 年, 证明了对 $X=[0,1]$ 情况下的任一完全规范正交系 $\{\varphi_n\}$ 和任一可测函数 f 存在一个形如 (1) 的级数依测度收敛于 $f(x)$ (在三角函数系的情形这个论断是 Меньшов 于 1947 年得到的). 如果取代依测度收敛性而考虑几乎处处收敛, 则这结果即使对有界可测函数的情形也不成立.

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.-Л., 1951.

[2] Banach, S., Théorie des opérations linéaires, Chelsea, reprint, 1955.

[3] Геронимус, Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М.-Л., 1950 (英译本: Geronimus, Ya. L., Orthogonal polynomials, Consultants Bureau, 1961).

[4] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[5] Jackson, D., Fourier series and orthogonal polynomials, Math. Assoc. Amer., 1971.

[6] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[7] Alexits, G., Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen, Ungar. Akad. Wissenschaft., 1961.

[8] Tricomi, F. G., Vorlesungen über Orthogonalreihen, Springer, 1970 (译自意大利文).

[9] Olevskiĭ, A. M., Fourier series with respect to general orthogonal systems, Springer, 1975 (译自俄文).

[10] Меньшов, Д. Е., Ульянов, П. Л., О метрической теории функций в Московском университете за пятидесятилетие, 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика》, 1967, No. 5, 24 – 36.

[11] Талалян, А. А., Представление измеримых функций рядами, 《успехи матем. наук》, 15 (1960), 5, 77 – 141.

[12] Ульянов, П. Л., Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, 《Успехи матем. наук》, 19 (1964), 1, 3 – 69.

[13] Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971, 5 – 264.

[14] Bourbaki, N., Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, 1974.

[15] Паплаускас, А. Б., Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М., 1966.

П. Л. Ульянов 撰

【补注】 关于 (Weyl) 乘子亦见**乘子理论** (multiplier theory).

葛显良 译 吴绍平 校

正交系 [**orthogonal system**; **ортогональная система**]

1) 正交向量系 (orthogonal system of vectors) 是具有标量积 $(\cdot,\cdot)$ 的 Euclid (Hilbert) 空间的一个非零向量的集合 $\{x_\alpha\}$, 当 $\alpha\neq\beta$ 时 $(x_\alpha, x_\beta)=0$. 如果在这些条件下每个向量的范数都等于 1, 则称 $\{x_\alpha\}$ 为规范正交系 (orthonormal system). 完全正交 (规范正交) 向量系 $\{x_\alpha\}$, 称为**正交 (规范正交) 基** (orthogonal (orthonormal) basis).

М. И. Войцеховский 撰

2) 正交坐标系 (orthogonal coordinate system) 是坐标曲线 (或坐标曲面) 相交成直角的坐标系. 在任何 Euclid 空间中都存在直角坐标系. 但是一般地说, 在任意空间中并不存在. 在二维光滑仿射空间中, 至少在每一点的足够小的邻域内总可以引入直角坐标系. 有时在大范围内也可引入直角坐标系. 在直角坐标系中度量张量是对角的; 对角分量 g_{ii} 称为 Lamé 系数 (Lamé coefficients). 空间直角坐标系的 **Lamé 系数** (Lamé coefficients) 由下列公式来表示:

$$L_u=\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]^2+\left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial u}\right]^2},$$

$$L_v=\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2+\left[\frac{\partial y}{\partial v}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2},$$

$$L_w=\sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial w}\right]^2+\left[\frac{\partial y}{\partial w}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial w}\right]^2}.$$

其中 x, y 和 z 是 Descartes 坐标. Lamé 系数也用来表示线元

$$ds=\sqrt{L_u^2du^2+L_v^2dv^2+L_w^2dw^2},$$

面积元

$$d\sigma = \sqrt{(L_uL_vdudv)^2+(L_uL_wdudw)^2+(L_vL_wdvdw)^2},$$

体积元

$$dV = L_u L_v L_w du dv dw,$$

以及向量分析运算

$$\mathrm{grad}_u \varphi = \frac{1}{L_u}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \ \mathrm{grad}_v \varphi = \frac{1}{L_v}\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\mathrm{grad}_w \varphi = \frac{1}{L_w}\frac{\partial \varphi}{\partial w},$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_u L_v L_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v L_u L_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w L_u L_v)\right];$$

$$\mathrm{rot}_u \mathbf{a} = \frac{1}{L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(a_w L_w) - \frac{\partial}{\partial w}(a_v L_v)\right],$$

$$\mathrm{rot}_v \mathbf{a} = \frac{1}{L_u L_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(a_u L_u) - \frac{\partial}{\partial u}(a_w L_w)\right],$$

$$\mathrm{rot}_w \mathbf{a} = \frac{1}{L_u L_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_v L_v) - \frac{\partial}{\partial v}(a_u L_u)\right],$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{L_v L_w}{L_u}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{L_u L_w}{L_v}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{L_u L_v}{L_w}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right]\right].$$

最常乘用的直角坐标系是：在平面上有 **Descartes 坐标** (Cartesian coordinates)；**椭圆坐标** (elliptic coordinates)；**抛物线坐标** (parabolic coordinates)；以及**极坐标** (polar coordinates)；在空间中有**柱面坐标** (cylinder coordinates)；**双柱面坐标** (bicylindrical coordinates)；**双极坐标** (bipolar coordinates)；**抛物面坐标** (paraboloidal coordinates))；以及**球面坐标** (spherical coordinates)．

Д. Д. Соколов 撰

3) 正交函数系 (orthogonal system of functions) 是属于一个空间 $L_2(X, S, \mu)$ 且满足下列条件的有限或可数函数系 $\{\varphi_i\}$：

$$\int_X \varphi_i(x)\overline{\varphi}_j(x)d\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } i \neq j, \\ \lambda_i > 0, & \text{如果 } i = j. \end{cases}$$

如果对于一切 i，$\lambda_i = 1$，则这个函数系称为规范正交的 (orthonormal)．这里，假设在集合 X 的子集的 σ 代数 S 上定义的测度 μ 是可数加性的、完全的，并且具有可数基．这个定义包括了在分析中研究的一切正交坐标系、对于测度空间 (X, S, μ) 的各种具体实现都得到了这样的坐标系．

最使人感兴趣的是具有下述性质的完全规范正交系 $\{\varphi_n\}$：对于任何函数 $f \in L_2(X, S, \mu)$，存在唯一的级数 $\sum c_n \varphi_n$，在空间 $L_2(X, S, \mu)$ 的度量下，它收敛于 f．系数 c_n 由 Fourier 公式

$$c_n = \int_X f\overline{\varphi}_n d\mu$$

来确定．由于空间 $L_2(X, S, \mu)$ 的可分性，这些正交系是存在的．构造完全正交系的通用方法由 **Gram-Schmidt 正交化方法** (orthogonalization method) 给出．这个方法能够应用于 $L_2(X, S, \mu)$ 中的任何完全线性无关的函数序列 $\{f_n\}$．

当考虑空间 $L_2[a, b]$ 时（这时 $X = [a, b]$，S 是 Lebesgue 可测集系，μ 是 Lebesgue 测度），得到了**正交级数** (orthogonal series) 的一些重要例子．对于空间 $L_2[a, b]$ 中的一般正交系 $\{\varphi_n\}$，有关级数 $\sum a_n \varphi_n$ 的收敛性或可和性的许多定理，对关于空间 $L_2(X, S, \mu)$ 中的正交系的级数也成立．并且，在这种特殊情况下，已经构造了一些有趣的具体的正交系，它们具有很好的性质．这些正交系包括 Haar 正交系，Rademacher 正交系，Walsh-Paley 正交系和 Franklin 正交系．

a) Haar 正交系 (Haar system) $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$：$\chi_1(x) = 1$，$x \in [0, 1]$，

$$\chi_m(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{如果 } x \in \left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right], \\ -\sqrt{2^n}, & \text{如果 } x \in \left[\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right], \\ 0, & \text{在 } [0, 1] \text{ 的其他点上}, \end{cases}$$

其中 $m = 2^n + k$，$1 \leqslant k \leqslant 2^n$，$m = 2, 3, \cdots$．关于 Haar 正交系的级数是**鞅** (martingale) 的一些典型例子、因此鞅论的一般定理对于 Haar 正交系也成立．并且，正交系 $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是空间 $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$ 的**基** (basis)，任何可积函数关于 Haar 正交系的 Fourier 级数几乎处处收敛．

b) Rademacher 正交系 (Rademacher system) $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$：

$$r_n(x) = \mathrm{sign}\sin 2^{n+1}\pi x, \ x \in [0, 1]$$

是随机独立正交函数系的一个重要例子，应用于概率论和正交或一般的函数级数的理论中．

c) Walsh-Paley 正交系 (Walsh-Paley system) $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ 用 Rademacher 函数来定义：

$$W_0(x) = 1, \ W_n(x) = \prod_{k=0}^{m}[r_k(x)]^{q_k}, \ x \in [0, 1],$$

其中数 m 和 q_k 用数 n 的二进制展开来定义：

$$n = \sum_{k=0}^{m} q_k 2^k.$$

d) Franklin 正交系 (Franklin system) $\{\Phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是由函数序列

$$u_1(x)=x,\ u_2(x)=1-x,$$

$$u_n(x)=\int_0^x \chi_{n-2}(t)dt,\ n\geqslant 3,\ x\in[0,1]$$

的 Gram-Schmidt 正交化所得到的．它是连续函数空间 $C[0,1]$ 的正交基的一个例子．

在多重正交级数的理论中研究了下列形式的函数系：

$$\varphi_{n_1}(x_1)\cdots\varphi_{n_m}(x_m),$$

$$x_i\in[a,b],\ n_i=1,2,\cdots,1\leqslant i\leqslant m,$$

其中 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $L_2[a,b]$ 中的正交系．这些函数系在 m 维立方体 $J_m=[a,b]\times\cdots\times[a,b]$ 上是正交的，也是完全的，如果函数系 $\{\varphi_n\}$ 是完全的．

参考文献

[1] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[2] Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971, 109 – 146; 147 – 202.

[3] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.

[4] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977.

[5] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge, Univ. Press, 1988.

A. A. Талалян 撰

【补注】 Hilbert 空间，或者更一般地，内积空间 V 中的完全元素系（complete system of elements）$\{\varphi_\alpha\}$，是一个满足下述条件的元素集合：对于任何 $\varphi\in V$，如果对于一切 α，有 $\langle\varphi,\varphi_\alpha\rangle=0$，则 $\varphi=0$．

亦见**完全函数系**（complete system of functions）．Walsh-Paley 正交系是 $L_2(0,1)$ 中的一个完全正交系．

杜小杨 张鸿林 译

正交轨道 [orthogonal trajectory; ортогональная траектория]

见**等角轨道**（isogonal trajectory）．

正交变换 [orthogonal transformation; ортогональное преобразование]

在 Euclid 空间中保持向量长度（或等价地，标量积）不变的线性变换 A．正交变换且仅仅是正交变换能把正交基变换为正交基．等式 $A^*=A^{-1}$ 也是正交性的必要和充分条件，其中 A^* 是共轭线性变换，A^{-1} 是逆线性变换．

关于正交基，正交矩阵对应于正交变换，且仅仅对应于正交变换．正交变换的本征值等于 ±1，而对应于不同本征值的本征向量是正交的．正交变换的行列式等于 $+1$（特殊正交变换（special orthogonal transformation））或者 -1（非特殊正交变换（non-special orthogonal transformation））．在 Euclid 平面上，每个特殊正交变换都是一个旋转，当取适当的正交基时它的矩阵具有形式

$$\begin{Vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix},$$

其中 φ 是旋转角；每个非特殊正交变换都是关于通过原点的直线的一个反射，当取适当的正交基时它的矩阵具有形式

$$\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}.$$

在三维空间中，每个特殊正交变换都是绕一个轴的旋转，而每个非特殊正交变换都是一个这样的旋转与一个垂直平面内的反射之积．在任意 n 维 Euclid 空间中，正交变换也可化为一些旋转和反射（见**旋转**（rotation））．

一个 Euclid 空间中的所有正交变换的集合关于变换的乘法构成一个群——给定的 Euclid 空间的**正交群**（orthogonal group）．特殊正交变换构成这个群的一个正规子群（特殊正交群）．

Т. С. Пиголкина 撰

【补注】 亦见**正交矩阵**（orthogonal matrix）和**正交群**（orthogonal group），及其中的参考文献．

杜小杨 译

正交性 [orthogonality; ортогональность]

Euclid 空间中向量垂直概念的一种推广．最自然的正交性概念是在 Hilbert 空间理论中提出的．**Hilbert 空间**（Hilbert space）中两个元素 x, y 称为正交的（orthogonal）（$x\perp y$），如果它们的内积（inner product）等于零（$(x,y)=0$）．在特殊情形当 H 是 Euclid 空间时正交概念与两向量垂直的概念一致．借助于这概念，在任何 Hilbert 空间中 Pythagoras 定理（Pythagoras theorem）成立：如果一个元素 $x\in H$ 等于有限个或可数个两两正交的元素 $x_i\in H$ 之和（可数和 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ 理解为此级数在该空间的度量下收敛的意义），则 $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2$（见 **Parseval 等式**（Parseval equality））．

可分 Hilbert 空间中的完全、可数、规范正交系 $\{x_i\}$ 类似于有限维 Euclid 空间中的两两规范正交向量的完全系：任一元素 $x\in H$ 可以唯一地表成和 $\sum_{i=1}^{\infty}c_ix_i$，这里 $c_ix_i=(x,x_i)x_i$ 是元素 x 在向量 x_i 所生成的子空间上的正交投影．

例如，函数空间 $L_2[a,b]$ 中，如果 $\{\varphi_k\}$ 是一个完全规范正交系，则对每一个 $f\in L_2[a,b]$，

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$$

按空间 $L_2[a, b]$ 的度量，其中

$$c_k = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx.$$

当 φ_k 是有界函数时，对任何可积函数，系数 c_k 可如上定义．在这些情况下，一个相应的级数在一种意义或另一种意义下收敛的问题是有兴趣的（见三角函数系（trigonometric system）；**Haar 函数系**（Haar system））．因而，对于函数而言，术语"正交性"用于更广泛的意义：两个在区间 $[a, b]$ 上可积的函数 f 和 g 是正交的，如果

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

（为了该积分存在，通常需要 $f \in L_p[a, b]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g \in L_q[a, b]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$，其中 $L_\infty[a, b]$ 是有界可测函数的集合）．

一个任意赋范线性空间的元素的正交性定义也存在．其中之一（见[4]）如下：实赋范空间 B 的元素 x 被认为正交于元素 y，如果对所有实数 k，$\|x\| \leqslant \|x + ky\|$．借助于这概念已建立了某些必要充分条件，使得在这些条件下可定义 B 的元素的一种标量（内）积（见[5]，[6]）．

参考文献

[1] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977（中译本 Л. В. Канторович，Г. П. Акилов，泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1982）．

[2] Dunford, N. and Schwartz, J., Linear operators. General theory, Wiley, reprint, 1988.

[3] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[4] Birkhoff, G., Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, 1 (1935), 169 – 172.

[5] James, R., Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61 (1947), 265 – 292.

[6] James, R., Inner products in normed linear spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), 559 – 566.

А. А. Талалян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Amir, D., Characterizations of inner product spaces, Birkhaüser, 1986.

[A2] Achieser, N. I. and Glasmann, I. M., Theorie der linearen Operatoren in Hilbertraum, Akad. Verlag, 1958（译自俄文）．

[A3] Istrătescu, V. I., Inner product structures, Reidel, 1987.

葛显良 译 吴绍平 校

正交化 [**orthogonalization**；**ортогонализация**]，正交化过程（orthogonalization process）

从 Euclid 或 Hermite 空间 V 中的已知线性无关向量系，构造生成 V 中相同子空间的非零向量的**正交系**（orthogonal system）的算法．最熟知的是 Schmidt（或 Gram-Schmidt）正交化过程（Schmidt（or Gram-Schmidt）orthogonalization process），它从一个线性无关系 $a_1, \cdots, a_k$ 出发，构造一个正交系 $b_1, \cdots, b_k$，使得每一个向量 $b_i (i = 1, \cdots, k)$ 由 $a_1, \cdots, a_i$ 线性表示，即 $b_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} a_j$，其中 $C = \|\gamma_{ij}\|$ 是一个上三角阵．可以构造出向量系 $\{b_i\}$ 满足正交性，而且 C 的对角线上的元素 γ_{ii} 都是正的；这样的向量系 $\{b_i\}$ 和矩阵 C 在这些条件下唯一确定．

Gram-Schmidt 过程如下．令 $b_1 = a_1$；若向量 $b_1, \cdots, b_i$ 已构造出来，则

$$b_{i+1} = a_{i+1} + \sum_{j=1}^{i} \alpha_j b_j,$$

其中

$$\alpha_j = -\frac{(a_{i+1}, b_j)}{(b_j, b_j)}, \quad j = 1, \cdots, i$$

由向量 b_{i+1} 与 $b_1, \cdots, b_i$ 的正交性条件得到．这个过程的几何意义包含着如下事实：在每一步，向量 b_{i+1} 在向量 a_{i+1} 的端点处垂直于 $a_1, \cdots, a_i$ 的线性包．长度乘积 $|b_1| \cdots |b_k|$ 等于以向量系 $\{a_i\}$ 的向量为棱的平行六面体的体积．将向量 b_i 正规化后便得到所要求的正交系．由 $a_1, \cdots, a_k$ 表示的向量 b_i 的显式表达式由下面公式给出

$$b_i = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_{i-1}) & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_i, a_1) & \cdots & (a_i, a_{i-1}) & a_i \end{vmatrix}$$

（右端行列式可由其最后一列展开），相应的正交系取作

$$q_i = \frac{b_i}{\sqrt{G_{i-1} G_i}},$$

其中 G_i 为系 $a_1, \cdots, a_i$ 的 **Gram 行列式**（Gram determinant）．

这个过程可用于可数向量系．

Gram-Schmidt 过程可解释为，一个非奇异方阵可展开成一个正交阵（或 Hermite 空间的酉阵）和一个具有正对角元的上三角形矩阵的乘积．这个乘积是**岩沢分解**（Iwasawa decomposition）的一个特例．

参考文献

[1] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966（中译本：Ф. Р. 甘特马赫尔，矩阵论，上、下卷，高等教育出版社，1955）．

[2] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975(中译本: А. Г. 库洛什, 高等代数教程, 高等教育出版社, 1953).

И. В. Проскуряков 撰 张宝琳 袁国兴 译

正交化方法[orthogonalization method; ортогонализации метод]

用于求解线性代数方程组 $Ax=b$(其中 A 是一个非奇异矩阵)的一种方法. 这种方法的基础在于向量系的 Gram-Schmidt **正交化**(orthogonalization)过程. 如果

$$A=\|a_{ij}\|;\ x=(x_1,\cdots,x_n)^T;$$

$$b=(b_1,\cdots,b_n)^t;$$

$$a_i=(a_{i1},\cdots,a_{in},\quad b_i),\ i=1,\cdots,n;$$

$$y=(x_1,\cdots,x_n,1)^t,$$

则原来的方程组可以写成下列形式:

$$(a_i,y)=0,\ i=1,\cdots,n.$$

这就表明, 解这个方程组等价于确定一个向量 y, 它的最后一个分量为 1, 且与一切向量 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 都正交. 为此, 对向量组 $a_1,\cdots,a_n,a_{n+1}$(其中 $a_{n+1}=(0,\cdots,0,1)$)进行正交化处理, 由于矩阵 A 的非奇异性, 这个向量组是线性无关的. 这个过程要求利用下列递推关系构造一个关于标量积 $(x,y)=x^Ty$ 的规范正交向量系 $q_1,\cdots,q_{n+1}$:

$$\left.\begin{aligned} v_1=a_1,\ q_1=\frac{v_1}{\sqrt{(v_1,v_1)}},\\ v_k=a_k+\sum_{i=1}^{k-1}c_iq_i,\ c_i=-(a_k,q_i),\\ q_k=\frac{v_k}{\sqrt{(v_k,v_k)}},\end{aligned}\right\}(*)$$

其中系数 c_i 由 v_k 对向量 $q_1,\cdots,q_{k-1}$ 的正交性条件得到. 向量 $a_1,\cdots,a_n$ 可通过 $q_1,\cdots,q_n$ 线性地表示, 因此向量 $q_{n+1}=(z_1,\cdots,z_{n+1})$ 与所有向量 $a_1,\cdots,a_n$ 都是正交的. 并且, A 的非奇异性保证 $z_{n+1}\neq 0$. 于是

$$\left[\frac{z_1}{z_{n+1}},\cdots,\frac{z_n}{z_{n+1}}\right]$$

是所要求的方程组的解.

这个正交化方法的程式符合方程组直接解法的一般程式: 关系式(*)等价于方程组的矩阵 A 到矩阵 $L_n\cdots L_1A$ 的变换, 其中

$$L_k=\begin{Vmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\c_1&\cdots&c_k&&&\\&&&\ddots&&\\&&&&&1\end{Vmatrix},$$

并且实现了方程组的矩阵的因子分解: $A=LQ$, 其中 L 是三角矩阵, Q 是酉矩阵.

通过正交化方法对矩阵 A 进行因子分解的过程对于舍入误差是稳定的. 如果在(*)中, 当进行取向量的标量积的运算时采用具有双倍精确度的积累程序, 那么对于借助正交化方法实现矩阵的因子分解, 可以得到直接方法类中的一个最佳精确度估计. 但是, 在这种情况下, $q_1,\cdots,q_n$ 是正交向量, 即 Q 是酉矩阵这种性质, 关于舍入误差是不稳定的. 因此, 由递推关系(*)得到的方程组的解可能包含大的误差. 为了消除这个缺点, 采用了各种重正交化方法(见[1], [2]).

正交化方法的运算速度低于许多直接方法的运算速度.

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975(英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

Г. Д. Ким 撰 杜小杨 张鸿林 译

函数系的正交化[orthogonalization of a system of functions; ортогонализация системы функций]

对给定的函数系 $\{f_n\}$(每个 f_n 在区间 $[a,b]$ 上平方可积)通过**正交化**(orthogonalization)步骤或通过把诸函数 f_n 扩张到较大区间 $[c,d]$ $(c<a<b<d)$ 上来构造正交函数系 $\{\varphi_n\}$.

对**完全函数系**(complete system of functions) $\{f_n\}$ 运用 Schmidt 正交化过程总能把所给函数系变为完全**规范正交系**(orthonormal system) $\{\varphi_n\}$, 它还能相应于序列 $\{f_n\}$ 的一种给定的选取, 构造出具有某些良好性态的函数系. 例如, 用此方法可构造 Franklin 系(见**正交级数**(orthogonal series)), 它是 $C[0,1]$ 和 $L_p[0,1]$ $(p\geq 1)$ 中的一个基.

通过扩张到较大区间来使函数系正交化是由 I. Schur 最早引进的(见[1]). 他证明, 为使存在函数系 $\{\varphi_n\}$, 使得 $\varphi_n(x)=f_n(x)$, $x\in[a,b]$, $0<a<b<1$, 且 $\{\varphi_n\}$ 在 $L_2[0,1]$ 中规范正交, 其必要充分条件是满足

$$\sup_n\int_a^b\left[\sum\xi_if_i(x)\right]^2dx=1,$$

其中上确界是对遍历所有满足 $\sum \xi_i^2 = 1$ 的 $\{\xi_i\}$ 取的. 也已找到通过这样的正交化得到完全规范正交系 $\{\varphi_n\}$ 所应满足的必要充分条件(见[2]).

许多通过扩张函数来进行的正交化构造是由 Д. Е. Меньшов 给出的([3]). 它们被用来证明对于正交级数 $\sum a_n \varphi_n(x)$ 的几乎处处收敛性, 条件 $\sum a_n^2 \ln^2 n < \infty$ 为精确的定理.

参考文献

[1] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[2] Олевский, А. М., 《Матем. заметки》, 6 (1969), 6, 737 – 747.

[3] Меньшов, Д. Е., 《Матем. сб》, 3 (1938), 103 – 120.

[4] Franklin, Ph., A set of continuous orthogonal functions, *Math. Ann.*, 100 (1928), 522 – 529.

А. А. Талалян 撰

【补注】 Schmidt 正交化过程(Schmidt orthogonalization process)常称为 Gram-Schmidt 正交化过程(Gram-Schmidt orthogonalization process).

沈永欢 译

正交模格 [orthomodular lattice; ортомодулярная решетка]

一个有零(0)和一(1)的格(lattice), 并且对其任一元素 a 存在一个正交补(orthocomplement) $a^\perp$, 即一个元素 $a^\perp$ 适合

1) $a \vee a^\perp = 1$; $a \wedge a^\perp = 0$; $(a^\perp)^\perp = a$;

2) $a \leqslant b \Rightarrow a^\perp \geqslant b^\perp$,

而且使得正交模律

3) $a \leqslant b \Rightarrow b = a \vee (b \wedge a^\perp)$

成立.

在正交模格中, 研究分配性, 透视性, 不可约性, 元素对的模性, 中心和理想的性质, 换位子, 可解性以及在量子力学逻辑中的应用(见[1], [2]).

如果 $\mathfrak{A}$ 是任意一个 **von Neumann 代数**(von Neumann algebra), 那么它的所有射影的集合 $P(\mathfrak{A})$ 是一个完全正交模格. 在这些条件下, 如果 $\mathfrak{A}$ 是一个因子, 那么在集合 $P(\mathfrak{A})$ 上可以定义一个**维数函数**(dimension function). 依赖于这个函数值的集合, 因子化分为 I_n, I_∞, II_1, II_∞, III 型(Murray-von Neumann 分类, 见[4]). 已经证明 I_n 及 II_1 型的因子射影格都是连续几何(continuous geometries), 也就是完全补模格(见**有补格**(lattice with complements), **模格**(modular lattice), **完全格**(complete lattice)), 满足下面两条连续性公理:

1) 对任意有向指标集 D 以及适合 $\alpha' \leqslant \alpha''$ 蕴涵 $a_{\alpha'} \leqslant a_{\alpha''}$ 的任意元素集 $\{a_\alpha : \alpha \in D\}$, $b \wedge (\vee_{\alpha \in D} a_\alpha) = \vee_{\alpha \in D}(b \wedge a_\alpha)$;

2) 1) 的对偶条件.

在这种格类的框架内, 除 I_n 和 II_1 型因子射影模格以外, 也包含其余型的因子射影非模格在内, 构造一个抽象维数理论的问题已提出. 已经证明具有一个满足某些补充条件的等价关系的完全正交模格的维数函数存在. 这个格类包含因子射影格和连续几何.

正交模格是因子射影格的自然推广, 它也构成了一个实质上更广泛的类, 射影格的很多性质并不对任意正交模格成立. 使用与连续几何用正则环坐标化相同的方法(见[1]), 正交模格可以用 Baer * 半群坐标化. 如果一个完全正交模格是模的, 那么它是连续的(见[7]). 存在一个正交补模格, 它的分割完全化不是正交模格(然而由半模正交补格的分割完全化是半模格, 并且 Von Neumann 代数的射影格是半模格).

参考文献

[1] Скорняков, Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961 (英译本: Skornyakov, L. A., Complemented modular lattices and regular rings, Oliver & Boyd, 1964).

[2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1968, М., 1970.

[3] Фофанова, Т. С., в сб., Упорядоченные множества и решетки, в. 3, (Саратов), 1975, 28 – 40.

[4] Murray, F. and Neumann, J. von, On rings of operators, *Ann. of Math.*, 37 (1936), 1, 116 – 229.

[5] Loomis, L. H., The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 18 (1955), 1 – 36.

[6] Maeda, S., Dimension of functions on certain general lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, 19 (1955), 2, 211 – 237.

[7] Kaplansky, L., Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry, *Ann. of Math.*, 61 (1955), 3, 524 – 541.

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 对于"分割完全化"见 **MacNeille 完全化**(completion, MacNeille).

参考文献

[A1] Blyth, T. S. and Janowitz, M. F.: Residuation theory, Pergamon, 1972.

[A2] Kalmbach, G.: Orthomodular lattices, Acad. Press, 1983.

[A3] Kalmbach, G.: Measures and Hilbert lattices, World Scientific, 1986.

[A4] Beran, L.: Orthomodular lattices, Reidel, 1985.

卢景波 译 王世强 校

规范正交系 [orthonormal system; ортонормированная

система]

1) 规范正交向量系 (orthonormal system of vectors) 是赋内积 $(\cdot,\cdot)$ 的 Euclid (Hilbert) 空间中满足如下条件的向量集 $\{x_\alpha\}$: $(x_\alpha, x_\beta)=0$ 如果 $\alpha\neq\beta$ (正交性), $(x_\alpha, x_\alpha)=1$ (规范性).

М. И. Войцеховский 撰

2) 规范正交函数系 (orthonormal system of functions) 是在空间 $L^2(X, S, \mu)$ 中既正交又规范的 $L^2(X, S, \mu)$ 中的函数集 $\{\varphi_i\}$, 即

$$\int_X \varphi_i(x)\overline{\varphi}_j(x)\,d\mu=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j\end{cases}$$

(见规范系 (normalized system), 正交系 (orthogonal system)). 在数学文献中, 术语 "正交系" 经常指的是 "规范正交系"; 在研究一个给定的正交系时, 它是否规范并不总是至关紧要的. 但是, 如果函数系是规范的, 则对于某些借助于系数 $\{c_k\}$ 的性质来讨论级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$$

收敛性的定理就有可能得到比较清晰的公式, 这方面的一个例子是 Riesz-Fischer 定理 (Riesz-Fischer theorem): 设 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的规范正交系, 则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$$

依 $L^2[a,b]$ 中的度量收敛, 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\infty.$$

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: A. H. 柯尔莫果洛夫, C. B. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1992).

[2] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

А. А. Талалян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Weidmann, J., Linear operators in Hilbert space, Springer, 1980.

[A2] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980).

朱学贤 译

振动微分方程 [**oscillating differential equation**; **осцилляционное дифференциальное уравнение**]

至少有一个**振动解** (oscillating solution) 的常微分方程. 关于解的振动有几个不同的概念. 最普遍使用的是在一点 (通常取此点为 $+\infty$) 的振动与在一区间上之振动. 方程

$$u^{(n)}=f(t, u, u', \cdots, u^{(n-1)}),\ n\geqslant 2, \qquad (1)$$

(其中 $f(t, 0, \cdots, 0)=0$) 的非零解称为在点 $+\infty$ 振动 (oscillating at the point $+\infty$) (或在区间 I 上振动 (oscillating on an interval)), 若它有一列趋向 $+\infty$ 的零点 (或相应地在 I 上至少有 n 个零点, 而各零点均按其重数计算). 方程 (1) 若有解在 $+\infty$ 点振动或在区间 I 上振动就说方程 (1) (在 $+\infty$ 或在 I 上) 振动.

在 $+\infty$ 处振动的方程分为两类, 各称为具有性质 A 或性质 B 的方程, 视其与下面两个方程的哪一个在指定的意义下相一致而定:

$$u^{(n)}=-u, \quad u^{(n)}=u.$$

当 n 为偶数时, 若方程 (1) 之所有定义于 $+\infty$ 附近的解均为振动的, 则说方程 (1) 具有性质 A; 若 n 为奇数, 所谓具有性质 A, 就是指这些解或为振动的, 或满足条件

$$\lim_{t\to+\infty}u^{(i-1)}(t)=0, \quad i=1, 2, \cdots, n. \quad (2)$$

若方程 (1) 的每一个定义于 $+\infty$ 附近的解, 当 n 为偶数时, 或者振动, 或者满足条件 (2), 或者

$$\lim_{t\to+\infty}|u^{(i-1)}(t)|=+\infty, \quad i=1, 2, \cdots, n. \quad (3)$$

就说此方程具有性质 B, 而当 n 为奇数时, 所谓具有性质 B 就是指这些解或为振动的, 或满足条件 (3).

具有局部可积系数 $a:[t_0, +\infty)\to\mathbf{R}$ 的线性方程

$$u^{(n)}=a(t)u, \qquad (4)$$

若

$$a(t)\leqslant 0 \quad (a(t)\geqslant 0), \quad 当\ t\geqslant t_0 时,$$

以及二条件之一成立, 即

$$\int_{t_0}^{+\infty}t^{n-1-\varepsilon}|a(t)|\,dt=+\infty$$

或者当 $t\geqslant t_0$ 时

$$a(t)\leqslant\frac{\mu_n-\varepsilon}{t^n}\quad\left(a(t)\geqslant\frac{\nu_n+\varepsilon}{t^n}\right),$$

则具有性质 A (具有性质 B), 这里 $\varepsilon>0$, 而 $\mu_n(\nu_n)$ 是多项式 $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 的最小的 (最大的) 局部极小 (局部极大) (见[1]-[5]).

具有局部可积非正 (非负) 系数 $a:(t_0, +\infty)\to\mathbf{R}$ 的 Emden-Fowler 型方程

$$u^{(n)} = a(t)|u|^{\lambda} \operatorname{sign} u, \ \lambda > 0, \ \lambda \neq 1 \qquad (5)$$

具有性质 A（性质 B），当且仅当

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{\mu}|a(t)|dt = +\infty,$$

这里 $\mu = \min\{n-1, (n-1)\lambda\}$（见[4]，[6]，[7]）.

在许多情况下，方程（1）的振动性问题可以用比**较定理**（comparison theorem）化为标准方程（4）与（5）的振动性问题.

在讨论具有偏移变元方程的振动性质时，会出现一些新的特点．例如，若 n 为奇，$\Delta > 0$ 且对大的 t 有不等式

$$a(t) \leqslant a_0 < -n!\Delta^{-n}$$

成立，则方程

$$u^{(n)}(t) = a(t)u(t-\Delta)$$

的所有非零解都是在 $+\infty$ 振动的（见[10]，[11]）．同时，若 a 为非正且 n 为奇数，则非推迟方程（4）总有非振动解.

一个区间上的振动与非振动概念主要是对线性齐次方程来研究的．它们在边值问题理论中具有重要的价值（见[12]）.

参考文献

[1] Kneser, A., Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Integralgleichungen, *Math. Ann.*, **42** (1893), 409 – 435.

[2] Mikusinski, J. G., On Fite's oscillation theorems, *Colloq. Math.*, **2** (1951), 34 – 39.

[3] Кондратьев, В. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», **10** (1961), 419 – 436.

[4] Кигурадзе, И. Т., «Матем. сб.», **65** (1964), 2, 172 – 187.

[5] Чантурия, Т. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», **40** (1976), 5, 1128 – 1142.

[6] Ličko, I. and Švec, M., La charactère oscillatoire des solutions de l'équation $y^{(n)} + f(x)y^{\alpha} = 0$, $n > 1$, *Chekhosl. Mat. Zh.*, **13** (1963), 481 – 491.

[7] Kiguradze, I. T., On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations, *Arch. Math.*, **14** (1978), 1, 21 – 44.

[8] Swanson, C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, Acad. Press, 1968.

[9] Hartman, P., Ordinary differential equations. Birkhäuser, 1982.

[10] Мышкис, А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, 2 изд., М., 1972.

[11] Коплатадзе, Р. Г., Чантурия, Т. А., Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тб., 1977

[12] Левин, А. Ю. «Успехи матем. наук», **24** (1969), 2, 43 – 96.

И. Т. Кигурадзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley, 1969.

[A2] Reid, W. T., Sturmian theory for ordinary differential equations, Springer, 1980.

齐民友 译

振荡核[**oscillating kernel**; **осцилляционное ядро**]

一个函数 $K(x, s)$ $(a \leqslant x, s \leqslant b)$，对于任何点 $x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$，其中（当 $n=2$ 时）至少有一个内点，使得矩阵 $\|K(x_i, x_k)\|_1^n$ 是一个**振荡矩阵**（oscillating matrix）.

В. И. Ломоносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gantmakher, F. R. and Kreĭn, M. G., Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems, Dept. Commerce, 1961（译自俄文）.

[A2] Karlin, S., Total positivity, Stanford Univ. Press, 1960.

杜小杨 译

振荡矩阵[**oscillating matrix** 或 oscillatory matrix; **осцилляционная матрица**]

一个全非负矩阵（matrix）A，对于 A 存在一个正整数 χ，使得 A^{χ} 是一个全正矩阵；矩阵 A 称为**全非负的**（totally non-negative）（**全正的**（totally positive）），如果它的所有子式，不论任何阶，都是非负的（正的）．最小指数 χ 称为**振荡矩阵的指数**（exponent of the oscillating matrix）．如果 A 是一个具有指数 χ 的振荡矩阵，则对任意整数 $k \geqslant \chi$，矩阵 A^k 是全正的；一个振荡矩阵的正整次幂与矩阵 $(A^+)^{-1}$ 也都是振荡矩阵．为了使一个全非负矩阵 $A = \|a_{ik}\|_1^n$ 是一个振荡矩阵，其充分必要条件是：1）A 是一个非奇异矩阵；2）对于 $i = 1, \cdots, n$，下列条件满足：$a_{i,i+1} > 0$，$a_{i+1,i} > 0$.

振荡矩阵的基本定理是：一个振荡矩阵 $A = \|a_{ik}\|_1^n$ 总具有 n 个不同的正的本征值；对于对应于最大的本征值 λ_1 的本征向量 u^1，它的所有坐标均不为零且符号相同；对于对应于第 s 个本征值 λ_s（按降值排列）的本征向量 u^s，它恰好有 $s-1$ 个符号改变；对任意实数 $c_g, \cdots, c_h$，$1 \leqslant g \leqslant h \leqslant n$，$\sum_{k=g}^{h} c_k^2 > 0$，向量 $u = \sum_{k=g}^{h} c_k u^k$ 的坐标序列的符号改变个数在 $g-1$ 与 $h-1$ 之间.

参考文献

[1] Гантмахер, Ф. Р., Крейн, М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механи-

ческих систем, 2 изд., М.-Л. 1950(英译本: Gantmakher, F. R. and Kreĭn, M. G., Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems, Dept. Commerce, 1961).

В. И. Ломоносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Karlin, S., Total positivity, Stanford Univ. Press, 1960.

[A2] Gantmacher, F. R. (Gantmakher, F. R.), The theory of matrices, 2, Chelsea, reprint, 1959, Chapt. XIII, §9(译自俄文)(中译本: 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955).

蒋滋梅 译

振动解 [oscillating solution; колеблющееся решение]

微分方程

$$x^{(n)}=f(t,\ x,\ x',\ \cdots,\ x^{(n-1)}),\ t\in[t_0,\ \infty)\quad(*)$$

的有以下性质的解 $x(t)$: 对任一 $t_1\geqslant t_0$, 均存在一点 $t_2>t_1$, 使 $x(t)$ 在越过 t_2 时变号. 在许多应用问题中均出现是否有振动解存在或者是否方程 (*) 的一切解均为振动解的问题. 已知许多使方程 (*) 有振动解存在的充分条件 (见 [1], [2], [3]). 例如常系数方程 $x''+2\delta x'+\omega^2x=0$ 当 $\delta^2<\omega^2$ 时一切非平凡解都是振动的; 而具有 ω 周期系数的方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,$$

当

$$\int_0^{\omega}dt\int_t^{t+\omega}q(s)\exp\left[-\int_s^t p(r)dr\right]ds\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\left[1-\exp\int_0^{\omega}p(t)dt\right]\int_0^{\omega}p(t)dt$$

且在 $[0,\ \omega]$ 上 $q(t)\not\equiv 0$ 时, 一切非平凡解都是振动的.

在许多应用问题中出现了常微分方程组的振动解(在上述意义下)的存在问题. 例如, 在控制理论中要研究方程组 $x'=f(t,\ x)$ 之解 $x(t)=(x_1(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ 关于已给的超平面 $\sum_{i=1}^n c_ix_i=0$ 的振动问题, 即研究函数 $\sigma(t)=\sum_{i=1}^n c_ix_i(t)$ 的振动问题. 也要研究 $[\alpha,\ \beta]$ 振动解的问题: 方程组 $x'=f(t,\ x)$ 的有界解 $x(t)$ 称为 $[\alpha,\ \beta]$ 振动的 ($[\alpha,\ \beta]$-oscillating), 如果 $\sigma(t)$ 是振动的, 且对任意 $t_1\geqslant t_0$ 均有点 t_2, t_3 使得 $t_1<t_2<t_3$, $\sigma(t_2)<\alpha$, $\sigma(t_3)>\beta$. 这里 $\alpha<0<\beta$. 对于方程组 $x'=f(x,\ t)$, 振动解还有其他定义.

参考文献

[1] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[2] Swanson, C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, Acad. Press, 1968.

[3] Кигурадзе, И. Т., Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнении, Тб., 1975.

Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

齐民友 译

函数 f 的振幅 [oscillation of a function; колебание функции], 在集合 E 上的

函数 f 在 E 上的值的上确界与下确界之差. 换言之, f 在 E 上的振幅等于

$$\omega_E(f)=\sup_{P',P''\in E}\{|f(P')-f(P'')|\}.$$

如果函数在 E 上是无界的, 则令它在 E 上的振幅等于 ∞. E 上的常数函数 (且仅限于这种函数) 在 E 上的振幅为 0. 如果函数 f 定义在 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集 E 上, 那么它在 E 的闭包的任一点 Q 上的振幅由下式定义:

$$\omega_{Q,E}(f)=\inf_{\substack{U\\Q\in U}}\omega_{U\cap E}(f),$$

其中下确界 inf 是对 Q 的所有邻域 U 而取的. 若 $Q\in E$, 那么 f 在 Q 上关于集合 E 是连续的, 当且仅当 $\omega_{Q,E}(f)=0$.

А. А. Конюшков 撰

【补注】 函数 $Q\mapsto\omega_{Q,E}(f)$ 称为 f 的振幅函数 (oscillation function).

参考文献

[A1] Stromberg, K. R., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981, p. 120.

[A2] Goldberg, R. R., Methods of real analysis, Blaisdell, 1964, p. 129.

王斯雷 译

振动理论 [oscillations, theory of; колебаний теория]

微分方程应用理论中研究自然科学与技术中的振动现象的分支. 振动理论的基本问题是证明振动运动 (周期运动、殆周期运动等) 的存在, 并实际决定它们, 而这些运动是已知系统的解, 同时还研究与已给振动有关的其他解的性态. 应区分线性振动理论与非线性振动理论.

在线性振动理论 (theory of linear oscillations) 中, 问题归结为研究线性微分方程组, 而这时常又与下面的事实有关, 即所考虑的量 (即微分方程组中的未知函数) 如此之小, 因而证明了可以略去方程组右方的

非线性项．于是考虑线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x+f(t), \tag{1}$$

这里 $x(t)$ 和 $f(t)$ 是 n 维向量，$P(t)$ 是一个 n 阶方阵，而极为常见的是：$P(t)$ 与 $f(t)$ 是周期或殆周期函数（见**殆周期系数的线性微分方程组**（linear system of differential equations with almost-periodic coefficients），**周期系数的线性微分方程组**（linear system of differential equations with periodic coefficients））．线性振动理论的主要问题（main problem in the theory of linear oscillations）是：构造出方程组（1）的周期解和殆周期解，并研究其稳定性质．从这个观点看来，研究得最详尽的是、给定的方程组接近于一个已经研究过的方程组的情况，换言之，即是可以引入一个小参数 μ 而把给定的方程组化为形式

$$\frac{dx}{dt}=(P(t)+\mu Q(t,\mu))x+f(t), \tag{2}$$

这里假设

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x \tag{3}$$

已经充分地研究过，而 μ 是一个小参数．对这类方程组，在大多数情况下可以研究周期解（或相应地殆周期解）的存在性，并将它们实际地构造出来．在对于矩阵 P 和 Q 的很广泛的假设下，已经给出了将（3）的特征指数作为小参数的函数的表达式（见[7]，[10]）；特别是研究了线性系统中的参数共振这个有趣的现象（[5]）（见**参数共振的数学理论**（parametric resonance, mathematical theory of））．

在非线性振动理论（theory of non-linear oscillations）中，对于所谓局部问题和非局部问题，问题的提法和研究方法都截然不同．对于前一情况是这样一些问题，在其中可以分离出某一"小"者（例如说所研究的量本身为小，或者在系统中有小参数）．

如果所研究的问题中我们所求的函数可以看作是小量，则问题归结为研究微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,t) \tag{4}$$

的平衡态的邻域，这里 $x(t)$ 和 $X(x,t)$ 是 n 维向量而且 $X(0,t)\equiv 0$．这时微分方程（4）的局部的定性理论（见**微分方程定性理论**（qualitative theory of differential equations））的方法和运动的 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability）理论的方法（[1]）有广泛的应用．在非线性振动理论中，А．Н．Колмогоров 及其学生们得到了一个非常重要的结果（见[14]）．他证明了（4）的平衡态 $x=0$ 的邻域中有拟周期解存在．

微分方程组的数据中时常有小参数出现，这时要考虑以下形状的微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,t)+\mu R(x,t,\mu), \tag{5}$$

而 μ 是小参数．下面的问题就属于这种类型．与（5）同时还要考虑所谓"生成"方程组，即在（5）中令 $\mu=0$ 所得的方程组，亦即是（4）这样的方程组．假设"生成"方程组有某种性质．于是提出以下的问题：（5）对于小的非零的 μ 是否也有这个性质？例如，设（4）有周期解或殆周期解 $x=\psi(t)$，（5）是否也有周期解或殆周期解 $x=\varphi(t,\mu)$ 使得

$$\lim_{\mu\to 0}\varphi(t,\mu)=\psi(t)?$$

H．Poincaré 发展了强有力的方法来解决这类问题（[2]）．在许多情况下，他不仅证明了周期解的存在，还给出了构造周期解的算法（例如见[5]）．

Н．М．Крылов，Н．Н．Боголюбов 和他们的学生们对于（5）型的方程组发展了一些渐近方法．其中特别重要的是如下的 **Крылов-Боголюбов 平均方法**（Krylov-Bogolyubov method of averaging）．考虑下面所谓的标准方程组

$$\frac{dx}{dt}=\mu X(x,t,\mu). \tag{6}$$

事实是，非线性振动理论中的许多方程组都导致以上方程组．与（6）同时要考虑"平均化"方程组

$$\frac{dy}{dt}=\mu Y(y), \tag{7}$$

其中

$$Y=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X(x,\tau,0)d\tau.$$

Крылов 与 Боголюбов 证明了（7）可以逼近（6）到 μ^2 阶的量．进一步平均化就可以消除直到 μ 的任意阶的小量对 t 的依赖性．然而，这个程序通常会发散，所以，这个方法本质上是渐近的．

积分曲面（integral surface）方法在非线性振动理论中起重要的作用．这个方法的基础是 А．М．Ляпунов（[1]）奠定的．可以在很宽的假设下证明（见[3]，[6]，[11]），如果"生成"方程组（4）有一个具有某些特定性质的积分曲面，则（5）也有这样一个积分曲面．

松弛振动（relaxation oscillation）理论与上述这一类问题关系很密切．这种振动是由导数前有小参数的微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y,t,\mu),\ \mu\frac{dy}{dt}=Y(x,y,t,\mu) \tag{8}$$

来描述的，这里 x 与 X 是 n 维向量，而 y，Y 是 m 维向量，μ 则是小参数．与（8）一起要考虑以下的退化方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,y,t,0),\quad Y(x,y,t,0)=0. \tag{9}$$

若(9)有一个特殊的"不连续"周期解，则在好几个情况下，(8)对于小的 μ 有真正的周期解(见[12])。

在应用中时常会遇到这样的微分方程组，在其中不能分出任何的小量．这里遇到了振动理论的非局部问题．研究非局部问题会有很严重的困难．但是在许多特殊的但在应用上很重要的情况下，可以成功地对相应方程组进行完全的研究，或对解的性态得到很值得注意的信息．例如对于 **van der Pol 方程**(van der Pol equation)之推广

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0. \tag{10}$$

N. Levinson 和 O. K. Smit([15])证明了**极限环**(limit cycle)的存在性、稳定性和唯一性．在证明中，本质上用到了(10)为二阶方程这一事实．后来也证明了对一个三阶非线性方程和许多高阶自治系统周期解存在．

在研究非自治周期方程组，即适合 $X(x, t+\omega)=X(x, t)$ 的方程组(4)时，对此方程组要考虑 Poincaré 变换 T. T 由公式 $Tx_0=x(\omega, 0, x_0)$ 定义，$x(t, t_0, x_0)$ 是(4)的适合 $x(t_0, t_0, x_0)=x_0$ 的解．若 x^* 是 T 的不动点，则解 $x(t, 0, x^*)$ 对 t 有周期 ω．这就给出应用各种不动点定理证明周期解存在的可能性(见[8],[9])．

在非线性振动理论中，**耗散系统**(dissipative system)(即解对充分大的 t 仍停留于一固定球内的方程组(4))起重大的作用，还有具有收敛性的系统(即所有解均收敛于一个稳定解的方程组)也如此；对于具体的方程组已经发展了证明其收敛性与耗散性的相当可靠的方法([8])．

一个耗散周期系统解的性态，总体说来是由此系统的某些渐近稳定积分集合的构造决定的．因此，研究这种集合的构造对于研究非线性振动理论至为重要．若一已给系统只有有限个周期解，可以相当完全地刻画出此集合([13])．另一方面，若此系统有无限个周期解，则渐近稳定积分集合的构造已证明是极端复杂的([13])．研究这种系统，一般说来，要克服相当的困难，所以只在例外的情况下才得到成功．M. Cartwright 和 J. E. Littlewood 对于具有强迫振动的 van der Pol 方程

$$\ddot{x}+k(x^2-1)\dot{x}+x=kb\sin t$$

的研究([16])就是这种研究的例子．特别是他们证明了，适当选择参数 k 和 b，这个方程有无穷多个周期解．

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Хар., 1892. (英译本 Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966).

[2] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1, Gauthier-Villars, 1892.

[3] Крылов, Н. М., Боголюбов, Н. Н., Новые методы нелинейной механики, М.-Л., 1934 (英译本: Krylov, N. M., Bogolyubov, N. N., Introduction to non-linear mechanics, Princeton Univ. Press, 1947).

[4] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.-Л., 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷班诺夫, 微分方程定性理论, 上、下, 科学出版社, 1956, 1959).

[5] Малкин, И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М.-Л., 1956.

[6] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963 (英译本: Bogolyubov, N. N., Mitropol'skiĭ, Yu. A., Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1961).

[7] Еругин, Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963 (英译本: Erugin, N. P., Linear systems of ordinary differential equations with periodic and quasi-periodic coefficients, Acad. Press, 1966).

[8] Плисс, В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.-Л., 1964 (英译本: Pliss, V. A., Non-local problems of the theory of oscillations, Acad. Press, 1961).

[9] Красносельский, М. А., Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., 1966 (英译本: Krasnosel'skiĭ, M. A., The operator of translation along trajectories of differential equations, Amer. Math. Soc., 1968).

[10] Якубович, В. А., Старжинский, В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, М., 1972 (英译本: Yakubovich, V. A., Starzhinskiĭ, V. M., Linear differential equations with periodic coefficients, Wiley, 1975).

[11] Митропольский, Ю. А., Лыкова, О. Б., Интегральные многообразия в нелинейной механике, 1973.

[12] Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975 (英译本: Mishchenko, E. F., Rozov, N. Kh., Differential equations with small parameters and relaxation oscillations, Plenum Press, 1980).

[13] Плисс, В. А., Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М., 1977.

[14] Арнольд, В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике, 《Успехи Матем. Наук》, 18 (1963), 6, 91–192.

[15] Levinson, N. and Smit, O. K., A general equation for relaxation oscillations, *Duke Math. J.*, 9 (1942),

382－403.

[16] Littlewood, J. E., The equation $\ddot{y}-k(1-y^2)\dot{y}+y=b\mu k\cos(\mu t+\alpha)$ for large k, and its generalizations, *Acta Math.*, 97 (1957), 3-4, 267－308.

В. А. Плисс 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grasman, J., Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications, Springer, 1982.

[A2] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley, 1969.

[A3] Hayashi, C., Nonlinear oscillations in physical systems., McGraw-Hill, 1964.

[A4] Minorsky, N., Nonlinear oscillastions, v. Nostrand, 1962.

[A5] Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., Nonlinear oscillations, Wiley, 1979.

[A6] Roseau, M., Vibrations nonlinéaires et théorie de la stabilité, Springer, 1966.

[A7] Sanders, J. A. and Verhulst, F., Averaging methods in non-linear dynamical systems, Springer, 1985.

[A8] Schmidt, G. and Tondl, A., Non-linear vibrations, Cambridge Univ. Press, 1967.

[A9] Urabe, M., Nonlinear autonomous oscillations, Acad. Press, 1967.

[A10] Guckenheimer, J. and Holmes, Ph., Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer, 1983.

[A11] Pankov, A. A., Bounded and almost periodic solutions of operator equations, Kluwer, 1991（译自俄文）.

齐民友 译

谐振子 [oscillator, harmonic; осциллятор, гармонический]

一个单自由度系统，其振动由方程

$$\ddot{x}+\omega^2x=0$$

来描述．相轨道是圆，振动的周期 $T=2\pi/\omega$ 与振幅无关．谐振子的位能依赖于 x 的平方：

$$U=\frac{\omega^2x^2}{2}.$$

谐振子的一些例子是：摆的微小振动，固定在刚性不变的弹簧上的质点的振动，最简单的电子振荡电路．"谐振子"和"线性振子"常常作为同义词使用．

量子力学线性振子的振动由 **Schrödinger 方程** (Schrödinger equation)

$$\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left[E-\frac{m\omega^2x^2}{2}\right]\psi=0$$

来描述，其中 m 是质点的质量，E 是它的能量，h 是 Planck 常数，ω 是频率．量子力学线性振子具有能级离散谱：$E_n=(n+1/2)h\omega$，$n=0,1,2,\cdots$；相应的本征函数可以由 **Hermite 函数** (Hermite function) 来表示．

"振子"这一术语适用于其运动带有振动特性的具有有限个自由度的（力学或物理）系统（例如，van der Pol 振子——表示处于位势为坐标的正定二次型的位势力场中的质点的振动的多维线性振子，见 **van der Pol 方程** (van der Pol equation)）．对于"振子"甚至"线性振子"，显然都没有唯一的解释．

参考文献

[1] Мандельштам, Л. И., Лекции по теории колебаний, М., 1972.

[2] Ландау, Л. Д., Лившиц, Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, 3 изд., М., 1974（中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，量子力学（非相对论理论）人民教育出版社，上册 1980，下册，1981）.

М. В. Федорюк 撰

【补注】

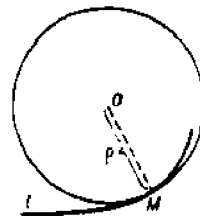
[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978（译自俄文）.

[A2] Schiff, L. I., Quantum mechanics, McGraw-Hill, 1949

杜小杨 译

密切圆 [osculating circle; соприкасающаяся окружность]，在曲线 l 的给定点 M 处的

在 M 处与 l 有 $n\geq 2$ 阶切触的圆（见**密切** (osculation)）．若 l 在 M 处的曲率为零，则密切圆退化成一直线．密切圆的半径称为 l 在 M 处的**曲率半径** (radius of curvature)，它的中心称为**曲率中心** (centre of curvature)（见图）．



若 l 是由方程 $y=f(x)$ 给出的平面曲线，则密切圆的半径由下式给出：

$$\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|.$$

若 l 是由方程

$$x=x(u),\ y=y(u),\ z=z(u)$$

给出的空间曲线，则密切圆的半径由下式给出：

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}$$

(其中撇“′”表示关于 u 的微商).

【补注】

参考文献

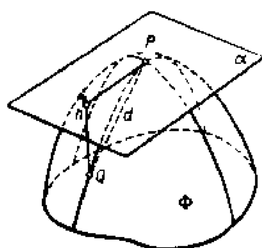
[A1] Millman, R. S. & Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977, p. 39 (中译本: R. S. 密尔曼, G. D. 派克, Millman, R. S. 和 Parker, G. D., 微分几何原理, 广东高等教育出版社, 1987 年).

[A2] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Dover, reprint, 1988, p. 14.

БСЭ-3 沈一兵 译

密切抛物面 [**osculating paraboloid**; **соприкасающийся параболоид**], 曲面在一点 P 的

在与 P 之距离为小量的二阶小量范围内展现曲面在该点附近的形状的抛物面. 设 Φ 是以 P 为顶点且与曲面在该点相切的抛物面(见图). 令 h 和 d 分别



为抛物面上任意点 Q 到曲面和到 P 的距离. 若当 $Q \to P$ 时 $h/d^2 \to 0$, 则 Φ 称为密切抛物面. 这不排除抛物面退化为抛物柱面或平面. 在正则曲面的每点都存在唯一的密切抛物面. 密切抛物面可用来对曲面上的点进行分类(见**椭圆点**(elliptic point); **双曲点**(hyperbolic point); **抛物点**(parabolic point); **平坦点**(flat point)). Д. Д. Соколов 撰

【补注】

曲面 S 在 P 处的密切抛物面在 P 处与 S 有三阶切触, 即描述抛物面和曲面的函数 $p(x, y)$ 和 $s(x, y)$ 之差 $p(x,y)-s(x,y)$ 的导数, 直到(并包括)二阶为止, 在 (x_0, y_0) 处全都为零, 这里 $P = p(x_0, y_0) = s(x_0, y_0)$.

参考文献

[A1] Millman, R. S. & Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977, p. 138 (中译本: R. S. 密尔曼, G. D. 派克, 微分几何原理, 广东高等教育出版社, 1987 年).

[A2] Berger, M. & Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces, Springer, 1988 (译自法文) (GTM 丛书, № 115).

沈一兵 译

密切平面 [**osculating plane**; **соприкасающаяся плоскость**], 在曲线 l 的一点 M 处的

在 M 处与 l 有 $n \geq 2$ 阶切触的平面(见**密切**(osculation)). 密切平面也可定义为过 l 上三点的变动平面当这些点趋向于 M 时的极限(平面). 通常, 曲线与密切平面在切触点相交(见图).



若 l 由方程

$$x = x(u),\ y = y(u),\ z = z(u)$$

给出, 则密切平面的方程有以下形式:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

其中 X, Y, Z 是流动坐标, x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' 都在切触点计值. 若在密切平面方程中 X, Y, Z 的三个系数全为零, 则密切平面变为不定的(可以与过切线的任何平面重合). БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Millman, R. S. & Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977, 31－35 (中译本: R. S. 密尔曼, G. D. 派克, 微分几何原理, 广东高等教育出版社, 1987 年).

[A2] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Dover, reprint, 1988, p. 10ff.

沈一兵 译

密切二次曲面 [**osculating quadric**; **соприкасающаяся квадрика**],

与给定曲面在给定点有二阶切触的二次曲面. 例如 **Darboux 二次曲面** (darboux quadric) 和 **Lie 二次曲面** (Lie quadric).

В. С. Малаховский 撰 沈一兵 译

密切球面 [**osculating sphere**; **соприкасающаяся сфера**], 在曲线 l 的一点 M 处的

在 M 处与 l 有 $n \geq 3$ 阶切触的球面(见**密切**(osculation)). 密切球面也可定义为过 l 上四点的变动

球面当这些点趋向 M 时的极限（球面）．若 l 在 M 处的曲率半径等于 ρ，且挠率为 σ，则计算密切球面半径的公式如下：

$$R = \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{d\rho}{ds}\right]^2},$$

其中 ds 表示沿 l 弧长的微分． БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Millman, R. S. & Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977, p. 39（中译本：R. S. 密尔曼，G. D. 派克，微分几何原理，广东高等教育出版社，1987年）.

[A2] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Dover, reprint, 1988, p. 25.

沈一兵 译

密切 [**osculation; соприкосновение**]，曲线 q 与曲线 l 在给定点 M 处的

一个几何概念，意即与包含 q 的某族给定曲线 $\{q\}$ 中的任一曲线相比，q 与 l 在 M 具有最大阶数的切触．若线段 QL 关于 MK 而言是一个 $(n+1)$ 阶微小变量（见图，其中 QL 垂直于 q 和 l 在 M 处的公切线），则就认为 q 与 l 的切触阶（order of contact）等于 n．



因此，曲线族 $\{q\}$ 中与 l 密切的曲线是与 l 最接近的曲线（即它对应的 QL 是具有最高阶的小量）．$\{q\}$ 中与 l 在给定点 M 处相密切的曲线称为所给曲线族在该点的密切曲线（osculating curve）．例如，l 在 M 处的**密切圆**（osculating circle）是与 l 在 M 处有最大切触阶的圆（与任何其他圆相比）．

类似地，可定义一已知曲面族 $\{S\}$ 中的一曲面 S 与曲线 l（或与一个曲面）在它的某点 M 处相密切的概念．这里，除了必须用 S 在 M 处的切平面来代替图中切线 MK 之外，切触阶可类似地定义．

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971（英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1, Mir, 1982）.

[2] Рашевский, П. К., Курс Дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

[3] Favard, J., Cours de géometrie différentielle locale, Gauthier-Villars 1957

[4] Залгаллер, В. А., Теория огибающих, М., 1975

БСЭ-3

【补注】

"QL 关于 MK 而言是一个 $(n+1)$ 阶微小变量"的意思是，当 K 趋向 M 时，$|QL| = O(|MK|^{n+1})$．

参考文献

[A1] Hsiung, C. C., A first course in differential geometry, Wiley, 1988, Chapt. 2, Sect. 1.4.

沈一兵 译

Остроградский 公式 [**Ostrogradski formula; Остроградского формула**]

多元函数积分学（integral calculus）中的一个公式，它建立了区域上 n 重积分与区域边界上 $(n-1)$ 重积分之间的联系．设函数 $X_i = X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 以及它们的偏导数 $\partial X_i/\partial x_i\ (i=1,\cdots,n)$ 在有界区域 $G \subset \mathbf{R}^n$ 上为 Lebesgue 可积的，而 G 的边界 ∂G 是由有限个 $(n-1)$ 维的、以外法线 ν 定向的有向光滑曲面片组成的．这时 Остроградский 公式取如下形式：

$$\int_G \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int_{\partial G} \cdots \int \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_{i+1} \cdots dx_n\, dx_1 \cdots dx_{i-1}.$$

假设 $\cos\alpha_i\ (i=1,\cdots,n)$ 为组成 G 的边界 ∂G 的曲面上外法线 ν 的方向余弦，那么公式（1）可表示为下面的形式：

$$\int_G \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}\, dv = \int_{\partial G} \cdots \int \sum X_i \cos\alpha_i\, d\sigma, \quad (2)$$

其中 $dv = dx_1 \cdots dx_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中 n 维体积元，而 $d\sigma$ 为 ∂G 的 $(n-1)$ 维体积元．

用向量场 $\mathbf{a} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 这个术语，公式（1）和（2）表示这个向量场的**散度**（divergence）在区域 G 上的积分，等于它在 G 边界上的流量（见**向量场的流量**）（flux of a vector field）：

$$\int_G \cdots \int \operatorname{div}\mathbf{a}\, dv = \int_{\partial G} \cdots \int \mathbf{a}_\nu\, d\sigma.$$

对光滑函数，这个公式首先由 M. B. Остроградский 在 1828 年（发表于 1831 年，见[1]）就 3 维情形建立．他后来（1834）将它推广到任意 n 维（n 是自然数）情形（发表于 1838 年，见[2]）．利用此公式，Остроградский 找到了具有变动积分限的 n 重积分关于参数的导数的表达式，从而得到了 n 重积分的变分公式；在 $n=3$ 的特殊情形，这个公式在 1813 年也被 C. F.

Gauss 所获得，所以它有时也称为 Остроградский - Gauss 公式（Ostrogradski - Gauss formula）. 这个公式在具有边界的流形上的推广就是 **Stokes 公式**（Stokes formula）.

参考文献

[1] Остроградский, М. В., *Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg. Sér. 6 — Sciences mathématiques, Physiques et Naturelles*, 1 (1831), 117 – 122.

[2] Остроградский, М. В., *Mémoires de l'Académie des Science de St. Pétersbourg. Sér. 6 — Sciences mathématiques, Physiques, et Naturelles*, 1 (1838), 35 – 58.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 上述公式（2）所含的结果，是众所周知的散度定理（divergence theorem）. 它（最终）等价于 Gauss 公式（Gauss formula）（Gauss 积分公式（Gauss integral formula））

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \int_{\partial G} f(s)\cos(v_s, e_j)ds,$$

其中 ds 为 ∂G 的面积元，v_s 为在点 $s \in \partial G$ 的向外单位法向量，而 e_j 是第 j 个标准单位向量.

参考文献

[A1] Triebel, H., Analysis and mathematical physics, Reidel, 1986, Sect. 9.3.1.

[A2] Krall, A. M., Applied analysis, Reidel, p. 380.

[A3] Wills, A. P., Vector analysis with an introduction to tensor analgsis, Dover, reprint, 1958, p. 97 ff.

[A4] Westenholz, C. von., Differential forms in mathematical physics, North - Holland, 1981, p. 286 ff.

王斯雷 译

Остроградский - Liouville 公式 [Ostrogradski - Liouville formula; Остроградского - Лиувилля формула]

见 **Liouville - Остроградский 公式**（Liouville - Ostrogradski formula）.

Остроградский 法 [Ostrogradski method; Остроградского метод]

从有理函数的不定积分分离出其代数部分的一种方法. 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是实系数多项式，且 $P(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数，因此 $P(x)/Q(x)$ 为真分式. 设

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_r)^{\alpha_r}\times \\ &\times(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 a_i, p_j, q_j 为实数，$(p_j^2/4)-q_j<0$，α_i 与 β_j 为自然数，$i=1,\cdots,r$，$j=1,\cdots,s$；又设

$$\left.\begin{aligned} Q_1(x) &= (x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_r)^{\alpha_r-1}\times \\ &\times(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}, \\ Q_2(x) &= (x-a_1)\cdots(x-a_r)\times \\ &\times(x^2+p_1x+q_1)\cdots(x^2+p_sx+q_s). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

于是存在实多项式 $P_1(x)$ 与 $P_2(x)$，它们的次数分别低于多项式 $Q_1(x)$ 的次数 n_1 与 $Q_2(x)$ 的次数 $n_2=r+2s$，使得有

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \quad (3)$$

在不知道多项式 $Q(x)$ 的不可约因式分解（1）时，用下面的方法求出多项式 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 是重要的：多项式 $Q_1(x)$ 是多项式 $Q(x)$ 与它的导数 $Q'(x)$ 的最大公因式，因此可用 **Euclid 算法**（Euclidean algorithm）求出，而 $Q_2(x)=Q(x)/Q_1(x)$. 多项式 $P_1(x)$ 与 $P_2(x)$ 的系数可以用未定系数法求得（见**待定系数法**（undetermined coefficients, method of））. Остроградский 法，将实有理分式的积分问题转化为分母仅有简单零点的有理分式的积分：而这种有理分式的积分可用超越函数（对数与反正切函数）来表达. 因此公式（3）中的有理分式 $P_1(x)/Q_1(x)$ 是不定积分 $\int P(x)/Q(x)dx$ 的代数部分.

这个方法为 М. В. Остроградский 于 1845 年首先发表（见[1]）.

参考文献

[1A] Остроградский, М. В., *Bull. Scient. Acad. Sci. St. - Pitersburg*, 4 (1845), no. 10 – 11, 145 – 167.

[1B] Остроградский, М. В., *Bull. Scient. Acad. Sci. St. - Pitersburg*, 4 (1845), no. 18 – 19, 286 – 300.

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

外测度 [outer measure; внешняя мера]

一个非负集函数（set function），记为 μ^*，定义在一个可数可加集合类上，其中包含集合自身及其任一子集，且 μ^* 具有下述性质：

单调性，即

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y),\ X \subset Y;$$

可数次可加性，即

$$\mu^*(\bigcup_i X_i) \leqslant \sum_i \mu^*(X_i);$$

$\mu^*(\phi)=0$，其中 ϕ 是空集.

定义在一度量空间中所有子集上的一个外测度，称为 Carathéodory 意义下的外测度（outer measure in the sense of Carathéodory），再若在 $\rho(X, Y)>0$

条件下，还有

$$\mu^*(X \cup Y) = \mu^*(X) + \mu^*(Y),$$

则称 μ^* 为度量外测度（metric outer measure），这里 $\rho(X, Y)$ 是集合 X 与 Y 之间的距离．给定一个外测度 μ^*，它就能界定出一个可测集合类，在其上使 μ^* 成为一个**测度**（measure）（亦见 **Carathéodory 测度**（Carathéodory measure））．

特别是，外测度可以 σ 环上的测度扩张到环 R 上的构造中产生．

在经典的 **Lebesgue 测度**（Lebesgue measure）论（[1]）中，一个集合的外测度（outer measure of a set）是作为包含该集合的一切开集测度的最大下界来定义的；一个集合的内测度（inner measure of a set）是作为含于该集合一切闭集测度的最小上界来定义的．

参考文献

[1] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 2 изд., М., 1957（中译本：И. П 纳汤松，实变函数论，高等教育出版社，1958）．

[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952（译自波兰文）．

[3] Halmos, P. R., Measure theory, v. Nostrand, 1950（中译本：P. R. 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958）．

В. А. Скворцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Royden, H. L., Real analysis, Macmillan, 1968.

周民强 译

卵形线 [oval; овал]

$\mathbf{R}^2$ 中 C^2 光滑的凸闭曲线．卵形线上**曲率**（curvature）为极值的点称为卵形线的顶点（vertices of the oval）．顶点个数至少为四．

设 E 是具有 Descartes 直角坐标 x, y 的平面上按反时针方向走的卵形线；h 是原点 O 到 E 的有向切线的距离（若切线绕 O 的旋转是反时针方向的，则 $h > 0$）．切线的方程便是

$$x\cos\tau + y\sin\tau = h(\tau),$$

其中 τ 是切线与 Ox 轴作成的角．量 $h(\tau)$ 称为卵形线的支撑函数（support function of the oval）．卵形线的曲率半径是

$$r = h + \frac{d^2 h}{d\tau^2};$$

而卵形线的长度是（Cauchy 公式（Cauchy formula））

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} h(\tau)\, d\tau.$$

对于卵形线的长度 L 和卵形线内部区域的面积 F，下述等周不等式成立：

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0$$

（详见 **Bonnesen 不等式**（Bonnesen inequality））．

А. Б. Иванов 撰

【补注】

光滑性有时不必假设，因而 $\mathbf{R}^2$ 中任何凸闭曲线都称为卵形线．在有限（射影）几何中，术语"卵形线"表示一类特殊的**卵形面**（ovoid）．

参考文献

[A1] Berger, M. & Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces, Springer, 1988（译自法文）（GTM 丛书，№ 115）．

[A2] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976.（中译本，M. 多卡模，曲线和曲面的微分几何学，上海科学技术出版社，1988 年）．

[A3] Chern, S. S., Curves and surfaces in Euclidean space, Prentice Hall, 1967.

[A4] Bonnesen, T. & Fenchel, W., Theorie der konvexen Körper, Springer, 1934.

沈一兵 译

过度收敛 [over-convergence; сверхсходимость]

级数部分和的某个子序列在大于该级数收敛域的一个区域内的收敛性．下列过度收敛定理（theorems on over-convergence）成立：

1）如果对于收敛半径为 $R(0 < R < \infty)$ 的幂级数

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n},$$

其指数 λ_n 满足：对 n 的无穷多个值 n_ν，有

$$\lambda_{n_\nu+1} - \lambda_{n_\nu} > \theta\lambda_{n_\nu},$$

其中 θ 是一固定正数，则 n_ν 阶部分和的序列

$$S_{n_\nu}(z) = \sum_{m=1}^{n_\nu} a_m z^{\lambda_m},\ \nu = 1, 2, \cdots$$

在圆周 $|z| = R$ 上每个使所给级数和 $f(z)$ 为正则的点 z_0 的充分小邻域内一致收敛．

2）如果

$$\lambda_{n_\nu+1} - \lambda_{n_\nu} > \theta_\nu\lambda_{n_\nu},\ \lim_{\nu\to\infty}\theta_\nu = +\infty,$$

则序列 $\{S_{n_\nu}(z)\}$ 在 $f(z)$ 的存在域的任一闭有界部分中一致收敛．

下述定理（即 1）的逆命题）也成立：如果收敛半径为 $R(0 < R < \infty)$ 的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

具有在 $z_0(|z_0|\geqslant R)$ 的某邻域中一致收敛的部分和子序列，则此幂级数可表示为一个收敛半径大于 R 的幂级数与一个**缺项幂级数**(lacunary power series)

$$\sum_{n=1}^{\infty}d_n z^{\lambda_n}(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}>\theta\lambda_{n_k},\ k=1,2,\cdots,\theta>0)$$

之和.

1) 中定理对许多别的级数特别对 **Dirichlet 级数**(Dirichlet series)成立.

参考文献

[1] Bieberbach, L., Analytische Fortsetzung, Springer, 1955.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

[3] Леонтьев, А. Ф., Ряды экспонент, М., 1976.

А. Ф. Леонтьев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ilieff [Il'ev], L., Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen, Deutsch. Verlag Wissenschaft, 1960 (译自俄文).

【译注】

参考文献

[B1] Titchmarsh, E. C., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1939 (中译本: E. C. 梯其玛希, 函数论, 科学出版社, 1962, 第七章).

沈永欢 译

超定(方程)组 [**overdetermined system**; **переопределенная система**]

方程个数大于未知量个数的方程组. 在线性情形下, 这样的方程组由一个 $(m\times n)$ 的长方矩阵给出, $m>n$, 这里 m 是方程个数, n 是未知量个数. 对一超定方程组的基本问题是由相容性条件表达的它的可解性.

例如, 一线性代数方程的超定方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ 1\leqslant i\leqslant m$$

是可解的, 当且仅当基矩阵 $A=\|a_{ij}\|$ 的秩和将一列自由项加到 A 中所得的增广矩阵的秩相一致.

对一常系数的线性微分方程的超定方程组

$$\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(D)u_j=f_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\qquad (1)$$

其中 p_{ij} 是单变量(对常微分方程)或多变量(对偏微分方程)的多项式, 而 D 是微分符号, 相容性条件是一常系数的齐次方程组:

$$\sum_{i=1}^{m}q_{ki}(D)f_i=0,\quad 1\leqslant k\leqslant r.\qquad (2)$$

其中矩阵 q 可以由矩阵 p 代数地定出.

如果(1)是具有变系数 $p_{ij}=p_{ij}(x,D)$ 的超定偏微分方程组, 那么寻求具有 $q_{ki}=q_{ki}(x,D)$ 的形式(2)的相容性条件要困难得多.

超定方程组的最简单例子是微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=f_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

其相容性条件取形式

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=0,\quad 1\leqslant i,k\leqslant m,$$

此条件对于这个方程组的可解性既是必要的, 又是充分的.

多复变解析函数 $u(z_1,\cdots,z_m)$ 亦可考虑为超定方程组

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z_j}\equiv\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}+i\frac{\partial u}{\partial y_j}\right]=0,\quad 1\leqslant j\leqslant m$$

的解, 其中 $z_j=x_j+iy_j$.

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Foundations of linear algebra, Freeman, 1963).

[2] Паламодов В. В., в сб.: Итоги науки. Математический анализ, 1968, М., 1969, 5 – 37.

А. П. Солдатов 撰

【补注】 熟知的超定的偏微分方程组是对 $C^n(n>1)$ 中解析函数的 Cauchy-Riemann 组(见 **Cauchy-Riemann 条件**(Cauchy-Riemann conditions)). 亦见 **Neumann 问题**(Neumann problem).

孙和生 译 陆柱家 校

卵形体 [**ovoid**; **овоид**], **卵形面**(ovaloid)

某空间中的一个点集 O, 它与任意直线最多相交于两点, 且使得在它的每一点处 O 的一切切线恰好覆盖一个超平面. 在射影空间中一个非直纹的**二次超曲面**(quadric)是一个卵形体. 这个术语主要用于有限几何学.

在维数大于 3 的有限射影空间中, 卵形体不存在. 在阶数 $q>2$ 的三维空间里, 一个卵形体是一个极大 k 冠(见**冠**(cap)), 含有 q^2+1 个点, 且对于奇数 q, 任何卵形体都是一个椭圆二次曲面(见[1]). 在一个阶数为 q 的平面上, 一个卵形体称为一条**卵形线**(oval), 它含有 $q+1$ 个点. 在一个奇数阶的(Desargues)平面上, 任何卵形线可唯一地表示为 Galois 域上的非退化二次曲线(见[2]).

参考文献

[1] Segre, B., Introduction to Galois geometries, *Atti. Accad. Naz. Lincei*. 8(1967), 133 – 236

[2] Segre, B., Ovals in a finite projective plane, *Canad. J. Math*., 7(1955), 414 – 416

[3] Tits, J., Ovoids à translations, *Rend. Mat. e Appl*., 21(1962), 37 – 59.

В. В Афанасьев 撰

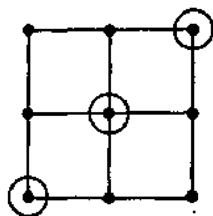
【补注】 对于偶数阶的 Desargues 平面，上面最后的陈述有反例.

$\mathbf{P}^3$ 中的一个卵形体是一个点集 $\mathscr{O}$，使得无四点在一平面上且对于每一点 $A\in\mathscr{O}$，有通过 A 的唯一超平面与 $\mathscr{O}$ 相切（tangent）于该点．这里"相切"意味着 $\mathscr{O}$ 与超平面的交只包含 A 本身．

对于一个奇特征的有限域，$\mathbf{P}^3$ 中的卵形体恰好是一个 Witt 指标为 1 的二次型的零点（[A1]）．

在一个**极空间**（polar space）（特别是，一个广义**四角形**（quadrangle））中，一个卵形体是一个点集 $\mathscr{O}$，使得每一个极大奇异子空间与 $\mathscr{O}$ 恰好交于一点．广义四角形中的一个展形（spread）是一个线的集合 $\mathscr{S}$，使得每一点与 $\mathscr{S}$ 中的一条线相关联．一个展形是对偶广义四角形中的一个卵形体．阶为 (s,t) 的有限广义四角形中的一个卵形体具有基数 $st+1$．

卵形体的一个（平凡的）例子是如下描绘的网格（见**四角形**（quadrangle））里的加圈的点的集合．



极空间中卵形体的抽象概念与 $\mathbf{P}^3$ 中的卵形体之间的联系如下所述．考虑由一个辛双线性型 Q 定义的典型广义四角形（classical generalized quadrangle），即点是 $\mathbf{P}^3$ 里的点（都是迷向的）且线是关于这个型为全迷向的 $\mathbf{P}^3$ 中的线，则此广义四角形中的一个卵形体视为 $\mathbf{P}^3$ 的一个子集时就是该概念的几何描述意义下的一个卵形体．（$(y_0:y_1:y_2:y_3)=A\in\mathscr{O}$ 的切平面是 $A^\perp=\{x\in\mathbf{P}^3:Q(x,y)=0\}$）．

令 $\Omega^+(2n,\mathbf{F})$（$\mathbf{F}$ 为有限域）是由双线性型

$$x_0x_1+x_2x_3+\cdots+x_{2n-2}x_{2n-1}$$

定义的（典型的）极空间．$\Omega^+(6,\mathbf{F})$ 中的卵形体可以用来得到非 Desargues 平移平面．从 $\Omega^+(8,\mathbf{F})$ 中一个"主要的"卵形体可以得到 $\Omega^+(6,\mathbf{F})$ 中的许多卵形体．$\Omega^+(10,\mathbf{F})$ 中是否存在卵形体是一个尚未解决的问题．在 $\Omega^+(10,\mathbf{F}_3)$ 中没有（[A4]），在 $\Omega^+(10,\mathbf{F}_2)$ 中也没有（[A5]）卵形体．

参考文献

[A1] Barlotti, A., Un' estenzione del teorema di Segre-Kustaanheimo, *Boll. Un. Mat. Ital*. (3), 10(1955), 498 – 506.

[A2] Payne, S. E. and Thas, J. A., Finite generalized quadrangles, Pitman, 1984.

[A3] Mason, G. and Shult, E. E., The Klein correspondence and the ubiquity of certain translation planes, *Geom. Dedicata*, 21(1986), 29 – 50.

[A4] Shult, E. E., Nonexistence of ovoids in $\Omega^+(10, \mathbf{F}_3)$, *J. Comb. Theory, Ser. A*, 51(1989), 250 – 257.

[A5] Kantor, W. M., Ovoids and translation planes, *Canad. J. Math*., 34(1982), 1195 – 1207.

[A6] Hirschfeld, J. W. P., Finite projective spaces of three dimensions, Clarendon, 1985, Chap. 16.

林向岩 译 陆珊年 校

P

π 可分群 [**π-separable group**; **π-отделимая группа**]

具有一正规群列而其中每个因子群的阶至多包含 π 中一个素数的群（π 为素数的一个集合）．π 可分群的类包含 π **可解群**（π-solvable group）的类． 对有限 π 可分群，能证明 π-Sylow 性质（见 **Sylow 定理**（Sylow theorems））成立（见[1]）．事实上，对任何集合 $\pi_1 \subseteq \pi$，有限 π 可分群 G 包含 π_1-Hall 子群（亦见 **Hall 子群**（Hall subgroup）)，而且任意两个 π_1-Hall 子群在 G 内是共轭的．π 可分群 G 的任意 π_1 子群都包含在某个 π_1-Hall 子群内（见[2]）．

参考文献

[1] Чунихин，С．А．，《Докл．АН СССР》，**59**（1948），3，443－445．

[2] Hall，P．，Theorems like Sylow's，*Proc．London Math．Soc．*，**6**（1956），22，286－304．

С．П．Струнков 撰

【补注】 Чунихин 定理（Chunikhin theorem）断言，若 k 是某 π 可分群 G 的阶 n 的因子使得 $n=kl$，$(k,l)=1$ 成立，并且 k 的所有素因子都在 π 内，则 G 有 k 阶子群并且所有这种子群都在 G 中共轭．若 π 由所有素数组成，这就是 Hall 第一定理（Hall first theorem）．

Гольберг 定理（Gol'berg theorem）（[A2]）断言，若 G 为有限 π 可分群而 π_1 为 π 的子集，则 G 有 Sylow π_1 基（见 **Sylow 基**（Sylow basis））且所有这些基都是共轭的．

参考文献

[A1] Kurosh，A．，The theory of groups，Ⅱ．Chelsea，1955－1956，p．195*ff*（译自俄文）（中译本：A．Г．库洛什，群论，高等教育出版社，1982）．

[A2] Gol'berg，P．A．，Sylow bases of π-separable groups，*Dokl．Acad．Nauk SSSR*，**60**（1949），615－618．

[A3] Chunikhin，S．A．，On π－properties of finite groups，*Mat．Sb．*，**25**（1949），321－346．

李慧陵 译

π 可解群 [**π-solvable group**; **π-разрешимая группа**]

可解群（solvable group）概念的一个推广．设 π 为素数的一个集合．一个有限群称为 π 可解群如果它的每个合成因子的阶或者与 π 中每个素数互素、或者正好是 π 内一素数．π 可解群的基本性质与可解群很相似．对任意的 $\pi_1 \subset \pi$，π 可解群也是 π_1 可解群．π 可解群的子群、商群以及 π 可解群被 π 可解群的扩张仍是 π 可解群．在 π 可解群 G 中每个 π 子群（π-subgroup）（即阶的每个素因子都属于 π 的子群）都包含在某个 Hall π 子群（Hall π-subgroup）内（Hall π 子群是指其在 G 内的指数不能被 π 内任何素数整除的 π 子群），并且每个 π' 子群（此处 π' 表示 π 在全体素数的集合内的补集）包含在某 Hall π' 子群内；所有 Hall π 子群以及所有 Hall π'子群在 G 内是共轭的；G 的极大子群的指数或者不能被 π 内任何素数整除，或者是集合 π 中一个素数的方幂（见[1]）．G 中 Hall π 子群的个数等于 $\alpha_1 \cdots \alpha_t$，其中 $\alpha_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ 对于每个整除 G 的阶的 $p_i \in \pi$ 成立，并且 α_i 整除 G 的一个主因子的阶（见[2]）．

参考文献

[1] Чунихин，С．А．，Подгруппы конечных групп．Минск，1964（英译本：Chunikhin，S．A．，Subgroups of finite groups，Wolters-Noordhoff，1969）．

[2] Brauer，W．，Zu den Sylowsätzen von Hall und Čunichin，*Arch．Math．*，**19**（1968），3，245－255．

С．П．Струнков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson，D．J．S．，A course in the theory of gro-

ups, Springer, 1982. 李慧陵 译

p 进数 [p-adic number; p-адическое число]

以整数被给定的素数 p 的整除性为基础的有理数域的扩张 (extension of a field) 中的元素. 此扩张是有理数域关于一个非 Archimedes 赋值的完全化 (见域上的范数 (norm on a field)).

对于任一素数 p, 一个 p 进整数 (p-adic integer) 是满足下述条件的一个序列 $x=(x_0, x_1, \cdots)$: x_n 是模 p^{n+1} 的剩余, 且

$$x_n \equiv x_{n-1} (\mathrm{mod}\, p^n),\ n \geqslant 1.$$

p 进整数的加法和乘法由下述公式定义:

$$(x+y)_n \equiv x_n + y_n (\mathrm{mod}\, p^{n+1}),$$

$$(xy)_n \equiv x_n y_n (\mathrm{mod}\, p^{n+1}).$$

每个整数 m 都被等同于 p 进数 $x=(m, m, \cdots)$. 全体 p 进整数关于加法和乘法构成一个包含整数环的环. p 进整数环也可定义为 $\mathrm{mod}\, p^n$ 的剩余系 (在自然投射下) 的投射极限

$$\varprojlim_n \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.$$

一个 p 进数 (p-adic number), 或有理 p 进数 (rational p-adic number) 是指 p 进整数环 $\mathbf{Z}_p$ 的商域 $\mathbf{Q}_p$ 的元素. 这个域被称作 p 进数域 (field of p-adic numbers). 它包含有理数域作为子域. p 进数环和域附有自然的拓扑. 此拓扑可以用与 p 进范数 (p-adic norm) 相关的度量来定义, 此范数即是如下定义的 p 进数 x 的函数 $|x|_p$: 如果 $x \neq 0$, 则 x 可唯一地表示为 $p^n a$, 其中 a 是 p 进整数环中的可逆元素; 于是定义 $|x|_p$ 等于 p^{-n}. 如果 $x=0$, 则定义 $|x|_p=0$. 如果 $|x|_p$ 最初只是定义在有理数域上, 则 p 进数域可由有理数域对于 p 进范数进行完全化得到.

p 进域中的每个元素可以表成下述形式:

$$x=\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k p^k,\ 0 \leqslant a_k < p, \qquad (*)$$

其中 a_k 都是整数, k_0 是某个整数, $a_{k_0} \neq 0$. 此级数在域 $\mathbf{Q}_p$ 的度量下收敛. 满足 $|x|_p \leqslant 1$ (即 $k_0 \geqslant 0$) 的数 $x \in \mathbf{Q}_p$ 构成 p 进整数环 $\mathbf{Z}_p$, 它是域 $\mathbf{Q}$ 的整数环 $\mathbf{Z}$ 的完全化. 满足 $|x|_p = 1$ (即 $k_0=0$, $a_0 \neq 0$) 的数 $x \in \mathbf{Z}_p$ 称为 p 进单位 (p-adic unit), 构成一个乘法群. 满足 $|x|_p < 1$ (即 $k_0 > 0$) 的数 $x \in \mathbf{Z}_p$ 的集合构成以 p 为生成元的 $\mathbf{Z}_p$ 的主理想. 环 $\mathbf{Z}_p$ 是完全的离散赋值环 (亦见离散赋范环 (discretely-normed ring)). 域 $\mathbf{Q}_p$ 在度量 $|x-x'|_p$ 诱导出的拓扑下是局部紧的, 因而具有不变测度 μ, 通常取满足条件 $\mu(\mathbf{Z}_p)=1$. 对于不同的 p, 赋值 $|x|_p$ 是相互独立的, 且域 $\mathbf{Q}_p$ 是彼此不同构的. 经典分析中的很多事实和概念都可推广到 p 进域的情形.

p 进数与模素数的升高方幂的 Diophantus 方程的解有联系. 即如果 $F(x_1, \cdots, x_m)$ 是整系数多项式, 则同余式

$$F(x_1, \cdots, x_m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^k)$$

对于所有的 $k \geqslant 1$ 的可解性等价于方程 $F(x_1, \cdots, x_m) = 0$ 在 p 进整数中的可解性. 此方程在整数环或有理数域中的可解性的一个必要条件是它对于所有的 p 在 p 进整数环, 或相应地, p 进数域中的可解性. 这个求解 Diophantus 方程的途径, 特别地, 上述条件——所谓局部条件 (local condition)——是否为充分条件的问题, 构成了现代数论的一个重要分支 (见 **Diophantus 几何** (Diophantine geometry)).

在一个特殊的情形下, 上述的可解性条件可以被一个类似的条件所取代. 事实上, 如果

$$F(x_1, \cdots, x_m) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$$

有解 $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m)$, 并且这个解定义了超曲面 $\bar{F}(x_1, \cdots, x_m)=0$ 的一个非奇异点, 其中 $\bar{F}$ 是多项式 F 模 p, 则原方程在 p 进数中有解, 此解模 p 同余于 $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m)$. 这个定理被称为 **Hensel 引理** (Hensel lemma), 是概型理论中一个更一般的事实的特殊情形.

p 进整数环可被视为 Witt 环 $W(A)$ 的结构的特殊情形. 如果 $A=F_p$ 是 p 个元素的有限域, 即可得到 p 进整数环 (见 **Witt 向量** (Witt vector)). p 进数的另一个推广是 $\mathfrak{p}$ 进数, 它是代数数域关于与素除子相关的非 Archimedes 赋值的完全化的结果.

p 进数是由 K. Hensel 引入的 ([1]). 其典范表达式 (*) 与解析函数的幂级数展开式类似. 这是代数数和代数函数相似之处的表现之一.

参考文献

[1] Hensel, K., Ueber eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 6 (1899), 1, 83-88.

[2] Боревич, З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд. М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966).

[3] Lang, S., Algebraic numbers, Springer, 1986.

[4] Weyl, H., Algebraic theory of numbers, Princeton Univ. Press, 1959.

[5] Hasse, H., Zahlentheorie, Akademie-Verlag, 1963.

[6] Weil, A., Basic number theory, Springer, 1974.

[7] Bourbaki, N., Elements of mathematics, 7. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

А. Н. Паршин В. Г. Спринджук 撰 赵春来 译

p 可除群 [p-divisible group; p-делимая группа], Bar-

sotti-Tate 群(Barsotti-Tate group)

有限高度交换形式群(formal group)概念的推广. 对于 p 可除群, 用素数 p 相乘所诱导的同态是一个满同态.

设 S 是一个概形(scheme), p 是素数. 高度 h 的 p 可除群(p-divisible group of height h)是 p^{nh} 阶的交换有限群概形 G_n(见群概形(group scheme))的归纳系 $G=(G_n, i_n)$, 使得以下序列是正合的(见正合序列(exact sequence); 这里 φ_n 是用 p^n 相乘所得的同态):

$$0 \to G_n \xrightarrow{i_n} G_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1}.$$

p 可除群的态射就是归纳系的态射. 如果所有的 G_n 都是连通的(相应地, 艾达尔的)群概形, 则称此 p 可除群是连通的(connected)(相应地, 艾达尔的(étale)). 特征数 p 的域上的连通 p 可除群是一个交换形式群(被看作 φ_n 的, 即用 p^n 相乘的核的归纳极限), 使得用 p 相乘是一个同源(isogeny)([6]). 这个事实可被推广到一个任意的基概形 S, 在 S 上由 p 相乘诱导的同态是局部幂零的([4]). 艾达尔 p 可除群的范畴等价于概形 S 的基本群的 p 进表示的范畴. 在一个 Artin 概形 S 上的每个 p 可除群 G 包含一个极大连通子群 G^0, 称为单位元的连通分支(connected component of the identity), 关于它的商是一个艾达尔 p 可除群. 任何一个 $(G^0)_n$ 的 Lie 代数的维数称为 p 可除群 G 的维数(dimension of the p-divisible group G).

设 A 是域 k 上的 d 维 **Abel 簇**(Abelian variety), $A(n)$ 是 A 内用 p^n 相乘的同态的核, i_n: $A(n) \to A(n+1)$ 是自然包含. 归纳系 $A(\infty)=(A(n), i_n)$ 是高度为 $2d$ 的 p 可除群. 它的单位连通分支 $A(\infty)^0$ 与 A 沿着单位截面的形式完全化相重合, $A(\infty)^0$ 的高等于 $2\dim A$.

设 $G=(G_n, i_n)$ 是高度 h 的 p 可除群, 用 $\hat{G}_n$ 表示 Cartier 对偶有限群概形, 把用 p 相乘的映射 $G_{n+1}\to G_n$ 的对偶映射记为 $\hat{i}_n$: $\hat{G}_n \to \hat{G}_{n+1}$. 归纳系 $\hat{G}=(\hat{G}_n, \hat{i}_n)$ 是高度 h 的 p 可除群, 称为 p 可除群 G 的 Serre 对偶(Serre dual). G 和 $\hat{G}$ 的维数之和等于 h.

如同形式群, 在 p 可除群中也可引人 **Dieudonné 模**(Dieudonné module)的概念, 它在 p 可除群的形变理论中起重要作用([2], [3], [4]).

如果 S 是具有不相等特征数的离散赋值环 A 的谱, A 的剩余域的特征数是 p, 则 p 可除群的结构与 A 的商域 K 的代数闭包的完全化的结构有密切的联系, 这里把 A 看成域 K 的 Galois 群上的模([6]).

参考文献

[1] Barsotti, I., Analytic methods for abelian varieties in positive characteristic, in Coll. Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962), Gauthier-Villars, 1962, 77 – 85.

[2] Grothendieck, A., Groupes de Barsotti-Tate et cristaux, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Nice, 1970, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, 431 – 436.

[3] Mazur, B. and Messing, W., Universal extensions and one-dimensional crystalline cohomology, Springer, 1974.

[4] Messing, W., The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to Abelian schemes, Springer, 1972.

[5] Serre, J. P., Groupes p-divisibles (d'après J. Tate), Sém. Bourbaki, 318, Benjamin, 1968.

[6] Tate, J., p-divisible groups, in Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1967), Springer, 1967, 158 – 183.

И. В. Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Demazure, M., Lectures on p-divisible groups, Lecture notes in math., 302, Springer, 1972.

陈志杰 译

p 群 [p-group; p-группа]

每个非单位元都是 p 元素(p-element)的群. p 元素是满足方程 $x^{p^n}=1$ 的元素. 这里 p 为一取定素数, 对群中一切元素适用, 而 n 为一自然数, 一般来说, 对不同的元素可能不同. 于是 p 也可以用其他符号为 q, r 或 s 等替代, 但使用时需要说明. 若 p 是一给定的素数, 如 2, 3, 5, …, 就称之为 2 群, 3 群等等. p 群(p-group)也称为准素群(primary group). p 群的一种推广是 π 群(π 是一取定的素数集合), 按定义它是所有非单位元素都是 π 元素(π-element)的群, 这里 π 元素指满足方程 $x^m=1$ 的元素, 其中 m 为一自然数, 它的一切素因子都在 π 内. 偶而也使用 Π 群, σ 群或 τ 群这样的说法. 若 N 表示全体素数的集合, 常记 $p'=N\backslash p$, $\pi'=N\backslash\pi$ 而使用 p' 群, π' 群, p' 元素和 π' 元素这些说法. 对一给定的群, 那些本身为 p 群(π 群)的子群称为 p 子群(p-subgroup)(相应地, π 子群(π-subgroup)).

有限群论中许多研究工作都与用有限 p 群来刻画任意有限群和用 2 群刻画有限单群这样的问题有关. (见[1], 第 IV, V 章; [2]). 由于这个原因, 主要兴趣集中在用其 Abel 子群或 p 自同构来刻画有限 p 群上.

无限(非 Abel) p 群的研究工作相对少些. 少量最重要的结果可大致分成如下三部分:

1) 与 Burnside 问题的解有关的结果，见 **Burnside 问题** (Burnside problem).

2) 局部有限 p 群不是单群(见[3]).

3) 一些说明有限 p 群理论与 p 群的一般理论的不同的例子如: a) 存在局部有限 p 群，它没有非平凡正规 Abel 子群 (见[3])；b) 存在局部有限 P 群，它是自身的**换位子群** (commutator subgroup)(见[3]). 亦见**具有有限性条件的群** (group with a finiteness condition).

参考文献

[1] Huppert, B., Endliche Gruppen, Springer, 1967.

[2] Gorenstein, D., Finite Groups, Harper & Row, 1968.

[3] Шмидт, О. Ю., Избр. тр. Математика, М., 1959.

[4] Черников, С. Н., 《Успехи матем. наук》, 14(1959), 5, 45 – 96.

[5] Итоги науки. Алгебра, 1964. М., 1966, 123 – 160.

[6] Serre, J. P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1973.

Ю. М. Горчаков 撰

【补注】 p 子群的正规化子(见**子集的正规化子** (normalizer of a subset)) 称为局部子群 (local subgroup). 有限单群的研究强烈地依赖于它们的局部子群的结构理论. 见[A1] – [A2]. 局部子群在有限群的模表示论中也被涉及，见[A3]. 近来，加限 Burnside 问题为 Е. И. Зельманов 解决，见[A4], [A5]及 **Burnside 问题** (Burnside problem).

参考文献

[A1] Huppert, B and Blackburn, N. Finite Groups, 3, Springer, 1982.

[A2] Aschbacher, M, Finite group theory, Cambridge Univ Press, 1986.

[A3] Alperin, J. L, Local representation theory, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A4] Zel'manov, E. I., Solution of the restricted Burnside paoblem for groups of odd exponent, *Izv. Akad. Nank SSSR Ser. Mat.*, **54**(1990), 1, 42 – 59.

[A5] Zel'manov, E. L., On the restricted Burnside problem, *Sibirsk. Mat. Zh.*, **30**(1989), 6, 68 – 74.

李慧陵 译

填装 [**packing**; **упаковка**]，集合 $M_1, M_2, \cdots$ 的有限(或无限)族在集合 A 中的条件

$$M_i \subset A,\ M_i \cap M_j = \emptyset\ (i \neq j)$$

的实现. 在**数的几何** (geometry of numbers) 中，通常 $A = \mathbf{R}^n$, $M_i = M + a_i$, 其中 M 是一个给定的集合，$a_i (i = 1, 2, \cdots)$ 取遍 $\mathbf{R}^n$ 中向量的某一个集合 $\mathscr{X}$, 在这种情形称 $(M, \mathscr{X})$ 为集合 M 被向量系 $\mathscr{X}$ 的填装 (packing of the set M by the system of vectors $\mathscr{X}$). 如果 $\mathscr{X} = \Lambda$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点格，则称之为格填装 (lattice packing) (M, Λ).

不仅可以在 $\mathbf{R}^n$ 中，而且可以在其他流形上，如 n 维球面上，一个给定的区域中，等等，考虑集合 M_1, M_2, $\cdots$ 的填装(见[1], [2]). 有时填装定义为(例如，闭域) $M_1, M_2, \cdots$ 的一个系统，其内点互不相交(见[1]).

参考文献

[1] Барановский, Е. П., в кн.: Итоги науки Алгебра. Топология. Геометрия, 1967, М, 1969, 189 – 225.

[2] Fejes Toth, L, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, 1972.

[3] Rogers, C A., Packing and covering, Cambridge Univ Press, 1964.

А. В. Малышев 撰

【补注】 球填装在**纠错码** (error-correcting code)、信道编码问题、**Steiner 系** (Steiner system)、t 设计及有限群理论中有各种应用. 最重要的特殊情形是由 **Leech 格** (Leech lattice) 给出的 $\mathbf{R}^{24}$ 中的球填装. $\mathbf{R}^3$ 中的有限和无限球填装在经典和现代晶体学(见**数学晶体学** (crystallography, mathematical)) 中有应用.

同时是 $\mathbf{R}^4$ 的覆盖的 $\mathbf{R}^4$ 的填装(见**覆盖与填装** (covering and packing); **覆盖(集合的)** (covering (of a set))) 称为一个铺砌 (tiling) 或镶嵌 (tesselation). 换言之，一个铺砌是一个既无缝又不重叠的覆盖 $\mathbf{R}^4$ 的闭集的可数族. 这些集合称为瓦片 (tiles). 如果这些集合是全等的，则称它们为原始瓦片 (prototile) 的拷贝.

在**数的几何** (geometry of numbers) 中，格铺砌 (lattice tilings) 是令人感兴趣的；它们是 $M + a$ ($a \in \Lambda$) 形的铺砌，其中 Λ 是点格 (lattice of points). 平面铺砌的一个详尽论述见[A3]. 高维结果，特别是与晶体学的关系见[A2], [A1]. 铺砌的经典型是 Dirichlet-Вороной 铺砌 (Dirichlet-Voronoï tilings) 和 Делоне 三角剖分 (Delone triangulations) 或 L 分拆 (L-partitions)，见[A1]和 **Вороной 格型** (Voronoï lattice types).

参考文献

[A1] Erdös, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., Lattice points, Longman, 1989.

[A2] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A3] Grünbaum, B. and Shephard, G. C., Tilings and patterns, Freeman, 1986.

[A4] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., Sphere packings, lattices and groups, Springer, 1988.

陆珊年 译

Padé 逼近 [**Padé approximation**; **Паде аппроксимация**]

幂级数的一种最佳有理逼近．设

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \qquad (1)$$

为任一（形式上的或收敛的）幂级数，$n, m \geqslant 0$，为整数，$R_{n,m}$ 是形如 p/q 的所有有理函数类，其中 p 与 q 是关于 z 的多项式，$\deg q \leqslant m$，$\deg p \leqslant n$ 且 $q \neq 0$．级数（1）（函数 f）的 (n, m) 型 Padé 逼近（Padé approximant）是函数类 $R_{n,m}$ 中与幂级数（1）在点 $z=0$ 有最大可能切触阶的有理函数 $\pi_{n,m} \in R_{n,m}$．更确切地说，函数 $\pi_{n,m}$ 由条件

$$\sigma(f-\pi_{n,m})=\max\{\sigma(f-r): r\in R_{n,m}\}$$

确定，其中，$\sigma(\varphi)$ 是级数

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k$$

中第一个非零系数的下标．

也可以将函数 $\pi_{n,m}$ 定义为满足条件

$$\deg p \leqslant n, \deg q \leqslant m,$$

$$(qf-p)(z)=A_{n,m}z^{n+m+1}+\cdots \qquad (2)$$

的任意两个多项式 p 和 $q(q\neq 0)$ 的商 p/q．

对于固定的 n, m，幂级数（1）存在唯一的 Padé 逼近 $\pi_{n,m}$．表 $\{\pi_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ 称作是级数（1）的 Padé 表（Padé table）．形如 $\{\pi_{n,m}\}_{n=0}^{\infty}$ 的序列称作为 Padé 表的行（rows of the Padé table）（零行恰好是 f 的 Taylor 多项式序列）；称 $\{\pi_{n,m}\}_{m=0}^{\infty}$ 为 Padé 表的列；而 $\{\pi_{n+j,n}\}_{j=0}^{\infty}$ 则被称作 Padé 表的对角线．最重要的特殊情形 $j=0$ 是 Padé 表的主对角线．

函数 $\pi_{n,m}$ 的计算归结为求解一个线性方程组，其系数可借助于给定幂级数的系数 f_k，$k=0, \cdots, n+m$ 来表示．如果 Hankel 矩阵（Hankel matrix）

$$\Delta_{n,m}=\begin{bmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{bmatrix}$$

有非零的行列式，则函数 $\pi_{n,m}$ 的分母 $q_{n,m}$ 由下述公式给出

$$q_{n,m}(z)=\frac{1}{\det(\Delta_{n,m})}\begin{vmatrix} \Delta_{n,m} & \begin{matrix} f_{n+1} \\ \vdots \\ f_{n+m} \end{matrix} \\ \begin{matrix} z^m \cdots & z \end{matrix} & 1 \end{vmatrix}$$

（规范化条件为 $q_{n,m}(0)=1$；也可写出函数 $\pi_{n,m}$ 的分子的显式表达式）．并且

$$(f-\pi_{n,m})(z)=A_{n,m}z^{n+m+1}+\cdots.$$

有时用上述关系式来定义 Padé 逼近；但此种情形下的 Padé 逼近对某个确定的 (n, m) 不一定会存在．给定幂级数 f 的 (n, m) 型 Padé 逼近常用符号

$$[n/m]=[n/m]_f$$

记之．

为了有效地计算 Padé 逼近，不采用显式公式，而利用 Padé 表中存在的递推关系将更为方便．大量的算法已被建立用于 Padé 逼近的机器计算；这些问题在实际应用中具有特别重要的意义（见[17]，[18]）．

A. L. Cauchy（[1]）首先研究了利用 $R_{n,m}$ 中的有理函数对一个在 $n+m+1$ 个不同点的值为已知的函数的插值问题；C. G. J. Jacobi（[2]）将 Cauchy 的结果拓广到了多重点插值的情形．$(n+m+1)$ 多重点的插值对应的正是 Padé 逼近．19 世纪末，在经典的连分式理论中，Padé 逼近的思想就已经形成了（G. Frobenius[3]，H. Padé[4]）．П. Л. Чебышев，A. A. Марков 和 T. J. Stieltjes 利用连分式获得了有关对角 Padé 逼近的基本结果，他们发现并研究了对角 Padé 逼近与正交多项式、求积公式、矩问题以及经典分析中某些其他问题之间的关系（见[7]－[9]）．Padé 表行方面的工作最初集中于研究由幂级数定义的函数的亚纯半径以及亚纯圆盘内 Padé 表行的收敛性（见[5]，[6]）．

进入 20 世纪以来，Padé 逼近已成为一个独特的分析对象并构成解析函数有理逼近理论中的一个重要章节．利用 Padé 逼近构造过程中的局部数据（幂级数的系数），人们可以研究对应解析函数的整体性质（解析延拓，奇异点的特征与分布，等等）并可计算一个函数在其幂级数收敛圆盘外的函数值．

在研究经典 Padé 逼近的同时，还考虑了它的各种推广：借助于具有自由极点的有理函数的一般插值过程（多重点 Padé 逼近）；关于给定多项式系（例如，关于正交多项式系）的级数的有理逼近；联合 Padé 逼近（Padé-Hermite 逼近（Padé-Hermite approximation））；多变量幂级数的有理（Padé 型）逼近，等等．

参考文献

[1] Cauchy, A. L., Cours d'analyse de l'école royale polytechnique, 1, Paris, 1821.

[2] Jacobi, C. G. J., Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener werthe durch eine gebrochene rationale Funktion, *J. Reine Angew. Math.*, 30 (1846), 127－156.

[3] Frobenius, G., Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzen, *J. Reine Angew. Math.*, 90 (1881), 1－17.

[4] Padé, H., Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationelles, *Ann. Sci. Ecole Nor-*

male Sup., 9 (Suppl.) (1892), 1 – 93.

[5] Hadamard, J.., Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, *J. Math. Pures Appl*.. 8 (1892), 101 – 186.

[6] Montessus de Ballore, R. F. B., Sur les fractions continues algébriques, *Bull. Soc. Math. France*, 30 (1902), 26 – 36.

[7] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М.-Л., 1948.

[8] Марков, А. А., Избр. труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.-Л., 1948.

[9A] Stieltjes, T. J., Récherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 8 (1894), 1 – 122.

[9B] Stieltjes, T. J., Récherches sur les fractions continues, *Ann. Fac. Sci. Univ Toulouse*, 9 (1895), 1 – 47.

[10] Wall, H. S., Analytic theory of continued fractions, Chelsea, 1973.

[11] Perron, O., Die Lehre von den Kettenbrüchen, 2, Teubner, 1977.

[12] Baker, G. A., Jr. and Gamel, J. L. (eds.), The Padé approximant in theoretical physics, Acad. Press, 1970.

[13] Graves-Morris, P. R. (ed.), Padé approximants and their application (Canterbury, 1972), Acad. Press, 1973.

[14] Cabannes, H. (ed.), Padé approximants method and its applications to mechanics, Springer, 1973.

[15] Baker, G. A., Essentials of Padé approximants, Acad. Press, 1975.

[16] Saft, E. B. and Varga, R. S. (eds.), Padé and rational approximation (Tampa 1976), Acad. Press, 1977.

[17] Gilewicz, J., Approximants de Padé, Springer, 1978.

[18] Wuytack, L. (ed.), Padé approximation and its applications (Antwerp 1979), Lecture notes in math., 888, Springer, 1979.

E. A. Рахманов 撰

【补注】 在过去十年间，已出现了大量的有关 Padé 逼近和 Hermite-Padé 逼近的新结果．主要原因之一是 Padé 逼近与连分式、正交多项式、矩问题、位势论以及泛函分析之间的相互联系与相互影响．

在两点 Padé 逼近，联合逼近（已在 Ch. Hermite 和 Padé 的工作中研究过）以及多元逼近的推广方面，也得到了一些新结果．

Padé 逼近方面的大多数研究论文可以在许多专题会议论文集里，也可以在《逼近论杂志》(Journal of Approximation Theory) 或《构造逼近杂志》(Journal of Constructive Approximation) 中找到．

文献 [A2] 对 Padé 逼近作了有趣的历史性综述．C. Brezinski 的著作 [A3] 含有相当丰富的参考书目，一个完善得多的 Padé 逼近参考资料大全已由 Brezinski 编辑完成，函索即取．

参考文献

[A1] Baker, G. A., Jr. and Graves-Morris, P., Padé approximants and its applications, 2, Addison-Wesley, 1981.

[A2] Brun, M. G. de and Rossum, H. van (eds.), Padé approximation and its applications (Amsterdam, 1980), Springer, 1981.

[A3] Brezinski, C., Padé-type approximation and general orthogonal polynomials, Birkhäuser, 1980.

[A4] Cuyt, A., Padé approximation for operators: theory and applications, Springer, 1984.

[A5] Petrushev, P. P. and Popov, V. A., Rational approximation of real functions, Chapt. 12, Cambridge Univ. Press, 1987.

[A6] Hermite, Ch., Sur la function exponentielle, *C. R. Acad. Sci.*, LXXVII (1873), 18 – 24, 74 – 79; 226 – 233; 285 – 293.

[A7] Mahler, K., Perfect systems, *Compos. Math.*, 19 (1968), 95 – 166. Writting during his stay in Holland in 1934 – 1935.

[A8] Jones, W. B. and Thron, W. J., Continued fractions and their applications, Addison Wesley, 1980.

[A9] First French-Polish Meeting on Padé Approximation and Convergence Acceleration Techniques (Warsaw, 1981), CPT – 81/PE 1354, CNRS Marseille, 1982.

[A10] Werner, H. and Bünger, H.-J. (eds.), Padé approximation and its application (Bad Honnef, 1983), Lecture Notes in Math., 1071, Springer, 1984.

[A11] Graves-Morris, P. R., et al. (eds.), Rational approximation and interpolation (Tampa, 1983), Lecture Notes in Math., 1105, Springer, 1984.

[A12] Brezinski, C., et al. (eds.), Polynomes orthogonaux et applications (Bar-le-Duc, 1984), Lecture Notes in Math., 1171, Springer, 1985.

[A13] Internat. Conf. Computational and Applied Mathematics (Leuven, 1984), *J. Comput. Applied Math.*, 12 – 13 (1985).

[A14] Gilewicz, J., et al. (eds.), Rational approximation and its applications in mathematics and physics (Lancut, 1985), Lecture Notes in Math., 1237, Springer, 1987.

[A15] Cuyt, A. (ed.), Nonlinear numerical methods and rational approximation (Antwerp, 1987), Reidel, 1988.

[A16] Alfaro, M., et al. (eds.), Orthogonal polynomials and their applications (Segovia, 1986), Lecture Notes in Math., 1329, Springer, 1988.

[A17] Conf. Constructive Function Theory (Edmonton,

1986), *Rocky Mt. J. of Math.*, **19** (1989).

[A18] Werner, H. et al. (eds.), Computational aspects of complex analysis, Reidel, 1983.

[A19] Volume dedicated to H. Werner, *J. Comput. Appl. Math.*, **19** (1987), 1.

[A20] Broeckx, F., et al. (eds.), Proc. Internat. Conf. Comput. and Appl. Math. (Leuven, July 1983). North-Halland, 1985.

王仁宏　檀结庆 译

Page 定理 [Page theorem; Пейджа теорема]

1) 关于 Dirichlet L 函数零点的 Page 定理. 设 $L(s,\chi)$ 是 **Dirichlet** L **函数** (Dirichlet L-function), $s=\sigma+it$, χ 是模 $d\ (d\geqslant 3)$ 的 **Dirichlet 特征标** (Dirichlet character). 存在绝对正常数, $c_1,\cdots,c_8$ 使得

a) 当 $\sigma>1-c_1/\log(dt)$, $t\geqslant 3$ 时, $L(s,\chi)\neq 0$;

b) 当 $\sigma>1-c_2/\log(d)$, $0<t<5$ 时, $L(s,\chi)\neq 0$;

c) 对模 d 的复特征标 χ, 当 $\sigma>1-(c_3/\log d)$, $|t|\leqslant 5$ 时,

$$L(s,\chi)\neq 0; \qquad (1)$$

d) 对模 d 的实原特征标 χ, 当 $\sigma>1-(c_4/\sqrt{d}\log^2 d)$时,

$$L(\sigma,\chi)\neq 0; \qquad (2)$$

e) 对所有的 $d(2<d\leqslant D)$ 至多存在一个 $d=d_0$, $d_0>c_5(\log^2 D)/(\log\log D)^8$, 以及至多存在一个模 d_0 的实原特征标 ψ_1, 使得 $L(s,\psi_1)$ 能有一个实零点 $\beta_1>1-c_6/\log D$, 且 β_1 是一级零点; 此外, 若对模 d 的实特征标 ψ, 存在 $\beta>1-c_6/\log D$, 使得 $L(\beta,\psi)=0$, 则必有 $d\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, d_0)$.

2) 关于 $\pi(x;d,l)$ 的 Page 定理, $\pi(x;d,l)$ 表示满足 $p\leqslant x$, $p\equiv l(\mathrm{mod}\, d)$ 的素数 p 的个数, 其中 $0<l\leqslant d$, l, d 互素. 在 1) 的符号和条件下, 由 a), b), c) 及 (e) 可推出

$$\pi(x;d,l)=\frac{\mathrm{li}\,x}{\varphi(d)}-E\frac{\chi(l)}{\varphi(d)}\sum_{n\leqslant x}\frac{n^{\beta_1-1}}{\log n}+ O(xe^{-c_7\sqrt{\log x}}),$$

这里 $E=1$, 若对所给的 d, β_1 存在; $E=0$, 若 β_1 不存在; 由式 (2) 可推出, 对给定的 $\delta>0$, 对任意的 $d\leqslant(\log x)^{1-\delta}$ 有

$$\pi(x;d,l)=\frac{\mathrm{li}\,x}{\varphi(d)}+O(xe^{-c_8\sqrt{\log x}}). \qquad (*)$$

这是至今 (1997) 仅有的一个实效性结果, 即对给定的 δ, 可以具体算出 c_8 及符号 O 中所包含的常数的数值. 如果这里所用的由式 (2) 给出的非零区域的界限代之以 Siegel 的结论: 当 $\sigma>1-c(\varepsilon)d^{-\varepsilon}$ 时, $L(\sigma,\chi)\neq 0$, ε 是任意给定的正数, 那么, 式 (*) 成立的范围可实质性地推广到更大的 d: $d\leqslant(\log x)^A$, A 是任意给定的正数. 但是, 这时相应的结果 (*) 就不是实效的, 因为对给定的 $\varepsilon>0$, 不能估算出 $c_8=c_8(\varepsilon)$ 及符号 O 中包含的常数.

A. Page 在文献 [1] 中证明了这些定理.

参考文献

[1] Page, A., On the number of primes in an arithmetic progression, *Proc. London Math. Soc. Ser* 2, **39** (1935), 2, 116-141.

[2] Карацуба, А. А., Основы аналитической теории чисел, 2 изд., М., 1983 (中译本: 卡拉楚巴, A. A., 解析数论基础, 科学出版社, 1984).

[3] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

А. Ф. Лаврик 撰

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞、潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1991.

潘承彪 译　朱尧辰 校

Painlevé 方程 [Painlevé equation; Пенлеве уравнение]

一组形如

$$w''=R(w',w,z)$$

的六个特殊的常微分方程的共同名称, 其中 R 是 w' 和 w 的有理函数, z 的解析函数. 任何只有固定奇点 (见**流动奇点** (movable singular point)) 的这种形式的方程都能化为 50 个典范方程之一. 其中包括线性方程、**Riccati 方程** (Riccati equation) 和其他一些熟知的方程, 以及另外六个称为 Poinlevé 方程 (Painlevé equations) 的方程, 它们具有 Painlevé 超越函数 (Painlevé transcendental functions) 形式的解, 这些特殊函数不能化为其他已知的函数. 按照通常采用的次序, Painlevé 方程具有下列形式 ($a,b,c,d\in\mathbf{C}$ 都是常数):

1) $w''=6w^2+z$;

2) $w''=2w^3+zw+a$;

3) $w''=w'^2/w+e^z(aw^2+b)+e^{2z}(cw^3+d/w)$, $bd\neq 0$;

4) $w''=w'^2/2w+3w^3/2+4zw^2+2(z^2-a)w+b/w$;

5) $w''=(w')^2\left[\frac{1}{2w}+\frac{1}{w-1}\right]-\frac{w'}{z}+\frac{(w-1)^2}{z^2}\left[aw+\frac{b}{w}\right]+c\frac{w}{z}+d\frac{w(w+1)}{w-1}$;

6) $w''=\frac{(w')^2}{2}\left[\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-z}\right]+$

$$-\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{w-z}\right]w'+$$

$$+\frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[a+b\frac{z}{w^2}+c\frac{z-1}{(w-1)^2}+\right.$$

$$\left.+d\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right].$$

这些结果最初是 P. Painlevé 在其研究工作中得到的([1],[2]),后来又由 B. Gambier 发展、完善和补充([3]).

参考文献

[1] Painlevé, P., Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, *Bull. Soc. Math. France*, **28** (1900), 201 – 261.

[2] Painlevé, P., Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieure dont l'intégrale générale est uniforme, *Acta Math*, **25** (1902), 1 – 85.

[3] Gambier, B., Sur les équations différentielles de second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, *Acta Math.*, **33** (1910), 1 – 55.

[4] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд. М.-Л., 1950.

[5] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

Н. Х. Розов 撰

【补注】 Painlevé 方程和 Painlevé 性质(不存在流动奇点)在完全可积系统中起着重要作用(见孤立子(soliton)). 实际上, Painlevé 性质曾被提出作为对完全可积性的一种检验. 关于这些思想现状的一个综述, 见[A3].

参考文献

[A1] Ablowitz, M. J. and Segur, H., Solitons and the inverse scattering transform, SIAM, 1981.

[A2] Dodd, R. K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D. and Morris, H. C., Solitons and nonlinear wave equations, Acad. Press, 1982.

[A3] Yoshida, H., Grammaticos, B. and Ramani, A., Painlevé resonances versus Kowalevski exponents: some exact results on singularity structure and integrability of dynamical systems, *Acta Appl. Math.*, **8** (1987), 75 – 104.

[A4] Gérard, R., Reeb, G. and Sec, A. (eds.), Oeuvres de P. Painlevé, CNRS, 1972 – 1975.

[A5] Hille, E., Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1969.

杜小杨 译

Painlevé 问题 [Painlevé problem; Пенлеве проблема]

对复变量 z 的一类有界单值解析函数刻画可去集(removable set)的问题. 设 E 是复平面 C 中的紧集, 且 $CE=\mathbf{C}\setminus E$ 是区域, 要确定为使 CE 内的任一有界单值解析函数能解析延拓到 E 从而是一常数所应置于 E 上的最小条件. P. Painlevé 陈述了一个充分条件([1]): E 的线性 **Hausdorff 测度**(Hausdorff measure)应等于零(这样的集合有时称为 Painlevé 集(Painlevé set)), 但他的论证含有一些错误(见[2], [3]). 应置于 E 上的一个必要充分条件是 E 的**解析容量**(analytic capacity)为零(Ahlfors 定理(Ahlfors theorem)). 已构造出解析容量为零但具有正线性测度的集合的例([5]).

参考文献

[1] Painlevé, P., Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm (1895), Paris, 1897.

[2] Zoretti, L., Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers, *J. Math. Pure Appl.*, **1** (1905), 1 – 51.

[3] Zoretti, L., Leçons sur la prolongement analytique, Gauthier-Villars, 1911.

[4] Ahlfors, L., Bounded analytic functions, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 1 – 11.

[5] Витушкин, А. Г., 《Докл. АН СССР》, **127** (1959), 2, 246 – 249.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Garnett, J. B., Analytic capacity and measure, Lecture notes in math., 297, Springer, 1972.

[A2] Carleson, L., Selected problems on exceptional sets, v. Nostrand, 1957.

[A3] Hayman, W. K., Kennedy, P. B., Subharmonic functions, 1, Acad. Press, 1976, pp. 229 ff.

沈永欢 译

Painlevé 定理 [Painlevé theorem; Пенлеве теорема]

1) 关于解析微分方程的解的 Painlevé 定理. 微分方程 $P(w', w, z)=0$ 的解不可能有流动的(即依赖于一个任意常数的)本质奇点(见流动奇点(movable singular point))和超越分支点, 其中 P 是未知函数 w 及其导数 w' 的多项式, 且 P 是自变量 z 的解析函数.

2) 关于解析延拓的 Painlevé 定理. 如果 Γ 是位于复 z 平面的区域 D 内的可求长 Jordan 曲线, 函数 (z) 在 D 内连续, 在 $D\setminus\Gamma$ 内解析, 则 $f(z)$ 在整个区域 D 内是解析函数(analytic function)([1], [2]).

参考文献

[1] Painlevé, P., Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, Paris, 1887.

[2] Painlevé, P., Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles, professées à Stockholm (1895), Paris, 1897.

[3] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: B. B. 戈鲁别夫, 微分方程解析理论讲义, 高等教育出版社, 1956)

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于微分方程的 Painlevé 定理亦见 [A1], [A4].

如果在 2) 中不要求 Γ 为可求长, 则所说解析延拓不一定可能, 见 [A1], [A2].

参考文献

[A1] Garnett, J., Analytic capacity and measure, Springer, 1972.

[A2] Wermer, J., Banach algebras and several complex variables, Springer, 1976, Chapt. 13.

[A3] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[A4] Hille, E., Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1969

沈永欢 译

配对 [pairing; спаривание]

定义在两个集合的 Descartes 积上的映射. 根据上下文, 也许要求该映射具有双线性、连续性以及其他性质. 配对 $X \times Y \to Z$ 定义了从 X 到由从 Y 到 Z 内的函数组成的集合 (或其子集, 如同态映射组成的集合、连续映射组成的集合等等) 内的映射. 由此得到的关于该映射性质的命题形成了代数学、拓扑学和泛函分析中各种对偶性定理的本质.

М. Ш. Фарбер 撰 赵希顺 译

Paley-Wiener 定理 [Paley-Wiener theorem; Пэли-Винера теорема]

函数 $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ 在区间 $[-A, A]$ 外几乎处处为零, 当且仅当它的 **Fourier 变换** (Fourier transform)

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx, \quad y \in \mathbf{R}$$

既满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(y)|^2 dy < \infty,$$

同时又是某个复变量 z 的、对所有 $z \in \mathbf{C}$ 满足不等式 $|F(z)| \leqslant e^{A|z|}$ 的整解析函数 $F(z)$ 在实轴上的限制 (见 [1]). 所有描述局部紧群上的某个函数空间或广义函数空间在 Fourier 变换或某些其他单射积分变换下的象的结果, 均称为 Paley-Wiener 定理的类似; 最常见的 Paley-Wiener 定理的类似, 是描述局部紧群 G 上的紧支集无穷次可微函数空间 $C_0^\infty(G)$ 和无穷次可微的速降函数空间 $S(G)$ 在 G 上的 Fourier 变换下的象. 特别地, 对于局部紧的 Abel 群, 某些连通 Lie 群以及实半单 Lie 群上的代数 $C_0^\infty(G)$ 的某些子代数, 而且还关于某些其他的积分变换, Paley-Wiener 定理的类似已经得到.

参考文献

[1] Wiener, N. and Paley, R. E. A. C., Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc., 1934.

[2] Владимиров, В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976.

[3] Гельфанд, И. М., Граев, М. И., Виленкин, Н. Я., Интегральная геометрия и некоторые связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962 (英译本: Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 5. Integral geometry and representation theory, Acad. Press, 1966).

[4] Желобенко, Д. П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974.

[5] Rudin, W., Functional analysis, McGraw-Hill, 1973 (中译本: W. Rudin, 泛函分析, 湖北教育出版社, 1989).

А. И. Штерн 撰

【补注】 设 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 及 $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$, 则 φ 的 Fourier 变换 $\hat{\varphi}$ 可以延拓为 $\mathbf{C}$ 上的满足如下条件的整解析函数: 对任意整数 $m \geqslant 0$, 存在常数 $c_m > 0$ 使得对任意 $w \in \mathbf{C}$ 有

$$|\hat{\varphi}(w)| \leqslant c_m (1 + |w|)^{-m} e^{2\pi A |\mathrm{Im}\, w|}. \qquad (*)$$

反过来, 如果 $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 是整函数且对某个 $A > 0$ 满足不等式 (*) (用 F 代替其中的 $\hat{\varphi}$), 则存在 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$ 且 $\hat{\varphi} = F$.

参考文献

[A1] Treves, F., Topological vector spaces, distributions and kernels, Acad. Press, 1967.

[A2] Warner, G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, II, Springer, 1972.

[A3] Helgason, S., Groups and geometric analysis, Acad. Press, 1984.

[A4] Katznelson, Y., An introduction to harmonic analysis, Dover, reprint, 1976.

朱学贤 译 刘和平 校

Papperitz 方程 [Papperitz equation; Папперица уравнение]

下列 Fuchs 型二阶线性常微分方程, 恰好具有三个奇点:

$$w'' + \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c} \right] w' +$$

$$+ \left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \right.$$

$$+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\Bigg]\frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0,$$

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1; \qquad (1)$$

其中 a、b, c 是两两不同的复数, α、α'(β, β' 和 γ, γ') 是在奇点 $z=a$(相应地, $z=b$ 和 $z=c$) 处的特征指数. Papperitz 方程通过指定奇点和特征指数而唯一确定. 在解 Papperitz 方程 (1) 时, 利用 Riemann 表示:

$$w=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

B. Riemann 研究了求在扩充复平面上解析并具有下述性质的一切多值函数 $w(z)$ 的问题 ([1]):

a) 函数 $w(z)$ 恰好具有三个奇点 a, b, c;

b) 函数 $w(z)$ 的任何三个分支都以下列常系数线性关系式相联系:

$$A_1w_1(z)+A_2w_2(z)+A_3w_3(z)=0;$$

c) 函数 $w(z)$ 在点 a, b, c 上具有最简单的奇异性; 也就是说, 在点 $z=a$ 的邻域内, 有两个分支 $\widetilde{w}_1(z)$ 和 $\widetilde{w}_2(z)$, 满足

$$\widetilde{w}_1(z)=(z-a)^{\alpha}\varphi_1(z),$$

$$\widetilde{w}_2(z)=(z-a)^{\alpha'}\varphi_2(z),$$

其中 $\varphi_j(z)$ $(j=1,2)$ 是在 $z=a$ 上全纯的函数; 对于 b 和 c, 情况类似.

Riemann 在关于数 $\alpha,\alpha',\cdots,\gamma'$ 的某些附加假设下, 证明了所有这样的函数都可以用超几何函数来表示, 并且证明了 $w(z)$ 满足一个有理系数的二阶线性微分方程, 但是这个方程不能明显地写出 (见 [1]). 所讨论的方程 (1) 是由 E. Papperitz 给出的 ([2]). 这个方程也称为 Riemann P方程 (Riemann P-equation), Papperitz 形式的 Riemann 方程 (Riemann equation in Papperitz form) 和 Riemann 方程 (Riemann equation), 它的解称为 P 函数 (P-function).

Papperitz 方程的解的基本性质如下所述.

1) Papperitz 方程在有理变换下是不变的: 如果 $z_1=(Az+B)/(Cz+D)$ 把点 a, b, c 映射为点 a_1, b_1, c_1, 则

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

2) 变换

$$\left[\frac{z-a}{z-b}\right]^k\left[\frac{z-c}{z-b}\right]^l w=\widetilde{w}$$

把一个 Papperitz 方程变换成一个具有相同奇点和不同特征指数的 Papperitz 方程:

$$\left[\frac{z-a}{z-b}\right]^k\left[\frac{z-c}{z-b}\right]^l P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=$$

$$=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & z \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{Bmatrix}.$$

3) 超几何方程 (hypergeometric equation)

$$z(1-z)w''+[C-(A+B+1)z]w'-ABw=0$$

是 Papperitz 方程的特殊情况, 它对应 Riemann 表示

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & A & 0 & z \\ 1-C & B & C-A-B & \end{Bmatrix}.$$

4) Papperitz 方程的每个解都可以通过超几何函数来表示:

$$w(z)=\left[\frac{z-a}{z-b}\right]^{\alpha}\left[\frac{z-c}{z-b}\right]^{\gamma}\times \qquad (2)$$

$$\times F\left\{\alpha+\beta+\gamma;\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right\},$$

这里, 假设 $\alpha-\alpha'$ 不是负整数. 如果差 $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ 都不是整数, 那么交换 (2) 中 α 和 α' 或 γ 和 γ' 的位置, 便得到 Papperitz 方程的四个解. 此外, 如果重新排列三数组 (α,α',a), (β,β',b), (γ,γ',c) 的位置, 则 Papperitz 方程保持不变; 所有这些排列给出了 Papperitz 方程 (1) 的 24 个特解, 它们是由 E. E. Kummer 首先得到的 ([5]).

参考文献

[1] Riemann, B., Beiträge zur Theorie der durch Gauss'sche Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ darstellbare Functionen, in Gesammelte mathematische Werke, Dover, reprint, 1953, 67 – 85.

[2] Papperitz, E., Ueber verwandte s-Functionen, *Math. Ann.*, 25 (1885), 212 – 221.

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

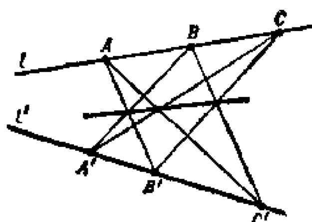
[4] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М. -Л., 1950.

[5] Kummer, E. E., Ueber die hypergeometrische Reihe $1+(\alpha\beta)/(1\cdot\gamma)x+\cdots$, *J. Reine Angew. Math.*, **15** (1836), 39 – 83; 127 – 172.

М. В. Федорюк 撰 杜小杨 张鸿林 译

Pappus 公理 [Pappus axiom; Паппа аксиома]

如果 l 和 l' 是两条相异直线，A，B，C 和 A'，B'、C' 分别是 l 和 l' 上的相异点，而且其任何一点都不是 l 和 l' 的交点，则 AB' 和 $A'B$，BC' 和 $B'C$，AC' 和 $A'C$ 的交点处于同一直线上．



Pappus 公理成立等价于相应的射影几何学的除环的交换性．**Desargues 假定**（Desargues assumption）是 Pappus 公理的一个结果（Hessenberg 定理（Hessenberg theorem）），同时 Pappus 公理是 **Pascal 定理**（Pascal theorem）的退化情况．这个公理是由 Pappus（3 世纪）提出的．

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко 撰

【补注】

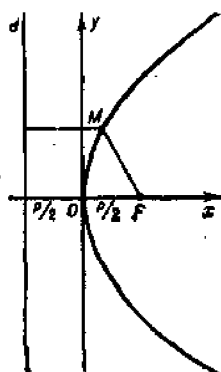
参考文献

[A1] Veblen, O. and Young, J. W., Projective geometry, 1, Ginn, 1910.

杜小杨 译

抛物线 [parabola; парабола]

一个圆锥与不通过它的顶点且平行于它的一条母线的平面相交而成的平面曲线．抛物线是平面上这样一些点 M 的集合：其中每一点到给定点 F（抛物线的焦点（focus of a parabola））的距离等于这一点到某一给定直线 d（准线（directrix））的距离．因此，抛物线是离心率为 1 的**二次曲线**（conic）．从抛物线的



焦点到准线的距离 p 称为抛物线的参数（parameter）．抛物线是一条对称曲线；抛物线与它的对称轴的交点称为抛物线的顶点（vertex of a parabola），这个对称轴称为抛物线的轴（axis of a parabola）．抛物线的直径（diameter of a parabola）是任何一条与其轴平行的直线，可以定义为一个平行弦集合的中点的轨迹．

抛物线是无心**二次曲线**（second-order curve）．它的典范方程具有形式

$$y^2=2px.$$

抛物线在点 (x_0,y_0) 处的切线的方程是

$$yy_0=p(x+x_0).$$

在极坐标 (ρ,φ) 中抛物线的方程是

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}，其中\ 0<\varphi<2\pi.$$

抛物线具有下述光学性质（optical property）：从焦点发出的光线经抛物线反射后沿平行于轴的方向行进．

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 2 Springer, 1987（中译本：M. 贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991）.

[A2] Coolidge, J., A history of the conic sections and quadric surfaces, Dover reprint, 1968.

[A3] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

杜小杨 译

抛物线法 [parabola method; парабол метод]

基于用 2 次多项式插值来计算复系数多项式

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

的根的方法．抛物线法不需要对初始逼近给出任何信息就可以找到多项式的所有零点．抛物线法的收敛性只能根据经验来建立．在简单零点附近收敛速度接近 2 次．

抛物线法的计算格式如下．以任意的复数 z_0，z_1，z_2 作为插值点，对 $P_n(z)$ 构造 Lagrange 插值多项式（见 **Lagrange 插值公式**（Lagrange interpolation formula））．这是一个二次多项式．计算它的两个根，它们之中距 z_2 最近的一个取为 z_3，之后取 z_1，z_2，z_3 替代 z_0，z_1，z_2 并继续重复这个过程．从经验上可以确立，如此得到的序列 z_0，z_1，$\cdots$ 收敛到多项式的一个根．把计算得到的根分解出来，并将这种方法继续应用于得到的低次多项式．

抛物线法的计算公式为：如果 z_{i-2}，z_{i-1}，z_i 是第 i 步的三个数，并使用记号

$$h = z - z_i, \ h_i = z_i - z_{i-1},$$
$$h_{i-1} = z_{i-1} - z_{i-2},$$
$$\lambda = \frac{h}{h_i}, \ \lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1}}, \ \delta_i = 1 + \lambda_i,$$

则 Lagrange 插值多项式具有如下形式

$$L^{(i)}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\delta_i}[P_n(z_{i-2})\lambda_i^2 - P_n(z_{i-1})\lambda_i\delta_i +$$
$$+ P_n(z_i)\lambda_i] + \frac{\lambda}{\delta_i}[P_n(z_{i-2})\lambda_i^2 - P_n(z_{i-1})\delta_i^2 +$$
$$+ P_n(z_i)(\lambda_i + \delta_i)] + P_n(z_i).$$

$L^{(i)}(\lambda)$ 的根由下面公式计算

$$\lambda = \\ = \frac{-2P_n(z_i)\delta_i}{g_i \pm \sqrt{g_i^2 - 4P_n(z_i)\delta_i\lambda_i[P_n(z_{i-2})\lambda_i - P_n(z_{i-1})\delta_i + P_n(z_i)]}}.$$

其中

$$g_i = P_n(z_{i-2})\lambda_i^2 - P_n(z_{i-1})\delta_i^2 + P_n(z_i)\ (\lambda_i + \delta_i).$$

在 λ 的两个可能的值中取模最小的那个，并且使用下列值继续进行计算

$$\lambda_{i+1} = \lambda; \ h_{i+1} = \lambda_{i+1}h_i; \ z_{i+1} = z_i + h_{i+1}.$$

当在计算机上实现这个计算过程时，多项式值的计算中在某点可能出现上溢．二次多项式根的计算中也可能出现特别大的数．有一系列经过特殊设计的计算方法可以避免这种现象（见[1]，[3]）．

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Численные методы алгебры, М., 1966.

[2] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, 1969（中译本：J．H．威尔金森，代数特征值问题，科学出版社，1987）．

[3] Бахвалов, Н. С., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 11 (1971), 6, 1568 – 1574.

Г. Д. Ким 撰　张宝琳　袁国兴 译

抛物线坐标 [parabolic coordinates; параболические координаты]

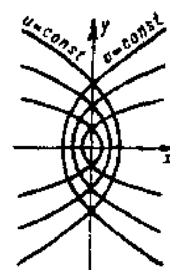
一对数 u 和 v，它们同 Descartes 直角坐标 x 和 y 由下列公式相联系：

$$x = u^2 - v^2, \ y = 2uv,$$

其中 $-\infty < u < \infty$，$0 \leqslant v < \infty$．坐标线是两组相互垂直的抛物线，两轴反向．

Lamé 系数（标度因子）是

$$L_u = L_v = 2\sqrt{u^2 + v^2}.$$



面积元是

$$d\sigma = 4(u^2 + v^2)du\,dv.$$

向量分析的基本运算是

$$\mathrm{grad}_u f = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\mathrm{grad}_v f = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\mathrm{div}\,a = \frac{1}{2\sqrt{u^2+v^2}}\left[\frac{\partial a_u}{\partial u} + \frac{\partial a_v}{\partial v}\right] + \\ + \frac{u a_u + v a_v}{2\sqrt{(u^2+v^2)^3}},$$

$$\Delta f = \frac{1}{4(u^2+v^2)}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right].$$

在抛物线坐标中，对 **Laplace 方程**（Laplace equation）可以分离变量．　　Д. Д. Соколов 撰

【补注】应用复函数，坐标变换可由 $\bar{z} = z^2$ 来描述，其中 $z = u + iv$，$\bar{z} = x + iy$．

关于空间中的抛物线坐标，见[A1]．

参考文献

[A1] Sauer, R. and Szabó, I., Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, I, Springer, 1967.

[A2] Landau, L. D. and Lifschitz, E. M., Mechanics, Pergamon, 1960（译自俄文）．

杜小杨 译

抛物柱面 [parabolic cylinder; параболический цилиндр]

一个二次抛物曲面（见**二次曲面**（surface of the second order）），其准线为一**抛物线**（parabola）．空间中抛物柱面的典范方程是

$$y^2 = 2px.$$

А. Б. Иванов 撰　杜小杨 译

抛物柱函数 [parabolic cylinder function; параболического цилиндра функции]，Weber 函数（Weber function），Weber-Hermite 函数（Weber-Hermite function）

微分方程

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left[\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right]y=0, \qquad (*)$$

的解，这个方程是作为对抛物柱面坐标中的**波动方程**(wave equation) $\Delta u=k^2u$ 进行分离变量的结果而得到的(见**抛物线坐标**(parabolic coordinates))．通常使用解

$$D_\nu(z)\equiv U\left[-\nu-\frac{1}{2},z\right]=$$

$$=2^{(\nu-1)/2}e^{-z^2/4}\Psi\left[\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2};\frac{z^2}{2}\right],$$

其中 $\Psi(a,b;z)$ 是**汇合型超几何函数**(confluent hypergeometric function)．此外，函数 $D_\nu(-z)$ 和 $D_{-\nu-1}(\pm iz)$ 也满足方程(*)．对于任意 ν，函数 $D_\nu(z)$ 和 $D_{-\nu-1}(\pm iz)$ 是线性无关的，对于 $\nu\neq 0,\pm1,\cdots$，$D_\nu(z)$ 和 $D_\nu(-z)$ 是线性无关的．抛物柱函数是 z 的整函数．对于实数 ν 和 z，函数 $D_\nu(z)$ 是实函数．

微分公式($n=1,2,\cdots$)：

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{z^2/4}D_\nu(z)\right]=(-1)^n(-\nu)^n e^{z^2/4}D_{\nu-n}(z),$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{-z^2/4}D_\nu(z)\right]=(-1)^n e^{-z^2/4}D_{\nu+n}(z).$$

递推公式：

$$D_{\nu+1}(z)-zD_\nu(z)+\nu D_{\nu-1}(z)=0,$$

$$D_\nu'(z)+\frac{z}{2}D_\nu(z)-\nu D_{\nu-1}(z)=0,$$

$$D_\nu'(z)-\frac{z}{2}D_\nu(z)+D_{\nu+1}(z)=0.$$

渐近性：对于固定的 ν 和 $|\arg z|<3\pi/4$，当 $z\to\infty$ 时，有

$$D_\nu(z)=z^\nu e^{-z^2/4}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{(-\nu/2)_k(1/2-\nu/2)_k}{k!}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{z^2}{-2}\right)^{-k}+O\left(|z|^{-2N-2}\right)\right],$$

而对于有界的 $|z|$ 和 $|\arg(-\nu)|\leqslant\pi/2$，当 $|\nu|\to\infty$ 时，有

$$D_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[\frac{\nu}{2}\ln(-\nu)-\frac{\nu}{2}-\sqrt{-\nu z}\right]\times$$

$$\times\left[1+O\left[\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right]\right].$$

抛物柱函数同其他一些函数的关系如下($n=0,1,\cdots$)：同 **Hermite 多项式**(Hermite polynomials)的关系为

$$D_n(z)=2^{-n/2}e^{-z^2/4}H_n\left[\frac{z}{\sqrt{2}}\right],$$

同**概率积分**(probability integral)即误差积分的关系为

$$D_{-n-1}(z)=$$

$$=\frac{(-1)^n\sqrt{2}}{n!}e^{-z^2/4}\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{z^2/3}\operatorname{erfc}\frac{z}{\sqrt{z}}\right],$$

同 **Bessel 函数**(Bessel functions)的关系为

$$D_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi z}{2}}K_{1/4}\left[\frac{z^2}{4}\right].$$

参考文献

[1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 2. Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials, McGraw-Hill, 1953(中译本：A．爱尔台里等编，高级超越函数，上海科学技术出版社，1957，1958)．

[2] Miller, J. C. P., Giving solutions of the differential equation $d^2y/dx^2+(x^2/4-a)y=0$, tables of Weber parabolic cylinder functions, H. M., Stationary Office, 1955.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰　杜小杨 译

抛物型方程法[**parabolic-equation method; параболического уравнения метод**]

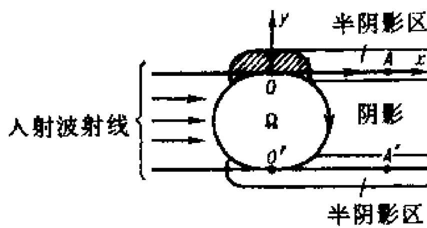
近似求解高频绕射问题的一种方法(见**绕射的数学理论**(diffraction, mathematical theory of))．在一些区域内，由于射线场在某种意义上具有奇异性，故**射线法**(ray method)不适用，通常必须使用抛物型方程法来确定波场．例如，考虑一平面波在完全反射的凸体上的入射问题．波动现象可以用 Helmholtz 方程来描写：

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right]u=0. \qquad (1)$$

这里，点 (x,y) 处于有界的凸区域 Ω 之外，在 Ω 的边界上，Dirichlet 边界条件 $u|_S=0$ 是满足的．假定边界 $\partial\Omega=S\in C^\infty$ 上处处具有正的曲率，那么解 u 可以表示为 $e^{ikx}+u^0$，这里 u^0 满足**辐射条件**(radiation conditions)．该问题的解是存在的、唯一的．

在高频区域中(k"很大")，重要的是为该问题构造一个小波长的形式解(即大致说来，它在形式上满足问题的所有条件，而且在足够远处的项当 $k\to\infty$ 时是具有任意高阶的小量)．在所考虑的情况下，有可能证明，一个形式解是经典解的渐近展开式．

用射线法可以在除了阴影区域(见图)之外的所有地方都构造未知的小波长展开式．



借助于射线法建立的波场表达式在阴影和明亮区域的边界（图中的半直线 OA 和 $O'A'$）上不再是平滑的．在 OA（和 $O'A'$）的邻域，波场的小波长渐近展开式不再是射线公式所给出的式子．OA（和 $O'A'$）的邻域通常称为半阴影区．

对上述问题构造一个形式解的关键是考察入射波射线与边界线 $S=\partial\Omega$ 相切的点 O 和 O'．把点 O 作为坐标原点，其 x 轴的正方向把阴影区和明亮区分开来．

在点 O 的邻域引进新坐标 s 和 n．对于点 $M\notin S$ 来说，它是根据其沿着 S 到点 O 的距离来确定的．假定在阴影区域内 $s>0$（相应地，在明亮区域内 $s<0$）．如有 $M\in\Omega$，则该点的特性取决于其与 S 的距离 n 和点 M 在 S 上的投影的坐标 s．在 s,n 坐标系中，Helmholtz 方程有如下形式：

$$\left[1+\frac{n}{\rho}\right]^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left[1+\frac{n}{\rho}\right]\frac{\partial u}{\partial n}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\left[\left[1+\frac{n}{\rho}\right]^{-1}\frac{\partial u}{\partial s}\right]+k^2u=0 \quad (2)$$

（$\rho=\rho(s)>0$ 为 S 在点 s 的曲率半径）．根据 $1/\rho$ 的 MacLaurin 级数

$$\frac{1}{\rho}\sim\frac{1}{\rho}\bigg|_{s=0}+s\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\rho}\right]\right]_{s=0}+\cdots,$$

可以用 s 和 n 的幂的形式展开式代替式（2）中的所有系数．在（2）式中代入下列坐标：

$$\sigma=\frac{k^{1/3}s}{2^{1/3}\rho^{2/3}},\ \nu=\left[\frac{2}{\rho_0}\right]^{1/3}k^{2/3}n,\ \rho_0=\rho(0),$$

得到：

$$u\sim e^{iks}(v_0(\sigma,\nu)+k^{-1/3}v_1(\sigma,\nu)+\cdots).\ (3)$$

令 $k^{-1/3}$ 的逐次幂的系数等于 0，我们得到如下的递归表达式序列（这对于边界层方法来说是典型的作法，亦见**边界层理论**（boundary-layer theory））：

$$L_0v_0=0,\ L_0v_1+L_1v_0=0,$$

$$L_0v_2+L_1v_1+L_2v_0=0.$$

这里，第一个方程即为"抛物型"方程，由此产生了抛物型方程法这个名称：

$$L_0v_0\equiv i\frac{\partial v_0}{\partial\sigma}+\frac{\partial^2v_0}{\partial\nu^2}+\nu v_0=0. \qquad (4)$$

从根本上说，方程（4）是 Schrödinger 类型的方程．算子 L_i 的系数为 σ 和 ν 的多项式．为了在形式上满足边界条件 $u|_S=0$，只需要求 $u_i|_S=0$．其余的边界条件要求当 $|\sigma|$ 很大且 $\sigma<0$ 时，级数（3）在形式上成为射线法的展开式．对于 v_0 来说，有可能导得一个显式（所谓的 Фок 公式（Fock formula）），它具有 Fourier 积分的形式：

$$\int e^{i\sigma\zeta}\Phi(\nu,\zeta)d\zeta,$$

其中 Φ 可相当简单地用 **Airy 函数**（Airy Functions）来加以表示．用匹配渐近项的方法，可以得到在所有阴影区域和半阴影区内的波场的公式．

对于蠕动波和耳语廊模态，已经导出相应的"抛物型"方程，其解可用 Airy 函数加以表示．激光理论的发展要求研究集中在孤立的射线邻域的波．选择相应的相系数，并作出类似于边界层方法构造的构造，可以得到一种"抛物型"方程，通过它的解可表示波场的一级近似．这时，这个"抛物型"方程即为具有二次势的 Schrödinger 方程．抛物型方程法也可用来计算在浅水中的、在统计非均匀介质中的，以及在其他许多问题中的波场．在非线性波的理论中也要用到抛物型方程法的类比．

参考文献

[1] Фок, В. А., Проблемы дифракции и распростра-нения электромагнитных волн, М., 1970（英译本：Fock, V. A., Electromagnetic diffraction and pro-pagation problems, Pergamon, 1965）.

[2] Бабич, В. М., Булдырев, В. С., Асимптотичес-кие методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.

[3] Бабич, В. М., Кирпичникова, Н. Я., Метод по-граничного слоя в задачах дифракции, Л., 1974（英译本：Babič, V. M. and Kirpičnikova, N. Y., The boundary-layer method in diffraction problems, Springer, 1979）.

В. М. Бабич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Felsen, L. B. and Maruvitz, N., Radiation and scattering of waves, Prentice-Hall, 1973.

王克仁 译 诸德超 校

抛物型偏微分方程［**parabolic partial differential equation; параболического типа уравнение**］

形式为

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} +$$

$$- a(x,t) u = f(x,t)$$

的方程（见**偏微分方程**（differential equation, partial）），其中 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是正定二次型．变量 t 已指定，它起着时间的作用．抛物型偏微分方程的一个典型例子是**热传导方程**（heat equation）

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$$

А. П. Солдатов 撰

【补注】 上面定义了二阶线性抛物型微分方程．还存在非线性抛物型方程的概念．例如，在 [A2] 中研究了形如 $\varphi_t = F(\varphi_{x_i x_j}, \varphi_{x_i}, \varphi, x_j, t)$ 的一些方程，其中 F 是变量 (u_{ij}, u_i, u, x_j, t) 的函数，使得对于某一个 $\varepsilon > 0$，在所考虑的区域上有 $\varepsilon\|\lambda\|^2 \leqslant \sum_{i,j} F_{u_{ij}}\lambda_i\lambda_j$．

二阶半线性偏微分方程（semi-linear partial differential equation of the second order），即形如 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\partial^2\varphi)/(\partial x_i \partial x_j) = f(x, \varphi, \varphi_{x_i})$ 的方程，称为抛物型的，如果在所考虑的区域的每一点上有 $\det(a_{ij}) = 0$．

参考文献

[A1] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964（中译本：A．弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1984）．

[A2] Krylov, N. V., Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order, Reidel, 1987（译自俄文）．

杜小杨 张鸿林 译

抛物型偏微分方程，数值方法 [parabolic partial differential equation, numerical methods; параболического типа уравнение, численные методы решения]

根据某种计算算法求解抛物型偏微分方程的方法．在高速电子计算机上求解**抛物型偏微分方程**（parabolic partial differential equation）经常采用数值逼近的方法．网格法（grid method）（有限差分法（finite difference method））是最普遍应用的．

例如，网格法可用来研究下面的热传导方程（heat equation）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ t > 0,\ 0 < x < l, \quad (1)$$

考虑第一类边界条件

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t),$$

$$u(x,0) = u_0(x).$$

引人均匀网格结点 (x_i, t_n)，

$$x_i = ih,\ i = 0,1,\cdots,N;$$

$$hN = l,\ t_n = n\tau,\ n = 0,1,\cdots,$$

及记号

$$y_i^n = y(x_i, t_n),\ y_{t,i} = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau},$$

$$y_{\bar{x},i}^n = \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h},\quad y_{x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h},$$

$$y_{\bar{x}x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}.$$

网格法由下面逼近方程（1）的线性代数方程组（差分格式）组成

$$\left.\begin{aligned} &y_{t,i}^n = \sigma y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x,i}^n + \varphi_i^n, \\ &i = 1,\cdots,N-1, \\ &y_0^n = \mu_1(t_n),\ y_N^n = \mu_2(t_n), \\ &y_i^0 = u_0(x_i), \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

其中 σ 为数值参数，φ_i^n 是对函数 $f(x,t)$ 的网格近似，例如 $\varphi_i^n = f(x_i, t_n + 0.5\tau)$．

方程组（2）是分层计算的，即对于 $n = 0,1,\cdots$，从已知值 y_i^n 和 φ_i^n 计算新值 $y_i^{n+1}(i = 1,\cdots,N-1)$．如果 $\sigma = 0$（显式格式），则 y_i^{n+1} 可表示成 y_i^n 和 φ_i^n 的显式形式．如果 $\sigma \neq 0$（隐式格式），则关于 y_i^{n+1}，$i = 1,\cdots,N-1$，生成了其矩阵为三对角形式的一个方程组，这个方程组用**追赶法**（double-sweep method）求解．显式格式的缺点是因稳定性条件对步长 τ 有很强的限制，即 $\tau \leqslant 0.5h^2$．而隐式格式当 $\sigma \geqslant 0.5$ 时是绝对稳定的，亦即对任意的步长 h 和 τ 都是稳定的．对方程（1）还有其他一些网格法（见 [1]，[2]）．

如果差分格式（2）是稳定的，φ_i^n 逼近 $f(x,t)$，那么当 $h, \tau \to 0$ 时，差分问题的解 y_i^n 收敛到原来问题的解 $u(x_i, t_n)$（见 [1]）．精度阶依赖于参数 σ．于是，对称格式（$\sigma = 0.5$，$\varphi_i^n = f(x_i, t_n + 0.5\tau)$）关于 τ 和 h 是二阶精度的，即对任何 n 有估计式

$$\max_{0<i<N} |y_i^n - u(x_i, t_n)| \leqslant M(\tau^2 + h^2),$$

其中 M 为不依赖于 h 或 τ 的常数．对于 $\sigma = 0.5 - h^2/(12\tau)$ 和 φ_i^n 的一种特殊选取，格式（2）具有 $O(\tau^2 + h^4)$ 的精度．当 σ 取其他值时精度均为 $O(\tau + h^2)$．

若在一个很大的时间区间内求解抛物型偏微分方程，人们本质上使用着差分格式的渐近稳定性概念．在 $f(x,t) = 0$，$\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$ 的条件下，方程（1）的解当 $t \to \infty$ 时呈现出如同 $e^{-\lambda_1 t}$ 的性态，其中 $\lambda_1 = \pi^2/l^2$．并非方程（1）的每个差分格式都有这个性质．例如，对称格式（$\sigma = 0.5$）当 $\tau \leqslant lh/\pi$ 时是渐近稳定的．对任意的 τ 和 h 之值，也构造了

一些具有 2 阶精度并且渐近稳定的格式，但它们不同于方程组 (2) (见[3]).

对于第三类边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)-\beta u(0,t)=\mu(t),$$

如下差分方程可逼近到 $O(h^2)$ 阶

$$\sigma(y_{x,0}^{n+1}-(\beta y_0^{n+1}+\mu^{n+1}))+$$
$$+(1-\sigma)(y_{x,0}^{n}-(\beta y_0^{n}+\mu^{n}))=$$
$$=0.5h(y_{t,0}^{n}-\varphi_0^n),$$
$$\mu^n=\mu(t_n).$$

对球坐标或柱坐标的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^m\frac{\partial u}{\partial r}\right],\ m=1,2,\ 0<r<R,$$

可引入网格 (r_i,t_n)，其中 $t_n=n\tau,\ n=0,1,\cdots,$

$$r_i=\left[i+\frac{m}{2}\right]h,\quad i=0,\cdots,N;$$

$$h=\frac{R}{N+0.5m},\quad m=1,2,$$

并考虑差分方程 (见[4])

$$y_{t,i}^n=\Lambda_r^{(m)}(\sigma y_i^{n+1}+(1-\sigma)y_i^n),$$

其中

$$\Lambda_r^{(m)}y_0^n=\frac{1}{r_0^m}\left[\overline{r}_1^m\frac{y_1^n-y_0^n}{h}\right],$$

$$\Lambda_r^{(m)}y_i^n=\frac{1}{r_i^m}\cdot\frac{1}{h}\left[\overline{r}_{i+1}^m\frac{y_{i+1}^n-y_i^n}{h}-\overline{r}_i^m\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{y_i^n-y_{i-1}^n}{h}\right],$$

$$\overline{r}_i=0.5(r_i+r_{i+1})\ (\text{当 } m=1\text{时}),$$

$$\overline{r}_i=\sqrt{r_ir_{i-1}}\qquad(\text{当 } m=2\text{时}),$$

$$i=1,\cdots,N-1.$$

为求解变系数抛物型偏微分方程，人们研究了齐次守恒差分格式 (见[1]，[5])，这类格式在网格区域上表现出初始微分方程所固有的守恒性．为了构造变系数抛物型偏微分方程的差分格式，可应用下列方法：均衡，变分与有限元方法．例如，对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+f(x,t),$$

$$0<x<l,\ t>0,$$

使用加权的差分方程

$$y_{t,i}^n=(a(\sigma y^{n+1}+(1-\sigma)y^n)_{\bar{x}})_{x,i}+\varphi_i^n,$$

其中 $\quad a=a_i^n=k(x_i-0.5h,\ t_n+0.5\tau).$

和系数连续情况一样，已经证明了系数非连续时求解抛物型微分方程的齐次守恒差分格式的收敛性，并得到了它们的误差估计 (见[1]).

为了求解只含一个空间变量的抛物型微分方程组，可使用像单个方程一样的差分格式．新一层上的解向量可由**矩阵因子分解方法** (matrix factorization method) 求得．

当求解拟线性抛物型偏微分方程时，使用绝对稳定的隐式差分格式．差分方程的解 y^{n+1} 由追赶迭代得到．例如，求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right],\quad k(u)>0,\qquad(3)$$

使用纯隐式差分格式

$$y_{t,i}^n=(a(y_i^{n+1})y_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i},$$

$$a(y_i^{n+1})=0.5(k(y_i^{n+1})+k(y_{i-1}^{n+1})),$$

并由下面的迭代法 (s 表示迭代次数) 求解

$$y_i^{(s+1)}=y_i^n+\tau(a(y_i^{(s)})y_{\bar{x}}^{(s+1)})_{x,i},$$

$$s=0,\cdots,m,$$

$$y_i^{(0)}=y_i^n,\quad y_i^{(m+1)}=y_i^{n+1}.$$

在每次迭代中用追赶法计算 $y_i^{(s+1)}$．为了求解非线性抛物型偏微分方程，还发现了基于 **Runge-Kutta 方法** (Runge-Kutta method) 的格式的一个应用．在此，求解 (3) 可用两步法

$$y_i^{n+1/2}=y_i^n+0.5\tau(a(y_i^n)y_{\bar{x}}^{n+1/2})_{x,i},$$

$$y_i^{n+1}=y_i^n+0.5\tau(a(y_i^{n+1/2})(y^{n+1}+y^n)_{\bar{x}})_{x,i},$$

为检验和证实非线性抛物型偏微分方程差分格式的性质，可采用与自身模型的准确解作比较的方法，例如热波型的解 (见[6]).

求解多维抛物型偏微分方程，使用**可变方向法** (variable-directions method)，该方法把多变元问题化为一系列单变元的问题 (见[1]，[7]－[10])．许多绝对稳定的可变方向算法曾被提出并研究过．这些算法在一定意义下是经济的，即在每一个新的时间层 t_{n+1} 上进行计算所需的算术运算的数目与空间网格结点的数目是同一个量级．下面的例子是研究方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\quad(x_1,x_2)\in G,\ t>0\ (4)$$

的可变方向的差分格式，其中矩形 $G=\{0<x_\alpha<l_\alpha:$

$\alpha=1, 2\}$. 引入网格

$$x_{ij}=(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}),$$

$$x_1^{(i)}=ih_1, i=0,\cdots,N_1;\ h_1N_1=l_1,$$

$$x_2^{(j)}=jh_2, j=0,\cdots,N_2;\ h_2N_2=l_2,$$

及记号

$$y_{ij}^n=y(x_{ij}, t_n),$$

$$y_{ij}^{n+1/2}=y(x_{ij}, t_n+0.5\tau),$$

$$\Lambda_1y_{ij}^n=\frac{y_{i+1,j}^n-2y_{ij}^n+y_{i-1,j}^n}{h_1^2},$$

$$\Lambda_2y_{ij}^n=\frac{y_{i,j+1}^n-2y_{ij}^n+y_{i,j-1}^n}{h_2^2}.$$

方程(4)由下列差分格式求解

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2}-y_{ij}^n}{0.5\tau}=\Lambda_1y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2y_{ij}^n,$$

$$\frac{y_{ij}^{n+1}-y_{ij}^{n+1/2}}{0.5\tau}=\Lambda_1y_{ij}^{n+1/2}+\Lambda_2y_{ij}^{n+1}.$$

这些方程对 $i=1,\cdots,N_1-1$; $j=1,\cdots,N_2-1$ 列出, 并需补充合适的边界条件. 对于每个 $j=1,\cdots,N_2-1$, 在 x_1 方向用追赶法, 从第一个方程得到 $y_{ij}^{n+1/2}$, 然后对于每个 $i=1,\cdots,N_1-1$, 在 x_2 方向进行追赶得到 y_{ij}^{n+1}. 用上述方法, 即依次相继使用一个变元的追赶计算, 就构成了这种计算算法.

构造和分析多维抛物型偏微分方程经济差分格式的理论基础是整体逼近方法(见[1], [8], [9]). 图上的可加经济格式和向量格式的出现可认为是可变方向法的推广(见[11]).

在非正规空间网格情况下, 抛物型偏微分方程的差分格式已用有限元方法和平衡方法构造出来(见[12]).

为了求解由多维抛物型偏微分方程隐式差分格式得出的网格方程, 可采用对椭圆型差分边值问题有效的直接方法和迭代方法: 分离变量法, 快速离散 Fourier 变换算法, 循环约化法, 交错三角形迭代法及其他方法(见[13]).

参考文献

[1] Самарский, А. А., Теория разностных схем, М., 1977.

[2] Саульев, В. К., Интегрироване уравнений параболического типа методом сеток, М., 1960 (英译本: Saul'ev, V. K., Integration of equations of parabolic type by the method of nets, Pergamon, 1964).

[3] Самарский, А. А, Гулин, А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973.

[4] Фрязинов, И. В., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, 11(1971), 5, 1219 – 1228.

[5] Марчук, Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980 (英译本 Marchuk, G. I., Methods of numerical mathematics, Springer, 1982).

[6] Самарский, А. А., Соболь, И. М., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, 3(1963), 4, 702 – 719.

[7] Яненко, Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967 (中译本: Н. Н. 雅宁柯, 分数步法: 数学物理中多变量问题的解法, 科学出版社, 1992).

[8] Самарский, А. А., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, 2(1962), 1, 25 – 56.

[9] Яненко, Н. Н., 《Сиб. матем. ж.》, 5(1964), 6, 1431 – 1434.

[10] Дьяконов, Е. Г., 《Ж. вычислит. матем. и матем. физ.》, 2(1962), 4, 549 – 568.

[11] Самарский, А. А., Фрязинов, И. В., 《Успехи матем. наук》, 31(1976), 6, 167 – 196.

[12] Фрязинов, И. В., 《Дифференц. уравнение》, 16(1980), 7, 1332 – 1343.

[13] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978 (英译本: Samarskiĭ, A. A. and Nikolaev, E. S., Numerical methods for grid equations, 1 – 2, Birkhäuser, 1989).

А. В. Гулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Smith, G. D., Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods, Clarendon Press, 1978.

[A2] Johnson, C., Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Cambridge Univ. Press, 1987.

[A3] Mitchell, A. R. and Griffiths, D. F., The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980.

[A4] Lapidus, L. and Pinder, G. F., Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, Wiley, 1982 (中译本: L. 拉皮德斯, G. F. 平德尔, 科学和工程中的偏微分方程数值解法, 煤炭工业出版社, 1989).

[A5] Courlay, A. R., Hopscotch, a fast second order partial differential equation solver, *J. Inst. Math. Appl.*, 6(1970), 375 – 390.

[A6] Peaceman, A. W. and Rachford, H. H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *SIAM J.*, 3(1955), 28 – 41.

张宝琳 袁国兴 译

抛物点 [parabolic point; параболическая точка]

正则曲面上使**密切抛物面**(osculating paraboloid)退化为**抛物柱面**(parabolic cylinder)的点. 在抛物

点处，**Dupin 标线**（Dupin indicatrix）是一对平行直线，**Gauss 曲率**（Gauss curvature）等于零，一个**主曲率**（principal curvature）消失，以及**第二基本形式**（second fundamental form）的系数满足下列方程：

$$LN - M^2 = 0.$$

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1978, pp. 50 – 51.

[A2] Millman, R. S. & Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977, p. 132（中译本：R. S. 密尔曼，G. D. 派克，微分几何原理，广东高等教育出版社，1987 年）.

沈一兵 译

抛物回归 [**parabolic regression**; **параболическая регрессия**]，多项式回归（polynomial regression）

回归函数为多项式的一种回归模型．确切地说，设 $X=(X_1,\cdots,X_m)^T$ 和 $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)^T$ 是取 $x=(x_1,\cdots,x_m)^t\in\mathbf{R}^m$ 和 $y=(y_1,\cdots,y_n)^T\in\mathbf{R}^n$ 为值的随机向量，且假设

$$\mathsf{E}\{Y|X\}=f(X)=(f_1(X),\cdots,f_n(X))^t$$

存在（即假设 $\mathsf{E}\{Y_1|X\}=f_1(X),\cdots,\mathsf{E}\{Y_n|X\}=f_n(X)$ 存在）；那么，如果向量 $\mathsf{E}\{Y|X\}=f(X)$ 的分量是向量 X 分量的多项式函数，则这种回归称为抛物（多项式）回归．例如，对于最简单的情形，Y 和 X 是通常的随机变量，而多项式回归方程形式为

$$y=\beta_0+\beta_1X+\cdots+\beta_pX^p,$$

其中 $\beta_0,\cdots,\beta_p$ 是回归系数．抛物回归的一种特殊情形是**线性回归**（linear regression）．通过给向量 X 增加新的分量，总可以将抛物回归化为线性回归．见**回归**（regression）；**回归分析**（regression analysis）．

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）.

[2] Seber, G. A. F., Linear regression analysis, Wiley, 1977（中译本：G. A. F. 塞伯，线性回归分析，科学出版社，1987）.

М. С. Никулин 撰

【补注】“抛物回归”这一术语在西方文献中不常见，几乎都使用“多项式回归”．

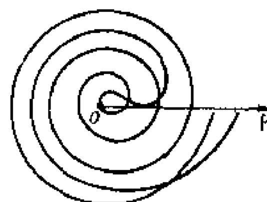
周概容 译

抛物螺线 [**parabolic spiral**; **параболическая спираль**]

一种超越平面曲线，它在极坐标下的方程取如下形式：

$$\rho=a\sqrt{\varphi}+l,\ l>0.$$

φ 的每个值对应 $\sqrt{\varphi}$ 的两个值，一正一负．此曲线有无限多个二重点和一个拐点（见图）．



若 $l=0$，则曲线称为 **Fermat 螺线**（Fermat spiral）．抛物螺线与所谓的代数螺线有关（见**螺线**（spirals））．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gomez Teixeira, F., Traité des courbes, 1 – 3, Chelsea, reprint, 1971.

[A2] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

沈一兵 译

抛物子代数 [**parabolic subalgebra**; **параболическая подалгебра**]

代数闭域上有限维 **Lie 代数**（Lie algebra）$\mathfrak{g}$ 的子代数，它包含一个 Borel 子代数（Borel subalgebra），即 $\mathfrak{g}$ 的极大可解子代数（亦见**可解 Lie 代数**（Lie algebra, solvable））．如果 $\mathfrak{g}$ 是任意域 k 上的有限维 Lie 代数，则它的子代数 $\mathfrak{p}$ 也称为抛物子代数，若 $\mathfrak{p}\otimes_k\bar{k}$ 是 $\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k}$ 的抛物子代数，这里 $\bar{k}$ 是 k 的代数闭包．如果 G 是特征为 0 的域上的不可约**线性代数群**（linear algebraic group），$\mathfrak{g}$ 是它的 Lie 代数，则子代数 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数，当且仅当它与 G 的某个**抛物子群**（parabolic subgroup）的 Lie 代数重合．

在域 k 上所有 n 阶方阵的 Lie 代数中，抛物子代数的例子是 $\mathfrak{p}(\mu)$ 型子代数（$\mu=(m_1,\cdots,m_s)$ 是和为 n 的任意自然数集），这里代数 $\mathfrak{p}(\mu)$ 由对角块为 $m_1,\cdots,m_s$ 阶方阵的所有上三角对角分块矩阵组成．

设 $\mathfrak{g}$ 是特征为 0 的域 k 上的有限维约化 **Lie 代数**（Lie algebra, reductive），$\mathfrak{f}$ 是 $\mathfrak{g}$ 在 k 上的极大可对角化子代数，R 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{f}$ 的 k **根系**（root system），Δ 是 R 的一组基（单根的集合），$\mathrm{Aut}_e\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的**初等自同构群**（group of elementary automorphisms），即由形如 $\exp \mathrm{ad}\, x$ 的自同构生成的群，这里 x 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零元．则 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的每个抛物子代数由 $\mathrm{Aut}_e\mathfrak{g}$ 中的某个自同构变换为一个形如

$$\mathfrak{p}_\Phi=\mathfrak{g}^0+\sum_{\alpha\in\Pi(\Phi)}\mathfrak{g}^\alpha$$

的标准抛物子代数（standard parabolic subalgebras），这里 $\mathfrak{g}^{\mathfrak{t}}$ 是子代数 $\mathfrak{t}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的**中心化子**（centralizer），$\mathfrak{g}^{\alpha}$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的对应于根 $\alpha \in R$ 的根子空间，Φ 是集合 Δ 的任一子集，$\Pi(\Phi)$ 是 R 中某些根的集合，这些根分解成 Δ 中单根之和时仅包含 Φ 中的带有非负系数的元素．因此，相对于 $\mathrm{Aut}_e \mathfrak{g}$ 共轭的抛物子代数的类的个数为 2^r，这里 $r=|\Delta|$ 是半单 Lie 代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的 k 秩．此外，如果 $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$，则有 $\mathfrak{p}_{\Phi_1} \supseteq \mathfrak{p}_{\Phi_2}$．特别地，$\mathfrak{p}_{\varnothing} = \mathfrak{g}$，而 $\mathfrak{p}_{\Delta}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极小抛物子代数．

特征为 0 的域上的有限维约化 Lie 代数的所有非约化极大子代数是抛物子代数（见[2]，[3]，[5]）．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann, 1975, Chapts. Ⅶ - Ⅷ.

[2] Карпелевич, Ф. И., 《Докл. АН СССР》, 76 (1951), 6, 775 - 778.

[3] Морозов, В. В., 《Успехи матем. наук》, 11 (1956), 5, 191 - 194.

[4] Mostow, G. D., On maximal subgroups of real Lie groups, *Ann. of Math.*, 74 (1961), 503 - 517.

[5] Borel, A. and Tits, J., Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs, Ⅰ, *Invent. Math.*, 12 (1971), 95 - 104.

В. Л. Попов 撰 蔡传仁 译

抛物子群［**parabolic subgroup**；**параболическая подгруппа**］

1）定义在域 k 上一个线性代数群 G 的抛物子群是一个子群 $P \subset G$，它在 **Zariski 拓扑**（Zariski topology）内是闭的，而商空间 G/P 是一个射影代数簇．一个子群 $P \subset G$ 是抛物子群，当且仅当它包含群 G 的某个 **Borel 子群**（Borel subgroup）．群 G 的 k 有理点的群 G_k 的一个抛物子群是这样一个子群 $P_k \subset G_k$，它是 G 内某个抛物子群 P 的 k 有理点的群，并且在 Zariski 拓扑内在 P 中稠密．如果 $\mathrm{char}\, h=0$，而 $\mathfrak{g}$ 是 G 的 Lie 代数，则闭子群 $P \subset G$ 是抛物子群，当且仅当它的 Lie 代数是 $\mathfrak{g}$ 的一个**抛物子代数**（parabolic subalgebra）．

令 G 是定义在（任意）基础域 k 上一个连通可简约线性代数群．G 的一个 k 子群是定义在 k 上的一个闭子群．极小抛物 k 子群在域 k 上的理论中扮演着 Borel 子群在一个代数闭域上所扮演的同样的角色（见[1]）．特别地，G 的任意两个极小抛物 k 子群在 k 上是共轭的．如果 G 的两个抛物 k 子群在 k 的某一扩域上共轭，那么它们在 k 上共轭．G 的抛物子群的共轭类的集合（相应地，抛物 k 子群的共轭类的集合）有 2^r 个（相应地 2^{r_k} 个）元素，这里 r 是群的换位子群 (G,G) 的秩，r_k 是它的 k 秩，即 (G,G) 中一个在 k 上分裂的极大环面的维数．更确切地说，每一个这样的类都以类似于一个简约 Lie 代数的每一个抛物子代数都共轭于标准子代数之一的方式，由群 G 的单根集（相应地，单 k 根集）的一个子集所决定（见[2]，[4]）．

一个群 G 的每一个抛物子群 P 都是连通的，与它的正规化子重合并且容许一个 Levi 分解（Levi decomposition），即可以表示成它的幂单根与一个 k 闭的可简约子群，称为群 P 的一个 Levi 子群（Levi subgroup），的半直积的形式．一个抛物子群 P 内任意两个 Levi 子群都通过 P 的一个在 k 上是有理的元素彼此共轭．群 G 的两个抛物子群称为反的（opposite），如果它们的交是每一个的 Levi 子群．群 G 的一个闭子群是一个抛物子群，当且仅当与它的幂单根的正规化子重合．群 G 的每一个极大闭子群或者是一个抛物子群，或者有一个可简约的单位元的连通分支（见[2]，[4]）．

域 k 上 n 维向量空间 V 的非奇异线性变换群 $\mathrm{GL}_n(k)$ 的抛物子群，就是那些由空间 V 的保持 V 的一个型为 $\nu=(n_1,\cdots,n_t)$ 的旗不变的一切自同构所组成的子群 $P(\nu)$．商空间 $\mathrm{GL}_n(k)/P(\nu)$ 是空间 V 内一切型为 ν 的旗的簇．

在 $k=\mathbf{R}$ 的情形下，抛物 $\mathbf{R}$ 子群有以下的几何解释（见[5]）．令 $G_{\mathbf{R}}$ 是由定义在 $\mathbf{R}$ 上一个半单代数群 G 的实点所组成的群所定义的一个非紧实半单 Lie 群．$G_{\mathbf{R}}$ 的一个子群是抛物子群，当且仅当它与对应的非紧对称空间 M 的保持 M 的某个测地射线 $\mathbf{R}$ 束的运动群重合（M 的两条测地射线可属于同一 $\mathbf{R}$ 束的，如果以固定速度沿这两条射线向无穷远移动的两点的距离具有有限极限）．

2）一个 Tits 系统（G, B, N, S）的抛物子群是群 G 的一个子群，它与一个包含 B 的子群共轭．每一个抛物子群都与它的正规化子重合．任意两个抛物子群的交包含 G 的一个与 $T=B\cap N$ 共轭的子群．特别地，与一个可简约线性代数群 G 关联的 **Tits 系统**（Tits system）的一个抛物子群也同样是群 G 的一个抛物子群（见[3]，[4]）．

参考文献

[1] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, 27 (1965), 55 - 150.

[2] Borel, A. and Tits, J., Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs Ⅰ, *Invent. Math.*, 12 (1971), 95 - 104.

[3] Bourbaki, N., Groupes et algébres de Lie, Hermann, 1975, Chapts. Ⅶ - Ⅷ.

[4] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

[5] Карпелевич, Ф. И., 《Труды Моск. матем. об-ва》, 14(1965), 48 – 185.
В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Borel, A., Linear algebraic groups, second enlarged ed., Springer, 1991.
郝钢新 译

抛物面 [paraboloid, параболоид]

非闭、非中心二次曲面 (surface of the second order). 抛物面的典范方程是:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \ p, \ q>0$$

——**椭圆抛物面** (elliptic paraboloid), 以及

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \ p, \ q>0$$

——**双曲抛物面** (hyperbolic paraboloid).

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 2, Springer, 1987, Chapt. 15 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一 — 五卷, 科学出版社, 1987 – 1991).
杜小杨 张鸿林 译

抛物面坐标 [paraboloidal coordinates; параболоидальные координаты]

三个数 u, v 和 w, 它们同 Descartes 直角坐标系 x, y 和 z 由下列公式相联系:

$$x=2uw\cos v, \ y=2uw\sin v, \ z=u^2-w^2,$$

其中 $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$, $0\leqslant w<\infty$. 坐标曲面是两组旋转抛物面 (两轴反向) ($u=$ 常数, $w=$ 常数), 以及半平面 ($v=$ 常数). 抛物面坐标系是正交的.

Lamé 系数 (标度因子) 是

$$L_u=L_w=2\sqrt{u^2+w^2}, \ L_v=2uw.$$

面积元是

$$d\sigma=$$

$$=4\sqrt{(u^2+w^2)u^2w^2(du^2+dw^2)dv^2+(u^2+w^2)(du\,dw)^2}.$$

体积元是

$$dV=8(u^2+w^2)uw\,du\,dv\,dw.$$

向量分析的基本运算是

$$\operatorname{grad}_u\varphi=\frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

$$\operatorname{grad}_v\varphi=\frac{1}{2uw}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\operatorname{grad}_w\varphi=\frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial w},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{1}{2uw\sqrt{(u^2+w^2)^3}}\times$$

$$\times[w\mathbf{a}_u(2u^2+w^2)+u\mathbf{a}_w(u^2+2w^2)]+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\left[\frac{\partial\mathbf{a}_u}{\partial u}+\frac{\partial\mathbf{a}_w}{\partial w}\right]+\frac{1}{2uw}\frac{\partial\mathbf{a}_v}{\partial v};$$

$$\operatorname{rot}_u\mathbf{a}=\frac{1}{2uw}\frac{\partial\mathbf{a}_w}{\partial v}-\frac{1}{2w\sqrt{u^2+w^2}}\left[\mathbf{a}_v+w\frac{\partial\mathbf{a}_v}{\partial w}\right],$$

$$\operatorname{rot}_v\mathbf{a}=\frac{1}{2\sqrt{(u^2+w^2)^3}}(w\mathbf{a}_u-\mathbf{a}_w)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{u^2+w^2}}\left[\frac{\partial\mathbf{a}_u}{\partial w}-\frac{\partial\mathbf{a}_w}{\partial u}\right];$$

$$\operatorname{rot}_w\mathbf{a}=\frac{1}{2w(u^2+w^2)}\left[\mathbf{a}_v+u\frac{\partial\mathbf{a}_v}{\partial u}\right]-\frac{1}{2uv}\frac{\partial\mathbf{a}_u}{\partial v};$$

$$\Delta\varphi=\frac{1}{4(u^2+w^2)}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{u^2}+\frac{1}{w^2}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2}+\frac{1}{w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right].$$

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 这些坐标也称为旋转抛物线坐标 (rotation parabolic coordinates).

参考文献

[1] Sauer, R. and Szabó, I., Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Springer, 1967.
杜小杨 译

仿紧空间 [paracompact space; паракомпактное пространство]

一个拓扑空间 (topological space), 其中任何开覆盖 (见覆盖 (集合的) (covering (of a set))) 均可加细为一个局部有限的开覆盖. (拓扑空间 X 的子集族 γ 称为在 X 中是局部有限的 (locally finite), 如果每个点 $x\in X$ 都在 X 中有一个邻域, 只与族 γ 的有限多个元素相交; 子集族 γ 称为子集族 λ 的加细 (refinement), 如果族 γ 的每个元素均含于族 λ 的某个元素内.) 仿紧 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space) 称为仿紧统 (paracompactum). 仿紧统这类空间非常浩瀚, 包括了所有的度量空间 (Stone 定理) 以及所有的 Hausdorff 紧统. 不过, 局部紧的 Hausdorff 空间并不都是仿紧空间.

仿紧性的意义在于这个概念明显的一般性以及仿紧统的若干重要性质. 首先, 每个仿紧 Hausdorff 空间都是**正规空间** (normal space). 这就有可能在仿紧统上构造从属于任意已知开覆盖 γ 的单位分解 (parti-

tion of unity)，即是该空间一族非负连续实函数，满足下列条件：a）这些函数的支撑集构成一个局部有限族，并且是 γ 的加细；b）对于空间的每个点，族中所有函数在该点处之值之和等于 1（只有有限多个函数取非零值）．单位分解是一个基本工具，可以用来构造把一个空间映入标准空间的浸入映射．特别是可以用来把流形嵌入 Euclid 空间，以及证明每个具有 σ 局部有限基的 **Тихонов 空间**（Tikhonov space）的可度量化定理．此外，在流形理论中，单位分解也是使具有适当性质的各个特殊范围内产生的局部构造（特别是向量场或张量场）得以联成一统的某些方法的基础．因此，流形理论中提出的要求之一便是仿紧性要求．这个要求并非多余，因为的确存在非仿紧的连通 Hausdorff 空间，其局部性质与 $\mathbf{R}^n$ 一样．

有了仿紧性，空间的某些局部性质就可以统一起来，整体成立．特别是，局部可度量化的仿紧统本身是可度量化的；在 Čech 意义下局部完全且仿紧的 Hausdorff 空间本身也在 Čech 意义下是完全的．在**维数论**（dimension theory）中，可以对仿紧统得到一系列重要关系，但这些关系甚至对正规空间也不成立．这是不足为怪的，因为维数基本定义之一（Lebesgue 维数）涉及检查开覆盖的重数，这无疑关系到仿紧性定义根本所在的局部有限性的概念．

仿紧性并不由任意子空间所继承（不同于可度量化性），否则，例如，所有 Тихонов 空间，作为 Hausdorff 紧统的子空间，就会是仿紧统了．不过，仿紧统的每个闭子空间仍然是仿紧统．仿紧性的一个重要的不足之处在于缺少可乘性：两个仿紧统之积不必是仿紧统．另一方面，就 Hausdorff 空间类而言，仿紧统在**完满映射**（perfect mapping）下的逆象是仿紧统，而仿紧统在**连续闭映射**（closed mapping）下的象也是仿紧统．特别地，**Lindelöf 空间**（Lindelöf space）是仿紧统．在任意 Тихонов 空间上的所有连续实函数组成的空间，配以点态收敛拓扑，其仿紧性等价于该空间是 Lindelöf 空间．如果配备弱拓扑的 Banach 空间是由其中某个紧统拓扑生成的，那么它是仿紧空间．可剖分为 CW 复形的多面体是仿紧统的一个重要例子．

就仿紧统而言，可度量化条件得到简化．特别是，仿紧统可度量化的充要条件是：它具有可数序的基，即是含有任意一点 $x\in X$ 的基底元素组成的下降序列均构成在该点处的基．有许多**仿紧性准则**（paracompactness criteria）．特别是，就 Тихонов 空间 X 而言，下列条件是等价的：a）X 是仿紧空间；b）X 的任何开覆盖均可加细为局部有限覆盖；c）X 的任何开覆盖均可加细为 σ 局部有限的开覆盖；d）X 的任何开覆盖均可加细为保守闭覆盖（conservative closed covering），即是其中任何子族之并闭于 X．

下述判别准则是重要的：Тихонов 空间为仿紧空间的充要条件是：它的任何开覆盖 γ 均具有开的星形加细（star refinement）χ．后者是指，对于每个点 $x\in X$，χ 中含有 x 的所有元素之并含于 γ 的某个元素中．星形加细的概念可以用来表达空间的无限分解的思想，可以理解为三角形公理最一般的集合论形式．

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975（中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982）．

[2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М. 1974（英译本：Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984）．

[3] Архангельский А. В., 《Докл АН СССР》, 141（1961），1，13－15．

А. В. Архангельский 撰

【补注】 上述 Stone 定理属于 A. H. Stone（不是 Marshall Stone）．

保守族亦称保持闭包（closurepreserving）的族；星形加细亦称重心加细（barycentric refinements）．

仿紧概念多种多样．为了叙述这些概念，需要某些覆盖概念．一个集族称为不相交的（disjoint），如果它的元素互不相交．互不相交覆盖的可数并称为 σ 不相交覆盖（σ-disjoint covering）．空间 X 的点有限覆盖 γ 是指每个 $x\in X$ 均含于 γ 的至多有限多个元素中．点有限覆盖的可数并称为 σ 点有限覆盖．覆盖 γ 称为星形有限的（star-finite）（星形可数的）（star-countable）），如果 γ 的每个元素均至多与有限多个（可数多个）其他元素相交．

一个空间称为强仿紧的（strongly paracompact），如果其每个开覆盖均有星形有限的开加细；一个空间称为弱仿紧的（σ 亚紧的）（weakly paracompact（σ-metacompact）），如果其每个开覆盖均有点有限（σ 点有限）的开加细．屏蔽（screened）空间是指每个开覆盖均有 σ 互不相交的开加细．遗传仿紧（hereditarily paracompact）空间是指每个子空间也是仿紧空间．空间称为星形正规（star-normal）空间或星形仿紧（star-paracompact）空间，如果每个开覆盖均有开的星形加细．可数仿紧（countably paracompact）空间是指每个开覆盖均有局部紧的开加细．空间称为 τ 仿紧（τ-paracompact）空间，τ 是一个基数，如果基数 $\leqslant\tau$ 的每个开覆盖均有局部紧的开加细．至于更多的详情、这些概念彼此的关系以及其他的拓扑性质见［2］．仿紧性本身仍然是核心概念．

如上所述，仿紧性是一个非常自然而有用的性质．然而，很遗憾，这个性质并不由子空间及乘积所继承．不过，就另一种涉及邻近及收敛思想的概念（不是拓扑空间），即所谓近性空间（nearness spaces）

而言，这个缺陷就不存在了．见[A1]及拓扑结构(topological structures)．至于"在 Čech 意义下完全"的概念见**完全空间**(complete space)．

参考文献

[A1] Preuss, G., Theory of topological structures, Reidel, 1988.

[A2] Burke, D. K., Covering properties, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.): Handbook of set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 347－422.

[A3] Engelking, R., General Topology, Heldermann, 1989.

【译注】

参考文献

[B1] 傅继光，一般拓扑学专题选讲，四川教育出版社，1991．

胡师度　白苏华 译

仿紧性准则 [paracompactness criteria; паракомпактности критерии]

对于任何完全正则的 Hausdorff 空间 X(见完全正则空间(completely-regular space)，**Hausdorff 空间**(Hausdorff space))，下列陈述是等价的：

1) X 是仿紧空间．

2) X 的每个开覆盖均可加细为局部有限的开覆盖．

3) X 的每个开覆盖均可加细为 σ 局部有限的开覆盖(σ-locally finite open covering)，即由 X 中可数多个局部有限的集族之并组成的开覆盖．

4) X 的每个开覆盖均可加细为局部有限覆盖(对覆盖元素的结构未作任何假设)．

5) X 的每个开覆盖 γ 均有开的星形加细．

6) X 的每个开覆盖均可加细为保守覆盖．

7) 对于 X 的任何开覆盖 γ，存在该空间的可数多个开覆盖 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$，使得对每个点 $x \in X$ 和 x 的每个邻域 O_x，存在一个 $U \in \gamma$ 和一个整数 i，满足下述条件：λ_i 中与 O_x 相交的任何元素均含于 U(即是集 O_x 关于 λ_i 的星形含于 U)．

8) 对于 X 的任何开覆盖 ω，存在一个把空间 X 映入某个度量空间 Y 的连续映射，使得 Y 的每一点都有一个邻域，其逆象含于 ω 的一个元素中．

9) 空间 X 是集体正规空间，并且是弱仿紧空间．

A. B. Архангельский 撰

【补注】 另一些等价的陈述是：

10) X 与任何紧 Hausdorff 空间的乘积是**正规空间**(normal space)．

11) $X \times \beta X$ 是正规空间．

12) 从 X 到一个 Banach 空间的任何下半连续的**多值映射**(multi-valued mapping)均含有一个连续的单值映射．

13) X 上存在一个一致结构，使得闭集的**超空间**(hyperspace)是完全的．

在 8) 中提出的那种映射称为覆盖 ω 的实现(realize)．

弱仿紧空间亦称亚紧(metacompact)空间，即它的每个开覆盖均有点有限的开加细．

集族 γ，特别是覆盖，称为保守集族(conservative family of sets)，如果对于 γ 的每个子族 γ'，$[\bigcup_{P\in\gamma'} P] = \bigcup_{P\in\gamma'} [P]$，其中 $[A]$ 表示 $A \subset X$ 的闭包．

亦见**仿紧空间**(paracompact space)．

参考文献

[A1] Burke, D. K., Covering properties, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.): Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 347－422.

[A2] Michael, E. A., A note on paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953), 831－838.

[A3] Michael, E. A., Another note on paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1958), 822－828.

[A4] Michael, E. A., Yet another note on paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), 309－314

[A5] Stone, A. H., Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), 977－982.

[A6] Isbell, J., Supercomplete spaces, *Pacific J. Math.*, 12 (1962), 287－290.

[A7] Michael, E., Continuous selections I, *Ann. of Math.* (2), 63 (1956), 2, 361－382.

[A8] Tamano, H. On paracompactness, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 1043－1047.

胡师度　白苏华 译

平行位移 [parallel displacement; параллельное перенесение]

在光滑纤维空间 E 的底(空间) M 中逐段光滑曲线 $L(x_0, x_1)$ 的端点 x_0 和 x_1 处的纤维间的同构，它由 E 中给定的某个**联络**(connection)所定义；特别是，沿曲线 $L \in M$，切空间 $T_{x_0}(M)$ 与 $T_{x_1}(M)$ 之间的由 M 上给定的某个**仿射联络**(affine connection)所定义的线性同构．平行位移概念的发展起始于 Euclid 平面 E^2 上的普通平行性，对此，F. Minding (1837) 利用曲线 $L \in M$ 到平面 E^2 上的展开(他提出的一种概念)指出了一种把它推广到 E^3 的曲面 M 上去的方法．这正好作为 T. Levi-Civita ([1]) 的出发点，他根据曲面上切向量平行位移的解析表示，发现这仅仅与曲面的度量有关，并且在此基础上，他立刻把这概念推广到 n 维 Riemann 空间的情况(见 **Levi-Civita 联络**(Levi-Civita connection))．H. Weyl ([2]) 把切向量平行位移的概念置于光滑流形 M 上仿射联络的定义的基础上．这个概念的进一步推广与一般联络理论的发展相联系．

假设在光滑流形 M 上一仿射联络由局部联络形

式的矩阵给出:

$$\omega^i = \Gamma^i_k(x)dx^k,\ \omega^i_j = \Gamma^i_{jk}(x)\omega^k,\ \det|\Gamma^i_k| \neq 0$$

向量 $X_0 \in T_{x_0}(M)$ 是由向量 $X_1 \in T_{x_1}(M)$ 沿光滑曲线 $L(x_0,x_1) \in M$ 经平行位移得到的, 如果在 L 上存在连接 X_0 和 X_1 的光滑向量场 X, 使得 $\nabla_Y X = 0$. 这里 Y 是 L 的切向量场, $\nabla_Y X$ 是 X 关于 Y 的共变导数, 它由下式定义:

$$\omega^i(\nabla_Y X) = Y\omega^i(X) + \omega^i_k(Y)\omega^k(X).$$

因此, X 的坐标 $\zeta^i = \omega^i(X)$ 沿 L 必须满足下列微分方程组:

$$d\zeta^i + \zeta^k\omega^i_k = 0.$$

由该方程组的线性性推得沿 L 的平行位移确定了 $T_{x_0}(M)$ 与 $T_{x_1}(M)$ 之间的某个同构. 沿逐段光滑曲线的平行位移可定义为沿它的各光滑弧段的平行位移的复合.

沿逐段光滑闭曲线 $L(x,x)$ 平行位移所定义的空间 $T_x(M)$ 的自同构组成线性和乐群 (holonomy group) Φ_x, 这里 Φ_x 和 $\Phi_{x'}$ 总是相互共轭的. 若 Φ_x 是离散的, 即若它的恒等变换的分支是单元集, 则就称之为具有向量 (局部) 绝对平行性的仿射联络, 或 (局部) 平坦联络 (flat connection). 此时, 对任何 x_0 和 x_1, 平行位移与 $L(x_0,x_1)$ 在同一同伦类中的选择无关; 对此, 其充要条件是联络的曲率张量等于零.

在向量平行位移的基础上, 可定义余向量和更一般的张量的平行位移. L 上的余向量场 θ 被称为实现了平行位移, 如果对 L 上任何实现平行位移的向量场 X, 函数 $\theta(X)$ 沿 L 总为常值. 更一般地, 一个 $(2,1)$ 型张量场 T 实现了沿 L 的平行位移, 如果对 L 上任何实现平行位移的 X,Y 和 θ, 函数 $T(X,Y,\theta)$ 沿 L 为常值. 对此, 其充要条件是分量 T^i_{jk} 沿 L 满足下列微分方程组:

$$dT^i_{jk} = T^i_{lk}\omega^l_j + T^i_{jl}\omega^l_k - T^l_{jk}\omega^i_l.$$

在 20 世纪 20 年代 E. Cartan 提出射影或共形联络空间及流形上联络的一般概念之后, 平行位移的观念得到了更一般的含义. 在它的最一般意义下, 今天已把它看作主纤维空间或与它们相配的纤维空间中联络的分析. 存在着一种利用平行位移的概念定义联络概念的方法, 即公理化地定义联络. 然而, 联络可以由**水平分布** (horizontal distribution) 或其他某种等价东西来给出, 例如, **联络形式** (connection form). 对于底 (空间) M 中每条曲线 $L(x_0,x_1)$, 它的水平提升被定义为 L 上水平分布的积分曲线. 于是, 平行位移就是一个映射的名称, 它使 x_1 上纤维中这些提升的端点对应于 x_0 上纤维中它们的其他端点. 和乐群与 (局部) 平坦联络可类似地定义; 后者也以曲率形式 (curvature form) 等于零为特征.

参考文献

[1] Levi-Civita, T., Nozione di parallelismo in una varietá qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura riemanniana, *Rend. Circ. Mat. Padova*, **42** (1917), 173 – 205.

[2] Weyl, H., Raum, Zeit, Materie, Springer, 1923 (英译本: Weyl, H., Space, time, matter, Dover, 1952 (有新序言)).

[3] Cartan, E., Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *Acta Math.*, **48** (1926), 1 – 42.

[4] Nomizu, K., Lie groups and differential geometry, Math. Soc. Japan, 1956.

[5] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967 (中译本: П. К. 洛薛夫斯基, 黎曼几何与张量解析, 高等教育出版社, 1955, 上、下册).

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kobayashi, S. & Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, interscience, 1963, Chapt. II.

[A2] Lichnerowicz, A., Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976 (译自法文).

沈一兵 译

平行移动 [**parallel displacement; параллельный перенос**], 简称平移

运动 (motion) 的一种特殊情形, 空间的所有点在同一方向 (沿该空间中的一条直线) 移动同一距离. 换句话说, 在此给定的变换下, 如果一个点原来的位置是 M, 变换后的位置是 M', 则向量 $\overrightarrow{MM'}$ 对所有彼此对应的点对是一样的.

在平面上, 平行移动可在直角坐标系 (x,y) 中用如下公式解析地表达:

$$\tilde{x} = x + a,\quad \tilde{y} = y + b, \qquad (*)$$

这里 $\overrightarrow{MM'} = (a,b)$.

所有的平行移动的集合形成一个群, 在 Euclid 空间的情形, 它是运动群的一个子群, 在仿射空间的情形, 它是仿射变换群的一个子群. А. Б. Иванов 撰

【补注】 在绝对平面上一个平行移动 (见**绝对几何学** (absolute geometry)) 是关于两条平行直线反射的乘积 (见**反射** (reflection)). 所以, 在 **Euclid 几何学** (Euclidean geometry) 中, 一个平行移动是一个**平移** (translation), 在仿射 (或 Descartes) 坐标中可表示为 $(x,y) \to (\tilde{x},\tilde{y})$ (见 $(*)$).

但在 **Лобачевский** 几何学(Lobachevskiĭ geometry)中平行移动是点沿一个极限圆周的移动. 而平移则不同, 是关于两个不同点的半转之积或关于两条有公共垂线的直线的反射之积.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ Toronto Press, 1965.

林向岩 译 陆珊年 校

平行场[**parallel field; параллельное поле**], 共变常数场(covariantly-constant field)

带**线性联络**(linear connection)∇ 的**流形**(manifold)M 上的张量场 A(见**张量分析**(tensor analysis)), 它在沿 M 上曲线的**平行移动**(parallel displacement)下不变. 其意指, 对于任何点 $p,q\in M$, 在沿连接 p 和 q 的任何光滑曲线的平行移动下, 张量 A_p(张量场 A 在 p 的值)变到张量 A_q.

张量场 A 是平行的, 当且仅当它关于任何向量场 X 方向的**共变导数**(covariant derivative)恒消失: $\nabla_X A=0$, 或换言之, A 的**共变微分**(covariant differential) DA 消失.

平行场的集合 $\Pi(M,\nabla)$ 形成 M 上一切张量场的代数的子代数, 它在张量场的缩并和它们指标的置换下不变. 代数 $\Pi(M,\nabla)$ 自然同构于 M 上任一定点 p 处的张量代数, 它在 p 处的 ∇ 的**齐次和乐群**(holonomy group)M_p 下不变. 对于带完全和乐群 $\Gamma=\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 的联络, 其中 $n=\dim M$, 代数 $\Pi(M,\nabla)$ 由 Kronecker 符号 δ_j^i 所生成; 对于带和乐群 $\mathrm{O}(n)$ 的 **Riemann 联络**(Riemannian connection), 它由度量张量 $g=(g_{ij})$ 及其逆 $g^{-1}=(g^{ij})$ 所生成, 而对于带和乐群 $\mathrm{SO}(n)$ 的 Riemann 联络, 它由 g,g^{-1} 及 n 次体积形式所生成. 对于带任意不可约和乐群的无挠线性联络的任意空间, 平行微分形式的代数的生成元也已有描述([5]).

在带 **Levi-Civita 联络**(Levi-Civita connection)的 Riemann 流形上, 特别感兴趣的是微分形式的平行场. 与每个这样的形式 ω 相伴随(利用关于 ω 的张量积或缩并), 在微分形式空间中有许多线性算子, 它们与 Laplace-Beltrami 算子 Δ 可交换, 例如, ω 的内乘和外乘, 或在关于和乐群不变的微分形式空间的子空间上的正交投影算子. 研究这些算子有可能得到对各次调和形式空间之维数的估计, 即(在紧的情况下)对 M 的 Betti 数的估计(见[4]). 对于 Kähler 流形和四元数 **Kähler 流形**(Kähler manifold), 已发展了最丰富的理论(见 **Hodge 定理**(Hodge theorem)), 在那里分别存在着平行的 2 形式场和 4 形式场. Riemann 空间中任何平行微分形式是调和的. 在紧对称 Riemann 空间中其逆亦真: 任何**调和形式**(harmonic form)是平行的. 所以, 紧对称空间的实上同调环同构于平行微分形式环.

一个张量场 A 关于某个线性联络 ∇ 是平行的, 当且仅当它是无限小齐性的(infinitesimally homogeneous), 即在 M 的每点 p 处存在一个标架, 使得张量 A_p 关于这标架具有与 p 无关的固定分量 $A_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$. 在这种情况下, 使张量 $A_p(p\in M)$ 具有分量 $A_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$ 的标架的集合形成 G **结构**(G-**structure**), 即带结构群 G 的标架丛的主子丛 $P(A)$, 其中 G 是张量空间在群 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 作用下的 A_p 的稳定子(stabilizer). 场 A 关于 G 结构 $P(A)$ 中的任何联络都是平行的. 特别地, $P(A)$(若它存在)的任何截面给出了一个零曲率的联络, 使得 A 关于它是平行场.

更复杂的是使已给无限小齐性场为平行场的无挠联络的存在性问题. 若 A 有一伪 Riemann 度量, 则这种联络(Levi-Civita 联络(Levi-Civita connection))总存在, 且唯一. 这种情况是很例外的: 若对于任何无限小齐性的某类型张量场 A, 存在唯一的无挠联络, 使得 A 关于它是平行的, 则 G 结构 $P(A)$ 的结构群 G 是伪正交的, 因而 A 规范地配有一伪 Riemann 度量([7]). 对于广泛的一类无限小齐性张量场 A, 使它为平行场的无挠联络的存在性意味着 A 的可积性(integrability), 即存在一局部坐标系使 A 的分量为常数. 例如, 殆复结构、殆辛结构、以及任何这样的场 A, 它的丛 $P(A)$ 的结构群是不可约的且不属于具无挠线性联络空间的不可约和乐群的已知类型, 都是这种情况.

参考文献

[1] Kobayashi, S. & Nomizu, K., Fundations of differential geometry, 1-2, Interscience, 1963-1969.

[2] Lichnerowicz, A, Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976(译自法文).

[3] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

[4] Chern, S. S., On a generalization of Kähler geometry, in R. H. Fox, D. C. Spencer & A. W. Tucker (eds.): Algebraic Geometry and Topol. Symp. in Honour of S. Lefschetz, Princeton Univ. Press, 1957, 103-121(也见 Shiing-shen Chern selected Papers, Springer, 1978, 227-245).

[5] Berger, M., Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, *Bull. Soc. Math. France*, 83(1955), 279-330.

[6] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

[7] Kobayashi, S. & Nagano, T., On a fundamental theorem of Weyl-Cartan on G-structure, *J. Math. Soc. Japan*, 17(1965), 84-101.

Д. В. Алексеевский 撰 沈一兵 译

平行线[parallel lines; параллельные линии]，平行曲线(parallel curves)

空间中微分同胚的光滑曲线，它们在对应点有平行的切线．例如，平面上等距离的线(见**等距离集**(equi-distant))的光滑分支便是这样——它们由下列事实所特征：对应点间的距离等于对应切线间的距离．三维空间中平行曲线的一例：若两曲面作成**Петерсон 对应**(Peterson correspondence)且有公共共轭网，则该网的曲线有平行的切线．E^n 中具有直到 $m(<n)$ 阶的平行法空间的平行曲线可位于某个子空间 E^{n-m} 中．

对于平面凸(闭)平行曲线的线性族(即位置向量线性地依赖于一个参数 ε 的凸曲线)，下列 Brunn-Minkowski 定理(Brunn-Minkowski theorem)成立：曲线所围区域的面积的平方根是 ε 的凹函数．

平行性概念在 Lie 群中曲线上的推广可利用等对(equi-pollent)向量的概念来得到．

Д．Д．Соколов 撰

【补注】

对于平面凸(闭)平行曲线的线性族，下列 Steiner 公式(steiner formula)成立：曲线所围区域的面积是 ε 的二次多项式．由此，上述 Brunn-Minkowski 定理可作为特殊情况而得．

参考文献

[A1] Do Carmo, M. P., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976(中译本：M．多卡模，曲线和曲面的微分几何学，上海科学技术出版社，1988).

[A2] McMullen, P. & Schneider, R., Valuations on convex bodies, in P. M. Gruber & J. M. Wills (eds), Convexity and its applications, Birkhauser, 1983, 170 247.

沈一兵 译

并行程序设计[parallel programming; программирование параллельное]，并发程序设计(concurrent programming)

与研究开发下述方法和手段有关的程序设计分支：a)借助程序适当描述在计算机建模和计算机控制系统和进程中出现的自然的并行性；b)为了加速计算和有效使用计算机资源，在多处理器和多道程序设计的计算机中信息处理的并行化．

在顺序程序设计(sequential programming)中，基本概念是算法按时间顺序逐步实现；与其不同，在并行程序设计中，一个程序生成一族信息处理的并行执行进程，它们是完全独立的，或者是通过静态时空或动态时空或因果关系而相联系的．

计算并行性以各种具体形式发生，依赖于程序设计的阶段，并行片段的复杂性和它们之间关系的特性．

在描述问题的正文和程序中，人们能指出片段复杂性的级别，对不同的级别，并行化问题(parallelization problem)，即并行程序的编译问题是不同地解决的：标量数据的表达式；数组(向量、矩阵、树等等)表达式，它能用算法语言通过循环操作符、子问题和子程序描述；在多处理器系统中的独立问题和程序．

表达式可被并行化的一个前提是其中出现的操作和函数满足某种关系，导致相对于计算结果来说，一组表达式之间有一种等价关系(例如对算术操作有交换性、结合性和分配性关系)．并行化问题是对给定表达式 E 构造一个与其等价的表达式 E_1，E_1 能用小数目的并行步骤执行，每个并行步骤是一组在不同计算器(处理器)上同时执行的动作．例如，表达式

$$a+b+\frac{c\times d}{e\times f}+g$$

能被变换成等价表达式

$$((a+b)+g)+\left[\frac{c\times d}{e\times f}\right],$$

其执行能用 3 个并行步骤实现．执行的并行步骤数与顺序步骤数之比称为并行化的加速(acceleration of parallelization)或加速(speed-up)．任何包含 n 个变量的算术表达式能使用 n 个处理器以 $O(\log n)$ 个步骤并行地计算．表达式的并行化算法的相对简单性允许人们在计算机上使用专门的程序或硬件方法自动实现它们．

最大的加速能通过数组处理的并行化得到．在 Algol 型或 Fortran 型算法语言中，数组表达式能通过形式 FOR $I=A, B, C$ DO S 的循环操作编程，其中 I 是整型循环参数，A 是它的初值，B 是终值，C 是变步参数，S 是循环体，给出在一个迭代步骤中要执行的动作．为了并行化包括在另一个循环中的循环系统，人们考虑 n 维具有坐标轴 $I_1, \cdots, I_n$ 的整型迭代空间．执行带有参数 I_1 的迭代 $K_1, \cdots$，参数 I_n 的迭代 K_n，给出这个空间中的一个点 $(K_1, \cdots, K_n)$．在这个空间中，人们寻找满足如下条件的曲面族：在这些曲面的任何一个之上的所有迭代 $(K_1, \cdots, K_n)$ 能并行执行．为了用程序表示数组的并行处理，人们需要专门的语言手段．为了这个目的，已经对现有的程序设计语言(基本上是 Fortran 语言)进行了修改，在它们中间引进并行循环操作，例如形式

FOR ALL$(I, J, K)/[1:N; 1:L; 1:M]$,

的执行就是按确定的规则并行执行迭代循环体．为了保证快速并行访问数组，这些语言也能具有更复杂的描述数组的方法和在存储器中控制它们存储的方法．

在程序设计语言一级的进一步提高是使用数组成组操作，诸如向量和矩阵的分量乘加，标量和向量的积，矩阵求逆等等．使用这种语言，允许人们用并行成组操作的直接说明来代替顺序循环的自动并行化，后者虽实际上是可实现的，但相对地复杂．

并行表达式可以异步（asynchronous）或同步（synchronous）执行．在第一种情况，并行操作执行时间之间的关系是不固定的，而在第二种情况，这些时间必须在给定描述的刻板框架中．如果操作有固定的时间，参加进程的处理器的数目在执行的任何瞬间是知道的，那么使用同步计算方法是适宜的，在相反的情况异步方法更灵活．表达式异步执行的控制是基于流程原理：操作能在它们的操作数已准备好以后的任何瞬间执行．

在子问题和子程序一级的并行化的难度要大得多．在这种情况，并行进程能有复杂的内部结构；它们的执行时间是不固定的；进程相互作用，交换数据和利用公用资源（存储器中的公用数据和程序，外部设备等等）．在这一级，自动并行化需要用于分析问题的复杂算法，并且必须考虑系统中的动态情况．由于这点，并行程序设计语言的创建具有特别的重要性，允许程序员直接描述并行进程的复杂交互．

在大多数并行程序设计语言和系统中，采用计算的部分异步组织．在并行程序设计语言中，有抽取（生成）并行进程和同步化它们的方法，在硬件中这是通过中断机制表示的——强迫进程暂停，保存它们的当前状态，随后激活或恢复其他进程的执行．

最简单和最普遍的程序同步化机制是信号和事件．信号量（semaphore）是一个取整数值的特殊控制变量．它通常关系到有冲突的资源．对信号只有两个操作 P 和 V 可用．如果在执行进程中遇到对信号 S 的操作 $P(s)$，则当且仅当 s 值为正时进程能以 s 值减1而继续；否则执行暂停，进入等待相应资源的 $q(s)$ 进程队列．操作 V 使 s 值加1重新执行队列 $q(s)$ 进程中的第一个．信号机制广泛用于操作计算机系统的过程控制语言和许多通用计算机语言（例如 **Algol-68 语言**（Algol-68））．事件（event）机制包括控制变量，它的当前值概述一些程序或系统事件（进程的终结，暂停等等）的出现，以及事件可能性的特定操作符．

信号和事件是通用的同步方法；然而，它们是很原始的．它们的不正确使用可能导致崩溃状况，诸如进程的相互锁定（例如，为了继续两个进程，每一个要求两个资源，而每一个却被另一个"夺取"）．增加程序设计可靠性的努力导致更复杂的同步机制的出现："邮箱"——交换消息的专门结构，操作并行进程的规则是固定的；"监督器"——过程和数据的集合，过程只可以顺序地转换，包括由程序员给定的组织交互的规则，用于传递消息的分布式通道，等等．

纯异步并行程序设计用于在分布式计算系统中组织计算，其中完全排斥资源冲突．试图简化带有公共资源的进程之间交互组织引起对异步计算方法的注意，其中并行进程无限制的访问公共资源被允许．例如，已经开发这样的异步算法，并行进程在公共存储器中改变数据，无限制的访问存储器而不妨碍得到唯一的结果．

在并行程序设计理论中，人们已经发展了并行程序，进程和系统的形式模型，使用它们，人们已经研究了并行程序设计的各个方面：顺序算法和程序的自动并行化；对各类问题和各类并行计算系统的并行计算方法的深入研究；并行计算和并行进程中资源分配的优化规划；程序和并行程序设计语言的语义的形式描述．这些模型包括：并行程序模式，在不同的细节程度上反映程序的结构性质；图模型和异步网（见 **Petri 网**（Petri net）），它们是离散进程和系统的数学模型；进程代数和演算；等等．

参考文献

[1] Andrews, G. R. and Schneider, F. B., Concepts and notions for concurrent programming, *ACM Comp. Surveys*, 15 (1983), 1, 3-43.

[2] Rodrigue, G (ed.), Parallel computations, Acad. Press, 1982.

[3] Miklosko, J and Kotov, V. (eds.), Algorithms, software and hardware of parallel computers, Springer, 1984.

[4] Hennessy, M., Algebraic theory of processes, M. I. T., 1988.

B. E. Котов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Varshavsky, V. I. [V. I. Varshavskii], Self-timed control of concurrent processes, Kluwer, 1990 (译自俄文).

[A2] Bustard, D., Elder, J. and Welsch, J., Concurrent program structures, Prentice Hall, 1988.

[A3] Bakker, J. W., de, Roever, W. P. de and Rozenberg, G. (eds), Current trends in concurrency. Overviews and tutorials, Springer, 1986.

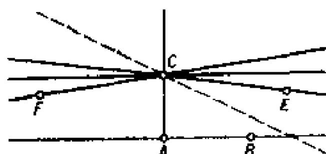
[A4] Chandy, K. M. and Misra, J., Parallel program design, Addison-Wesley, 1988.

程 虎 译 刘椿年 校

平行直线 [**parallel straight lines**; **параллельные прямые**], Euclid 几何学中的

在一个平面上互不相交的直线．在**绝对几何学**（absolute geometry）中，通过不在给定直线上的一个点，至少有一条直线不与给定直线相交．在 **Euclid 几何学**（Euclidean geometry）中，只有一条这样的直

线．这一事实等价于 Euclid 的（关于平行线的）第五公设（fifth postulate）．在 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskii geometry）中，在平面上通过给定直线 AB 外的一点 C（见图），有无穷多条直线不与直线 AB 相交．其中只有两条称为平行于 AB 的．直线 CE 称为平行于 AB，方向从 A 到 B，如果：1）点 B 和 E 处于 AC 的同侧；2）CE 不与 AB 相交；3）在角 ACE 中的每一条射线都与直线 AB 相交．在从 B 到 A 的方向上平行于 AB 的直线 CF，类似地定义．



БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Parallel lines, *Canad. Math. Bulletin*, **21** (1978), 4, 385 – 397.

[A2] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometries, Freeman, 1974.

[A3] Hilbert, D., Gundlagen der Geometrie, Teubner, reprint, 1968（中译本：D. 希尔伯特，几何基础，科学出版社，1995）．

杜小杨 译

平行曲面 [parallel surfaces; параллельные поверхности]

在对应点有平行切平面的微分同胚的等定向曲面 F_1 和 F_2，使得 F_1 和 F_2 的对应点之间的距离 h 是常数，且等于对应切平面间的距离．两平行曲面 F_1 和 F_2 的位置向量 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 由关系式 $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = h\mathbf{n}$ 相联系，其中 $\mathbf{n}$ 是 F_1 在 $\mathbf{r}_1$ 处和 F_2 在 $\mathbf{r}_2$ 处的同一单位法向量．

因此，能够定义平行于一给定曲面 $F = F_0$ 的单参数曲面族 F_h，其中对于使

$$w(h) = 1 - 2Hh + Kh^2 > 0$$

的充分小的 h 值，F_h 是正则的．对于方程 $w(h) = 0$ 的根 h_1 和 h_2，对应着两曲面 F_{h_1} 和 F_{h_2}，它们是 F 的渐屈面，因而平行曲面有一公共渐屈面（见**渐屈面**（evolute (surface)）．平行于 F 的曲面 F_h 的**平均曲率**（mean curvature）H_h 和 **Gauss 曲率**（Gaussian curvature）K_h 与 F 的对应量 H 和 K 有关，其关系是

$$H_h = \frac{H - Kh}{w(h)}, \quad K_h = \frac{K}{w(h)};$$

平行曲面的曲率线相互对应，因而它们之间存在 Combescour 对应，它是 **Петерсон 对应**（Peterson correspondence）的特殊情况．

И. Ж. Сабитов 撰

【补注】

对于凸闭的平行曲面的线性族（线性地依赖于参数 $\varepsilon > 0$），成立下列 Steiner 公式（Steiner formula）：曲面所围的点集的体积是 ε 的三次多项式．对任意维数、类似的结果成立．Steiner 公式是混合体积的 Minkowski 理论及更一般的赋值论中的一般多项式公式的特殊情况．

参考文献见**平行线**（parallel lines）．

沈一兵 译

绝对平行标架场 [parallelism, absolute; параллелизм абсолютный]

流形（manifold）上的（整体）标架场 $e = (e_1, \cdots, e_n)$（见**标架**（frame））．绝对平行标架场决定流形 M 的所有切空间之间的一个同构，在这个同构下，空间 T_pM 和 T_qM 关于标架 e_p 和 e_q 具有相同坐标的切向量是等同的．这给予流形一个零曲率的**线性联络**（linear connection）∇^e．关于这个联络的平行场是在标架场 e 下具有常数坐标的张量场（特别地，向量场 $e_1, \cdots, e_n$ 是平行的），张量场 T 在向量场 X 方向上的**协变微分**（covariant differentiation）运算归结为 T 关于 e 的坐标在 X 方向上的微分．反之，单连通流形 M 上的零曲率线性联络 ∇，在给定某个切空间 T_pM 中的一个标架 e_p 时，决定一个绝对平行标架场 e．对应的绝对平行标架场 e 是由标架 e_p 按联络 ∇ 的**平行移动**（parallel displacement）扩充得到的（当联络有零曲率且流形单连通时，平行移动不依赖于流形上连结两给定点的路径的选择）．

从 **G 结构**（G-structure）理论的观点来看，绝对平行标架场是一个 $\{1\}$ 结构，这里 $\{1\}$ 是由一个（恒等）元素组成的群．这样的结构的可积性是指在流形任一点的邻域中存在一个坐标系 x^i，使得 $e_i = \partial/\partial x^i$，$i = 1, \cdots, n$．为此，其充分必要条件是向量场 $e_1, \cdots, e_n$ 两两交换，换言之，由公式 $[e_j, e_k] = C^i_{jk}e_i$ 定义的联络 ∇^e 的**挠率张量**（torsion tensor）$C = C^i_{jk}$ 恒为零．一个绝对平行标架场称为完全的（complete），如果对于标架场具有常数坐标的所有向量场都是完全的，或等价地，联络 ∇^e 是测地完全的．在可积的情形，向量场 $e_1, \cdots, e_n$ 的完全性是一个充分条件．单连通流形 M 上的一个完全可积绝对平行标架场决定 M 上的一个仿射空间结构．更一般地，有一个特殊点的单联通流形 M 上的具有协变常挠率张量 C（C^i_{jk} = 常数）的完全绝对平行标架场决定 M 上的 Lie 群结构，结构常数为 C^i_{jk}，向量场 e_i 构成左不变向量场空间的一组基．

绝对平行标架场的自同构群是一个在 M 上自由作用的 Lie 群．两个绝对平行标架场局部同构的充分

必要条件已经得到(见[3]),它们可由挠率张量及其协变导数表示.

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

[2] Nomizu, K., Lie groups and differential geometry, Math. Soc. Japan, 1956.

[3] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.

Д. В. Алексеевский 撰 陆珊年 译

平行公理 [parallelism axiom; параллельности аксиома]

在各种几何学中定义平行关系的公理. 见**平行直线**(parallel straight lines); **第五公设**(fifth postulate).

【补注】

参考文献

[A1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Teubner, reprint, 1968(中译本: D. 希尔伯特, 几何基础, 科学出版社, 1995).

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.

杜小杨 译

可平行流形 [parallelizable manifold; параллелизуемое многообразие]

允许一个**标架**(frame) $e=(e_1,\cdots,e_n)$ 的(整体)场(即在每个点都线性无关的 n 个向量场 $e_1,\cdots,e_n$)的维数 n 的**流形**(manifold) M. 场 e 决定了一个从切丛 $\tau: TM\to M$ 到平凡丛 $\varepsilon:\mathbf{R}^n\times M\to M$ 上的一个同构, 它将切向量 $v\in T_pM$ 送到与标架 $e|_p$ 和它的原点有关的 v 的坐标上. 所以, 可平行流形也可定义为有平凡切丛的流形. 可平行流形的例子有: Euclid 空间的开子流形, 所有三维流形, 任意一个 Lie 群的空间和任何一个流形的各个标架的流形. 球面 S^n 仅当 $n=1,3,7$ 时是可平行流形. 四维流形的可平行性的一个必要和充分条件是第二 Stiefel-Whitney **示性类**(characteristic class)为零. 在一般情形下, Stiefel-Whitney, 陈省身和 Понтрягин 的第二示性类为零是流形可平行的必要但不是充分的条件.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gromov, M., Partial differential relations, Springer, 1986.

[A2] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

薛春华 译

平行四边形 [parallelogram; параллелограмм]

一个**四角形**(quadrangle), 其对边两两平行(见图 a－d). 平行四边形也可刻画为满足下列条件之一的凸四角形: 1) 第一对及第二对对边分别由相等的线段组成; 2) 一对对边由相等且平行的线段组成; 3) 在相对顶点上, 第一对及第二对对角分别相等; 4) 两对角线的交点把两对角线二等分. 平行四边形有下述特殊类型: **矩形**(b), 其中一个角(因而四个角)是直角; **菱形**(c), 其中四个边都相等; **正方形**(d), 为邻边相等的矩形.

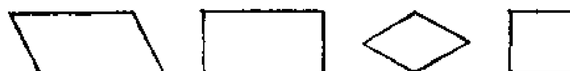


图 a　图 b　图 c　图 d

БСЭ-3

【补注】 平面上的一个**点格**(lattice of points)以简单的方式生成了用全等的平行四边形对平面的一种**镶嵌**或**铺砖**(tiling). 更深刻的是, 两种特殊的平行四边形——Penrose 菱形(Penrose rhombs)生成了平面的非周期镶嵌. 这些 **Penrose 镶嵌**(Penrose tilings)是拟晶体的平面模型.

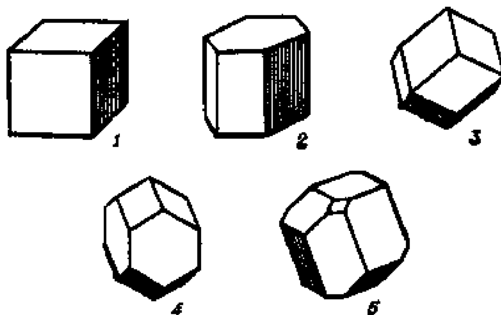
参考文献

[A1] Grünbaum, B. and Shephard, G. C., Tilings and patterns, Freeman, 1986.

杜小杨 译

平行多面体 [parallelohedron; параллелоэдр]

一个**多面体**(polyhedron), 通过它的**平行移动**(parallel displacement)可按下述方式充满整个空间: 任何两个多面体都不相交(界面除外), 且各多面体之间没有空隙, 即它们应构成空间的一个**划分**(partition). 立方体或正六角棱柱都是平行多面体的例子. 从拓扑学的观点来看, 平行多面体的棱的集合属于五种不同的格型(见图). 它们的面数分别是 6, 8, 12, 12, 14. 为使一个多面体是一个平行多面体, 其必要且充分条件为: 它是这五种拓扑类型之一的凸多面体, 并且它的所有的面都具有对称中心. 在一个划分里平行多面体的中心形成一个**点格**(lattice of points)(见 Вороной 格型(Voronoï lattice types)).



А. Б. Иванов 撰

【补注】 平行多面体也称为 Вороной 胞腔 (Voronoï cell), Dirichlet - Вороной 胞腔 (Dirichlet - Voronoï cell), 空间滤子 (space filter) 或蜂巢 (honeycombs). 在数的几何 (geometry of numbers) 与格填装 (packing) 中平行多面体起着重要的作用.

参考文献

[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North - Holland, 1987.

[A2] Erdös, P., Gruber, P. M. and Hammer, J. Lattice points, Longman, 1989.

[A3] Conway, J. H. and Sloane, N. J. A., Sphere packings, lattices and groups, Springer, 1988.

林向岩 译 陆珊年 校

平行六面体 [parallelopipedon; параллелепипед]

一个六面体 (hexahedron), 其中相对的面两两平行. 一个平行六面体有 8 个顶点, 12 个棱; 它的面是两两全等的平行四边形. 一个平行六面体称为长方体 (rectangular), 如果 6 个面都是长方形; 一个平行六面体称为立方体 (cube), 如果 6 个面都是正方形. 平行六面体的体积等于其底的面积与其高之积.



БСЭ - 3

【补注】 平行六面体是平行多面体 (parallelohedron) 和超平行体 (parallelotope) 的特殊情况. 两种特殊的平行六面体, 即黄金菱体 (golden rhombohedra) 或 Ammann 菱体 (Ammann rhombohedra) 在拟晶体理论中起着重要的作用, 因为它们是 Penrose 镶嵌 (Penrose tiles) 的三维类似: 它们生成 $\mathbf{R}^3$ 的非周期镶嵌.

参考文献

[A1] Grünbaum, B., Convex polytopes, Wiley, 1967.

[A2] Kramer, P. and Neri, R., On periodic and non - periodic space fillings of E^m obtained by projection, *Acta Cryst.*, **A40** (1984), 580 - 587.

杜小杨 译

超平行体 [parallelotope; параллелотоп]

点的集合, 其径向量有形式

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{p} x^i \mathbf{a}_i,$$

其中 $0 \leqslant x^i \leqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant p)$. 这里 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p$ 是一个 n 维仿射空间 (affine space) A 里的固定向量, 它们称为超平行体的生成元 (generators of the parallelotope) 并且与超平行体的一些棱重合, 超平行体其他所有的棱与它们平行. 如果超平行体的生成元是线性无关的 (相关的), 那么超平行体称为 p 维的 (p-dimensional) 或非退化的 (non - degenerate) (退化的 (degenerate)). 退化超平行体是某个 p 维的超平行体到一个维数为 $k \leqslant p-1$ 的平面上的平行投影. 一个非退化的超平行体决定一个支撑 p 维平面. 这样的超平行体对于 $p=2$ 是一个平行四边形 (parallelogram), 对于 $p=3$ 是一个平行六面体 (parallelopipedon).

两个非退化超平行体称为平行的 (parallel), 如果它们的支撑平面是平行的. 对于平行的超平行体, 有可能比较它们的 p 维 "体积" (即使 A 中不一定有一个度量). 对于具有生成元 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p$ 的超平行体的 p 维 "体积" 与具有生成元 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_p$ 的超平行体的 p 维 "体积" 的比率的数值, 可用标量 $\det(x_j^i)$ 表示, 这里 (x_j^i) 是 $(p \times p)$ 矩阵, 它将 $(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_p)$ 变换到 $(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p)$, 即

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{p} x_j^i \mathbf{b}_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

如果在 A 中定义了内积 (inner product), 则具有生成元 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_p$ 的超平行体的 p 维体积的平方等于元为 $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ 的 $(p \times p)$ 维 Gram 矩阵 (Gram matrix) 的行列式 (determinant). (亦见 Gram 行列式 (Gram determinant)).

超平行体的概念与多向量 (poly - vector) 的概念紧密相关.

参考文献

[1] Широков, П. А., Тензорное исчисление, Казань, 1961.

[2] Беклемишев, Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, 3 изд. М., 1976.

[3] Pisot, C. and Zamansky, M., Mathématiques générales: algèbre - analyse, Dunod, 1966.

Л. П. Купцов 撰

【补注】 超平行体是高维胞形 (zonotope) (见全对称多面体 (zonohedron)) 的特殊类型, 它们在数的几何 (geometry of numbers) 与格的覆盖与填装 (covering and packing) 理论中起着基本的作用.

参考文献

[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North Holland, 1987.

[A2] Grünbaum, B., Convex polytopes, Wiley, 1967.

林向岩 译 陆珊年 校

依赖于参数的积分 [parameter - dependent integral; зависящий от параметров интеграл]

如下形式的积分:

$$J(y) = \int f(x, y) dx,$$

其中点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 遍及空间 $\mathbf{R}^n$(若点仅遍及某区域 $D\subset\mathbf{R}^n$，则可假设，当 $x\in\mathbf{R}^n\setminus D$ 时，$f(x,y)=0$)，而点 $y=(y_1,\cdots,y_m)$ 代表参数 $y_1,\cdots,y_m$ 的一个点集，它们在空间 $\mathbf{R}^m$ 的某区域 G 内变动．

研究这类积分的主要目的，是要找出使 $J(y)$ 关于参数 $y_1,\cdots,y_m$ 连续与可微的条件．如果把 $J(y)$ 理解为 **Lebesgue 积分** (Lebesgue integral)，则可得到使它连续与可微的较弱条件．下面的两个命题成立．

1) 若对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^n$，$f(x,y)$ 在区域 $G\subset\mathbf{R}^m$ 中关于 y 连续，并且还存在 $\mathbf{R}^n$ 上的可积函数 g，使得对每个 $y\in G$ 和几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^n$，有不等式 $|f(x,y)|\leqslant g(x)$，那么 $J(y)$ 在 G 中连续．

2) 设 $f(x,t)$ 是对 $x\in\mathbf{R}^n$，$t\in(a,b)$ 有定义的函数．假定导数 $\partial f(x,t)/\partial t$ 对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^n$ 和每个 $t\in(a,b)$ 都存在，而且对几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^n$，在 (a,b) 上是 t 的连续函数．再设存在 $\mathbf{R}^n$ 上的可积函数 g，使得 $|\partial f(x,t)/\partial t|\leqslant g(x)$ 对一切 $t\in(a,b)$ 和几乎所有的 $x\in\mathbf{R}^n$ 成立．最后，还假设对某个 $t_0\in(a,b)$，积分

$$\int f(x,t_0)\,dx$$

存在．这时函数

$$J(t)=\int f(x,t)\,dx$$

在 (a,b) 上关于 t 是可微的，并且它的导数 $J'(t)$ 可以通过在积分号下求导而得到:

$$J'(t)=\int\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

上述两命题包含了将含参数积分理解为 Riemann 积分或更特殊情形的有关连续性与可微性的一系列简单命题(见[2]－[4])．

依赖于参数的反常积分． 对于最简单的第一类反常积分 (improper integral)

$$J(t)=\int_a^{\infty}f(x,t)\,dx, \qquad (*)$$

引入关于参数 t 在闭区间 $c\leqslant t\leqslant d$ 上一致收敛的概念．如果对任意正数 $\varepsilon>0$，存在一个正数 $A(\varepsilon)>0$，使得当 $R\geqslant A(\varepsilon)$ 时，

$$\left|\int_R^{\infty}f(x,t)\,dx\right|<\varepsilon,$$

就称积分 $(*)$ 在 $[c,d]$ 上关于 t 是一致收敛的．

下面的命题成立:

a) 如果 $f(x,t)$ 在某半带状区域 $[a\leqslant x<\infty,\ c\leqslant t\leqslant d]$ 上连续，且积分 $(*)$ 在 $[c,d]$ 上关于 t 一致收敛，那么 $J(t)$ 在 $[c,d]$ 上连续．

b) 如果 $f(x,t)$ 及其导数 $\partial f(x,t)/\partial t$ 在某半带状区域 $[a\leqslant x<\infty,\ c\leqslant t\leqslant d]$ 上连续，且积分 $(*)$ 对某个 $t\in[c,d]$ 收敛，此外再设积分

$$\int_a^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

在 $[c,d]$ 上关于 t 一致收敛，那么积分 $J(t)$ 在 $[c,d]$ 上是可微的，其导数可用下式计算:

$$J'(t)=\int_a^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

类似的命题对于第二类反常积分也成立．

参考文献

[1] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[2] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, ч. 2, М., 1973 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 2, Mir, 1982).

[3] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, т. 2, М., 1970.

[4] Никольский, С. М., Курс математического анализа, т. 2, М., 1973 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第二卷, 高等教育出版社, 1992).

[5] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972 (中译本: A. H. 吉洪诺夫, A. A. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1957).

B. A. Ильин 撰

【补注】 上述命题均为 Lebesgue 控制收敛原理的简单推论(见 **Lebesgue 定理** (Lebesgue theorem) 2))．

王斯雷 译

参数引入法 [**parameter-introduction method**; **введения параметра метод**]

将微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \qquad (1)$$

之右方写成以下形式来进行研究的方法:

$$f(t,x)=f_0(t,x)+\varepsilon g(t,x),\ \varepsilon=1,\ g=f-f_0,$$

其中 f_0 是向量函数 f (某种意义下的)主要部分，g 则是二阶项的全体．f 分解为 f_0 和 g 通常是由方程组(1)所描述的问题之物理性质或解析性质决定的．除此方程组外，同时还考虑带有参数的方程组

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt}=f_0(t,x_\varepsilon)+\varepsilon g(t,x_\varepsilon); \qquad (2)$$

若 $\varepsilon=0$，它就成为退化的方程组

$$\frac{dx_0}{dt}=f_0(t, x_0). \tag{3}$$

若 $f(t, x)$ 和 $g(t, x)$ 均在点 (τ, ξ) 的一邻域中全纯，则方程组 (2) 对模充分小的 ε 有解 $x_\varepsilon(t; \tau, \xi)$，$x_\varepsilon(\tau; \tau, \xi)=\xi$. 这个解在初始值 (τ, ξ) 的一个邻域中可以展开为 ε 的幂级数

$$x_\varepsilon(t; \tau, \xi)=x_0(t; \tau, \xi)+\varepsilon\varphi_1(t; \tau, \xi)+\cdots$$
$$+\varepsilon^n\varphi_n(t; \tau, \xi)+\cdots, \varphi_k(\tau; \tau, \xi)=0 \tag{4}$$

(有些情况下也可以对 φ_k 指定非零的初始值). 若级数 (4) 当 $\varepsilon=1$ 时收敛，则令 $\varepsilon=1$ 时此级数给出方程组 (1) 以 (τ, ξ) 为初始值的解. 为了有效地作出系数 φ_n，需要知道方程组 (3) 的通解以及任意方程组

$$\frac{dz}{dt}=f_0(t, z)+h(t)$$

的一个特解 $z(t; \tau, 0)$，这里 $h(t)$ 在 $t=\tau$ 的一个邻域中全纯.

特别是，若 $f_0(t, x)=Ax$，A 是常数矩阵，则所有 φ_n 可以依次用求积法定出.

参数引入法广泛地应用于非线性振动理论 ([3]) 中以作出方程组 (1) 的周期解 (亦见**小参数方法** (small parameter, method of the)). P. Painlevé 用这个方法对于其解没有动临界奇点的二阶微分方程进行分类 (见 **Painlevé 方程** (Painlevé equation)). 有以下的定理成立：具有固定临界点的方程组只能是 (1) 这样的方程组，它在引入适当的参数 ε 后，以没有动临界奇点的方程组为其退化方程组 (3). 参数引入法被广泛地用来构造没有动临界奇点的本质上非线性的微分方程组的新类，并用于研究这些新类中的方程组 (见**微分方程的奇点** (singular point)).

参考文献

[1] Poincaré, H., New methods of celestial mechanics, 1–3, Nat. Aeronautics and Space Adm. USA, 1967 (译自法文).

[2] Ляпунов, А. М., Собр. соч. М.-Л., 1956, т. II, 7–263 (英译本: Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966).

[3] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974 (英译本: Bogolyubov, N. N. and Mitropol'skiĭ, Yu. A., Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1961).

[4] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: B. B. 戈鲁别夫, 微分方程解析理论讲义, 高等教育出版社, 1956).

[5] Еругин, Н. П., «Дифференц. уравнения», 3(1967), 11, 1821–1863.

Ю. С. Богданов 撰

【补注】 西方文献中没有与参数引入法相当的名词. 自然地出现两种构造如 (2) 的方程组的方式：

方程组 (1) 是非线性的，而希望作一变换 $X(t)=\varepsilon x_\varepsilon(t)$ 后研究其"小解". 这里 $f_0(t, x_\varepsilon)$ 就是线性化. 或者可以认为，(2) 是 (3) 的一个扰动，但包含某些在 (3) 中被忽略了的影响 (例如阻尼). ε 在这两种情况下都很小. 用数学术语，上面叙述的只不过是一种迭代. 有时会要考察直至 $\varepsilon=1$ 时的收敛性，但这应当看作是例外情况.

齐民友 译

参数变易法 [parameter, method of variation of the; параметра вариации метод]

近似求解 Banach 空间中非线性 (和线性) 泛函与算子方程 $y=P(x)$, $x\in X$, $y\in Y$，并进行定性研究的一种方法. 参数变易法包括如下内容：考虑方程 $P(x)=0$，其中算子 $P(x)$ 直至所要求的阶连续 Fréchet 可微 (见 **Fréchet 导数** (Fréchet derivative))，或者是与此方程的解有关的某个非线性泛函 $\Phi(x)$，它由引入一个数值的 (或者更一般地，泛函的) 辅助参数 λ 而被推广到 $F(x, \lambda)=0$，其中 λ 取值于一个有限或无限区间 $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$，$F(x, \lambda)$, $x\in X$, $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$，是 Y 中取值的一个算子，使得当 $\lambda=\lambda^*$ 时得到 $P(x)=0$: $F(x, \lambda^*)=P(x)$，而方程 $F(x, \lambda_0)=0$ 或者容易求解，或者它的一个解 x_0 已知. 这里假设 $F(x, \lambda)$ 关于 x 和 λ 是连续 Fréchet 可微的，即偏导数 $F_x(x, \lambda)$ 和 $F_\lambda(x, \lambda)$ 存在且连续，而且由 Y 到 x 的算子 $\Gamma(x, \lambda)=[F_x(x, \lambda)]^{-1}$ 存在而且是连续的. 为构造方程 $F(x, \lambda)=0$ 在整个区间 $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$ 上的解 $x(\lambda)$，在取值于 X 的 $x(\lambda)$ 是连续可微函数的假定下，建立相应的微分问题 (**Cauchy 问题** (Cauchy problem)). 它由下列方程定义

$$F_x(x, \lambda)\frac{dx}{d\lambda}+F_\lambda(x, \lambda)=0,$$
$$x(\lambda_0)=x_0, \tag{1}$$

或

$$\frac{dx}{d\lambda}=-\Gamma(x, \lambda)F_\lambda(x, \lambda),$$
$$x(\lambda_0)=x_0. \tag{2}$$

将区间 $[\lambda_0, \lambda^*]$ 由点 $\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=\lambda^*$ 划分成长度为 $h_k=\lambda_k-\lambda_{k-1}$ 的更小的子区间，$k=1, \cdots, n$，并对 Cauchy 问题 (2) 或 (1) 应用步长为 h_k 的常微分方程的数值积分法 (或几个这种方法). 这样构造 $F(x, \lambda)=0$ 的解 $x(\lambda)$ 的结果，就得到了相应类型的参数变易法. 求得的值 $x(\lambda^*)$ 即为 $P(x)=0$ 的一个解.

具有形式(1)的 $dx/d\lambda$ 的线性问题每一步的求解.(2)中线性算子 $F_x(x,\lambda)$ 的求逆或者逆算子 $\Gamma(x,\lambda)$ 的逐次逼近可由各种方法或再次使用参数变易法来实施.

步长 h_k 可有多种选择方法,例如,可由一般作为多个变量函数的偏差的范数 $\|P(x_{k+1})\|$ 最小化条件确定. 在此数值积分方法中 h_k 和若干自由参数的联合选取亦为有效的,例如精度为 s 阶的 **Runge-Kutta** 法(Runge-Kutta method),使用 Чебышев 多项式和有关多项式的根,等.

Cauchy 问题(2)不仅是确定上述方程近似解的一种方法,而且也是证明解存在的一种方法. 已经研究了许多种引入参数 λ 的不同方法,也可以用问题固有的一个自然参数作为数值参数 λ.

根据引入 λ 的方式,参数变易法可以是一种直接法或迭代法. 直接法和迭代法的联合使用称为组合法. 例如,步长 $h_k=1$ 的改进 Euler-Cauchy 型迭代法(对于 $F(x,\lambda)=P(x)-(1-\lambda)P(x_0)$, $\lambda_0=0$ 且 $\lambda^*=1$)是三阶精度的,而且有下面形式

$$x_{i+1}=x_i-\frac{1}{2}\left[\Gamma(x_i)+\Gamma(x_i-\Gamma(x_i)\cdot P(x_i))\right]P(x_i),$$

$$i=0,1,\cdots;\ \Gamma(x)=[P'(x)]^{-1}.$$

数值积分的每个方法都引出高精度的参数变易迭代法,且不需要用到比一阶更高的 $P(x)$ 的导数.

应用参数变易直接法与由参数变易迭代法对每一步结果修正相结合的数值积分法(一种组合法),是求解非线性方程的最有效的方法之一.

对于很广泛的一类问题,参数变易法得到了十分满意的应用. 最初该方法是针对代数和超越方程组,积分方程,常微分方程和偏微分方程提出的,后来用来求解更一般的非线性和算子方程. 已经研究了若干条件,在这些条件下保证了方程 $P(x)=0$ 的可解性,而且可能使用在 $[\lambda_0,\lambda^*]$ 上积分 Cauchy 问题(2),并建立了局部化区域的方法构造方程的解. 也研究了收敛性条件和误差估计,同时研究了应用参数变易法的诸多问题,其中有线性算子的反演与伪反演,由初始值构造依范数(于已知空间)具有最小偏差的线性泛函方程的伪解(及解),算子级数求和和某类投影的构造,迭代过程首次逼近的确定,算子微分方程和线性代数问题的求解,或者证明与变分问题相关的非线性方程组的可解性并构造它们的解,泛函的极小化以及其他许多问题. 另外的一些研究涉及到参数变易法有效修正的很广泛的类型,其中包括逆算子 $\Gamma(x,\lambda)$ 或者 $\Gamma(x)$ 的逐次逼近,还有分支问题和有关本征值的非线性问题的广泛类型.(但是,分支情形可能受阻于引入参数 λ 和附加参数 τ 的其他途径.)参数变易法亦被看成是"梯度"型的方法,同时也可不需要 $\Gamma(x)$ 存在的假定.

亦见**连续方法**(continuation method);**连续方法(对非线性算子的)**(continuation method (for nonlinear operators)).

参考文献

[1] Давиденко, Д. Ф., 《Докл. АН СССР》, **88** (1953), 4, 601 - 602.

[2] Давиденко, Д. Ф., 《Укр. матем. ж.》, **7** (1955), 18 - 28.

[3] Гаврин, М. К., 《Изв. ВУЗов. Математика》, **5** (1958), 18 - 31.

[4] Поляк, Б. Т., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **4** (1964), 6, 995 - 1005.

[5] Давиденко, Д. Ф., 《Докл. АН СССР》, **162** (1965), 3, 499 - 502.

[6] Михлин, С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966.

[7] Kleinmichel, H., Stetige Analoga und Iterations-verfahren für Gleichungen in Banachräume, *Math. Nachr.*, **37** (1968), 5 - 6, 313 - 343.

[8] Красносельский, М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.

[9] Лика, Д. К., Шафиев, Р. А., 《Изв. АН Молд. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук》, **2** (1970), 13 - 18.

[10] Жидков, Е. П. и др., 《Физика элементарных частиц и атомного ядра》, **4** (1973), 1, 127 - 166.

[11] Давиденко, Д. Ф., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **15** (1975), 1, 30 - 47.

[12] Ortega, J. and Reinboldt, W., Iteration methods for the solution of non-linear systems of equations in many unknowns, Acad. Press, 1970 (中译本: J. 奥特加, W. 莱因博尔特, 多元非线性方程组迭代解法, 科学出版社, 1983).

[13] Келлер, Г., в кн., Методы вычислительной и прикладной математики, в. 2, Новосиб., 1977, 6 - 36.

[14] Давиденко, Д. Ф., в кн., Математическое программирование и смежные вопросы. Вычислительные методы, М., 1976, 187 - 212.

[15] Колядa, Ю. В., Сигорский, В. П., 《Кибернетика》, 1980, 3, 24 - 28.

Д. Ф. Давиденко 撰

【补注】 上述参数变易法的总的想法是把一个(复杂的)模型问题 F 连续地变换(同伦)到一个容易的模型 H,然后取一 H 的解循着变换过程返回. 所以这种连续方法(continuation method)和道路追踪法(path following method)及其类似的方法也称为同伦方法(homotopy method). 其基本思想可以追溯到 H.

Poincaré．分歧点是可能遇到的．因此数值分析的这一领域与分歧计算的数值方法有着许多联系．关于该领域的文献、现有的软件和算法的新近评述，见[A1]．

参考文献

[A1] Ulrich, K., State of the art in numerical methods for continuation and bifurcation problems with applications in continuum mechanics. A survey and comparative study, Preprint Lab. Nac. Comp. Cien., Rio de Janeiro, Brazil, 1990.

[A2] Allgower, E. L. and Georg, K., Continuation methods for numerically solving systems of equations, Springer, 1987.

张宝琳　袁国兴 译

参数方程 [**parametric equation**; **параметрическое уравнение**] 空间中点集的

集合的点或它们的坐标的一种具体表述，它由某些称为参数（parameters）的变量的函数之值所给出．

n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中直线的参数表示有如下形式：

$$x = x^{(0)} + at,\ x^{(0)},\ a \in \mathbf{R}^n,\ -\infty < t < +\infty, \quad (1)$$

其中 $x^{(0)}$ 和 a 是固定向量：$x^{(0)}$ 是初始向量，$a \neq 0$ 是平行于直线的方向向量．若 $\mathbf{R}^n$ 中给定一个基并且向量 x 和 a 的坐标分别用 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $a_1, \cdots, a_n$ 表示，则在坐标形式下（1）变成

$$x_k = x_k^{(0)} + a_k t,\ -\infty < t < +\infty,\ k = 1, \cdots, n.$$

$\mathbf{R}^n$ 中 m 维仿射子空间的参数表示有如下形式：

$$x = x^{(0)} + a^{(1)}t_1 + \cdots + a^{(m)}t_m, \quad (2)$$

$$x^{(0)},\ a^{(j)} \in \mathbf{R}^n,\ -\infty < t_j < +\infty,\ j = 1, \cdots, m,$$

其中 $x^{(0)}$ 是对应于参数 t_j 为 0 值的初始向量，$a^{(1)}, \cdots, a^{(m)}$ 构成平行于方程所示仿射子空间的 m 个向量的线性无关组．在坐标形式下（2）变成

$$x_k = x_k^{(0)} + a_k^{(1)}t_1 + \cdots + a_k^{(m)}t_m,$$

$$-\infty < t_j < +\infty,\ j = 1, \cdots, m;\ k = 1, \cdots, n.$$

$\mathbf{R}^n$ 中 m 维曲面的参数表示有如下形式：

$$x = x(t) = x(t_1, \cdots, t_m),\ t = (t_1, \cdots, t_m) \in E \subset \mathbf{R}^m, \quad (3)$$

其中 E 例如是 $\mathbf{R}^m$ 中某个区域的闭包，$x: E \to \mathbf{R}^n$ 是某类映射：连续的，可微的，连续可微的，两次可微的，等等；相应地，这些 m 维曲面也称为连续的，可微的，等等．（Jacobi 矩阵的秩假定是 m．）在 $m = 1$ 的场合，集合 E 是一个区间，$E = [a, b]$，且（3）变为 $\mathbf{R}^n$ 中一条曲线的参数表示：$x = x(t), a \leqslant t \leqslant b$．例如，$x_1 = \cos t$，$x_2 = \sin t$，$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$，是平面上中心在坐标原点的半径为 1 的圆的参数表示．

对于给出参数表示的集合 E，有时也用另一类 $\mathbf{R}^m$ 的子集来代替 m 维区域的闭包．

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

$\mathbf{R}^n$（或 $\mathbf{C}^n$）中 m 维曲面 S 的参数方程或参数表示未必是 m 维的．以曲面 S（开的一片）为像的任何满映射 $\mathbf{R}^n \supset E \to \mathbf{R}^n$ 都是 S 的（局部）参数表示．

坐标卡（chart）是 $\dim(S)$ 维曲面 S 的局部参数表示（方程）．在 $\mathbf{R}^3$ 中给定曲面 S 的一个坐标卡 $r(u, v)$，曲线 $r(u_0, v)$（u_0 固定，$v \in \mathbf{R}$）和 $r(u, v_0)$（v_0 固定，$u \in \mathbf{R}$）称为参数曲线（parametric curves）．

参考文献

[A1] Struik, D. J., Lectures on classical differential geometry, Dover, reprint, 1988.

沈一兵 译

参数积分表示法 [**parametric integral-representation method**; **параметрических интегральных представлений метод**]

单复变几何函数论中用以求解一些函数类的极值问题的一种方法，系通过将这些函数类用依赖于参数的积分表示来实现．

在这些函数类之中，有 **Carathéodory 类**（Carathéodory class），圆盘内星形单叶函数类与典型实函数类（见**星形函数**（star-like function）与**典型实函数**（typically-real function））．这些函数类的函数有各种参数表示，包括 Stieltjes 积分

$$\int_a^b g(z, t)\,d\mu(t),$$

a, b 是给定的实数，$g(z, t)$ 是给定的函数（该函数类的核），$\mu(t) \in M_{a,b}$，此处 $M_{a,b}$ 是 $[a, b]$ 上非减函数类，$\mu(b) - \mu(a) = 1$（μ 是该函数类的参数）．

对于具有 Stieltjes 积分参数表示的函数类，已得到的变分公式表明，这些函数类的极值问题的解的极值函数具有如下形式：

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g(z, t_k),\ \lambda_k \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1,$$

其中 $t_k \in [a, b]$，m 的值已知（参看[1]的第 11 章，[3]）．

对于求解这些函数类上的泛函与泛函组的值域，下列定理往往是有用的．

1）n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中可表示为

$$x_k = \int_a^b u_k(t)\,d\mu(t),\ k = 1, 2, \cdots, n$$

的点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的集合 B，同

$$x_k = u_k(t),\ k = 1, 2, \cdots, n,\ a \leqslant t \leqslant b$$

的那些点所组成的集合 U 的闭凸包 $R(U)$ 重合，其中诸 $u_k(t)$ 是 $[a, b]$ 上固定的连续实值函数，$\mu(t) \in M_{a,b}$ (Riesz 定理 (theorem of Riesz)).

2) 每个点 $x=(x_1, \cdots, x_n) \in R(U) \subset \mathbf{R}^n$ 可表示为如下形式

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_k(t_j), \ k=1, \cdots, n,$$

其中 $\lambda_j > 0, j=1, \cdots, m, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1, m \leqslant n+1$，而且当 $x \in \partial R(U)$ 时，则有 $m \leqslant n$ (Carathéodory 定理 (Carathéodory theorem)).

3) 至少存在一个非减函数 $\mu(t), a \leqslant t \leqslant b$，使得

$$\int_a^b w_k(t) d\mu(t) = \gamma_k, \ k=1, \cdots, n,$$

其中

$$w_1(t) \equiv 1, \ w_k(t) = u_k(t) + i v_k(t), \quad k=1, \cdots, n,$$

$u_k(t), v_k(t)$ 是 $[a, b]$ 上给定的实值连续函数，$\gamma_1 > 0$，γ_k 是给定的复数，当且仅当只要复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k w_k(t) + \overline{\alpha}_k \overline{w}_k(t)] \geqslant 0, \ a \leqslant t \leqslant b,$$

便有

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \gamma_k + \overline{\alpha}_k \overline{\gamma}_k] \geqslant 0$$

(Riesz 定理).

这些定理使得人们能够给出圆盘（或圆环）内具有正实部的正则函数类，或圆盘（或圆环）内典型实正则函数类，以及某些别的函数类的系数组与单个系数的值域的几何与代数特征（见 [1]，附录；[4]，[5]）.

参考文献

[1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[2] Крейн, М. Г., 《Успехи матем. наук》, 6 (1951), 4, 3 – 120.

[3] Лебедев, Н. А., Александров, И. А., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 94 (1968), 79 – 89.

[4] Голузина, Е. Г., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 94 (1968), 33 – 46.

[5A] Голузина, Е. Г., 《Зап. науч. семинаров Ленингр. отделения Матем. ин-та АН СССР》, 24 (1972), 29 – 62.

[5B] Голузина, Е. Г., 《Зап. науч. семинаров Ленингр. отдельния Матем. ин-та АН СССР》, 44 (1974), 17 – 40.

[5C] Голузина, Е. Г., 《Зап. науч. семинаров Ленингр. отдельния Матем. ин-та АН СССР》, 100 (1980), 17 – 25.

Е. Г. Голузина 撰

【补注】

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983

杨维奇 译

参数规划 [parametric programming; параметрическое программирование]

数学规划 (mathematical programming) 的分支：它致力于可行性条件和（或）目标函数依赖于一个或多个确定性参数的最优化问题的研究.（参数为随机的问题形成**随机规划** (stochastic programming) 研究的对象.）

在其一般形式中，参数规划问题是这样构成的：在所有处于约束

$$g_i(x, \lambda) \leqslant b_i(\lambda), \ i=1, \cdots, m, \tag{1}$$

下的 $x=(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 中，求目标函数 $f(x, \lambda)$ 的最大值，其中 λ 是属于某给定的参数集 $\Lambda \subset \mathbf{R}^p$ 的参数向量. 对于任何固定的 λ，这是一个普通的数学规划问题. 设 $\Lambda' \subset \Lambda$ 是所有那些使该问题可解的 λ 值的集合（可解集 (solvability set)）. 最优解 $x^* = x_\lambda^*$ 以自然的方式为 λ 的函数. 参数规划问题的解 (solution of a parametric programming problem) 意味着对于所有 $\lambda \in \Lambda'$ 的解族 $\{x_\lambda^*\}$.

参数规划问题的来源是极为多种多样的. 首先，这是出于反映某种任意性的意图，其中实际的最优化问题中的所有或某些初始数据经常有待于确定，或者问题的几种型式概括在同一种陈述中（或者整个问题的族依赖于某个参数，例如时间）. 参数规划是提出最优化问题的解随初始数据变化的重要的稳定性问题的最合适的方式. 最后，紧密联系参数规划问题的是在多准则最优化问题中求 Pareto 最优解集问题.

如果对于任何固定的 λ，参数规划问题是**线性规划** (linear programming)（**凸规划** (convex programming) 等等）问题，那么就说这是线性 (linear)（或凸 (convex)，等等）参数规划问题 (parametric programming problem).

在一般形式下，参数规划问题的分析有下列目的. 1) 求出和弄清可解集 Λ' 的性质. 2) 求出解的稳定域和刻画其结构；分析不稳定问题性态. 3) 刻画目标函数的最优值与参数向量的依赖关系.

在完全一般的情形下（即对于任意的目标函数、约束和参数的变化域 Λ），这些问题是非常困难的. 仅有某些特殊问题类在理论和计算方面有相当完善的进展. 这主要涉及线性参数规划问题，其中或

者：a）目标函数线性依赖于单个标量参数（$\Lambda = \mathbf{R}^1$）；或者 b）约束的右端线性依赖于单参数；或者 c）目标函数和约束的右端线性依赖于两个独立的标量参数或同一个参数；或者 d）目标函数线性依赖于一个向量参数；或者 e）约束的右端线性依赖于一个向量参数．线性规划问题的约束矩阵依赖于参数的情形是非常复杂的，至今尚未充分研究．在情形 a），例如上述问题 1）－3）的解可以刻画如下．要求最大化的是

$$\sum_{j=1}^{n}(c_j + \lambda c_j')x_j, \qquad (2)$$

约束条件为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1,\cdots,m;\ x_j \geqslant 0,\ j = 1,\cdots,n, \quad (3)$$

其中 $\lambda \in \Lambda = \mathbf{R}^1$．于是存在 Λ 分成有限多个左开区间的划分：$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{q}\Lambda^k$（其中 Λ^1 左无界，Λ^q 右无界，且两者之一可能与 Λ 重合），使得对于所有 $\lambda \in \Lambda^k$ 对应的线性规划问题是可解的，且在每个区间 $\Lambda^k(k = 1,\cdots,q)$ 中，它有一组同样的基．仅有的例外可能是 Λ^1 和 Λ^q，其中目标函数（2）可以无界．这样，在一个给定的问题中，可解集 Λ' 是可能除去 Λ^1 和（或）Λ^q 的所有 Λ^k 的并．其次，目标函数在每个 $\Lambda^k(k = 1,\cdots,q)$ 上的最优值是 λ 的凸的分段线性函数．

在线性参数规划中解单参数问题（$\Lambda = \mathbf{R}^1$）的数值方法是单纯形方法（simplex method）的修正；在多维参数空间情形，必须运用更为复杂的论证．近几年来，在非线性（尤其是二次和凸）参数规划方面已经得到许多重要结果．

参考文献

[1] Гольштейн, Е. Г., Юдин, Д. Б., Новые направления в линейном программировании, М., 1966.

[2] Bank, B., Guddat, J., Klatte, D., Kummer, B. and Tammer, K., Nonlinear parametric optimization, Birkhäuser, 1983.

[3] Nožička, F., Guddat, J. and Hollatz, H., Theorie der linearen parametrischen Optimierung, Akad. Verlag, 1974.

A. A. Корбут 撰

【补注】 与参数规划和规划问题的稳定性分析紧密相关的是灵敏度分析（sensitivity analysis），即解对于定义规划问题的参数的变化的灵敏度研究．

参考文献

[A1] Dinkelbach, W., Sensitivätsanalysen und parametrische Programmierung, Springer, 1969.

[A2] Zionts, S., Linear and integer programming, Prentice Hall, 1974.

[A3] Geoffrion, A. M., Strictly concave parametric programming, I, II, *Management Science*, 13 (1966/67), 244－253; 359－370.

史树中 译

参数表示法［**parametric representation method; параметрических представлений метод**］

单复变函数论中的一种方法，它来自于**单叶函数的参数表示**（parametric represention of univalent functions），且主要基于 **Löwner 方程**（Löwner equation）及其推广（见[1]）．K．Löwner 本人将参数表示法应用于单位圆盘内所有正则单叶函数 $w = f(z)$，$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$ 所组成的类 S，以估计展开式

$$w = z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n + \cdots$$

及

$$z = f^{-1}(w) = w + b_2w^2 + \cdots + b_nw^n + \cdots$$

的系数（见 **Bieberbach 猜想**（Bieberbach conjecture））．稍后，Г．М．Голузин 系统地运用参数表示法来解决畸变问题、旋转问题、互增长问题，以及对于固定的 z_0，$|z_0| < 1$，同值 $f(z_0)$ 与 $f'(z_0)$ 相联系的关于映射 $w = f(z)$ 的其他几何性质问题．

参数表示法同最优过程理论有联系，这种关联基于这样的事实：上述提到的所有问题均可解析地叙述为从 Löwner 方程引出的常微分方程控制系统的极值问题、**Понтрягин 最大值原理**（Pontryagin maximum principle）的运用与 Понтрягин 函数性质的研究使人们能够探讨关于类 S 及其子类的一系列新问题直至完全解决，或获得可同其他方法相比较的结果（例如，关于 Bieberbach 问题）（见[1]）．

参考文献

[1] Александров, И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976.

В. И. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

函数的参数表示［**parametric representation of a function; параметрическое представление функции**］

定义在 $[a,b]$ 上的一个函数 f，用一对例如在 $[\alpha,\beta]$ 上定义的函数 φ,ψ 来表示，其中 $\varphi:[\alpha,\beta] \to [a,b]$ 有一个单值的反函数 $\varphi^{-1}:[a,b] \to [\alpha,\beta]$，使得 $f = \psi \circ \varphi^{-1}$，即对任意 $x \in [a,b]$，

$$f(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)].$$

例．函数对 $x = \cos t$，$y = \sin t$，$0 \leqslant t \leqslant \pi$，是函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$（$-1 \leqslant x \leqslant 1$）的一个参数表示．

假设 f 的一个参数表示在某点 $t_0 \in [\alpha,\beta]$ 是可微的，也就是 φ 和 ψ 是可微的，并且 $\varphi'(t_0) \neq 0$，那么 f 在 $x_0 = \varphi(t_0)$ 是可微的，且 $f'(x_0) = \psi'(t_0)/\varphi'(t_0)$．

此外，若 φ 和 ψ 在 t_0 有 n 阶导数，$n=2,3,\cdots$，则 f 在 x_0 有 n 阶导数，它是 φ 和 ψ 的 k 阶导数 $(k=1,\cdots,n)$ 的分式有理函数，其分母是 $\varphi'(t_0)$ 的 $(2n-1)$ 次幂；例如

$$f''(x_0)=\frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0)-\psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3}.$$

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 函数可以不是实值的，对复值函数，上述类似结果也成立（即 $f:D\to\mathbf{C}$，$D\subset\mathbf{C}$）.

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Calculus, Blaisdell, 1967（中译本：T. M. 阿波斯托，微积分学，高等教育出版社，1987）.

王斯雷 译

单叶函数的参数表示［parametric representation of univalent functions; параметрическое представление］

实现平面域到典型域（例如具有同心裂纹的圆盘）的共形映射的**单叶函数**（univalent function）的一种表示；通常以如下方式出现．选定单参数区域族 Q_t，$0\leqslant t<T$，彼此相包含，$Q_{t'}\subset Q_t$，$0\leqslant t'<t<T$．对于 Q_0，假定到某个典型域 B_0 的共形映射 f_0 为已知．再从 Q_t 到典型域的已知映射 f_t 出发构造对于 $Q_{t+\varepsilon}$ 的这样的映射 $f_{t+\varepsilon}$，此处 $\varepsilon>0$ 很小．当参数 t 连续变化时，可由此引出一些微分方程．最著名的是 **Löwner 方程**（Löwner equation）与 Löwner-Куфарев 方程．在离散的情形——对格域 Q_t 和自然数 t——从 f_t 到 $f_{t+\varepsilon}$，$\varepsilon=1$，的转换由递推公式给出．这些公式与方程通常源于 Schwarz 公式（见[1]）及其推广（见[2]）．参数表示的另一个具有同样重要性的源泉是关于上述提到的区域族的 Green 函数 $G_t(z,z')$ $(z,z'\in Q_t)$ 的 Hadamard 变分（见[3]，[4]）．对于椭圆微分方程，Hadamard 方法亦称为不变嵌入法（method of invariant imbedding）（见[5]）．下面就最简单的（离散）情形展示参数表示、Hadamard 变分及不变嵌入之间的联系．

设 Q 是复整数的一个集合（格域（lattice domain））且设 Green 函数 $g_t(z,z')$ 是关于 Q 上所有实值函数 $g(z)$ 组成的类 R_0 上的 Dirichlet-Douglas 泛函（Dirichlet-Douglas functional）

$$I_t(g)=2g(z')+\sum_{k=0}^{1}\sum_{z\in Q_0}P_k(t)|\nabla_k g(z)|^2$$

的一个极端点，此处

$$Q_0=\{z:\ z,\ z-1,\ z-i,\ z-1-i\in Q\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_0 g(z)=g(z)-g(z-1-i),\\ \nabla_1 g(z)=g(z-1)-g(z-i),\end{array}\right\}\qquad(1)$$

$$\rho_k(0)\equiv1,\ \rho_k(t+1)=\rho_k(t)+N\delta_{\zeta_t},$$

N 是自然数，δ_{ζ_t} 是 Kronecker 记号，$\zeta_t=(k_t,z_t)$，$t=0,\cdots,T-1$，是某个数偶集合；$\{z_t:\ t=1,\cdots,T\}$ 是 Q_t 的边界，$k_t=0$ 或 1．寻求泛函 $I_t(g)$ 的极值是一个二次规划问题．对于 t 和 $t+1$ 的解的比较给出不变嵌入（Hadamard 变分）基本公式（basic formula of invariant imbedding (Hadamard variation)）：

$$G_{t+1}(z,z')=$$
$$=G_t(z,z')-\frac{1}{c_t}\nabla_{k_t}G_t(z_t,z)\nabla_{k_t}G_t(z_t,z'),\qquad(2)$$

其中 $c_t=N^{-1}-\nabla_{k_t}\nabla'_{k_t}G_t(z_t,z_t)>0$，记号 ∇'_{k_t} 表示关于该 Green 函数第二变量的微分算子（1）．已知 $G_0(z,z')$ 即可从（2）式逐步（递推）得到所有的函数 $G_t(z,z')$，$t=1,\cdots,T$．通过构造 Green 函数，依照 Cauchy-Riemann 型方程

$$(-1)^k\nabla_{1-k}H=\rho_k\nabla_k G,$$

可从格解析函数 $f_T(z)=G_T(z,z')+iH_T(z,z')$ 得到 Q_t 到单位圆盘的单叶格拟共形映射 $w=\exp[2\pi f(z)]$．最接近坐标原点的是 z' 的象．作为 $N\to\infty$ 时的极限，映射是格共形的，并且 Q_T 的象是具有同心裂纹的圆盘．该结果是（2）的连续模拟（见[6]）．当所有的区域 G_t 为单连通且典型域为单位圆盘 B 时，人们用 B 的分式线性自同构成功地借助 Q_t 到 B 上满足规范条件 $f_t(0)=0$，$0\in Q_t$（对所有 $t\in[0,T)$ 都成立）的映射函数 $f_t(z)$ 给出 Green 函数的如下显式表示

$$G_t(z,z')=$$
$$=\ln|1-f_t(z)\overline{f_t(z')}|-\ln|f_t(z)-f_t(z')|.$$

借助于 $w=f_t(z)$，Hadamard 变分化简为一个（Löwner）常微分方程．同 Hadamard 变分相比，这个方程相当简单；无论如何，关于 Q_t 的边界的信息是其中唯一隐而不显者——用控制参数 $\alpha(t)=\arg f_t(z_t)$ 表达，因为 $f_t(z_t)$ 事先未知．尽管如此，Löwner 方程依然是参数表示的基本工具．

对不必互相嵌入的更一般的单参数区域族 Q_t，$0\leqslant t<T$，也已作了处理（见[7]）．这类参数表示所产生的方程称为 Löwner-Куфарев 方程（Löwner-Kufarev equation）．当区域 Q_t 具有不同类型的对称性或其他几何特征时，还有一种修正型的 Löwner 与 Löwner-Куфарев 方程（见[1]）．

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（英译本：Goluzin, G. M., Geometric theory of functions

of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[2] Александров, И. А., Сорокин, А. С., 《Сиб. матем. ж.》, 13 (1972), 5, 971 – 1001.

[3] Hadamard, J., Mémoire sur le probléme d'analyse relatif a l'equilibre des plaques élastiques encastrées, in Oeuvres, Vol. 2, CNRS, 1968, 515 – 642.

[4] Hadamard, J., Leçons sur le calcul des variations, 1, Hermann, 1910.

[5] Bellma, R. and Angel, E., Dynamic programming and partial differential equations, Acad. Press, 1972.

[6] Попов, В. И., 《Докл. АН СССР》, 207 (1972), 5, 1048 – 1050.

[7] Куфарев, П. П., 《Матем. сб.》, 13 (1943), 1, 87 – 118.

В. И. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

参数共振的数学理论[parametric resonance, mathematical theory of; параметрического резонанса математическая теория]

常微分方程理论中研究参数共振现象的一个分支.

设 S 为仅能作振动运动的、由一个**线性 Hamilton 系统**(Hamiltonian system, linear)(一个无干扰的方程)

$$J\dot{x} = H_0 x\left[J = \begin{Vmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{Vmatrix}, H_0^* = H_0\right]$$

给出的动力系统. 这里, Hamilton 量 H_0 是正的实常数. 因此, $(2k \times 2k)$ 的矩阵 $J^{-1}H_0$ 可以化为对角型, 其元素为纯虚数:

$$i\omega_v (v = \pm 1, \cdots, \pm k, \omega_{-v} = -\omega_v),$$

这里, $|\omega_v|$ 为系统的固有频率. 假定系统 S 的某些参数以频率 $\theta > 0$ 随时间周期变化, 且振幅很小, 其值由小参数 $\varepsilon > 0$ 确定. 如果这样的扰动并不使系统改变其为线性 Hamilton 系统的特性, 则系统 S 的运动可由下面的振动方程加以描写:

$$J\dot{x} = [H_0 + \varepsilon H_1(\theta t) + \varepsilon^2 H_2(\theta t) + \cdots]x, \quad (1)$$

这里 $H_j(s+2\pi) = H_j(s) = H_j(s)^* (j = 1, 2, \cdots)$ 为分段连续的在区间 $(0, 2\pi)$ 上可积的 $(2k \times 2k)$ 矩阵函数, 当 $\varepsilon < r_0$ (r_0 为不依赖于时间的常数)时, 式(1)右端的级数收敛.

系统 S 在其参数的任意小的周期扰动作用下, 其振动幅度出现无限增加的现象称为参数共振(parametric resonance). 它有下面两个重要特征: 1) 出现振动幅度无限增加的频谱不是一个点频谱, 而是由一些很小的区间组成, 区间长度取决于下扰的振幅(即 ε); 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 区间就收缩成为一个点; 这些区间收缩到的频率值称为临界(critical)频率; 2) 振动幅度不是以幂函数方式, 而是以指数方式增加的. 参数共振比起通常的共振来说是要"危险"得多(或对于有些问题而言, "有用"得多).

设 $i\omega_1, \cdots, i\omega_k$ 为第一类本征值, 其排列次序为: $\omega_1 \leqslant \cdots \leqslant \omega_k$, 则仅有下面形式的频率才可能是临界的:

$$\theta_{jh}^{(m)} = \frac{1}{m}|\omega_j + \omega_h|, j, h = 1, \cdots, k;$$

$$m = 1, 2, \cdots \quad (2)$$

假定对于矩阵 $J^{-1}H_0$ 的本征向量 f_v, 有 $J^{-1}H_0 f_v = i\omega_v f_v$, $v = \pm 1, \cdots, \pm k$, 而且这些本征向量已正规化, 即

$$i(Jf_v, f_\mu) = \delta_{v\mu}\operatorname{sign} v, \; v, \mu = \pm 1, \cdots, k,$$

其中 $\delta_{v\mu}$ 为 Kronecker 符号, 而且

$$H_1(\theta t) \approx \sum e^{il\theta t} H_1^{(l)}.$$

那么, 在对于 ε 来说是一级近似的意义上, 其不稳定区域可由下面的不等式确定:

$$\theta_{jh}^{(m)} + \mu_1\varepsilon + \cdots < \theta < \theta_{jh}^{(m)} + \mu_2\varepsilon + \cdots, \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \mu_{1,2} = \dfrac{1}{m}(\chi_{-j-j} + \chi_{hh} \mp 2|\chi_{-jh}|), \\ \chi_{-j-j} = (H_1^{(0)}f_{-j}, f_{-j}), \chi_{hh} = (H_1^{(0)}f_h, f_h), \\ \chi_{-jh} = (H_1^{(m)}f_{-j}, f_h). \end{cases} \quad (4)$$

如果 $j = h$, 则不稳定区域相应于一个基本共振(basic resonance); 如果 $j \neq h$, 则相应于组合共振(combined resonance). 变量 $|\chi_{-jh}|$ 表征临界频率 $\theta_{jh}^{(m)}$ 的"危险程度": 这个量愈大, 则式(3)所确定的、以 $\theta_{jh}^{(m)}$ 点为中心的不稳定的"楔"愈宽. 已经建立不稳定区域的边界对于参数 ε 的解析的依赖关系, 也已在二级近似的基础上得到了对于式(3)的有效的计算公式(见[3], [4], [9]).

对于在应用中经常发生的情况而言, 扰动系统 S 可以用一个二阶向量值方程

$$\ddot{y} + [P_0 + \varepsilon P_1(\theta t) + \varepsilon^2 P_2(\theta t) + \cdots]y = 0, (5)$$

来描述, 其中 $P_0^* = P_0 > 0$, $P_j(s)^* = P_j(s) = P_j(s+2\pi)$, $j = 1, 2, \cdots$, 这时 P_0 的本征向量和本征值(未扰动系统频率的平方)由下式给出:

$$P_0 a_\kappa = \omega_\kappa^2 a_\kappa,$$

$$(\omega_\kappa + \omega_\lambda)(a_\kappa, a_\lambda) = \delta_{\kappa\lambda}, \ \kappa, \lambda = 1, \cdots, k.$$

设

$$P_1(\theta t) \sim \sum e^{il\theta t} P_1^{(l)}.$$

那么式(2)和(4)分别成为

$$\theta_{jh}^{(m)} = \frac{1}{m}(\omega_j + \omega_h), \ \chi_{-j-j} = (P_1^{(0)} a_j, a_j),$$

$$\chi_{hh} = (P_1^{(0)} a_h, a_h), \ \chi_{-jh} = (P_1^{(m)} a_j, a_h),$$

特别是，若选择基 $e_1, \cdots, e_k$，使 P_0 成为对角形式

$$P_0 = \mathrm{diag}(p_1, \cdots, p_k)$$

$$P_1(\theta t) \sim \sum e^{il\theta t} \| \pi_{\kappa\lambda} \|_1^l$$

则有

$$\omega_\kappa = +\sqrt{p_\kappa}, \ \alpha_\kappa = \frac{1}{\sqrt{2\omega_\kappa}} e_\kappa, \ \kappa = 1, \cdots, k.$$

从而，有（见[5]）

$$\chi_{-j-j} = \frac{1}{2\omega_j} \pi_{jj}^{(0)}, \ \chi_{hh} = \frac{1}{2\omega_h} \pi_{hh}^{(0)},$$

$$\chi_{-jh} = \frac{1}{2\sqrt{\omega_j \omega_h}} \pi_{jh}^{(m)}$$

对于式(1)和(5)的系数与 $1/\theta$ 的依赖关系为非线性的情况，也有人作了讨论（见[4]，[9]）. 还有人研究了接近于 Hamilton 系统的线性系统的参数共振（见[6]，[9]）. 这时，主共振的区域在基本共振的区域的前面出现；伴随着组合共振的区域，出现组合差共振区域. 对于线性分布系统的参数共振（见[7]），从 Hilbert 空间的算子方程(1)，可以得到一系列类似的结果. 人们也研究了可以用非线性方程描写的若干类有限自由度系统的参数共振（见[8]）.

参考文献

[1] Крейн, М. Г., в кн., Памяти Александра Александровича Андронова, М., 1953, 413 – 498（英译本：Krein, M. G., Foundations of the theory of λ-zones of stability of a canonical system of linear differential equations with periodic coefficients, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **120** (1983), 1 – 70）.

[2] Якубович, В. А.,《Докл. АН СССР》, **121** (1958), 4, 602 – 605.

[3] Якубович, В. А., Методы вычислений, в. 3, Л., 1966, 51 – 69.

[4] Якубович, В. А., Старжинский, В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

[5] Малкин, И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956.

[6] Старжинский, В. М.,《Инженерный ж. Механ. тверд. тела》, 3 (1967), 174 – 180.

[7] Фомин, В. Н., Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах, Л., 1972.

[8] Schmidt, G., Parametererregte Schwingungen, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1975.

[9] Якубович, В. А., Старжинский, В. М., Параметрического резонанса в линейных системах, М., 1987.

В. М. Старжинский 撰

【补注】 参数共振，或称参数维持振动（parametrically sustained vibrations），对于诸如电线和缩放仪（以放大或缩小的比例复制运动或几何图形的仪器）是很自然会发生的；因此在设计时，必须注意对此加以控制. 另一方面，在电子学中的很多参数仪器（例如参数放大器）有效地应用了参数共振的原理.

参考文献

[A1] Arnold, V. I. and Avez, A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, 1967, § 20.5; Append, 29（译自俄文）.

王克仁 译　诸德超 校

拟基本解法 [**parametrix method**; **параметрикса метод**]

用积分方程研究变系数微分方程边值问题的一种方法.

设在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的某一域 G 中，考虑一个 m 阶椭圆型微分算子（见**椭圆型偏微分方程**（elliptic partial differential equation））

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha. \qquad (1)$$

(1) 中符号 α 是多指标，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，其中 α_j 都是非负整数，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_j = -i\,\partial/\partial x_j$. 和每一个算子(1)相连的是齐次常系数椭圆型算子

$$L_0(x_0, D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x_0) D^\alpha,$$

其中 $x_0 \in G$ 是一任意的定点. 令 $\varepsilon(x, x_0)$ 表示 $L_0(x_0, D)$ 的、以 x_0 为参数的一个**基本解**（fundamental solution）. 于是函数 $\varepsilon(x_0, x)$ 被称为算子(1)的具有奇性在 x_0 处的拟基本解（parametrix）.

特别地，对二阶椭圆型算子

$$L(x, D) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x),$$

可以取 Levi 函数（Levi function）

$$\varepsilon(x; y) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n\sqrt{A(y)}}\,[R(x,y)]^{2-n}, & n>2, \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{A(y)}}\ln R(x,y), & n=2, \end{cases} \quad (2)$$

作为具有奇性在 y 处的拟基本解．在 (2) 中，$\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$，$A(y)$ 是矩阵 $\|a_{ij}(y)\|$ 的行列式，

$$R(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(y)(x_i-y_i)(x_j-y_j),$$

其中 $A_{ij}(y)$ 是矩阵 $\|a_{ij}(y)\|$ 的逆矩阵的元．

令 S_{x_0} 是作用在 $C_0^\infty(G)$ 中函数上的积分算子

$$(S_{x_0}\varphi)(x)=\int_G \varepsilon(x-y,x_0)\varphi(y)dy, \quad (3)$$

且令

$$T_{x_0}=S_{x_0}[L_0(x_0,D)-L(x,D)].$$

因为由基本解的定义，

$$L_0(x_0,D)S_{x_0}=S_{x_0}L_0(x_0,D)=I,$$

其中 I 是恒等算子，就有

$$I=S_{x_0}L(x,D)+T_{x_0}.$$

这个等式指出，对在 G 中具有紧支集的每一个充分光滑的函数 φ 有表示式

$$\varphi=S_{x_0}L(x,D)\varphi+T_{x_0}\varphi. \quad (4)$$

此外，如果

$$\varphi=S_{x_0}f+T_{x_0}\varphi,$$

那么 φ 是方程

$$L(x,D)\varphi=f$$

的一个解．这样，$L_\varphi=f$ 的局部可解性问题就归结为 $I-T_{x_0}$ 的可逆性问题．

如果将 T_{x_0} 作用于在半径为 R、中心在 x_0 的球的外部为零的函数 φ，那么对充分小的 R，可以使得 T_{x_0} 的范数小于 1．于是，算子 $(I-T_{x_0})^{-1}$ 存在；因此，$E=(I-T_{x_0})^{-1}S_{x_0}$ 亦存在，它是 $L(x,D)$ 的逆算子．这里 E 是积分算子，它的核是算子 $L(x,D)$ 的基本解．

名称拟基本解 (parametrix) 有时不仅对函数 $\varepsilon(x,x_0)$ 使用，而且也对由 (3) 定义的具有核 $\varepsilon(x,x_0)$ 的积分算子 S_{x_0} 使用．

在伪微分算子理论中，代替 S_{x_0}，把 $L(x,D)$ 的拟基本解定义为一个算子 S，它使得 $I-L(x,D)S$ 和 $I-SL(x,D)$ 均为具有无穷次可微的核的积分算子 (见**伪微分算子** (pseudo-differential operator))．如果只有 $I-SL$ (或 $I-LS$) 是这样的算子，那么 S 就称作 $L(x,D)$ 的左 (或右) 拟基本解．换句话说，(4) 中的 S_{x_0} 是一左拟基本解，只要在此等式中的 T_{x_0} 有一无穷次可微的核．如果 $L(x,D)$ 有一左拟基本解 S' 和一右拟基本解 S''，那么它们中的每一个都是拟基本解．对亚椭圆型伪微分算子证明了拟基本解的存在性 (见 [3])．

参考文献

[1] Bers, L., John, F. and Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.

[2] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意文).

[3] Hörmander, L., Pseudo-differential operators, Moscow, 1967 (俄文，译自英文).

Ш. А. Алимов 撰

【补注】 算子 $L_0(x,D)$ 称作 L 的主部，见**微分算子的主部** (principal part of a differential operator)．拟基本解法被 E. E. Levi 的两篇基本的工作 ([A1], [A2]) 所预先用了．同样的办法亦被应用于构造变系数抛物型方程的基本解 (例如，见 [A3])．

参考文献

[A1] Levi, E. E., Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche, *Rend. R. Acc. Lincei, Classe Sci (V)*, **16** (1907).

[A2] Levi, E. E., Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **24** (1907), 275 – 317.

[A3] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本：A. 弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1984).

[A4] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1 – 4, Springer, 1983 – 1985, Chapts. 7; 18.

孙和生 译　陆柱家 校

Pareto 分布 [Pareto destribution; Парето распределение]

一种连续概率分布 (probability distribution)，其密度为

$$p(x)=\begin{cases} \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & x_0<x<\infty, \\ 0, & x\leqslant x_0, \end{cases}$$

它依赖于两个参数：$x_0>0$ 和 $\alpha>0$．在那种"截断"解释中，Pareto 分布可看作密度为

$$\frac{1}{B(\mu,\alpha)}\frac{x^{\mu-1}}{(1+x)^{\mu+\alpha}},\ \mu,\alpha>0,\ 0<x<\infty,$$

的第二种 B 分布 (Beta-distribution) 族的 $\mu=1$ 时的独立分布．对于任何固定的 x_0，通过变换 $x=x_0/y$，Pareto 分布归结为第一种 B 分布．在 Pearson 曲线 (Pearson curves) 系统中，Pareto 分布属于"类型 Ⅵ"和"类型 Ⅺ"的分布．Pareto 分布的数学期望对于 $\alpha>1$ 有限，并等于 $\alpha x_0/(\alpha-1)$；方差对于 $\alpha>2$ 有限，并等于 $\alpha x_0^2/(\alpha-1)^2(\alpha-2)$；中位数是

$2^{1/\alpha}x_0$. Pareto 分布函数由下列公式来确定:

$$\mathsf{P}\{X<x\}=1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha},\quad x>x_0,\ \alpha>0.$$

自从 W. Pareto(1882)关于收入分配的工作以来, Pareto 分布已经广泛地应用在各种经济统计问题中. 人们有时认为, Pareto 分布在下列意义下完美地描述了收入超过某一水平后的分布: 它必须随着 $x\to\infty$ 有阶为 $1/x^{2}$ 的尾巴.

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946(中译本: H. 克拉美, 统计学的数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

A. B. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Distributions in statistics. continuous univariate distributions, Houghton Mifflin, 1970.

[A2] Davis, H. T., Elements of statistics with application to economic data, Amer. Math. Soc., 1972.

史树中 译

Parseval 等式[Parseval equality; Парсеваля равенство]

在具有内积的向量空间中, 元素范数的平方通过该元素关于某个**正交系**(orthogonal system)的 **Fourier 系数**(Fourier coefficients)的模的平方表示的一个等式. 譬如说, 如果 X 是一个定义了内积 $(\ ,\ )$ 的赋范可分向量空间, $\|\cdot\|$ 表示相应的范数, $\{e_n\}$ 是 X 中的一个正交系, $e_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$, 则对于元素 $x\in X$, Parseval 等式(Parseval equality)是

$$\|x\|^{2}=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{2}\|e_n\|^{2},\qquad(1)$$

其中的 $a_n=(x,e_n)/(e_n,e_n)(n=1,2,\cdots)$ 是 x 关于正交系 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数. 如果 $\{e_n\}$ 是规范正交的, 则 Parseval 等式取形式

$$\|x\|^{2}=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{2}.$$

对于给定的元素 $x\in X$, Parseval 等式成立是 x 关于正交系 $\{e_n\}$ 的 Fourier 级数依 X 中的范数收敛到 x 的充分必要条件. Parseval 等式对所有元素 $x\in X$ 成立, 是正交系 $\{e_n\}$ 在 X 中完全(参见**完全系**(complete system))的充分必要条件. 特别地, 由此可推得:

1) 如果 X 是可分的 **Hilbert 空间**(Hilbert space)而且 $\{e_n\}$ 是它的一组正交基, 则 Parseval 等式对 $\{e_n\}$ 及每一个 $x\in X$ 成立;

2) 如果 X 是可分的 Hilbert 空间, $x,y\in X$, 而且 $\{e_n\}$ 是 X 的一组规范正交基, 设 $a_n=(x,e_n)$ 和 $b_n=(y,e_n)$ 分别是 x 和 y 的 Fourier 系数, 则有

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{b}_n.\qquad(2)$$

这称为广义 Parseval 等式(generalized Parseval equality). 在相当明确的形式中, В. А. Стеклов 在[1]中研究了由微分算子的特征函数构成的函数系的完全性问题.

Parseval 等式也能推广到不可分 Hilbert 空间的情形: 设 $\{e_\alpha\}(\alpha\in\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ 是某个指标集)是 Hilbert 空间 X 中的完全规范正交系, 则对于任意元素 $x\in X$, Parseval 等式成立:

$$(x,x)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}}|(x,e_\alpha)|^{2},$$

上式右边的和应理解为

$$\sup_{\mathfrak{A}_0}\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_0}|(x,e_\alpha)|^{2}.$$

其中的上确界取遍 $\mathfrak{A}$ 的所有有限子集 $\mathfrak{A}_0$.

当 $X=L_2[-\pi,\pi]$(即 $[-\pi,\pi]$ 上 Lebesgue 平方可积的实值函数空间)且 $f\in L_2[-\pi,\pi]$ 时, 可以取**三角函数系**(trigonometric system)作为完全正交系并得到

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

这时, (1)取形式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^{2}(t)\,dt=\frac{a_0^{2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{2}+b_n^{2}),$$

它被称为经典 Parseval 等式(classical Parseval equality). 这是由 M. Parseval 于 1805 年证明的.

如果 $g\in L_2[-\pi,\pi]$ 而且

$$g\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx),$$

则类似于(2)的等式如下:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}a_0a_0'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n'+b_nb_n').\qquad(3)$$

两个定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的实值函数类 K 和 K' 称为是互余的, 如果对于所有 $f\in K$ 及 $g\in K'$, Parseval 等式(3)成立. 互余类的一个例子是空间 $L_p[-\pi,\pi]$ 和 $L_q[-\pi,\pi]$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $1<p<\infty$.

参考文献

[1] Steklov, V. A., Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions souvent employées dans l'analyse, *Zap. Nauchn. Fiz.-Mat. Obshch. Ser.* 8, 157(1904), 1-32.

[2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975 (英译本: Nikol'skii, S. M., A course of mathematical analysis, 2, Mir, 1977)

[3] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г, Основы математического анализа, 2 изд, ч. 2, М., 1980 (英译本: Il'in, V. A and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 2, Mir, 1982).

[4] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[5] Zygmund, A., Trigonometric series, 1, Cambridge Univ. Press, 1988.

[6] Кириллов, А. А., Гвишиани, А. Д., Теоремы и задачи функционального анализа, М., 1979 (英译本: Kirillov, A. A. and Gvishiani, A. D., Theorems and problems in functional analysis, Springer, 1982).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

朱学贤 译 娄元仁 校

Parseval-Plancherel 公式 [Parseval-Plancherel formula; Парсеваля-Планшереля формула]

见 **Plancherel 定理** (Plancherel theorem).

偏相关系数 [partial correlation coefficient; частный коэффициент корреляции]

一组随机变量中某两个变量，在排除了其余变量影响的条件下，二者线性相依程度的度量．确切地说，设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中有联合分布；记 $X^*_{1;3\cdots n}$ 和 $X^*_{2;3\cdots n}$ 相应为变量 X_1 和 X_2 基于变量 $X_3,\cdots,X_n$ 的最优线性逼近．那么，X_1 和 X_2 间的偏相关系数，记作 $\rho_{12;3\cdots n}$，定义为随机变量 $Y_1=X_1-X^*_{1;3\cdots n}$ 和 $Y_2=X_2-X^*_{2;3\cdots n}$ 间的普通相关系数:

$$\rho_{12;3\cdots n}=\frac{\mathsf{E}\{(Y_1-\mathsf{E}Y_1)(Y_2-\mathsf{E}Y_2)\}}{\sqrt{\mathsf{D}Y_1\,\mathsf{D}Y_2}}.$$

由定义可见，$-1\leqslant\rho_{12;3\cdots n}\leqslant 1$．偏相关系数可以通过**相关阵** (correlation matrix) 的元素表示．设 $P=\|\rho_{ij}\|$，其中 ρ_{ij} 是 X_i 和 X_j 间的相关系数，而 P_{ij} 是行列式 $|P|$ 中元素 ρ_{ij} 的代数余子式；那么，

$$\rho_{12;3\cdots n}=-\frac{P_{12}}{\sqrt{P_{11}P_{22}}}.$$

例如，当 $n=3$ 时

$$\rho_{12;3}=\frac{\rho_{12}\rho_{33}-\rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)(1-\rho_{23}^2)}}.$$

类似可以定义 $X_1,\cdots,X_n$ 中任意两个变量 X_i 和 X_j 的偏相关系数．一般，偏相关系数 $\rho_{12;3\cdots n}$ 不同于 X_1 和 X_2 的 (普通) **相关系数** (correlation coefficient) ρ_{12}．ρ_{12} 和 $\rho_{12;3\cdots n}$ 之间的差异，可以说明 X_1 和 X_2 之间是否相依，或者它们之间的相依性是否由它们二者之中每一个对其余变量 $X_3,\cdots,X_n$ 的相依性引起的．假如变量 $X_1,\cdots,X_n$ 两两不相关，则一切偏相关系数都为 0．

设 $R=\|r_{ij}\|$，其中 r_{ij} 是经验相关系数，R_{ij} 是矩阵 R 的行列式中 r_{ij} 的代数余子式．那么，统计量

$$r_{12;3\cdots n}=-\frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}$$

是偏相关系数 $\rho_{12;3\cdots n}$ 的经验类似，称为**经验偏相关系数** (empirical partial correlation coefficient) 或**样本偏相关系数** (sample partial correlation coefficient)．如果观测结果独立，有多元正态分布且 $\rho_{12;3\cdots n}=0$，则 $r_{12;3\cdots n}$ 的概率密度为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma((N-n+1)/2)}{\Gamma((N-n)/2)}(1-x^2)^{(N-n-2)/2},$$

$$-1<x<1$$

(N 是样本容量)．为检验关于偏相关系数的假设，利用如下事实：统计量

$$t=\sqrt{N-n}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},\ \text{其中}\ r=r_{12;3\cdots n},$$

在上述条件下有 **Student 分布** (Student distribution)，自由度为 $N-n$．

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Inference and relationship, Griffin, 1979.

М. С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Muirhead, R. J., Aspects of multivariate statistical theory, Wiley, 1982.

周概容 译

偏导数 [partial derivative; частная производная]，多元函数的一阶

函数关于它的某个变量的**导数** (derivative)，而保持其余的变量固定．例如，若函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 定义在某点 $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 的一个邻域内，则 f 在该点关于 x_1 的偏导数 $(\partial f/\partial x_1)(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 等于一元函数 $f(x_1,x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 在点 $x_1^{(0)}$ 的常导数．换言之，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})=$$

$$= \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})|_{x_1 = x_1^{(0)}} =$$

$$= \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1},$$

其中

$$\Delta_{x_1} f(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) =$$

$$= f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}).$$

m 阶（$m > 1$）偏导数

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}, \ m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m \quad (*)$$

由归纳定义：若偏导数

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_i^{k_i} \partial x_n^{k_n}}, \ k_1 + \cdots + k_n = k - 1$$

已定义，则由定义，

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_i^{k_i + 1} \cdots \partial x_n^{k_n}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_i^{k_i} \cdots \partial x_n^{k_n}}\right].$$

偏导数（$*$）也可记为 $D^m_{m_1 \cdots m_n} f$. 偏导数（$*$）中若至少有两个不同指标不为 0，则称为混合偏导数（mixed partial derivative）；否则，那就是具有 $\partial^m f / \partial x_i^m$ 形式的偏导数，称为非混合偏导数．在很宽的条件下，混合偏导数不依赖于对不同变量求导的次序．例如，当所考虑的一切偏导数均连续时，上述结论成立．

定义偏导数时若其中导数概念用某种广义导数来替代，那么就得到相应的广义偏导数定义．

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 关于参考文献，见**微分学**（differential calculus）．

王斯雷 译

偏微分 [**partial differential; частный дифференциал**]，多元函数的一阶

函数关于一个变量的微分（differential），而保持其他变量固定．例如，设函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 定义在点 $(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 的某邻域内，则 f 关于变量 x_1 在给定点的偏微分 $d_{x_1} f(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 等于一元函数 $f(x_1, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 在 $x_1^{(0)}$ 的常微分，即

$$d_{x_1} f(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) = df(x_1, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})|_{x_1 = x_1^{(0)}} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) dx_1.$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{d_{x_1} f}{dx_1}.$$

$k(k > 1)$ 阶偏微分可类似地定义．例如，$f(x_1, \cdots, x_n)$ 在点 $(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 关于 x_1 的 k 阶偏微分 $d^k_{x_1} f(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$，正好是一元函数 $f(x_1, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 关于其变量 x_1 的 k 阶微分．因此，

$$d^k_{x_i} f(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) dx_i^k,$$

$$i = 1, \cdots, n; \ k = 1, 2, \cdots.$$

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 关于参考文献，见**微分学**（differential calculus）与**微分**（differential）．

王斯雷 译

流形上的偏微分方程 [**partial differential equations on a manifold**]

【补注】 基本思想是，偏微分方程是由节丛上的一组函数给出的，这个思想是很自然的，因为（偏）微分方程归根结蒂是一函数、其应变量及其到一定阶数的导数之间的一个关系式．下文凡讲到流形和映射，或者都是 C^∞ 的，或者都是实解析的．

纤维流形（fibred manifold）是由两个流形 M，N 和一个可微映射 $\pi: M \to N$ 组成的三元组（M, N, π），而对于一切 $m \in M$，$d\pi(m)$：$T_m M \to T_{\pi(m)} N$ 都是满射．N 上的向量丛（E, N, π）就是一个例子．这意味着在每一点 $m \in M$ 附近，情况局部地就像典范投射 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$（$\dim M = m + n$，$\dim N = n$）．开集 $U \subset N$ 上的截面（cross section）就是一个微分映射 $s: U \to \pi^{-1}(U) \subset M$，而适合 $\pi \circ s = \mathrm{id}$．截面在点 $x \in N$ 处的 r 节（r-jet of cross sections）就是截面由以下的等价关系所定义的等价类．两个截面 s_i: $U_i \to M$（$i = 1, 2$）在 $x_0 \in U_1 \cap U_2$ 是 r 节等价的，如果 $s_1(x_0) = s_2(x_0)$ 而且对于 $s_i(x_0)$ 和 x_0 附近的某个坐标系（从而对于一切坐标系）均有

$$\left.\frac{\partial^\alpha s_1}{\partial x^\alpha}\right|_{x = x_0} = \left.\frac{\partial^\alpha s_2}{\partial x^\alpha}\right|_{x = x_0}, \ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant r,$$

这里 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$，$a_i \in \{0, 1, \cdots\}$，$|\alpha| = a_1 + \cdots + a_n$．令 $J^r(\pi)$ 是所有 r 节的集合．在局部坐标系中，π 就如同 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$，$(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^m) \to (x^1, \cdots, x^n)$．立即可以看到 $J^r(\pi)$ 是以 $(x^i, u^j, p^{\alpha, k}$；$i = 1, \cdots, n$；$j, k = 1, \cdots, m$；$1 \leqslant |\alpha| \leqslant r)$ 为局部坐标的流形（[A2]，[A5]）．可微分丛 $J^r(\pi)$ 称为纤维流形 $\pi: M \to N$ 的 r 阶节丛（jet bundle）．对于向量丛 $E \to N$ 的情况，亦见**线性微分算子**（linear differential operator）；在 $\pi: N \times N' \to N$ 的情况，可求得 $J^r(N, N')$，映射 $N \to N'$ 的节丛

(jet bundle of mappings). 在 $r\geqslant k\geqslant 0$ 时, 有自然的纤维丛映射 $\pi_{r,k}:J^r(\pi)\to J^k(\pi)$, 它用局部坐标的表示就是略去所有 $|\alpha|>k$ 的 p^α. 令 $p^{0,k}=u^k$, $J^{-1}(\pi)=N$ 是很方便的, 这时 $\pi_{r,-1}:J^r(\pi)\to N$ 的定义方法同上(即略去所有的 p^α 和 u^j).

令 $\mathscr{O}(J^r(\pi))$ 表示 $J^r(\pi)$ 上可微函数(之芽)的层(sheaf), 它是一个环层. $\mathscr{O}(J^r(\pi))$ 的理想 $\mathfrak{a}$ 的一个子层就是 N 上的一个 r 阶偏微分方程组 (system of partial differential equations of order r). 方程组 $\mathfrak{a}$ 的解就是一个截面 $s:N\to M$, 而对一切 $f\in\mathfrak{a}$ 均有 $f\circ J^r(s)=0$. $\mathfrak{a}$ 的积分点 (integral points) (即 $\mathfrak{a}$ 在 $J^r(\pi)$ 上的零点)的集合记作 $J(\mathfrak{a})$. $\mathfrak{a}$ 的延拓 (prolongation) $p(\mathfrak{a})$ 定义为 N 上的 $r+1$ 阶方程组, 而由 $f\in\mathfrak{a}$ (严格说应为 $f\circ\pi_{r,r-1}$) 以及 $\partial^k f$ $(f\in\mathfrak{a})$ 生成, 这里 $\partial^k f$ 在 $x\in N$ 处的 $r+1$ 节 $j_x^{r+1}(s)$ 上定义为

$$(\partial^k f)\ (j_x^{r+1}(s))=\frac{\partial}{\partial x^k}\ f(j_x^r(s)).$$

在局部坐标 $(x^i, u^j, p^{\alpha,k})$ 中, 形式导数 (formal derivative) $\partial^k f$ 由下式给出:

$$\partial^k f(x,u,p)=\frac{\partial f}{\partial x^k}\ +\sum p^{\alpha(i),j}\ \frac{\partial f}{\partial p^{\alpha,j}}\ ,$$

其中右方是对 $j=1,\cdots,m$ 以及所有适合 $|\alpha|\leqslant r$ 的 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$ 求和, 而 $\alpha(i)=(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i+1,a_{i+1},\cdots,a_n)$, $a_i\in\{0,1,\cdots\}$ $(p^{0,j}=u^j)$.

方程组 $\mathfrak{a}$ 称为在积分点 $z\in J^r(\pi)$ 处是对合的 (involutive) ([A1]), 如果以下两个条件满足的话: i) 对 $\mathfrak{a}$ 在 z 的零点, $\mathfrak{a}$ 是一个正则局部方程 (regular local equation), (即在 z 的一个开邻域 U 中, 有 $\mathfrak{a}$ 的局部截面 $s_1,\cdots,s_l\in\Gamma(U,\mathfrak{a})$, 使得 $\mathfrak{a}$ 在 U 中的积分点正是使 $s_j(z')=0$ 的点 z', 而且 $ds_1,\cdots,ds_l$ 在 z' 处线性无关); ii) 存在 z 的一个邻域 U,使得 $\pi_{r+1,r}^{-1}(U)\cap J(p(\mathfrak{a}))$ 是 $U\cap J(\mathfrak{a})$ 上的纤维流形 (以 $\pi_{r+1,r}$ 为投射). 对于由线性无关的 Pfaf 形式 $\theta^1,\cdots,\theta^k$ 生成的方程组 $\mathfrak{a}$ (即 Pfaf 方程组, 见 **Pfaf 问题** (Pfaffian problem)), 这等价于在对合分布 (involutive distribution) ([A2], [A3]) 中定义的对合性. 和那种对合性的场合一样, 需要讨论解.

令 $\mathfrak{a}$ 为一定义在 $J^r(\pi)$ 上的方程组,并设 $\mathfrak{a}$ 在 $z\in J(\mathfrak{a})$ 处为对合的. 这时有 z 的一个邻域 U 满足以下条件. 若 $\bar{z}\in J(p^t(\mathfrak{a}))$ 且 $\pi_{r+t,r}(\bar{z})$ 在 U 中, 则有 $\mathfrak{a}$ 的定义在 $x=\pi_{r+t,-1}(\bar{z})$ 的一个邻域上的解 f, 使在 x 处 $J^{r+t}(f)=\bar{z}$.

Cartan-倉西延拓定理 (Cartan-Kuranishi prolongation theorem): 设有 $p^t(\mathfrak{a})$ 的积分点 z^t 序列 ($t=0,1,\cdots$)能彼此互相投射 ($\pi_{r+t,r+t-1}(z^t)=z^{t-1}$) 而且:a) $p^t(\mathfrak{a})$ 是 $J(p^t(\mathfrak{a}))$ 在 z^t 处的正则局部方程; b) 有 z^t 在 $p^t(\mathfrak{a})$ 中的一个邻域 U^t, 其在 $\pi_{r+t,r+t-1}$ 下的投射包含 z^{t-1} 在 $J(p^{t-1}(\mathfrak{a}))$ 中的一个邻域, 而且 $\pi_{r+t,r+t-1}:U^t\to\pi_{r+t,r+t-1}(U^t)$ 是一纤维流形. 于是, 当 t 充分大时 $p^t(\mathfrak{a})$ 在 z^t 处是对合的. 这个延拓定理在无限维 Lie 群的 Cartan-Lie 理论中有重要应用. 这个定理已推广到包含更一般的情况 ([A4]).

参考文献

[A1] Kuranishi, M., On E. Cartan's prolongation theorem of exterior differential systems, *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 1-47.

[A2] Kuranishi, M., Lectures on involutive systems of partial differential equations, Soc. Mat. São Paulo, 1967.

[A3] Singer, I. M. and Sternberg, S., The infinite groups of Lie and Cartan I. The transitive groups, *J. d'Anal. Math.*, 15 (1965), 1-114.

[A4] Matsuda, M., Cartan-Kuranishi's prolongation of differential systems combined with that of Lagrange-Jacobi, *Publ. Math. RIMS*, 3 (1967), 69-84.

[A5] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976. Sect. 2. 4.

齐民友 译

部分几何 [partial geometry; частичная геометрия]

一个关联结构 (关联系统 (incidence system)) $S=(P,L,I)$, 其点和线之间的关联关系是对称的并满足下述公理:

(1) 每一个点与 r 条线关联, $r\geqslant 2$, 并且两个不同的点至多与一条线关联;

(2) 每一条线与 k 个点关联, $k\geqslant 2$;

(3) 过不与线 l 关联的每一个点, 恰好有 $t\geqslant 1$ 条线与 l 相交.

如果一个部分几何由 v 个点和 b 条线组成, 则有

$$v=\frac{k[(k-1)(r-U+t)]}{t},$$

$$b=\frac{r[(k-1)(r-1)+t]}{t},$$

并且存在这样一个部分几何的必要条件是, $(k-1)\cdot(r-1)kr$, $k(k-1)(r-1)$ 和 $r(k-1)(r-1)$ 分别能被 $t(k+r-t-1)$, t 和 t 整除 (见[2]).

部分几何可以分为 4 类:

(a) $t=k$ 或 (对偶地) $t=r$ 的部分几何. 这一类的几何只是 2-$(v,k,1)$ 概形或 2-$(v,r,1)$ 概形 (见**区组设计** (block design));

(b) $t=k-1$ 或 (对偶地) $t=r-1$ 的部分几何. 在这情形下, 部分几何与 k 阶亏数为 1 或 $k-r+1$ (对偶地) 的网是同一回事;

(c) $t=1$ 的部分几何称为广义四边形 (generalized quadrangles);

(d) 满足 $1<t<\min(k-1,r-1)$ 的部分几何.

参考文献

[1] Bose, R. C., Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs, *Pacific J. Math.*, 13 (1963), 2, 389 – 419.

[2] Thas, J. A., Combinatorics of partial geometries and generalized quadrangles. in M. Aigner (ed). Higher Combinatorics, Reidel, 1977, 183 – 199.

[3] Thas, J. A., Construction of maximal arcs and partial geometries, *Geometrica Dedicata* 3 (1974). 1 61 – 64

В. В. Афанасьев 撰

【补注】 关于网亦见网(有限几何学中的)(net (in finite geometry)).

目前已知, d 类部分几何仅有两个无穷系列和几个零散的例子. 一个系列与射影平面的极大弧有关(见[3]), 另一个系列与特征为 2 的射影空间里的双曲二次曲面有关(见[A1]).

与强正则图(strongly regular graphs)有重要联系: 这个点图(部分几何的点视为顶点, 两个点相邻当且仅当它们在部分几何中共线)是一个强正则图, 见[1]. 这就使人们能把这类图的许多已知的存在性准则应用于部分几何. 关于强正则图和部分几何的一篇很好的综述见[A2], 此文包含了一些不存在性结果和对已知例子的描述. 关于广义四边形这一特殊情形, 已有专著, 见[A3].

参考文献

[A1] Clerck, F. de, Dye, R. H. and Thas, J. A., An infinite class of partial geometries associated with the hyperbolic quadric in PG $(4n-1, 2)$, *Europ. J. Comb.*, 1 (1980), 323 – 326.

[A2] Brouwer, A. E. and Lint, J. H. van, Strongly regular graphs and partial geometries, in D. M. Jackson and S. A. Vanstone (eds): Enumeration and design, Acad. Press, 1984, 85 – 122.

[A3] Payne, S. and Thas, J. A., Finite generalized quadrangles, Pitman, 1985.

[A4] Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A., Distance regular graphs, Springer, 1989.

[A5] Batten, L. M., Combinatorics of finite geometries, Cambridge Univ. Press, 1986, Chapt.7.

[A6] Lint, J. H. van, Partial geometries, in Proc. internat. Congress of mathematicians, Warsawa 1983, Vol. 2, PWN & North-Holland, 1984, 1579 – 1590.

刘振宏 译 李 乔 校

部分极限 [partial limit; частичный предел], 亦称子极限, 给定序列的

某子序列的极限(limit). 任何数列(以及有限维 Euclid 空间中的任何点列)至少有一个(有限或无限的)部分极限.

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

偏序 [partial order; частичный порядок]

见序(集合上的)(order (on a set)); 偏序集(partially ordered set).

本征值的部分问题 [partial problem of eigen values; частичная проблема собственных значений]

计算(一般为实或复的)方阵的一个或几个本征值及相应本征向量的问题.

在实际中最常见的是本征值部分问题的如下变形: 1)求绝对值最小(或最大)的一组本征值; 2)求与已知数 a 最近的一组本征值; 3)求位于已知区间 (α, β) 内的谱点(对于对称或 Hermite 矩阵而言).

求解一般矩阵本征值的部分问题的绝大部分方法都是建立在幂迭代思想或其变形——逆迭代的基础之上(见解矩阵本征值问题的迭代法(iteration methods)). 假如矩阵 A 有绝对值优势的一个本征值 $\lambda_{\max}$, 而 $x_{\max}$ 是相应的本征向量, 那么对于几乎任意的向量 v, 序列 $v, Av, A^2v, \cdots$, 收敛到 $x_{\max}$. 若要求本征值是绝对值最小时(问题 1), 则对于矩阵 A^{-1} 执行幂迭代(逆迭代法), 当求与 a 最近的本征值时(问题 2), 使用矩阵 $(A-aI)^{-1}$(位移的逆迭代法).

本征值的部分问题的最为重要的特殊情形是计算一个实对称或复 Hermite 矩阵 A 的本征值及相应的本征向量. 对此已有许多求解本征值的部分问题的有效数值方法, 这些方法基于完全不同的观点(见[1]). 其中包括了: 使用 Rayleigh 泛函的极值性质的方法(A 的最大和最小的本征值分别化为. 求 Rayleigh 商 $\varphi(A, z)=(Az, z)/(z, z)$ $(z \neq 0)$ 的最大值和最小值; 这些极值点在相应的本征向量上取到); 应用 Silvester 惯性律的方法(Sturm 序列方法和更一般的谱分解法); 最后是基于由形如 $v, Av, \cdots, A^{k-1}v$ 系的线性生成的 Крылов 子空间逼近性质的方法(Lanczos 方法及其变形). 应用中方法的选取依赖于多方面的考虑, 譬如问题的类型, 矩阵的阶数, 带状结构的可利用性, 谱的可知信息, 等等.

求解本征值的部分问题的方法, 无论是一般的情况还是 Hermite 情况, 都可以分为组方法和串行方法. 组方法的特点在于所求的本征值(以及相应的本征向量)的计算在某种意义上说是并行的, 这包括许多同时迭代的方法, Lanczos 方法和谱分解方法.

在串行方法中本征值是逐个确定的, 在此从第 2 个本征值起始, 必须保证往后的迭代不会收敛到已经得到的解. 与此有关的有不同的穷举(压缩)法([2]). 在某些情况下, 穷举法导致了构造矩阵 $\widetilde{A}$, 使得已经算完的 A 的本征值对应于零; 直至计算两个矩阵的谱相同时的那些本征值, 它们的本征向量亦如此. 在另外的情形下, 穷举法的结果是矩阵分裂, 接下去所求的本

征值可由低阶矩阵的计算得到．还有对非修正的矩阵 A 执行迭代法的情形，其中对于先前计算的本征向量实行正交化措施．穷举技巧亦能用到组方法．

参考文献

[1] Parlett, B., The symmetric eigenvalue problem, Prentice-Hall, 1980.

[2] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, 1969 (中译本：J. H. 威尔金森，代数特征值问题，科学出版社，1987).

X. Д. Икрамов 撰

【补注】 亦见**本征值的完全问题** (complete problem of eigen values).

参考文献

[A1] Golub, G. H. and Loan, C. F. van, Matrix computations, Johns Hopkins Univ. Press, 1983 (中译本：G. H. 格罗布、C. F. 万罗安，矩阵计算，大连理工大学出版社，1990).

张宝琳 袁国兴 译

部分递归函数 [**partial recursive function**; **частично рекурсивная функция**]，递归函数 (recursive function)

可计算函数 (computable function) 概念的等价精确化之一．

B. E. Плиско 撰

【补注】 亦见**部分递归算子** (partial recursive operator)；**递归函数** (recursive function).

杜小杨 译

部分递归算子 [**partial recursive operator**; **частично рекурсивный оператор**]

由所有一元函数的类到它本身的一个映射，其定义如下．令 Φ_z 是某**枚举算子** (enumeration operator)，对此算子人们自然地联系到另一施用于一元函数的算子 Ψ．更确切地说，每个函数 φ 有一图形——满足 $\varphi(x)=y$ 的一切对 (x, y) 之集合．给定一自然数对的编码方法，可把图形当作一自然数的集合 $\tau(\varphi)$．若 $\Phi_z(\tau(\varphi))$ 也是某函数 ψ 的图形，那么人们令 $\Psi(\varphi)=\psi$，否则 $\Psi(\varphi)$ 无定义．因此每个枚举算子 Φ_z 伴随一个部分递归算子 Ψ．

如果一个部分递归算子定义在一切函数上，则称为递归算子 (recursive operator)．定义在一切处处有定义的函数上且映射到处处有定义函数上的部分递归算子称为一般递归算子 (general recursive operator)．不是每个部分递归算子都可扩张成一个递归算子，每个一般递归算子都是一个递归算子，反之不成立．

参考文献

[1] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

B. E. Плиско 撰

【补注】 亦见**递归函数** (recursive function)；**可计算函数** (computable function).

杨东屏 译

偏序群 [**partially ordered group**; **частично упорядоченная группа**]

一个群 (group) G，在其上给定了一个**偏序** (partial order) $\leqslant$，使得对 G 中所有元素 a, b, x, y，不等式 $a \leqslant b$ 蕴涵 $xay \leqslant xby$.

偏序群中的集合 $P=\{x \in G: x \geqslant 1\}$ 称为 G 的正锥 (positive cone)，或整部分 (integral part)，并具有性质：1) $PP \subseteq P$; 2) $P \cap P^{-1}=\{1\}$; 以及 3) 对所有 $x \in G$, $x^{-1}Px \subseteq P$. G 的满足条件 1)－3) 的任意子集 P，导出 G 上以 P 为正锥的一个偏序 ($x \leqslant y$，当且仅当 $x^{-1}y \in P$)．

偏序群的例子．带有通常顺序关系的实数加群；由任意集合 X 到 $\mathbf{R}$ 内的函数群 $F(X, \mathbf{R})$，其运算为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

偏序关系为 $f \leqslant g$，如果对所有 $x \in X$, $f(x) \leqslant g(x)$；一个全序集 M 的所有自同构关于函数的合成的群 $A(M)$，具有序关系 $\varphi \leqslant \psi$，如果对所有 $m \in M$, $\varphi(m) \leqslant \psi(m)$，其中 $\varphi, \psi \in A(M)$.

偏序群理论的基本概念有：序同态 (见**序群** (ordered group))，**凸子群** (convex subgroup)，以及 Descartes 积和字典积．

偏序群的重要类有**全序群** (totally ordered group) 和**格序群** (lattice-ordered group).

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

B. M. Копытов 撰 卢景波 译 王世强 校

偏序集 [**partially ordered set**; **частично упорядоченное множество**]

一个非空集合，在其上定义了一个**序关系** (order relation).

偏序集的例子．1) 带有通常顺序关系的自然数集；2) 自然数集，其中 $a \leqslant b$ 意味着 a 整除 b；3) 一个集合的所有子集构成的集合，其中 $a \leqslant b$ 意味着 $a \subseteq b$；4) 区间 $[0, 1]$ 上的全体实值函数的集合，其中 $f \leqslant g$ 意味着对所有 $t \in [0, 1]$, $f(t) \leqslant g(t)$；5) 自然数的所有有限递增序列的集合，其中

$$(a_1, \cdots, a_k) \leqslant (b_1, \cdots, b_l)$$

意味着 $k \leqslant l$，并且 $a_i=b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ (见**树** (tree))；6) 任意非空集合，其中 $a \leqslant b$ 意味着 $a=b$ (此种集合称为平凡偏序集 (trivial partially ordered set) 或离

散偏序集（discrete partially ordered set）

每一个偏序集 P 可以看成是一个**小范畴**（small category），其中对象是 P 的元素，并且如果 $a \leqslant b$，射集 $H(a, b)$ 由一个元素构成，否则 $H(a, b)$ 为空集．反之，对每一个对象对 (a, b)，$H(a, b) \cup H(b, a)$ 至多包含一个元素的每一个小范畴等价于一个偏序集的范畴．

如果在偏序集 P 上定义一个关系 $\trianglelefteq$ 使得 $a \trianglelefteq b$，当且仅当 $b \leqslant a$，那么这个关系也是一个序关系．这样得到的集合称为 P 的相反偏序集（opposite partially ordered set）或对偶偏序集（dual partially ordered set）．

从偏序集 P 到偏序集 P' 内的一个映射 φ 称为保序的（反序的），或（反）同态的，如果在 P 中 $a \leqslant b$ 蕴涵在 P' 中

$$\varphi(a) \leqslant \varphi(b)\ (\varphi(b) \leqslant \varphi(a)).$$

一个一一映射的（反）同态称为（反）同构．偏序集 P 到自身的恒等映射是 P 和它的对偶之间的一个反同构．同构是**剩余映射**（residual mapping）的特殊情况．两个反同态的复合是一个同态．如果把保序映射取作射，那么全体偏序集构成一个**范畴**（category）．一个偏序集的每一个非空子集关于其导出序关系形成一个偏序集．

如果 A 是偏序集 P 的一个非空子集，那么下锥（lower cone）$A^{\triangledown}$（上锥（upper cone）$A^{\vartriangle}$）定义为：对一切 $a \in A$，使得 $x \leqslant a\ (a \leqslant x)$ 成立的 P 中元素 x 全体所成的集合．如果 $a, b \in P$，并且 $a \leqslant b$，子集

$$[a, b] = a^{\vartriangle} \cap b^{\triangledown} = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为区间（interval）或线段（segment）．锥 $a^{\vartriangle}$ 和 $a^{\triangledown}$ $(a \in P)$ 也常常称为区间．子集 A 的元素 u 称为最大的（greatest）（最小的（least）），如果对所有元素 $a \in A$，$a \leqslant u\ (u \leqslant a)$．在这种情况下，$u$ 是交集 $A \cap A^{\vartriangle}$ $(A \cap A^{\triangledown})$ 中唯一的元素．偏序集 P 中的最大（小）元（如果存在）称为 P 的一个单位元（unit）（零元（zero）），用 $1\,(0)$ 表示．子集 A 的元素 m 称为极大的（maximal）（极小的（minimal）），如果对任意元素 $x \in A$，$m \leqslant x\ (x \leqslant m)$ 仅仅在 $m = x$ 时才成立．换句话说，

$$m^{\vartriangle} \cap A = m\ (m^{\triangledown} \cap A = m).$$

一个最大（小）元是极大（小）元．反之未必成立．上（下）锥 $A^{\vartriangle}(A^{\triangledown})$ 的最小（大）元称为子集 A 的最小上界（least upper bound）（最大下界（greatest lower bound）），用 $\sup A$ $(\inf A)$ 表示．重述这个定义：如果对一切 $a \in A$，有 $u \geqslant a$，并且当对一切 $a \in A$，$u' \geqslant a$ 时，必有 $u' \geqslant u$，则 $u = \sup A$．对 $\inf A$ 亦类似．如果 P 是一个链，那么上面的条件可以表示为："当 $u' < u$，总有某一 $a_u \in A$，使 $u' < a_u$"，这和数学分析中是一样的．$A^{\vartriangle}(A^{\triangledown})$ 中的元素时常称为子集 A 的上（下）界．显然 $1 = \sup P$，并且 $0 = \inf P$．通常约定 $\sup \varnothing = 0$，$\inf \varnothing = 1$．下列性质成立：

a）如果 $A \subseteq B$，那么 $B^{\vartriangle} \subseteq A^{\vartriangle}$，并且 $B^{\triangledown} \subseteq A^{\triangledown}$；

b）$A \subseteq A^{\vartriangle\triangledown} \cap A^{\triangledown\vartriangle}$；

c）$A^{\vartriangle} = A^{\vartriangle\triangledown\vartriangle}$，$A^{\triangledown} = A^{\triangledown\vartriangle\triangledown}$；

d）$(A \cup B)^{\vartriangle} = A^{\vartriangle} \cap B^{\vartriangle}$；

e）$(A \cup B)^{\triangledown} = A^{\triangledown} \cap B^{\triangledown}$；

f）如果 $\sup A$ 或者 $\inf A^{\vartriangle}$ 存在，那么 $\sup A = \inf A^{\vartriangle}$；

g）如果 $\inf A$ 或者 $\sup A^{\triangledown}$ 存在，那么 $\inf A = \sup A^{\triangledown}$；

h）（广义结合性）如果 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 是偏序集 P 的子集的集合，并且对所有 $\alpha \in I$，$\sup(\bigcup_\alpha A_\alpha)$ 和 $\sup A_\alpha$ $(\inf(\bigcup_\alpha A_\alpha)$ 和 $\inf A_\alpha)$ 都存在，那么

$$\sup(\textstyle\bigcup_\alpha A_\alpha) = \sup\{\sup A_\alpha\},$$

$$(\inf(\textstyle\bigcup_\alpha A_\alpha) = \inf\{\inf A_\alpha\});$$

i）如果 φ 是偏序集 P 到偏序集 P' 中的一个保序映射，$A \subseteq P$，并且 $\sup A$ 在 P 中和 $\sup \varphi(A)$ 在 P' 中（$\inf A$ 在 P 中和 $\inf \varphi(A)$ 在 P' 中）都存在，那么 $\sup \varphi(A) \leqslant \varphi(\sup A)$ $(\varphi(\inf A) \leqslant \inf \varphi(A))$．

上面介绍的某些定义和结果，把符号 $\leqslant$ 换为 $\geqslant$，可以从一个得到另一个．例如，这个方法可以用到上锥和下锥的定义中；最大元和最小元的那些定义中．此种概念称为对偶的．特别地，命题 d）和 e）是对偶的，命题 f）和 g）同样是对偶的．所有这些在一般对偶原理中得以表达（见**偏序集中的对偶原理**（duality principle））．

偏序集的特殊形式有全序集（或链），良序集，有向集，格，半格和 Boole 代数（见 **Boole 代数**（Boolean algebra）；**有向集**（directed set）；**格**（lattice）；**半格**（semi-lattice）；**全序集**（totally ordered set）；**良序集**（well-ordered set））．对代数结构，偏序集也起着重要作用（见**序半群**（ordered semi-group）；**偏序群**（partially ordered group）；**序环**（ordered ring））．偏序集概念是一般数学最基本的概念之一，在数学及其应用中都有广泛的用处．

偏序集的定义首先由 F. Hausdorff（[11]）条理清楚地提出，虽然出现在序关系中的公理为 G. Leibniz 大约在 1690 年考虑过．全序集的确切定义首先由 G. Cantor 给出（[10]）．在同一著作中他定义了全序集的序型概念，也就是现代术语中的同构于一个给定全

序集的所有全序集的类. Cantor 甚至更早地考虑了良序集([9]), 虽然他给出的定义与近代的不同. 全序集公理化定义的最早的方法是 С. О. Шатуновский 提出的([6], [7]). 在与数学分析的一般极限定义相联系时, Шатуновский 使用了序集([8]), 并且 E. H. Moore 和 H. L. Smith([12]) 也使用了序集.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer. Math. Soc., 1973.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of sets, Addison-Wesley, 1968(译自法文).

[3] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973(中译本: А. Г. 库洛什, 一般代数学讲义, 上海科学技术出版社, 1964).

[4] Розен, В. В., Частичные операции в упорядоченных множествах, Саратов, 1973.

[5] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982(英译本: Skornyakov, L. A., Elements of lattice theory, A. Hilger, 1977).

[6] Шатуновский, С. О., 《Записки новороссийского об-ва естествоиспытателей》, 26 (1904), 21 – 25.

[7] Шатуновский, С. О., 《Тр. 1 Всероссийского съезда преподавателей математики》, 1 (1913), 276 – 281.

[8] Шатуновский, С. О., Введение в анализ, Од., 1923.

[9] Cantor, G., Ueber unendliche Punktmannigfaltigkeiten, V, *Math. Ann.*, **21** (1883), 545 – 591.

[10] Cantor, G., Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, I, *Math. Ann.*, **46** (1895), 481 – 512.

[11] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914(中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960).

[12] Moore, E. H. and Smith, H. L., A general theory of limits, *Amer. J. Math.*, **44** (1922), 102 – 121.

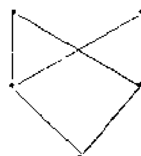
亦见格(lattice)的参考文献[6] – [9].

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 称一个偏序集(poset)满足极大条件(maximum condition), 如果它的每一个元素的递增的链是稳定的, 即如果 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots$, 那么对所有充分大的 $n > m$, $a_n = a_m$. 此种集合也称 Noether 偏序集(Noetherian poset). 与此对偶地, 有极小条件(minimum condition)和 Artin 偏序集(Artinian poset).

英文单词 join 和 meet(或 supremum 和 infimum)时常用来分别代替 "least upper bound" (最小上界)和 "great lower bound" (最大下界).

有限偏序集的一个有用的图形表示由它的 Hasse 图(Hasse diagram)提供. Hasse 图是一个图(graph), 基础集(偏序集的元素集)的每一个元素对应于图的一个顶点. 如果 $a<b$(此处 $a<b$ 像通常一样表示 "$a \leqslant b$ 且 $a \neq b$")并且没有元素 c 适合 $a<c<b$, 那么图上有一条边联结对应于元素 a 与 b 的顶点(b 对应的顶点在图上置于比 a 对应的顶点更高的位置). 例如, 下图表示一个有最小元但无最大元的五元偏序集.



利用传递性, 可以从此图看出全部的序关系: $a \leqslant b$, 当且仅当存在一条由对应于 a 的顶点到对应于 b 的顶点的上升的路.

偏序集的应用理论比偏序集的纯理论有更大的数学意义. 偏序自然地出现于数学的所有分支中. 概括地说, 数学对象的偏序集有两个主要类型: 问题的部分解, 用相容扩张序化——这里希望有一个极大的, 实际上是完全的解; 有关对象的图示, 目的仅仅是为了分析.

选择及相关选择. 选择公理(axiom of choice)的应用大概多数涉及公理的序理论形式, 主要有: α) 极大原理(maximality principle)(亦称 **Zorn 引理**(Zorn lemma)): 如果偏序集 X 包含它的每一个全序子集的上界, 那么 X 有一个极大元. β) 一种变形: 每一个偏序集包含一个极大全序子集. γ) Teichmüller-Tukey 原理(Teichmüller-Tukey principle): 如果关于由 A 到 B 的部分函数的一个条件族仅仅涉及它们在 A 的有限子集上的值, 那么存在一个极大部分函数满足这些条件. α) – γ) 中每一个都等价于选择公理.

相关选择原理(principle of dependent choice)(亦称 Brouwer 无穷引理(Brouwer infinity lemma), König 选择定理(König selection theorem))是: 假设给定非空有限集的一个无穷序列 S_n 和对某些对 (x, y) 成立的一个关系 R, 其中 $x \in S_n$, $y \in S_{n+1}$. 假定对每一个 $y \in S_{n+1}$, 至少存在一个 $x \in S_n$, 使得 $R(x, y)$ 成立, 那么存在一个序列 (x_n), $x_n \in S_n$, 使得对所有 n, $R(x_n, x_{n+1})$ 都真. 相关性选择的一个典型应用是用四种颜色给一幅无限平面地图 M 着色. 用任意顺序枚举 M 的区域, 设 M_n 是由前 n 个区域构成的子地图; 设 S_n 是 M_n 的可容许的着色法的集合. 关系 R 是扩张; M_{n+1} 的每一个着色法(唯一地)扩张了 M_n 的一个着色法. 由四色定理(见图的着色(graph colouring); **四色问题**(four-colour problem)), 每一个 S_n 是非空的. 因此, 存在子图 M_n 着色法的一相容序列 (x_n), 因为每一个 x_{n+1} 是 x_n 的一个扩张. 这就决定了 M 的一个着色法.

组合学．在有序对象或对象的图的组合学中，除了反常情况之外，偏序的作用通常与结构的其余部分是不可分离的．由 G．C．Rota 及其合作者在 1964－1974 年间发表的九篇系列论文"On the foundations of combinatorial theory Ⅰ－Ⅸ"中对此有简洁说明．论文Ⅰ([A4])加了副标题"Theory of Mobius functions"(在适当意义下，有限或局部有限的)偏序集 X 的 Möbius 函数(Möbius function)是一个两个变元 x，$y\in X$ 的整值函数 μ，除 $x\leqslant y$ 外，μ 的值为 0．其特征性质是，类似于数论中的 **Mobius 函数**(Möbius function)，它把值在一个加群中的函数 $f: X\to G$ 的求和过程反演到由 $f^*(y)=\sum[f(x): x\leqslant y]$ 定义的和函数 $f^*: X\to G$．公式为 $f(y)=\sum[f^*(x)\mu(x,y): x\leqslant y]$．这些 Mobius 函数频频出现在上述一系列文章及其他很多地方．

在纯序理论中，例外地有组合学的一个基本定理，那就是 R．Dilworth 定理(theorem of R．Dilworth)：一个偏序集是 n 个全序子集的并集，当且仅当它不包含 $n+1$ 个两两不可比较的元素．在**组合分析**(combinatorial analysis)中提到这个定理，然而却被等同于关于不同代表系统的 P．Hall 定理．注意两者的根本区别：Dilworth 定理对任意偏序集都成立，其中 n 是有限的([A2])．Hall 定理仅仅适用于有限集族的不同代表系统．关于 Dilworth 定理的有关内容，见[A1]．

有时自然出现的偏序集的性质是研究的中心问题．例如，很多研究致力于 Куратовский 定理的扩充，这个定理是说用嵌入序化的非平面有限图的拓扑型集合恰有两个极小元(见**可平面图**(graph, planar)；**图论**(graph theory))．与很多情形一样，这里自然给出的序关系仅仅是一个拟序(quasi-ordering)(见**前序**(pre-order))，即一个自反的，传递的关系．集合 X 的每一个拟序决定等价关系"$x\leqslant y$ 并且 $y\leqslant x$"的等价类上的一个偏序．因此，对良拟序集(well-quasi-ordered set)：不包含两两不可比较的无限子集，并且没有无限严格递减序列的拟序集 X 感兴趣．这时，在与之相伴的等价类偏序集中，每一非空子集的极小元素集是非空有限子集．N．Robertson 和 P．Seymour 宣布了下列定理——是一些已有结果的扩充——利用减缩图的包含关系，有限图是良拟序的(这里图 G 的减缩图(见**图的减缩图**(minor of a graph))是由 G 的子图通过收缩一些边而得)．证明将在一组长系列论文中发表．前九篇已在[A3]中预告．到目前为止，其中六篇已经发表．

良拟序是无限偏序集组合学的起源，后者是**集合论**(set theory)的一个分支，它有一些给人留下深刻印象的结果，但同数学的大部分领域联系不多．然而无限偏序集的另一个侧面是拓扑学和泛函分析的基础：这就是网收敛(见**网(有向集)**(net (directed set)))．通常序列收敛中的子序列的作用由子网(subnet)代替，它由有向集之间的收敛映射(convergent mapping)实现，也就是映射 $f: D\to E$，使得 D 的每一共尾子集的象在 E 中共尾．共尾子集 $D\subseteq E$ 的效用是不充分的(不如对序列的共尾子集那样)．然而有 J．W．Tukey 定理(J．W．Tukey theorem)：如果 D 和 E 都是有向集，并且存在收敛映射 $f: D\to E$ 和 $g: E\to D$，那么存在一个有向集 F 使得 D 和 E 都能作为共尾子集嵌入其中(反之亦真)．在这种情况下称 D 和 E 是共尾相似的(cofinally similar)，或者称作具有相同共尾型(cofinal type)．

共尾型的分类处于待开发状态．没有最大元的所有可数有向集是一个共尾型．主要的进一步的结果有：A)仅存在三个由势为 $\aleph_1$ 的有向集表示的共尾型(即 ω_1，$\omega_0\times\omega_1$ 及 ω_1 的有限子集所成的集合)，这一命题与集合论的公理(ZFC)是相容的；但是，B)存在 2^c 个不同的，具有连续统势 c 的有向集的共尾型，也是与 ZFC 相容的．见[A5]．

参考文献

[A1] Aigner, M., Combinatorial theory, Springer, 1979.

[A2] Dilworth, R. P., A decomposition theorem for partially ordered sets, *Ann. Math*, (2) **51** (1950), 161－166.

[A3] Robertson, N. and Seymour, P., Graph minors-a survey, in surveys in Combinatorics 1985, Cambridge Univ. Press, 1985, 153－171.

[A4] Rota, G. C., On the foundations of combinatorial theory. Ⅰ Theory of Möbius functions, *Z. Wahrsch*, **2** (1964), 340－368.

[A5] Todorčević, S., Directed nets and confinal types, *Trans. Amer. Math. Soc*, **290** (1985), 711－723.

[A6] Gratzer, G, General lattice theory, Birkhäuser, 1978.

卢景波 译 王世强 校

粒子方法[particle method; частиц метод]

模拟连续或离散介质运动的数值实验方法．许多粒子方法采用介质运动的 Euler-Lagrange 或 Lagrange 描述．为求解可压缩介质运动方程组，应用最广泛的是在研究气体和液体的单相和多相的均质和非均质的流动时使用的**大粒子方法**(large-particle method)(见[1])．粒子方法包括自由点方法(free-point method)(见[1]，[2])，在该方法中没有固定的模式．最先的不完全的粒子方法之一是粒子网格法(particle-in-cell method)(PIC 方法，见[3])，它使用两种计算格网，即 Euler 和 Lagrange 格网．由于连续介质的离散表示，该方法通常引起解严重振荡．为了减小振

荡．在空间一维情况下采用粒子层方法．与 PIC 方法相近的是有不良耗散性质的 FLIC 方法（见[4]）．当对不可压缩介质作计算时，使用 MAC 方法（见[5]）和 SMAC 方法（见[6]），在这里粒子起着区分介质之间分界面的标志点作用．诸粒子方法已被广泛应用于湍流的描述，稀薄气体动力学，以及电动力学和其他问题的求解（见[1]、[7]）．

参考文献

[1] Белоцерковский, О. М., Давыдов, Ю. М., Метод крупных частиц в газовой динамике, М., 1982.

[2] Дьяченко, В. Ф., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ》, 5 (1965), 4, 680 – 688.

[3] Evans, M. W. and Harlow, F. H., The particle-in-cell method for hydrodynamical calculations, Los Alamos, 1957.

[4] Gentry, R. A., Martin, R. E. and Daly, B. J., *Comput. Phys.*, 1 (1966), 1, 87 – 118.

[5] The MAC-method, Los Alamos, 1966.

[6] Amsden, A. A. and Harlow, F. H., The SMAC-method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flows, Los Alamos, 1970.

[7] Березин, Ю. А., Вшивков, В. А., Метод частиц в динамике разреженной плазмы, новосиб., 1980

Ю. М. Давыдов 撰

【译注】 还有 GILA 方法（见[B1]），它采用无质量粒子作为标志点跟踪物质交界面的运动．该方法能够计算从低亚声速到高超声速的介质流动．

参考文献

[B1] Harlow, F. H. and Amsden, A. A., Multifluid flow calculations at all Mach numbers, *J. Comput. phys.*, 16 (1974), 1 – 19

李维新 译

分划 [partition; перегородка]

拓扑空间 X 的闭集 E，在两个已知集合 P 和 Q 之间分划 X（换言之，把 P 和 Q 在 X 中隔开），即 $X\setminus E = H_1 \cup H_2$，这里 H_1 和 H_2 是 $X\setminus E$ 中互不相交的开集，而 $P\subset H_1$、$Q\subset H_2$（结果 P 和 Q 是整个 X 中的开集）．一个分划称为精良的，如果其内部是空集．空间 X 的任何二元**分解**（decomposition）（即是由两个元素组成的分划）$\alpha=(A_1, A_2)$ 都在 X 中确定一个精良分划：$B = A_1$ 的边界 $= A_2$ 的边界，这里 $X\setminus B = O_1\cup O_2$，而 O_i 是 $A_i (i=1,2)$ 的开核（见**集合的核**（kernel of a set）），反之亦然．实际上，集合之间分划的概念导致连通的概念．反之亦然：空间 X 是不连通的，如果 $\varnothing$ 是非空集合之间的分划．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 这方面的有关概念是隔离子和切口．

若 A 和 B 是空间 X 中互不相交的子集，则 A 和 B 之间的隔离子（separator）是指一个集合 S，使得 $X\setminus S = U\cup W$，其中 U 和 W 是 $X\setminus S$ 中互不相交的开集，而 $A\subseteq U$、$B\subseteq W$．因此，分划是闭的隔离子．

集合 C 是 A 和 B 之间的切口（cut），如果与 A，B 两者都相交的任何**连续统**（continuum）也和 C 相交．

容易看出，任何分划是一个隔离子，任何隔离子是一个切口．下述例子表明，这些概念一般是有区别的．开区间 $(0,1)$ 是区间 $[0,1]$ 中在 $\{0\}$ 和 $\{1\}$ 之间的隔离子，但却不是分划；在 Euclid 空间的著名子空间 $\{0\}\times[-1,1]\cup\{(x, \sin 1/x): 0<x\leqslant 1\}$ 中，点 $(0,0)$ 是点 $(0,-1)$ 和 $(1,\sin 1)$ 之间的切口，但却不是隔离子．

参考文献

[A1] Engelking, R., Dimension theory, PWN and North-Holland, 1978.

胡师度 白苏华 译

分拆 [partition; разделение]、正整数 n 的

【补注】 把 n 表为正整数之和的一种分解．例如，4 的分拆为 $4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$．$n$ 的不同分拆的个数记为 $p(n)$．故 $p(4)=5$．J. Euler 给出了 $p(n)$ 的一个非平凡的递归关系（[A1]），Ramanujan 发现了令人惊奇的同余关系 $p(5m+4)\equiv 0 \pmod 5$，$p(7m+5)\equiv 0\pmod 7$，$p(11m+6)\equiv 0 \pmod{11}$．等等．他还找到了渐近关系

$$p(n)\sim \frac{e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}}, n\to\infty,$$

其中 $K=\pi\sqrt{2/3}$．后来，H. Rademacher 给出了精确的级数展开式（[A2]）．

人们也研究具有特殊性质的其他分拆，例如用不同的分解来研究整数（[A3]）．亦见**加性数论**（additive number theory）；**加性问题**（additive problems）．

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

[A2] Apostol, T. M., Modular functions and Dirichlet series in number theory, Springer, 1976.

[A3] Andrews, G. E., The theory of partitions, Addison-Wesley, 1976.

胡师度 白苏华 译

Pascal 分布 [Pascal distribution; Паскаля распределение]

取非负整数值 $k=0,1,\cdots$ 的随机变量 X 的一种离散型**概率分布**（probability distribution）：

$$\mathrm{P}\{X=k\}=\binom{r+k-1}{r-1}p^r(1-p)^k,$$

其中参数为 $p(0<p<1)$ 和整数 $r>0$.

Pascal 分布的母函数和特征函数相应为

$$P(z)=p^r(1-qz)^{-r}$$

和

$$f(t)=p^r(1-qe^{it})^{-r},\ q=1-p.$$

数学期望和方差分别为 rq/p 和 rq/p^2. 参数为 r 和 p 的 Pascal 分布, 自然地产生于"成功"概率为 p 而"失败"概率为 $1-p$ 的 **Bernoulli 试验** (Bernoulli trials) 情形中, 它描绘在第 r 次成功之前失败次数的概率分布. 对于 $r=1$, Pascal 分布就是参数为 p 的**几何分布** (geometric distribution); 对于 $r>1$, Pascal 分布是独立同服从参数为 p 的几何分布的、随机变量之和的分布. 因此, 假如独立随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 分别服从参数相应为 p 和 $r_1,\cdots,r_n$ 的 Pascal 分布, 那么它们之和服从参数为 p 和 $r_1+\cdots+r_n$ 的 Pascal 分布.

Pascal 分布的分布函数, 对于 $k=0,1,\cdots$, 形如

$$F(k)=\frac{1}{B(r,k+1)}\int_0^p x^{r-1}(1-x)^k dx,$$

其中右侧是 **B 分布** (beta-distribution) 函数在点 p 的值 (式中 $B(r,k+1)$ 是 B 函数). 可以利用该式对于一切 $r>0$, 定义 $F(k)$. 在此广泛意义下, Pascal 分布称做**负二项分布** (negative binomial distribution).

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, Wiley, 1957 (中译本: W. 费勒, 概率论导引及其应用, 科学出版社, 上册, 1964).

A. B. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

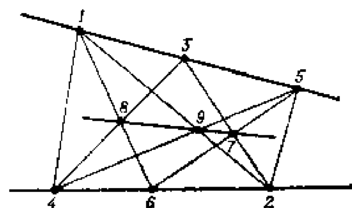
[A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Distributions in statistics: discrete distributions, Houghton Mifflin, 1970.

周概容 译

Pascal 几何学 [Pascal geometry; Паскалева геометрия]

建立在一个域 (交换除环) 上的一种平面几何学. 这个名称来源于下述事实, 即在这种几何学里, Pappus-Pascal 命题 (Pappus-Pascal proposition) 的构形成立: 如果点 1,3,5 与 2,4,6 分别位于同一直线上 (分别是共线的), 那么线对 (1,2) 与 (4,5), (2,3) 与 (5,6), (3,4) 与 (6,1) 的三个交点 —— 比如说 9,7 与 8 —— 也位于同一线上, 其中每一直线上的三个点是任意选取的 (见图).

这个命题最重要的特殊情形 (在一仿射平面内) 断言: 如果直线 (1,2) 平行于 (4,5) 且 (2,3) 平行于 (5,6), 那么 (3,4) 与 (6,1) 也是平行的.



在平面内 Pascal 几何学能够建立在无限或有限域上, 并且该平面称为无限或有限 Pascal 平面 (Pascal plane).

D. Hilbert 在 [1] 里首先研究了 Pascal 的命题在建立无限域上的几何体系时的重要作用. 对于不同于 Euclid 几何学公理系统的各种公理集合, 他确立了 Pascal 命题的可证明性: 他也证明了在无限平面内的 **Pascal 定理** (Pascal theorem) 能够从关联、顺序、合同、平行与连续性的平面公理推出, 并且指出在此情形不用连续性公理则不能证明 Pascal 的定理.

依据空间中的 Hilbert 公理系统, Pascal 定理能够不用合同公理而被证明, 但必须用连续性公理. (在无限平面内删除连续性公理导致非 **Pascal 几何学** (non-Pascalean geometry).) 证明 Pascal 定理的可能性在一定意义下类似于应用空间公理证明 **Desargues 假定** (Desargues assumption) 的可能性. 然而, 在证明 Pascal 的定理时, 无限平面中的 Archimedes 连续性公理显示出特殊的作用 (见非 **Archimedes 几何学** (non-Archimedean geometry)).

Pappus-Pascal 命题在一平面内射影地成立, 当且仅当在这个平面的所有自然除环里乘法是交换的; 换句话说: 每一个 Pascal 平面的自然除环是一个域, 反过来, 建立在域上的一个平面有一种 Pascal 几何学. 所以后者有时称为具有交换乘法的几何学 (geometry with commutative multiplication). 这样, 在一个 Pascal 平面内 Pappus-Pascal 命题的构形有一个代数解释: 它表示建立平面的集合中乘法的交换性.

在任何射影平面内 Pappus-Pascal 定理蕴涵 Desargues 定理.

正如有限**射影平面** (projective plane), 存在有限 Pascal 平面, 当且仅当该平面的每一直线上的点的个数是 p^s+1, 这里 p 是一个素数, s 是一个自然数.

由于每一个有限交错除环是一个域, 在一有限平面内 Desargues 定理蕴涵 Pappus-Pascal 定理, 并且后者是所谓的小 Desargues 定理的一个推论. 然而, 存在有限射影非 Pascal 平面. 一个 Pascal 平面同构于它的对偶.

Pascal 几何学的价值在于它在研究公理系统, 特别是研究 Euclid 几何学的 Hilbert 公理系统的独立性中的作用. 在以关联、顺序与平行等公理组的基础上无限

平面的构造中, Pappus-Pascal 命题必须当作一个附加的公理. 另一方面, 借助于有限多个 Pappus-Pascal 构形的组合能够解决只用关联概念的构造问题.

参考文献

[1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913 (中译本: D. 希尔伯特, 几何基础, 第二版, 科学出版社, 1995).

[2] Bieberbach, L., Einleitung in die hohere Geometrie, Teubner, 1933.

[3] Скорняков, Л. А., 《Успехи матем наук》, 6 (1951), 6, 112 – 154

[4] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.

[5] Reidemeister, K., Vorlesungen uber Grundlagen der Geometrie, Springer, 1968.

[6] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 代替 Pascal 几何学、平面等与非 Pascal 几何学、平面等, 在西方世界中通常说 Pappus 几何学、平面 (Pappian geometry, plane) 等与非 Pappus 几何学、平面 (non-Pappian geometry, plane) 等. Pappus-Pascal 命题通常称为 Pappus 定理 (Pappus theorem).

关于 Hilbert 公理见 **Hilbert 公理系统** (Hilbert system of axioms), 亦见**射影几何学** (projective geometry); **Pappus 公理** (Pappus axiom).

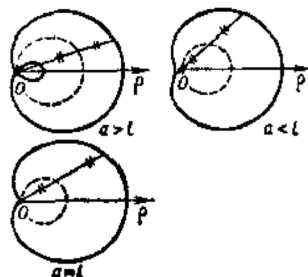
参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, 231 – 239.

林向岩 译 陆珊年 校

Pascal 蚶线 [Pascal limacon; Паскаля улитка]

一种四阶平面代数曲线; 直径 a 的圆的蚌线 (conchoid) (见图).



直角坐标下它的方程是

$$(x^2+y^2-ax)^2=l^2(x^2+y^2);$$

它在极坐标下是

$$\rho=a\cos\varphi+l.$$

坐标原点是二重点, 当 $a<l$ 时它是孤立点, 当 $a>l$ 时它是结点, 而当 $a=l$ 时它是尖点 (这时 Pascal 蚶线是**心脏线** (cardioid). 弧长可用第二类椭圆积分来表示. 由 Pascal 蚶线围成的面积是

$$S=\frac{\pi a^2}{2}+\pi l^2;$$

对于 $a>l$, 按此公式计算时内叶的面积必被重复计算. Pascal 蚶线是 **Descartes 卵形线** (Descartes oval) 的特例, 它是长短辐外**摆线** (trochoid).

E. Pascal 在 17 世纪前半期首先研究蚶线, 故此后就以他的名字命名.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1 – 2, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一卷 (1987), 第二卷 (1989), 科学出版社).

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1 – 3, Chelsea, reprint, 1971.

[A3] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, 1972, 113 – 118.

沈一兵 译

Pascal 定理 [Pascal theorem; Паскаля теорема]

二次曲线 (conic) 的内接六边形 (见**多边形** (polygon)) 的三对对边的交点处于同一直线 (Pascal 线 (Pascal line)) 上 (见图 1). 当两个相邻顶点重合时, 把通过它们的直线理解为在该点上的二次曲线的切线. 过内接五边形的一个顶点所作的二次曲线的切线与这个顶点的对边的交点处于五边形的其余两对不相邻边的交点的连线上 (见图 2).

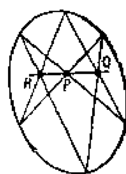


图 1

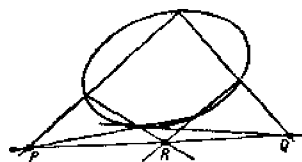


图 2

如果 $ABCD$ 是二次曲线的内接四边形, 则过顶点 C 和 D 的切线与边 AD 和 BC 的交点 R 和 Q, 以及 AB 与 CD 的交点 P, 处于同一直线上 (见图 3).

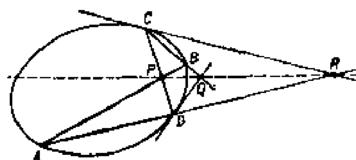


图 3

过二次曲线的内接三角形的三个顶点所作的三条

割线与顶点对边的交点处于同一直线上（图4）.

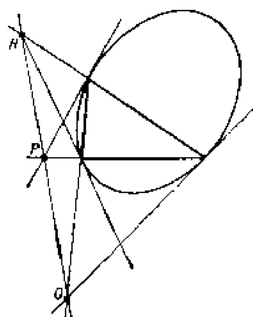


图 4

Pascal 定理的对偶定理是 **Brianchon 定理**（Brianchon theorem）. B. Pascal 于 1639 年证明了这个定理. 二次曲线退化为两条直线的特殊情况，甚至在古代就已知道（见 **Pappus 公理**（Pappus axiom））.

参考文献

[1] Глаголев, Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963.

[2] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978（中译本：Н. В. 叶菲莫夫，高等几何学，高等教育出版社，1956）.

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко 撰

【补注】

[A1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Teubner, reprint, 1968（中译本：D. 希尔伯特，几何基础，科学出版社，1995）.

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.

[A3] Coxeter, H. S. M., Projective geometry, Univ. Toronto Press, 1987, 85 – 90, 145 – 146.

[A4] Salmon, G., A treatise on conic sections, Longman, 1879, 267.

杜小杨 张鸿林 译

Pascal 三角形 [Pascal triangle; Паскаля треугольник]

由**二项式系数**（binomial coefficients）组成的一个表，其中，处于等边三角形的两侧边上的数都是 1，其余的数都是它上面一行中左、右两邻近数之和：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}
$$

1………………………………1

在第 $n+1$ 行上，出现的是二项式 $(a+b)^n$ 的展开式的系数. B. Pascal 在《论算术三角形》（Treatise on an arithmetical triangle, 1654）一书中给出的三角形表与上面表示的三角形表不同之处在于旋转了 90°. 二项式系数表实际上出现得比这还要早.

参考文献

[1] Успенский, В. А., Треугольник Паскаля, 2 изд., М., 1979（中译本：В. А. 乌斯片斯基，帕斯卡三角形，九章出版社，1998）.

[2] История математики, с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 2, М., 1970

В. И. Нечаев 撰

【补注】 在 B. Pascal 以前很久，一些数学家，例如 N. Tartaglia, M. Stifel 和 S. Stevin，就已经知道二项式系数三角形（binomial coefficients triangle）（算术三角形（arithmetical triangle）. 甚至更早，这个三角形就已出现在中国数学文献中（朱世杰《四元玉鉴》（1303）和杨辉《详解九章算法》（1261））以及阿拉伯文献中（Al - Kashi，15 世纪初）. 在西方文献中，这个三角形最早见于 Stifel 的《综合算术》（Arithmetica integra，1544 年出版）一书的书名页上，这比 Pascal 几乎早了一个世纪.

参考文献

[A1] Boyer, Ch., A history of mathmatics, Wiley, 1968.

[A2] Kline, M., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univ. Press, 1972（中译本：M. 克莱因，古今数学思想，上海科学技术出版社，1979 – 1981）.

【译注】 算术三角形最早出现在贾宪的《黄帝九章算经细草》（11 世纪上半叶）一书中，故应称为贾宪三角形.

参考文献

[B1] 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社，1992.

杜小杨 张鸿林 译

Pasch 公理 [Pasch axiom; Паша аксиома]

Euclid 几何学的 **Hilbert 公理系统**（Hilbert system of axioms）中顺序公理之一. 这一公理的陈述用到"在一条线段上（之间）"的概念. 这里的线段是指两个不同点 A 和 B 构成的系统；位于 A 和 B"之间"的点称为线段的点（或内部点）. 概念"之间"（在之间）由包括 Pasch 公理的一组顺序公理来描述. Pasch 公理可陈述如下：设 A, B 和 C 是不在同一直线上的三点，a 是平面 ABC 上的一条直线，a 不通过 A, B, C 三点中的任一点；如果直线 a 通过 A 与 B 之间的一点，则它必定也通过 A 与 C 之间的一点或 B 与 C 之间的一点.

这是**绝对几何学**（absolute geometry）的一条公理. 由 Hilbert 的其他顺序公理可以证明直线 a 不能同时与线段 AC 和 BC 都相交. M. Pasch 在 [1] 中表述了这一公理.

参考文献

[1] Pasch, M., Vorlesungen über neuere Geometrie, Springer, reprint, 1926.

[2] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Teubner, reprint, 1962 (中译本：D. 希尔伯特，第二版，几何基础，科学出版社，1995)

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 有时射影几何学（projective geometry）中的 Veblen-Young 公理（Veblen-Young axiom）被误称为 Pasch 公理.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, 178

【译注】 在 Hilbert 公理系统的关联公理与其他顺序公理的基础上，Pasch 公理与以下的剖面公理等价：

剖面公理 平面 α 上的每一直线 a 将 α 上不在 a 上的所有点分为两类，使得同类的两点之间无 a 上的点，异类的两点之间有 a 上的点.

参考文献

[B1] Martin, G. E., The foundation of geometry and the non-Euclidean plane, New York, 1972.

林向岩 译 陆珊年 校

道路 [path; путь]

区间 [0, 1] 到**拓扑空间**（topological space）X 的**连续映射**（continuous mapping）f. 点 $f(0)$ 和 $f(1)$ 称为道路 f 的起点（initial point）和终点（final point）. 给定 f，由公式 $t \mapsto f(1-t)$，$t \in [0, 1]$ 定义的道路称为 f 的逆道路（path inverse）并记为 f^{-1}. 给定 f_1 和 f_2 若满足 $f_1(1) = f_2(0)$，下式定义的道路称为道路 f_1 和 f_2 的复合（composite of the paths）并记为 $f_1 f_2$，

$$t \mapsto \begin{cases} f_1(2t), & t \leqslant 1/2 \\ f_2(2t-1), & t \geqslant 1/2. \end{cases}$$

在带有参考点 $*$ 的**道路连通空间**（path-connected space）X 中，起点为 $*$ 的所有道路的集合称为 X 的**道路空间**（path space）.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 一般说来，人们对空间中单个的道路并不怎么感兴趣，感兴趣的是道路的同伦类，即相对于 {0, 1} 的同伦等价类. 按这个等价关系，上面定义的复合满足结合律，而且 f^{-1} 是 f 的真正的逆元. 见**基本广群**（fundamental groupoid）.

更准确地说，可将道路定义为任一连续映射 $f: [0, r] \to X$，其中 $r \geqslant 0$ 称为道路 f 的长度（length of the path）. 如果 f_1 的长度为 r 而且 $f_2(0) = f_1(r)$，则 f_1 和 f_2 的复合 $f_1 f_2$ 由下式定义

$$f_1 f_2(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \leqslant r, \\ f_2(t-r), & r \leqslant t \leqslant r+s, \end{cases}$$

其中 f_2 的长度为 s. 这个复合满足结合律（而不仅仅是同伦结合律）.

参考文献

[A1] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology theory. An introduction to algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1965 (中译本：P. J. 希尔顿，S. 威理，同调论，上海科学技术出版社，1963)

潘建中 译 沈信耀 校

道路连通空间 [path-connected space; линейно связное пространство]

一个拓扑空间，其中任何两点均可用单位区间的连续映射联结起来，即是一个空间 X，对于其中任何两点 x_0 和 x_1，存在一个**连续映射**（continuous mapping）$f: I \to X$，I 是单位区间 [0, 1]，使得 $f(0) = x_0$，$f(1) = x_1$. 一个 Hausdorff 道路连通空间是一个 Hausdorff 空间，使得其中任何两点均可用简单弧联结起来，或者（完全一样），是一个 Hausdorff 空间，使得把零维球面映入其中的任何映射均同伦于常值映射. 每个道路连通空间都是**连通空间**（connected space）. 道路连通空间的连续象仍然是道路连通空间.

道路连通空间在同伦论中起着重要作用. 若空间 X 是道路连通的，而 $x_0, x_1 \in X$，则同伦群 $\pi_n(X, x_0)$ 与 $\pi_n(X, x_1)$ 同构，这个同构映射除了群 $\pi_1(X, x_0)$ 的作用外，是唯一确定的. 若 $p: E \to B$ 是一个纤维结构，其底空间 B 是道路连通的，则任何两个纤维均有同样的**同伦型**（homotopy type）. 若 $p: E \to B$ 是一个弱纤维结构（**Serre 纤维化**（Serre fibration）），其底空间 B 是道路连通的，则任何两个纤维均有同样的弱同伦型.

道路连通性的多维推广是 k 连通性（k-connectedness）（在维数 k 的连通性）. 空间 X 称为在维数 k 连通的（connected in dimension k），如果把 r 维球面 S^r ($r \leqslant k$) 映入 X 的任何映射均同伦于常值映射.

参考文献

[1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966 (中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987).

С. А. Богатый 撰

【补注】 连通空间不必是道路连通的. 下述论断不对：在任意道路连通空间中，任何两点均可用简单弧联结起来. 例如，考虑两点空间 {0, 1}，其中 {0} 是开集，{1} 不是开集. 定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x < \dfrac{1}{2}, \\ 1, & 若\ x \geqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

则映射 $f: I \to \{0, 1\}$ 是连续的，把 0 和 1 联结起

来．一个空间中如果任何两点均可用简单弧联结起来，则该空间称为弧连通的（arcwise connected）．于是，Hausdorff 道路连通空间是弧连通的．

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984（译自俄文）

[A2] Gray, B. Homotopy theory, Acad. Press, 1975, p 15ff, 130

胡师度 白苏华 译

道路积分 [path integral, континуальный интеграл]，亦称路径积分

见轨道积分（integral over trajectories）．

道路空间 [path space; путей пространство]

称为道路纤维空间（path fibre space）的纤维空间（E、p、X）里的空间 E．这里，X 是带有参考点 * 的**道路连通空间**（path-connected space），E 是 X 中起点为 * 的全体**道路**（path）的集合而 p 则是将每条道路映为它的终点的映射．此外，E 上的拓扑是紧开拓扑．这个纤维空间是一个 **Serre 纤维化**（Serre fibration），它的纤维是**闭路空间**（loop space）ΩX——即 X 中起点、终点均在 * 的所有**闭路**（loop）的集合．道路空间可在它自身内收缩到一个点，因而所有同伦群均为平凡的，$\pi_n(E)=0$，道路纤维空间的同伦序列退化为所谓 Hurewicz 同构（Hurewicz isomorphisms）：

$$\pi_n(\Omega X)\approx\pi_{n+1}(X).$$

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, 75ff, 99ff（中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）．

潘建中 译 沈信耀 校

模式识别 [pattern recognition; распознавание образов]

数学控制论（cybernetics）的一个分支，它设计对象的分类及鉴别的原则与方法．这里的对象指事物、现象、过程、信号与状况等一切可由有限个特征或性质来表征的东西．

一个对象（样本）由一个 n 维向量来描述，这里 n 是用以表征该对象的特征的个数；而该向量的第 i 个分量就是第 i 个特征的取值（$i=1, 2, \cdots, n$）．这个向量称为该样本的表征．在一个对象的描述中，允许不包含某些特征取值的信息．必须只基于对象的表征来将它们分成若干类（模式（patterns））；而这里类别数并不一定要指定．称不指定类别数的分类问题为分类学问题（taxonomy problem）（聚类分析（cluster analysis）、无教师学习（learning without a teacher）、自学习（self-education））．对正规的模式识别问题（有教师的学习（learning with a teacher）），除了关于对象的描述（表征），还需有关各类中含什么样对象的信息（例如给一些已知类别的样本）．这里类别数有限，并已给定．各类对象的样本可以有重叠．

一组已知模式类别的样本的表征构成一个所谓训练序列（training sequence）（设计集）．模式识别的基本问题（fundamental problem of pattern recognition）是基于训练序列去决定一个被分类或被识别的样品应属于哪一类．任一判决问题，只要它的判决是主要基于分析以前所得经验的，都可归结为上述模式识别体系．

在印刷体或手写体的文本的识别，照片图象的识别，自动语音识别．医学诊断、地质学的预报、化学成份的预报，经济、政治与商品生产状况的评估，以及社会学数据的分类等领域中都有能用模式识别方法解决的应用问题．为解这些问题，人们积累了大量所谓直观识别算法（heuristic recognition algorithms），其中每一种算法往往针对一类特定性质的问题．此外，人们还构造了许多基于某些直观原理的识别算法模型（models of recognition algorithms），即解决分类问题的算法族、最广为使用的有：基于位势原理的模型；基于分划原理的模型，即指定区分模式的一组曲面；评分计算模型（即投票模型）；还有结构与统计模型．

在模型水平上，问题由找出一个极端质量的识别算法（一个评估的算法模型）构成．一个模式识别算法的质量一般由将它用于某一个对象的测试集（测试序列）所产生的结果来衡量．测试集里的样本的真实类别是事先已知的．在识别算法的一般理论的发展中，在代数框架下，得到了一个至今最完整的结果．一个识别算法由一个识别算子与一个判决规则的组合来表示．对识别算子引入加法、乘法以及数乘运算，就使得能证明对任意的一个测试序列，在初始识别算子集的某种代数扩张中必存在一个极端质量的识别算法．

模式识别问题还包括在原始对象的表征下的数据压缩与有关的信息特征的选取问题．

参考文献

[1] Журавлев, Ю. И., 《Проблемы кибернетики》, 33 (1978), 5－68.

[2] Айзерман, М. А., Браверман, Э. М., Розоноэр, Л. И., Метод потенциальных функций в теории обучения машин, М., 1970.

[3] Вапник, В. Н., Червоненкис, А. Я., Теория распознавания образов, М., 1974.

4] Fu, K. S., Sequential methods in pattern recognition and learning, Acad. Press, 1968

Н. П. Ксельнов 撰

【补注】 在英语文献中，有教师学习与无教师学习一术语常代之以有监督学习（supervised learning）与无监督学习（unsupervised learning）. 比较性的讨论见[A12].

上面正文中所述的研究领域还包括归纳推理与机器学习．二者均在理论与程序两方面处理从与概念有关的正、反例子出发，去汇集有关该概念的结构与算法信息的过程．在西方，"模式识别"这一术语局限于具有清晰的几何或序贯结构的模式研究．模式识别在应用领域中有其固有的任务，如计算机视觉，信号分析，语言的理解，自然语言分析，以及人工智能中的不同应用．模式识别的一个特殊形式是模式匹配（pattern matching）的过程，即将某给定的输入模式与另一个输入数据流比较，并发现全部数据流中出现的该模式的情形．对这问题有效的线性时间算法已在[A1]和[A2]中提出．

参考文献

[A1] Boyer, R. S. and Moore, J. S., A fast string searching algorithm, *Comm. Assoc. Comput. Mach.*, 20 (1977), 762－772.

[A2] Knuth, D. E., Morris, J. H. and Pratt, V. R., Fast pattern matching in strings, *SIAM J. Comput.*, 6 (1977), 240－267.

[A3] Angluin, D. and Smith, C., Inductive inference: theory and methods, *Computing Survey*, **15** (1983), 237－269.

[A4] Gold, E. M., Language identification in the limit, *Inform. and Control*, **10** (1967), 447－474.

[A5] Valiant, L. G., A theory of the learnable, *Comm. Assoc. Comput. Mach.*, **27** (1984), 1134－1142.

[A6] Andrews, H. L., Introduction to mathematical techniques in pattern recognition, Wiley-Interscience, 1972.

[A7] Duda, O. and Hart, P. E., Pattern classification and scene analysis, Wiley, 1973.

[A8] Fu, K. S. and Kak, A. C., Syntactic methods in pattern recognition, Acad. Press, 1974.

[A9] Grenander, U., Lectures in pattern theory, 1－3, Springer, 1976－1979.

[A10] Sklansky, J., Pattern recognition: introduction and foundations, Dowden, Hutchinson & Ross, 1973.

[A11] Tou, J. T. and Gonzales, R. C., Pattern recognition principles, Addison-Wesley, 1974.

[A12] Tsypkin, Ya. Z., Foundations of the theory of learning systems, Acad. Press, 1973 (译自俄文).

[A13] Ullmann, J. R., Pattern recognition techniques, Crane, Russak & Co., 1973.

钱敏平 译

Pauli 矩阵 [Pauli matrices; Паули матрицы]

具有复矩阵元的某些特殊常数 Hermite(2 × 2) 矩阵．它们是由 W. Pauli (1927) 引进的，用以描述一个电子的自旋 ($\vec{s}=(\hbar/2)\vec{\sigma}$) 和磁矩（国际单位制下为 $\vec{\mu}=(e\hbar/2m)\vec{\sigma}$）．他的方程在非相对论性情况下正确地描述自旋为 1/2（单位为 $\hbar$）的粒子，并可由 **Dirac 方程**（Dirac equation）在 $v/c \ll 1$ 下获得．Pauli 矩阵的显示形式是

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \sigma_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\ \sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

它们的本征值是 ±1．Pauli 矩阵满足下列代数关系：

$$\sigma_i\sigma_k+\sigma_k\sigma_i=2\delta_{ik},$$

$$\sigma_i\sigma_k-\sigma_k\sigma_i=2i\varepsilon_{ikl}\sigma_l;$$

其中 δ_{ik} 是 Kronecker 符号，而 ε_{ikl} 是 Levi-Civita 符号．Pauli 矩阵与单位矩阵

$$\sigma_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

一起，形成二阶矩阵完全系，一个二维任意线性算子（矩阵）可以用它们进行展开．它们作用于二分量自旋函数 $\psi_A(A=1,2)$ 上，并且在坐标系的转动下通过转动群的一个线性双值表示进行变换．在绕具有单位向量 **n** 方向的轴转动无穷小角度 θ 的情况下，一个旋量 ψ_A 按照公式

$$\psi_A=[(\sigma_0)_{AB}+\frac{1}{2}i\theta(\sigma\cdot\mathbf{n})_{AB}]\psi'_B,$$

$$\sigma\cdot\mathbf{n}=\sigma_1n_x+\sigma_2n_y+\sigma_3n_z$$

进行变换．由 Pauli 矩阵可以形成 **Dirac 矩阵**（Dirac matrices）γ_α，$\alpha=0,1,2,3$：

$$\gamma_0=\begin{bmatrix}\sigma_0&0\\0&-\sigma_0\end{bmatrix};\quad \gamma_k=\begin{bmatrix}0&\sigma_k\\-\sigma_k&0\end{bmatrix};\quad k=1,2,3.$$

σ_0，$i\sigma_1$，$i\sigma_2$，$i\sigma_3$ 的实线性组合（在矩阵乘法下）形成（2 × 2）复矩阵代数的四维子代数，它与最简单的超复数系，**四元数**（quaternion）同构．每当一个基本粒子具有仅取两个值的离散参数，例如，当描述一个核子（质子和中子）的同位旋时，就总要应用它们．相当一般地，Pauli 矩阵不仅用于描述同位旋空间，它们也被用于内部对称性群 SU(2) 的形式体系中．在这个情况，它们是 SU(2) 的二维表示的生成元，并由 τ_1，τ_2 和 τ_3 表示．有时更方便的是应用其线性组合

$$\tau^+=\frac{1}{2}(\tau_1+i\tau_2)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix};$$

$$\tau^-=\frac{1}{2}(\tau_1-i\tau_2)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

在某些情况下，对于二分量旋量函数的相对论性协变描述，人们借助于下列同构

$$S_0 S_0^* + \sigma_0 = 0;\ S_i S_0^* = \sigma_i,\ i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

引进矩阵 S_α 以代替 Pauli 矩阵；其中符号 * 表示复共轭，矩阵 S_α 满足下列对易关系：

$$S_\alpha S_\beta^* + S_\beta S_\alpha^* = 2\eta_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

其中 $\eta_{\alpha\beta}$ 是符号差为 +2 的 Minkowski 空间度规张量的分量．公式 (1) 和 (2) 使得有可能将 Pauli 矩阵协变地推广到任意弯曲空间

$$S_\alpha S_\beta^* + S_\beta S_\alpha^* = 2g_{\alpha\beta},$$

其中 $g_{\alpha\beta}$ 是弯曲空间度规张量的分量．

参考文献

[1] Паули, В., Труды по квантовой теории (译自德文，т. 1－2), М., 1975－1977

[2] Нелипа, Н. Ф., Физика элементарных частиц, М., 1977.

[3] Бриль, Д., Уилер, Дж., в кн.: Новейшие проблемы гравитации, М., 1961, с. 381－427.

В. Г. Кречет 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pauli, W., Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, *Z. Phys.*, 43 (1927), 601.

[A2] Pauli, W. (eds.), Handbuch der Physik, 24, Springer, 1933.

[A3] Wald, R. M., General relativity, Chicago Press, 1984.

[A4] Choquet-Bruhat, Y. and Witt-Morette, C. De, Analysis, manifolds and physics, North-Holland, 1982 (译自法文).

徐锡申 译

铺砌 [paving; паркетирование]

【补注】 一集合(或空间)的子集组成的集合，它含有空子集．铺砌的元素称作石 (stone)．集合 Ω 和铺砌 $\mathscr{K}$ 一起构成一个铺砌空间 $(\Omega, \mathscr{K})$．紧铺砌 (compact paving) (紧铺砌空间 (compact paved space)) 是具有有限交性质 (finite intersection property) 的铺砌 $\mathscr{K}$ (铺砌空间 $(\Omega, \mathscr{K})$)：即对每一有限子集 $\{C_1, \cdots, C_n\} \subset \mathscr{K}$ 都有 $\bigcap_{i=1}^n C_i$ 不空．

参考文献

[A1] Rao, M. M., Measure theory and intergration, Wiley (Interscience), 1987, Chapt. 7.

赵希顺 译

Peano 公理 [Peano axioms; Пеано аксиомы]

由 G. Peano 在 1889 年引进的对自然数集 **N** 和定义在其上的函数 S(后继函数) 的五条公理组成的一个系统：

1) $0 \in \mathbf{N}$;
2) $x \in \mathbf{N} \to Sx \in \mathbf{N}$;
3) $x \in \mathbf{N} \to Sx \neq 0$;
4) $x \in \mathbf{N} \wedge y \in \mathbf{N} \wedge Sx = Sy \to x = y$;
5) 对任意性质 M

$$0 \in M \wedge \forall x (x \in M \to Sx \in M) \to \mathbf{N} \subseteq M$$

(归纳公理 (axiom of induction))．

在最初的版本中，以 1 用 0 代替．R. Dedekind 在 1888 年提出过类似的公理．Peano 的公理是范畴的，即任何两个满足这组公理的系统 $(\mathbf{N}, S, 0)$ 和 $(\mathbf{N}', S', 0')$ 是同构的．这个同构对应是由函数 $f(x, y)$ 决定的，其中

$$f(0, 0) = 0',\ f(Sx, Sx) = S'f(x, x);$$

$$f(x, Sy) = f(x, y);\ 对\ y < x,\ f(x, y) = 0.$$

对一切对 (x, y)，$f(x, y)$ 的存在性和对 $x \leqslant y$ 的相互单值性可以用归纳法来证明．用 Peano 的公理对研究发展数论提供了可能性，特别地，可以引进通常的算术函数以及证明它们的性质．所有公理都是独立的，但如果定义 $x < y$ 为

$$\forall M [M(Sx) \wedge \forall z (M(z) \to M(Sz)) \to M(y)],$$

(3) 和 (4) 可以合成单独一个：

$$x \in \mathbf{N} \wedge y \in \mathbf{N} \wedge x < y \to x \neq y,$$

证明公理的独立性的办法是给出一个模型，这模型满足除了某公理外的一切其他公理．证明 (1) 的独立性的模型是以 1 开始的自然数系列．证明 (2) 的独立性的模型是集合 $\mathbf{N} \cup \{1/2\}$，其中 $S0 = 1/2$, $S1/2 = 1$；证明 (3) 的独立性的模型是集合 $\{0\}$；证明 (4) 的独立性的模型是集合 $\{0, 1\}$ 满足 $S0 = S1 = 1$；证明 (5) 的独立性的模型是集合 $\mathbf{N} \cup \{-1\}$．

有时人们理解的一阶语言的 Peano 算术 (Peano arithmetic) 是有函数 S, $+$, $\cdot$ 的系统，其公理由

$$Sx \neq 0,\ Sx = Sy \to x = y,$$

定义 + 和 · 的等式，及归纳模式

$$A(0) \wedge \forall x (A(x) \to A(Sx)) \to \forall x A(x),$$

其中 A 为任意公式，称为归纳公式 (见形式算术 (arithmetic, formal))．

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951.

Г. Е. Минц 撰

【补注】 本条最后提到的 Peano 算术系统不再是范畴的 (见范畴公理系统 (categoric system of axioms))，

并给出所谓的算术的非标准模型(non-standard models of arithmetic).

参考文献

[A1] Kennedy, H. C., Peano. Life and works of Giuseppe Peano, Reidel, 1980.

[A2] Kennedy, H. C., Selected works of Giuseppe Peano, Allen & Unwin, 1973.

[A3] Landau, E., Grundlagen der Analysis, Akad. Verlagsgesellschaft, 1930.

杨东屏 译

Peano 曲线[Peano curve; Пеано кривая]

线段的连续象，它可以填满正方形(或三角形)的内部．是由 G. Peano([1])发现的．

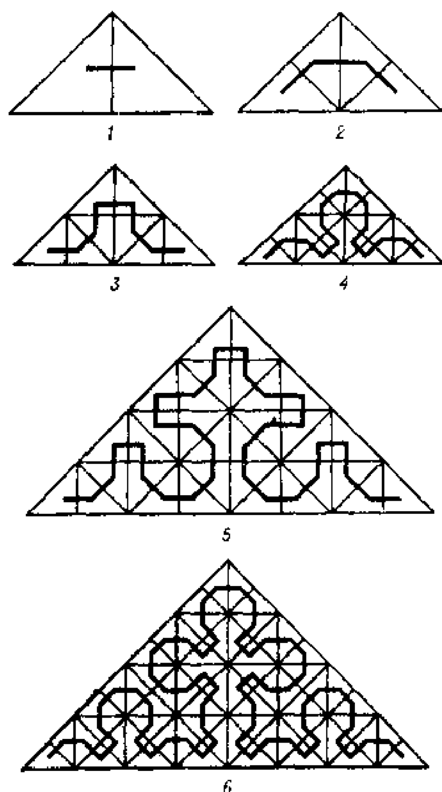


图 1

把 Peano 曲线看作平面图形，它不是平面疏集，在 Jordan 意义下它是一条曲线，但不是 Cantor 曲线，因此它没有长度．填满正方形的 Peano 曲线是由 D. Hilbert 构造的，见线(曲线)(line (curve))，图 1 就三角形画出了类似 Hilbert 的构造(前六步)(其他的构造见[2]和[3]).

所有 Peano 曲线都有重点．"此命题在几何学中极为重要，因为它严格地指出了面与线的维数不同这一几何实质"(Н. Н. Лузин)．不存在只有单点或二重点的 Peano 曲线，但存在具有(只是可数多个)三重点的 Peano 曲线．例如，Peano 自己就作出了这样的曲线；Hilbert 的构造含有四重点(也是可数多个).

与 Peano 曲线有关的一个不寻常的事实是：存在空间中的简单弧，它能以整块面积的形式投影到平面上．曲线 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=t$ 即为一例，其中前两个函数给出一条 Peano 曲线．这种弧虽然达到了密不透雨的程度，但它决不是连续曲面．

所谓 Peano 型正则闭曲线(regular closed curves of Peano type)有一个相当重要之处——与任意正则多边形的三角剖分序列对应的对称曲线序列的极限，这里，每个剖分都是前一剖分的正则(即分为两个相等部分而得)细分(例如，见图 2)．曲线序列可以这样选择，使它们所界定的区域的面积的极限等于指定的量(甚至零或被细分的整个图形的面积(图 3))．也许，类似的图形对于研究晶体结构的生长有用．同样，运用三角剖分序列，可以构造把线映入平面的映射，特别地，是 Peano 型"周期"曲线．

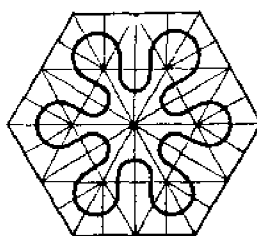


图 2

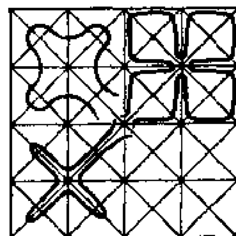


图 3

存在 Peano 曲线的类似结构，它能填满多维的，甚至可数维的立方体(见[3]).

一个影响颇大的推广是 Mazurkiewicz 定理(theorem of Mazurkiewicz)：若 X 是连续统，则下列二条件等价：a) X 是局部连通空间；b) X 是一个区间的连续象．

参考文献

[1] Peano, G., Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, *Math. Ann.*, 36(1890) 157–160.

[2] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[3] Лузин, Н. Н., Теория функций действительного переменного, 2 изд., М., 1948

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 上面得到的定理西方通常称为 Hahn-Mazurkiewicz 定理(theorem of Hahn-Mazurkiewicz)．参考文献见[A1]，它也归功于 W. Sierpiński.

Peano 结构及其高维推广显示了作为线段的不可约连续象的 n 胞腔．所有的局部连通连续统都不能如此表示；事实上，在有限图中，线段的不可约象正好是 Euler 图(Eulerian graph)(见图的回路(graph circuit))．反之，**Hilbert 立方体**(Hilbert cube)是每个自稠紧度量空间的不可约连续象([A2])．每个局部

连通连续统都是某个无圈曲线（dendrite）的不可约连续象（[A4]）. 没有开子集同胚于实直线的、非退化的局部连通连续统，是每个自树紧度量空间的一个不可约连续象（[A3]）.

除了理论上的价值外，Peano 曲线及更广义的填满空间的曲线还有更实际的用途．它们与**分形集**（fractals）有关，并且更直接地用于图象表示与处理问题（[A6]－[A8]）.

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Topology, 2, Acad. Press, 1966（译自法文）.

[A2] Enos, H., Coarse uniformities on the rationals, *Proc. Amer. Math. Soc*, **34**(1972), 623－626.

[A3] Isbell, J., *d*-final continua, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**(1988), 953－964

[A4] Ward, L. E, An irreducible Hahn-Mazurkiewicz theorem, *Houston J. Math.*, 3(1977), 285－290.

[A5] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989

[A6] Quinqueton, J., Berthod, M., A locally adaptive Peano scanning algorithm, *IEEE Trans. PAMI* 3 (1981), 403－412.

[A7] Nguyen, P. T., Quinqueton, J., Space-filling curves and texture analysis, in Proc. 6th Internat. Conf. Pattern Recogn., 1982, 282－285.

[A8] Butz, A. R., Space-filling curves and mathematical programing, *Inform. and Control*, **12**(1968), 314－330.

白苏华 胡师度 译

Peano 导数 [Peano derivative; Пеано производная]

导数（derivative）概念的一种推广．假设存在一个正数 $\delta>0$，使得

$$f(x_0+t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\frac{\alpha_r}{r!}t^r+\gamma(t)t^r$$

对一切满足 $|t|<\delta$ 的 t 成立，其中 $\alpha_0,\cdots,\alpha_r$ 为常数，而当 $t\to 0$ 时，$\gamma(t)\to 0$；又设 $\gamma(0)=0$．那么 α_r 称为函数 f 在点 x_0 的 r 阶**广义 Peano 导数**（generalized Peano derivative），记为 $f_{(r)}(x_0)=\alpha_r$；特别，$\alpha_0=f(x_0)$，$\alpha_1=f_{(1)}(x_0)$．若 $f_{(r)}(x_0)$ 存在，$r\geqslant 1$，那么 $f_{(r-1)}(x_0)$ 也存在．若通常的双边导数 $f^{(r)}(x_0)$ 存在且有限，则 $f_{(r)}(x_0)=f^{(r)}(x_0)$．当 $r>1$ 时，其逆不真，例如函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \text{ 且为有理数}, \\ 0, & x=0 \text{ 或无理数},\end{cases}$$

于是 $f_{(r)}(0)=0$，$r=1,2,\cdots$，但当 $x\neq 0$ 时，$f_{(1)}(x)$ 不存在（因 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处是不连续的）．所以通常导数 $f^{(r)}(0)$ 当 $r>1$ 时不存在．

无穷的广义 Peano 导数也可以定义．假设

$$f(x_0+t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\frac{\alpha_r(t)}{r!}t^r$$

对一切满足 $|t|<\delta$ 的 t 均成立，其中 $\alpha_0,\cdots,\alpha_{r-1}$ 为常数，而当 $t\to 0$ 时，$\alpha_r(t)\to\alpha_r$（α_r 是数或符号 ∞），那么 α_r 也称为函数 f 在点 x_0 处的 r 阶 Peano 导数．它由 G. Peano 引入．

А. А. Конюшков 撰 王斯雷 译

Peano 定理 [Peano theorem; Пеано теорема]

常微分方程（differential equation, ordinary）解的存在定理之一，由 G. Peano（[1]）建立，如下所述．假设给定微分方程

$$y'=f(x,y). \qquad (*)$$

如果函数 f 在区域 G 中是有界的和连续的，则通过这个区域的每个内点至少有一条（*）的**积分曲线**（integral curve）．通过某一点可能有多于一条的积分曲线，例如，对于方程 $y'=2\sqrt{y}$，通过点（0, 0）存在无穷多条积分曲线:

$$y=0,\ -b\leqslant x\leqslant a,$$

$$y=-(x+b)^2,\ x\leqslant -b,$$

$$y=(x-a)^2,\ x\geqslant a,$$

其中 a 和 b 是任意常数．

Peano 定理有一些推广（包括多维的情况）（见[2]，[3]）.

参考文献

[1] Peano, G., Démonstration d l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Math. Ann.*, 37(1890), 182－228.

[2] Петровский, И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970（中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，常微分方程讲义，人民教育出版社，1959）.

[3] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

М. И. Войцеховский 撰 杜小杨 张鸿林 译

Pearson 曲线 [Pearson curves; Пирсона кривые]

一族连续型概率分布（Pearson 分布（Pearson distributions））的总称，其密度 $p(x)$ 满足微分方程

$$\frac{dp(x)}{dx}=\frac{x-a}{b_0+b_1x+b_2x^2}p(x), \qquad (*)$$

其中参数 a,b_0,b_1 和 b_2 是实数．更确切地说，Pearson 曲线（Pearson curves）是 $p(x)$ 作为 x 的函数的图象．作为（*）之解的分布与**超几何分布**（hypergeometric distribution）的极限形状重合．Pearson 曲线

按方程

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0$$

的根的特点分类．

Pearson 曲线族由 12 种类型和**正态分布**（normal distribution）组成．数理统计中许多很重要的分布，可以借助（*）的变换得到．

W．Elderton（1938）给出了 Pearson 曲线类型的系统描述．分类的简化形式如下：

Ⅰ型：

$$p(x) = k\left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2},$$
$$-a_1 < x < a_2,\ m_1, m_2 > -1;$$

其特殊情形是第一类 B **分布**（beta-distribution）．

Ⅱ型：

$$p(x) = k\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m,\ -a < x < a,\ m > -1$$

（Ⅰ型 Pearson 曲线的变形）；其一种特殊情形是**均匀分布**（uniform distribution）．

Ⅲ型：

$$p(x) = k\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\mu a} e^{-\mu x},\ -a < x < \infty,\ \mu, a > 0;$$

特殊情形是 Γ **分布**（gamma-distribution）和 χ^2 **分布**（chi-squared distribution）．

Ⅳ型：

$$p(x) = k\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\mu \arctan(x/a)},$$
$$-\infty < x < \infty,\ a, \mu > 0.$$

Ⅴ型：

$$p(x) = k x^{-q} e^{-(\alpha/x)},\ 0 < x < \infty,\ \alpha > 0,\ q > 1$$

（可以由Ⅲ型经变换导出）．

Ⅵ型：

$$p(x) = k x^{-q_1} (x - a)^{q_2},$$
$$a < x < \infty,\ q_1 < 1,\ q_2 > -1,\ q_1 > q_2 - 1;$$

特殊情形是第二类 B 分布和 **Fisher** F **分布**（Fisher F-distribution）．

Ⅶ型：

$$p(x) = k\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-m},\ -\infty < x < \infty,\ m > \frac{1}{2};$$

特殊情形是 **Student 分布**（Student distribution）．

Ⅷ型：

$$p(x) = k\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-m},\ -a < x \leqslant 0,\ m > 1.$$

Ⅸ型：

$$p(x) = k\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{m},\ -a < x \leqslant 0,\ m > -1.$$

Ⅹ型：

$$p(x) = k e^{-(x-m)/\sigma},\ m \leqslant x < \infty,\ \sigma > 0,$$

即**指数分布**（exponential distribution）．

Ⅺ型：

$$p(x) = k x^{-m},\ b \leqslant x < \infty,\ m > 1;$$

特殊情形是 **Pareto 分布**（Pareto distribution）．

Ⅻ型：

$$p(x) = \left(\frac{1 + \dfrac{x}{a_1}}{1 - \dfrac{x}{a_2}}\right)^m,\ -a_1 < x < a_2,\ |m| < 1$$

（Ⅰ型的变型）．

对于应用最重要的分布是Ⅰ，Ⅲ，Ⅵ和Ⅶ型．

任何 Pearson 曲线都唯一决定于其前四阶矩：

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\, dx,$$

只要相应的矩存在．Pearson 曲线族的这一性质，用于**经验分布**（empirical distribution）的渐近描述．

用 Pearson 曲线拟合某经验分布的方法如下，由独立观测结果计算前四阶样本矩，然后确定 Pearson 曲线的适当类型，并且用矩法估计所求 Pearson 曲线未知参数的值．在一般情形下，矩法并不是获取 Pearson 曲线估计的有效方法．Л．Н．Большев 有关渐近变换的工作（1963），得到了分布的更精确逼近问题的新解法．

Pearson 曲线是 K．Pearson（1894）提出的．

参考文献

[1] Elderton, W. P., Frequency curves and correlation, Harren, 1953.
[2] Stuart, A. and Ord, J. K., Kendall's advanced theory of statistics. Griffin, 1987.
[3] Cramer, H., Mathématical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H．克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）．
[4] Большев, Л. Н., 《Теория вероятн. и её примен.》, 8(1963), 2, 129－155.

А．В．Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Distribution of statistics, 1, Continuous univariate distributions, Wiley, 1970.

周概容 译

Pearson 分布 [**Pearson distribution**; **Пирсона распределение**]

见 **Pearson 曲线** (Pearson curves).

Péclet 数 [**Péclet number**; **Пекле число**]

对流热交换过程的特征数之一. Péclet 数表征液体流动中对流的和分子的热输运过程之间的关系:

$$\mathrm{Pe} = \frac{vl}{a} = \frac{C_p \rho v}{\lambda / l},$$

其中 l 是热交换面的特征线尺度, v 是液体相对热交换面的速度, a 是热扩散系数, C_p 是定压热容量, ρ 是密度和 λ 是热传导系数.

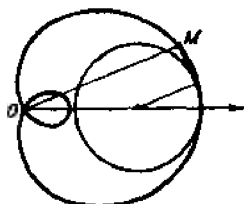
Péclet 数与 **Reynolds 数** (Reynolds number) Re 和 **Prandtl 数** (Prandtl number) Pr 的关系是 $\mathrm{Pe} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}$.

它是以 J. Péclet 的名字命名的.

根据 БСЭ-3 中同名条目的材料 李维新 译

垂足曲线 [**pedal curve**; **подера**], 曲线 l 关于点 O 的

从点 O 向曲线 l 的切线所引垂线的垂足的集合. 例如, **Pascal 蚶线** (Pascal limaçon) 是一个圆关于点 O 的垂足曲线 (见图).



平面曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 关于坐标原点的垂足曲线的方程是

$$X = x - x' \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}, \quad Y = y - y' \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}.$$

空间曲线 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ 关于坐标原点的垂足曲线的方程是

$$X = x - x' \frac{xx' + yy' + zz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$Y = y - y' \frac{xx' + yy' + zz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$Z = z - z' \frac{xx' + yy' + zz'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

曲线 l 关于点 O 的反垂足曲线 (antipedal curve) 是指这样一条曲线, 它关于点 O 的垂足曲线是 l.

一个曲面关于点 O 的垂足曲面 (pedal surface) 是从点 O 向这一曲面的切平面所引垂线的垂足的集合. 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 关于坐标原点的垂足曲面的方程是

$$X = F_x \Phi, \ Y = F_y \Phi, \ Z = F_z \Phi,$$

其中

$$\Phi = \frac{xF_x + yF_y + zF_z}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, I, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一—五卷, 科学出版社, 1989—1991).

[A2] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et ses applications géométriques du calcul infinitesimal, 1—4, Gauthier-Villars, 1887.

杜小杨 译

Peirce 箭头 [**Peirce arrow**; **Пирса стрелка**]

二元逻辑运算 (logical operation), 通常表示为 $\downarrow$, 由下列**真假值表** (truth table) 定义:

A	B	$A \downarrow B$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

因而, 语句 $A \downarrow B$ 表示"非 A 且非 B". 用 Peirce 箭头可以表达所有的逻辑运算. 例如, 语句 $\neg A$ (A 的**否定** (negation)) 等价于语句 $A \downarrow A$, 而两个语句 A 和 B 的**合取** (conjunction) $A \& B$ 可以表示为 $(A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$, 而**析取** (disjunction) $A \vee B$ 等价于 $(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$. 这种箭头是由 C. Peirce 引入的.

В. Е. Плиско 撰

【补注】 一个更为人们熟悉的、可以表达所有逻辑运算的二元逻辑运算被称为 **Sheffer 竖** (Sheffer stroke) $A|B$: A 真或 B 真, 但不是两者都真. Peirce 箭头和 Sheffer 竖彼此互否.

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland & Noordhoff, 1950, 139 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

何育 译 罗里波 校

Peirce 分解 [**Peirce decomposition**; **Пирсовское разложение**]

一个环由给定的幂等环 e 表示成子环的直和. 对于含有幂等元 e 的环 R, 存在左、右和双侧的 Peirce 分解, 分别定义为:

$$R = Re + R(1 - e),$$

$$R = eR + (1-e)R,$$

$$R = eRe + eR(1-e) + (1-e)Re + $$
$$+ (1-e)R(1-e).$$

如果 R 没有单位元，则定义为:

$$R(1-e) = \{x - xe : x \in R\},$$

$$(1-e)Re = \{xe - exe : x \in R\},$$

$$(1-e)R(1-e) = \{x - ex - xe + exe : x \in R\}.$$

集合 $(1-e)R$ 和 $eR(1-e)$ 可类似地定义． 因此在双侧 Peirce 分解中，元素 $x \in R$ 可表示为:

$$x = exe + (ex - exe) + (xe - exe) +$$
$$+ (x - ex - xe + exe),$$

在左 Peirce 分解中

$$x = xe + (x - xe),$$

在右 Peirce 分解中

$$x = ex + (x - ex).$$

关于一组正交幂等元 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，这里 $\sum_i e_i = 1$，也有 Peirce 分解:

$$R = \sum_{i,j} e_i R e_j.$$

这个分解由 B. Peirce ([1]) 给出．

参考文献

[1] Peirce, B., Linear associative algebra, *Amer. J. Math.*, 4(1981), 97－229.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 在现代环论中，Peirce 分解出现在一个森田组 (R, S, V, W) 的环中，这里 R 和 S 是森田相关的，如果它们环 T 的子环，e 是 T 的幂等元，$R = eTe$，$S = (1-e)T(1-e)$，即它们是 T 的 Peirce 分解的分量(见[A3], p.12)．

一个预等价数据组或集 (context or set of pre-equivalence data) 是一个六元组 $(R, R', M, M', \tau, \tau')$，这里 R, R' 是环，M 是左 R，右 R' 双模，M' 是右 R，左 R' 双模，$\tau: M \otimes_{R'} M' \to R$，$\tau': M' \otimes_R M \to R'$ 是双模同态，使得下面两个结合图交换:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_{R'} M' \otimes_R M & \rightarrow & M \otimes_{R'} R' \\ \downarrow {\scriptstyle \tau \otimes 1} & & \downarrow \\ R \otimes_R M & \rightarrow & M \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccc} M' \otimes_R M \otimes_{R'} M' & \xrightarrow{1 \otimes \tau} & M' \otimes_R R \\ \downarrow {\scriptstyle \tau' \otimes 1} & & \downarrow \\ R' \otimes_{R'} M & \rightarrow & M' \end{array}$$

利用 τ, τ'，所有 (2×2) 矩阵的集合

$$\begin{bmatrix} R & M \\ M' & R' \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} r & m \\ m' & r' \end{bmatrix} : r \in R,\ m \in M,\ m' \in M',\ r' \in R' \right\}$$

(利用通常的矩阵公式)得到一个乘法运算，并且当上述两个图为交换图时，这个乘法是结合的． 这样一个环就称为森田组的环 (ring of a Morita context)．

如果 $(R, R', M, M', \tau, \tau')$ 是一个森田组，τ 和 τ' 是满态射，则函子 $N \mapsto M' \otimes_R N$，$N' \mapsto M \otimes_{R'} N'$ 定义了左 R 模范畴与左 R' 模范畴之间的范畴等价．亦见**森田等价** (Morita equivalence)．详见 [A1]，§ 4.1．

参考文献

[A1] Rowen, L., Ring theory I, Acad. Press, 1988, 36.

[A2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956, 48, 50.

[A3] McConnell, J. C. and Robson, J. C., Noncommutative Noetherian rings, Wiley, 1987.

蔡传仁 译

Pell 方程 [Pell equation; Пелля уравнение]

形如

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{1}$$

的 **Diophantus 方程** (Diophantine equations) 以及更加一般的方程

$$x^2 - dy^2 = c, \tag{2}$$

其中 d 是正整数，$\sqrt{d}$ 是无理数，c 是整数，而未知数 x 和 y 取整数值．

设在 $\sqrt{d}$ 的周期为 k 的**连分数** (continued fraction) 展开式中，$P_s/Q_s (s = 0, 1, \cdots)$ 是渐近分数，则 (1) 的正解有形式:

$$x = P_{kn-1},\ y = Q_{kn-1},$$

此处 n 是使 kn 为偶数的任意自然数．

(1) 的全部解可由公式

$$x + y\sqrt{d} = \pm (x_0 \pm y_0 \sqrt{d})^n$$

推出，其中 n 是任意整数，+、－ 号任意选取，而 (x_0, y_0) 是未知数的最小正解．一般方程 (2) 或者无解，或者有无穷多个解．对于 $c = -1$，当且仅当 k 是奇数时解才存在．当 $c = 4$ 时，(2) 恒有解．当 $c = \pm 1, \pm 4$ 时 Pell 方程的解被用来决定**二次域** (quadratic field) $R(\sqrt{d})$ 的单位数．Pell 方程的解也用来决定二元**二次型** (quadratic form) $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 的自同构．这些使我们能利用 Diophantus 方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = n$ 的一个解来得到一个无穷解集．

W. Brouncker (1657)，P. Fermat 和 J. Wallis

都研究过方程（1）．L．Euler 由于误会而把名称归之于 J．Pell．

参考文献

[1] Вальфиш，А．З．，Уравнение Пелля，Тб．，1952.

[2] Гельфонд，А．О．，Решение уравнений в целых числах，3 изд．，М．，1978（英译本：Gel'fond，A．O．，The solution of equations in integers．Noordhoff，1960）．

[3] LeVeque，W．J．，Topics in number theory，Addison-Wesley，1965.

А．А．Бухштаб 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy，G．H．and Wright，E．M．，An introduction to the theory of numbers，Clarendon Press，1979.

戚鸣皋 译　潘承彪 校

罚函数法 [**penalty functions，method of；штрафных функций метод**]

一种把带约束极值问题归结为无约束优化问题的方法．罚函数法可以用**数学规划**（mathematical programming）中的问题来解释．考虑在 n 维 Euclid 空间的集合 $X=\{x:f_i(x)\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m\}$ 上的函数 $\varphi(x)$ 的极小化问题．罚函数（penalty function）或破坏限制 $f_i(x)\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m$，的惩罚（penalty），是依赖于 x 和数值参数 α 的函数 $\psi(x,\alpha)$，它有下列性质：$\psi(x,\alpha)=0$ 如果 $x\in X$，而 $\psi(x,\alpha)>0$ 如果 $x\notin X$．设 $x(\alpha)$ 是任何使函数 $M(x,\alpha)=\varphi(x)+\psi(x,\alpha)$ 取无约束（整体）最小值的点，X^* 是原问题的解集．函数 $\psi(x,\alpha)$ 可以这样来选：点 $x(\alpha)$ 和集合 X^* 之间的距离当 $\alpha\to\infty$ 时趋向于零，或者，如果这点不能保证，则使下列关系保持：

$$\lim_{\alpha\to\infty}\varphi(x(\alpha))=\inf_{x\in X}\varphi(x).$$

被经常选为 $\psi(x,\alpha)$ 的函数为

$$\psi(x,\alpha)=\alpha\sum_{i=1}^{m}|\min\{f_i(x),0\}|^q,\ q\geqslant 1$$

（常取 $q=2$）．

对于函数 $\psi(x,\alpha)$ 的具体形式的选择既联系着罚函数法的收敛性问题，又联系着 $M(x,\alpha)$ 的无约束极小化所引起的问题．

罚函数法的更一般的陈述基于：把 $\varphi(x)$ 在集合 X 上的极小化问题，归结为某个参数函数 $M(x,\alpha)$ 在一个从应用数值极小化方法的有效性观点来看比原来的集合 X 结构简单的集合上的极小化问题．

下列已知的一般结果指出罚函数法的普遍性．设 U 和 V 是自反 Banach 空间（见**自反空间**（reflexive space））；$\overline{\mathbf{R}}$ 是扩充实直线；φ 是定义在 U 上取值在 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的弱下半连续函数（见**半连续函数**（semi-continuous function））、f_i，$i=1,\cdots,m$，是定义在 U 上取值在 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的按 U 上的弱拓扑连续的函数；h_j，$j=1,\cdots,n$，是定义在 U 上取值在 V 中的按空间 U 和 V 的弱拓扑（见**弱拓扑**（weak topology））连续的函数；集合 $X=\{x:f_i(x)\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m,\ h_j(x)=0,\ j=1,\cdots,n,\ x\in U\}$ 非空．考虑求那些使

$$\varphi(x^*)\leqslant\varphi(x)\ \text{对于所有}\ x\in X\qquad(*)$$

的 $x^*\in U$ 的问题．对于函数

$$M(x,y_1,\cdots,y_m,\alpha)=\varphi(x)+$$

$$+\alpha\left\{\sum_{i=1}^{m}|f_i(x)-y_i|^2+\sum_{j=1}^{n}\|h_j(x)\|_V^2\right\},$$

其中 $\alpha>0$，$x\in U$，$y_i\in\mathbf{R}$，$i=1,\cdots,m$，考虑求那些使 $x(\alpha)\in U$ 和 $y_i(\alpha)\geqslant 0$，$i=1,\cdots,m$，以及对于所有 $x\in U$，$y_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,m$，

$$M(x(\alpha),y_1(\alpha),\cdots,y_m(\alpha),\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant M(x,y_1,\cdots,y_m,\alpha)$$

的问题．如果

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\varphi(x)=+\infty,$$

那么任何序列 $\{x(\alpha_k)\}$ 当 $\alpha_k\to\infty$，$k\to\infty$ 的弱极限是问题（*）的解，并且

$$\lim\varphi(x(\alpha))=\varphi(x^*),\ \alpha\to\infty.$$

参考文献

[1] Моисеев，Н．Н．，Иванилов，Ю．П．，Столярова，Е．М．，Методы оптимизации，М．，1978.

[2] Васильев，Ф．П．，Численные методы решения экстремальных задач，М．，1980.

[3] Fiacco，A．V．and MacCormick，G．P．，Nonlinear programming：Sequential unconstrained minimization techniques，Wiley，1968.

[4] Cea，J．，Lectures on optimization：theory and algorithms，Springer，1978（中译本：J．Céa，最优化理论与算法，高等教育出版社，1982）．

В．Г．Карманов 撰

【补注】近 20 年来，罚函数法领域中的新进展，即乘子罚函数法（或增广 Lagrange 函数法）和精确罚函数法，已经取代了纯罚函数法的极大部分．见 [A1]．

参考文献

[A1] Fletcher，R．，Practical methods of optimization，Wiley，1987.

[A2] Luenberger，D．C．，Optimization by vector space methods，Wiley，1969.

[A3] Peressini，A．L．，Sullivan，F．E．and Uhl，J．J．，The mathematics of nonlinear programming，Springer，1988.

史树中 译

摆动方程 [**pendulum equation**; **маятника колебаний уравнение**], 亦称摆的振动方程

形式为

$$\ddot{x} = -a\sin x \quad (*)$$

的常微分方程，其中 a 是一个正的常数．摆动方程是在研究数学摆在重力场中的自由振动时出现的．所谓数学摆是指固定在不可伸缩的、无重量的摆杆一端的一个单自由度质点，摆杆的另一端铰接在支座上，使得摆可在一个铅垂平面内自由转动．未知函数 $x(t)$ 是在时刻 t 摆与其较低平衡位置的偏离角，以弧度度量；

$$a = \frac{g}{l},$$

其中 l 是摆杆的长度，g 是重力加速度．描述摆在较低平衡位置附近的微小振动的（近似）方程具有形式

$$\ddot{x} = -ax.$$

摆动方程的定性研究可利用能量守恒定律来进行，这个定律说明摆的位置和速度之间的关系：

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - a\cos x = E,$$

其中 $E=$ 常数是摆的总能量．可以适当选取时间尺度，使得 $a=1$．这时，如果能量 $E<1$，则摆进行振动（速度周期地改变其符号），而如果 $E>1$，则摆进行转动（速度符号不变）．方程（*）具有初始条件 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=\alpha$（设 $E=-1+\alpha^2/2<1$）的解 $x(t)$ 满足关系式

$$\sin\frac{x(t)}{2} = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sn}\,t,$$

其中 **Jacobi 椭圆函数**（Jacobi elliptic functions）sn 具有模数 $\alpha/2$．

一些与摆动方程相近的方程具有重要的实际意义．当存在依赖于摆的位置和速度的微小摩擦时，得到方程

$$\ddot{x} = -a\sin x + \varepsilon f(x, \dot{x});$$

具有摩擦的摆的微小振动由方程

$$\ddot{x} = -ax + \varepsilon f(x, \dot{x})$$

来描述，**van der Pol 方程**（van der Pol equation）是它的一个特殊情况．摆长周期变化的摆的振动（秋千的运动）由 **Hill 方程**（Hill equation）来描述，**Mathieu 方程**（Mathieu equation）是它的一个重要特例．

参考文献

[1] Арнольд, В. И., Обыкновенные диференциальные уравнения, 2 изд., М., 1975（中译本：В. И. 阿诺尔德，常微分方程，科学出版社，1985）.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, 1, Chelsea, reprint, 1971（中译本：E. 卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1977）.

[3] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959（中译本：A. A. 安德罗诺夫，A. A. 维特，C. Э. 哈依金，振动理论，科学出版社，上册 1973、下册 1974）.

Ю. С. Ильяшенко 撰

【补注】 当 $a=1$，$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=\alpha$（$|\alpha|<2$）时，运动是周期的，振幅为

$$A = \left|\arccos\left[1-\frac{\alpha^2}{2}\right]\right|,$$

周期为

$$T = 4\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha/2)\sin^2\theta}},$$

它是一个第一类完全椭圆积分，见 [A1]．周期强迫阻尼摆（periodically-forced damped pendulum）

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \sin x = \delta\cos\omega t,\ 0<\varepsilon,\ \delta \ll 1$$

和参数强迫阻尼摆（parametrically-forced damped pendulum）

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + (1+\delta\cos\omega t)\sin x = 0$$

都产生浑沌解．这两个方程分别在 [A1] 和 [A3] 中用 Мельников 法（Melnikov method）进行了分析．在 [A4] 中用扰动法研究了

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t),\ 0<\varepsilon \ll 1$$

这一类问题（见**扰动理论**（perturbation theory））．平均方法特别受到重视（例如，见 **Крылов-Боголюбов 平均方法**（Krylov-Bogolyubov method of averaging））．

参考文献

[A1] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley, 1969（中译本：J. K. Hale，常微分方程，人民教育出版社，1980）.

[A2] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vectorfields, Springer, 1983.

[A3] Wiggins, S., Global bifurcations and chaos, Springer, 1988.

[A4] Sanders, J. A. and Verhulst, F., Averaging methods in nonlinear dynamical systems, Springer, 1985.

[A5] Arnold, V. I. and Avez, A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthiers-Villars, 1967（译自俄文）.

杜小杨 张鸿林 译

五球坐标 [**pentaspherical coordinates**; **пентасферические координаты**]

复反演空间中一点 (x) 的一种齐次坐标 $x_0 : x_1 :$

$x_2:x_3:x_4$. 不全为零的数 x_i 由关系

$$(x,x)\equiv x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$$

联系. 满足线性方程

$$(y,x)=y_0x_0+y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3+y_4x_4=0$$

的所有点 (x) 称为构成具有坐标 (y) 的**球面**(sphere). 两个球面 (y) 与 (z) 是正交的(orthogonal), 如果 $(y,z)=0$; 是相切的(tangent), 如果

$$(y,y)(z,z)-(y,z)^2=0.$$

如果二球面 (y) 与 (z) 相交, 则表达式

$$\frac{(y,z)}{\sqrt{(y,y)}\sqrt{(z,z)}}$$

度量了它们的角的余弦(或它们的反演距离的双曲余弦).

置 $x_4=0$, 得到类似的**四圆坐标**(tetracyclic coordinates), 它以圆代替球面.

对于高维空间, 能够完全类似地构造而给出多球坐标(polyspherical coordinates). 在四维情形称为六球坐标(hexaspherical coordinates). 多球坐标应用于共形几何学中研究图形的流形.

参考文献

[1] Klein, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 1926.

[2] Бушманова, Г. В., Норден, А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1-2, Springer, 1987(中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一—五卷, 科学出版社, 1987-1991).

[A2] Coolidge, J. A., Treatise on the circle and sphere, Chelsea, reprint, 1971.

林向岩 译 陆珊年 校

百分位数 [percentile 或 centile, procentile; перцентиль]

概率分布(probability distribution)的数字特征之一; **分位数**(quantile)的一种特殊情形. 对于 $j=0,\cdots,99$, 对应于水平 p 等于 $j/100$ 的分位数 K_p 定义为第 j 百分位数. 对于连续严格单调分布函数 $F(x)$, 第 j 百分位数是

$$F(x)=\frac{j}{100}\quad(j=0,\cdots,99)$$

的解. 在数理统计中, 百分位数组很好地描绘分布.

А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dubois, Ph. H., An introduction to psychological statistics, Harper & Row, 1965, p. 412 ff

周概容 译

完满紧化 [perfect compactification; совершенное бикомпактное расширение]

完全正则空间(completely-regular space) X 的一个紧化(compactification) Y, 使得任何开集 $U\subset X$ 的边界在 Y 中的闭包等于 $O(U)$ 的边界, 这里 $O(U)$ 是 Y 中使得 $O(U)\cap X=U$ 的最大开集. 等价的定义如下:

a) 对任何一对互不相交的开集 U 和 V 有 $O(U\cup V)=O(U)\cup O(V)$;

b) 若闭集 F 把 X 分隔为开集 U 和 V, 则 F 在 Y 中的闭包把 Y 分隔为 $O(U)$ 和 $O(V)$;

c) $Y\setminus X$ 在其任何一点处都不能把 Y 局部分隔.

紧化 γX 是完满的充要条件是: 自然映射 $\beta\mathrm{id}_X:\beta X\to\gamma X$ 是单调的, 这里 βX 是 X 的 **Stone-Čech 紧化**(Stone-Čech compactification). 此外, βX 是 X 唯一的完满紧化的充要条件是: $X=A\cup M$, 这里 A 是紧统而 $\dim M=0$. X 的局部连通性蕴涵满足**第一可数公理**(first axiom of countability)的 X 的任何完满扩张 Y 的局部连通性(以及所有中介扩张的局部连通性). 在 X 的所有完满紧化中存在最小紧化 μX 的充要条件是: X 至少有一个紧化, 具有斑点状剩余(见**剩余(空间的)**(remainder of a space)). μX 中的剩余是点状的, 并且在具有点状剩余的所有紧化中 μX 是最大的. X 的任何同胚映射均可扩张为 μX 的同胚映射, 把 X 映成 X' 的任何**完满映射**(perfect mapping)均可扩张为把 μX 映成 $\mu X'$ 的映射(只要 $\mu X'$ 存在).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 一个空间称为完全不连通的(或者点状的)(punctiform), 如果其中任何紧连通子集均不含多于一个的点.

参考文献

[A1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984, p. 232 ff(译自俄文).

胡师度 白苏华 译

完满域 [perfect field; совершенное поле]

一域(field) k, 在其上的每个多项式都是可分的. 换句话说, k 的每个代数扩张是可分扩张(separable extension), 所有其他的域称为非完满的(imperfect). 每个特征为零的域都是完满域. 特征为 p 的域 k 为完满域, 当且仅当 $k=k^p$, 即 k 中所有元素作 p 次幂是与 k 同构的, 有限域及代数闭域是完满的. 非完满域的一个例子是 $\mathbf{F}_q$ 上的有理函数域 $\mathbf{F}_q(x)$, $\mathbf{F}_q$ 是 $q=p^n$ 个元素的有限域. 完满域 k 与

k 的代数闭包 $\overline{k}$ 的所有 k 自同构群的不变元所成的域重合．完满域的每个代数扩张都是完满的．

对任一特征 $p>0$ 的域 k，设其代数闭包为 $\overline{k}$，域

$$k^{p^{-\infty}}=\bigcup_n k^{p^{-n}}\subset\overline{k}$$

是包含 k 的最小完满域，称为域 k 在 $\overline{k}$ 中的完满闭包（perfact closure of the field）.

参考文献

［1］ Bourbaki，N.，Elements of mathematics，Algèbre. Masson，1981，Chapts，4－5.

［2］ Zariski，O and Samuel，P. Commutative algebra，1，Springer，1975.

Л．В．Кузьмин 撰 冯绪宁 译

完满不可约映射［perfect irreducible mapping；совершенное неприводимое отображение］

完满映射（perfect mapping）f，把拓扑空间 X 映成拓扑空间 Y，并且是不可约映射（即 Y 不是 X 的任何真闭子集的象，亦见**不可约映射**（irreducible mapping）.

М．И．Войцеховский 撰
胡师度 白苏华 译

完满映射［perfect mapping；совершенное отображение］，亦称逆紧映射

拓扑空间之间的连续闭映射（见**闭映射**（closed mapping）；**连续映射**（continuous mapping）），使得每一点的原象都是紧集．完满映射在很多方面类似于把紧空间映入 Hausdorff 空间的连续映射（任何这样的映射都是完满映射），但却是就任意的拓扑空间来定义的．就完全正则空间之间的完满映射而言，其特点是映射可以 Stone-Čech 扩张为紧化之间的连续映射，把剩余映入剩余（见**空间的剩余**（remainder of a space））．完满映射保存可度量化性、仿紧性、权以及 Čech 完全性．另一些不变量（例如空间的特征）则按正常方式变形．完满映射类在乘积运算及合成运算下闭合．完满映射在闭子空间上的限制是完满映射（对于商映射及开映射这些是不成立的）．

完满映射的上述性质使得这类映射在拓扑空间的分类问题上一开始就起着关键的作用．度量空间在完满映射下的原象被刻画为仿紧羽状空间（p 空间）（见**仿紧空间**（paracompact space）；**羽状空间**（feathered space））．仿紧 p 空间类在完满映射及其逆映射下是封闭的．完满映射有一个重要性质，即是这种映射可以限制在某个闭子空间上而不会使象集缩小，并且所得到的映射是不可约的，即不能进一步限制而不使象集缩小（亦见**不可约映射**（irreducible mapping））．完满不可约映射是构造拓扑空间的绝对形理论的出发点（见**绝对形**（absolute））．就完满不可约映射而言，象集的 π 权（见**拓扑空间的权**（weight of a topological space））总是等于定义空间的 π 权，象集的 Суслин 数等于定义空间的 Суслин 数．如果一个完满映射把一个完全正则的 T_1 空间 X 映成一个完全正则的 T_1 空间 Y，那么 X 同胚于 Y 和某个 T_2 紧统的拓扑乘积的一个闭子空间．完满映射与 T_2 空间之间的连续映射的对角线乘积总是一个完满映射，特别是，完满映射和连续双射（即一一连续映射）的对角线乘积是一个同胚映射．如果一个拓扑空间可以用完满映射映成一个度量空间，并且可以用连续双射映成另一个度量空间（一般不必是同一个度量空间），那么这个拓扑空间本身是可度量化的．

参考文献

［1］ Архангельский，А．В．，Пономарев，В．И．Основы общей топологии в задачах и упражнениях，М．1974（英译本：Arkhangel'skii，A．V．and Ponomarev，V．I．，Fundamentals of general topology：problems and exercises，Reidel，1984）．

［2］ Bourbaki，N．，Elements of mathematics．General topology，Addison-Wesley，1966（译自法文）．

［3］ Engelking，R．General topology．Heldermann，1989．

А．В．Архангельский 撰 胡师度 白苏华 译

完满测度［perfect measure；совершенная мера］

由 Б．В．Гнеденко 和 А．Н．Колмогоров（［1］）引入的一个概念，其目的是使"抽象测度论与度量空间中测度论之间得到完全协调"．理论的进一步发展呈现出这一概念的其他层面上的意义．一方面，完满测度类是非常广大的；另一方面，如果限定于完满测度，那么在一般测度论中引起的一些令人生厌的技术上的复杂性就不再发生．

在集合 X 的子集族形成的 σ 代数 S 上定义的有限测度（measure）μ 称为完满的（perfect），如果对 X 上的任一实值可测函数 f 以及任一集合 $E\subset\mathbf{R}$，使得 $f^{-1}(E)\in S$，

$$\mu(f^{-1}(E))=\inf\{\mu(f^{-1}(G))\colon G\subset E,\ G\in\mathfrak{G}\},$$

其中 $\mathfrak{G}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的开子集类．为使 μ 是完满的，必须对 X 上的任一实值可测函数，存在 Borel 集 $B\subset f(X)\subset\mathbf{R}$，使得 $\mu(f^{-1}(B))=\mu(X)$，而充分条件是，对 X 上任一实值可测函数，以及任一满足 $f^{-1}(E)\in S$ 的集合 $E\subset\mathbf{R}$，存在 Borel 集 $B\subset E$，使得

$$\mu(f^{-1}(E))=\mu(f^{-1}(B)).$$

任一离散测度都是完满的．为使定义在可分度量空间中包含所有开集在内的子集族形成的 σ 代数上的测度是完满的，当且仅当任一可测集的测度是它的紧子集的测度的上确界．定义在 S 上的完满测度限制于

S 的任一 σ 子代数上仍是完满的. 由完满测度 μ 在任一子集 $X_1 \in S(\mu(X_1)>0)$ 上诱导的测度仍是完满的. 在 (X, S) 到另一可测空间的可测映射下, 完满测度 μ 的映象是完满的. 一个测度是完满的, 当且仅当它的完全化是完满的. 在集合 X 的子集族形成的 σ 代数的任一 σ 子代数上定义的测度是完满的充分必要条件是: 对任一实值 S 可测函数 f, 集合 $f(X)$ 是普遍可测的 (universally measurable) (即它属于 $\mathbf{R}$ 上任一 Borel 测度完全化的定义域). 如果 $X\subset \mathbf{R}$, 且 S 是 X 的 Borel 子集类的 σ 代数, 那么为使任一 S 上的测度是完满的, 当且仅当 X 是普遍可测的.

使 S 具有一个分离 X 点的可数生成元 $\{S_i\}$ (即对一切 $x, y\in X$, $x\neq y$, 存在指标 i: $x\in S_i$, $y\notin S$ 或 $x\notin S_i$, $y\in S_i$) 的每一个带完满测度的空间 (X, S_i, μ) 是与某个空间 $(L, \mathscr{L}, \lambda)$ 殆同构的 (almost isomorphic), 后者是由有限区间上的 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure), 以及正质点列 (可能是空的) 构成 (即存在 $N\in S$, 且 $\mu(N)=0$, 以及从 $X\setminus N$ 到 L 的一一满映射 φ, 使得 φ 与 φ^{-1} 是可测的, 且 $\lambda=\mu\varphi^{-1}$).

设 I 是任一指标集, (X_i, S_i, μ_i) $(i\in I)$ 是带完满测度的空间. 记 $X=\prod_{i\in I}X_i$, $\mathscr{A}$ 是形如 $\{x\in X: x_i\in A\in S_i\}$ 的集类生成的代数. 如果 μ' 是 $\mathscr{A}$ 上的一个有限可加测度, 使对一切 $i\in I$ 和 $A\in S_i$, 有 $\mu'(\{x\in S: x_i\in A\})=\mu_i(A)$, 那么 1) μ' 在 A 上是可数可加的; 2) μ' 到由 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 代数 S 上的扩张 μ 是完满的.

设 (X, S, P) 是完满**概率测度** (probability measure) 空间, S_1 与 S_2 是 σ 代数 S 的两个 σ 子代数, 其中 S_1 有可数生成元, 这时, 对给定 S_2, 存在 S 上的一个正则条件概率, 即存在 $X\times S_1$ 上的一个函数 $p(\cdot,\cdot)$, 使得 1) 对固定的 x, $p(x,\cdot)$ 是 S_1 上的概率测度; 2) 对固定的 E, $p(\cdot, E)$ 是关于 S_2 可测的; 3) 对一切 $E\in S_1$ 以及 $F\in S_2$, 有 $\int_F p(x, E)P(dx)=P(E\cap F)$. 进一步, 函数 $p(\cdot,\cdot)$ 还可选为使得测度 $p(x,\cdot)$ 是完满的. 设 (X, S), $(Y, \mathscr{T})$ 是两个测度空间, 且记 $q(\cdot,\cdot)$ 是 $X\times\mathscr{T}$ 上的一个转移概率, 就是说 $q(\cdot, E)$ 是关于 S 可测的, 且对一切 $x\in X$, $E\in\mathscr{T}$, $q(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{T}$ 一个概率测度. 如果 $q(x,\cdot)$ 是离散的, 且 P 是 S 上的完满概率测度, 那么测度 $\int q(x,\cdot)P(dx)$ 是完满的.

完满测度是与紧测度密切相关的. 称一个 X 的子集类 $\mathscr{K}$ 是紧的 (compact), 如果 $K_i\in\mathscr{K}$, $i=1,2,\cdots$, 且 $\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i=\varnothing$ 蕴含对某个 n 有 $\bigcap_{i=1}^{n}K_i=\varnothing$. 称 (X, S) 上的一个有限测度 μ 是紧的, 如果存在一个紧类 $\mathscr{K}$, 对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $E\in S$, 可选取 $K\in\mathscr{K}$ 和 $E_1\in S$, 使得 $E_1\subset K\subset E$ 且 $\mu(E\setminus E_1)<\varepsilon$. 任一紧测度是完满的. 为使一个测度是完满的, 其必要且充分条件是, 它在带可数生成元的任一 σ 子代数上的限制是紧的.

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949 (中译本: Б. В. 哥涅坚科, А. Н. 柯尔莫格洛夫, 相互独立随机变数之和的极限分布, 科学出版社, 1955).

[2] Marczewski, E., On compact measures, *Fund. Math.*, **40** (1953), 113 – 124.

[3] Ryll-Nardzewski, C., On quasi-compact measures, *Fund. Math.*, **40** (1953), 125 – 130.

[4] Сазонов, В. В., 《Изв. АН СССР. Сер. Матем.》, **26** (1962), 391 – 414.

[5] Ramachandran, D., Perfect measures. 1 – 2, MacMillan, 1979.

В. В. Сазонов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Yen, Kia-An, Forme mesurable de la théorie des ensembles sousliniens, applications à la théorie de la mesure, *Scientia Sinica* XVIII (1975), 444 – 463.

周民强 译

完满范式 [perfect normal form; совершенная нормальная форма]

完满析取范式或完满合取范式 (见 **Boole 函数的范式** (Boolean functions, normal forms of)).

沈复兴 译

完满数 [perfect number; совершенное число], 亦称**完全数**

一个具有下述性质的正整数: 这个数等于它的一切正因数 (这个数本身除外) 之和.

因此, 一个整数 $n\geq 1$ 是完满数, 如果

$$n=\sum_{\substack{0<d<n\\ d|n}} d.$$

例如, 数 6, 28, 496, 8128, 33550336, … 都是完满数.

完满数同 **Mersenne 数** (Mersenne number) 即形如 2^m-1 的素数有着密切的联系. Euclid 已经证明形如

$$n=2^{m-1}(2^m-1)$$

的数是完满数, 如果 2^m-1 是素数. L. Euler 证明这些数包括一切偶完满数.

直到目前还不知道偶完满数集合是有限的还是无限的, 也就是说, 还不知道 Mersenne 数 2^m-1 的集合是有限的还是无限的. 也还不知道是否存在奇完

满数．

到 1983 年已经发现 27 个偶完满数．其中前 23 个对应下列 m 值：2，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127，521，607，1279，2203，2281，3217，4253，4423，9689，9941 和 11213．在文献[2]中给出了从第 12 个到第 24 个完满数．从第 25 个到第 27 个偶完满数对应下列 m 值：21701，23209 和 44497（见[3]）．已经证明，在从 1 到 10^{50} 的区间中不存在奇完满数．

参考文献

[1] Dickson，L．E．，History of the theory of numbers，1，Chelsea，1952．

[2] Nankar，M．L．，History of perfect numbers，*Ganita Bharati*，**1**（1979），no．1－2，7－8．

[3] Slowinski，D．，Searching for the 27th Mersenne prime，*J．Recreational Math*．，11（1979），258－261

[4] Hagis，P．，A lower bound for the set of odd perfect prime numbers，*Math．Comp*．，**27**（1973），951－953

С．А．Степанов 撰

【补注】 关于完满数的简史见[A1]．到目前（1986）为止，仍然不知道偶完满数的集合是有限的还是无限的，但是，在 1983－1986 期间又发现了 3 个偶完满数．从第 24 个到第 30 个偶完满数对应的 m 值是：19937，21701，23209，44497，86243，132049（见[A2]）和 216091（1985）．

参考文献

[A1] Riele，H．J．J．te，Perfect numbers and aliquot sequences，in H．W．Lenstra and R．Tijdeman（eds．），Computational Methods in Number－Theory 1，Vol．154，CWI，Amsterdam，1982，141－157．

[A2] Riesel，H．，Prime numbers and computer methods for factorisation，Birkhäuser Verlag，1985．

С．А．Степанов 撰

【译注】 完满数同 Mersenne 数之间存在一一对应关系．目前（1997），已知有 35 个 Mersenne 数，故已知有 35 个完满数．从第 29 个到第 35 个对应的 m 值是：110503，132049，216091，756839，859433，1257787 和 1398269．

参考文献

[B1] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1995．

[B2] 王元，素数，九章出版社，1997．

[B3] P．Ribenboim，The new book of prime number records，Springer，1996．

张鸿林 译

完满环［perfect ring；совершенное кольцо］， *左的*

一个结合环，其上每个左模（module）都有一个投射覆盖（见结合环与结合代数（associative rings and algebras））．右完满环（right perfect rings）可类似地定义．左完满环未必是右完满的．

环 R 的下述性质是等价的：1）R 是左完满环；2）R 的每个两两正交的幂等元的集合都是有限集，并且每个非零右 R 模都有非零基座（socle）；3）R 满足主右理想极小条件；4）R 满足有限生成右理想极小条件；5）每个右 R 模都满足有限生成子模极小条件；6）R 的 **Jacobson 根**（Jacobson radical）J 是右消灭的（即对 J 中的任何元素序列 $a_1, a_2, \cdots$，存在整数 n，使得积 $a_1 \cdots a_n = 0$），且商环 R/J 是 Artin 半单的；7）每个平坦左 R 模都是投射模．8）R 中含有幂等元 $e_1, \cdots, e_n$，使得 $\sum_{i=1}^n e_i = 1$，当 $i \neq j$ 时，$e_i e_j = 0$，并且对每个 i，$e_i R e_i$ 是**局部环**（local ring）；9）每个左 R 模都满足循环子模极大条件；10）对每个 n，每个左 R 模都满足 n 元生成子模极大条件；11）每个投射左 R 模都有一个分解，使得每个直和项有一个补（见 **Krull-Remak-Schmidt 定理**（Krull-Remak-Schmidt theorem））．

完满环上的矩阵环是完满的．完满环的幂等理想由幂等元生成，这些幂等元模根后是中心的．群环 RG（见**群代数**（group algebra））是完满的，当且仅当 R 是完满环，而 G 是有限群．Abel 群 A 的自同态环是完满的，仅当 A 是一个有限群与有限个有理数加群的直和．局部完满环的特征是任何自由左模的任何线性无关子集可以扩成一组基．下述性质也是等价的：a）R 是完满环，并且所有的商环是自内射的（见**自内射环**（self-injective ring））；b）R 的每个商环都是**拟 Frobenius 环**（quasi-Frobenius ring）；c）R 的每个商环都有一个余生成子；d）R 是单列的（见**单列环**（uniserial ring））．

参考文献

[1] Kasch，F．，Modules and rings，Acad．Press，1982（译自德文）．

[2] Faith，C．，Algebra，1－2，Springer，1973－1979．

[3] Итоги науки и техники，Алгебра，Топология，Геометрия，М．，**19**（1981），31－134（см．также указанные там предыдущие обзоры по теории модулей）

Л．А．Скорняков 撰　蔡传仁 译

完满集［perfect set；совершенное множество］

拓扑空间 X 的子集 F，既是闭集又是自身稠密的（即没有孤立点），换言之，F 与其**导出集**（derived set）重合．例子有 $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ 以及 **Cantor 集**（Cantor set）．

М．И．Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arkhangel'skii，A．V．and Ponomarev，V．I．，Fundamentals of general topology：problems and exercises，Reidel，1984，p．62，1442ff（译自俄文）．

胡师度　白苏华 译

完满正规空间[perfectly-normal space; совершенно нормальное пространство]

一个**正规空间**(normal space),其中任何闭子集都是 G_δ 集(见 $F_\sigma(G_\delta)$ 型集合(set of type $F_\sigma(G_\delta)$)).

【补注】

参考文献

[A1] Čech, E. Topological spaces, Interscience, 1966, p 532

胡师度 白苏华 译

周长[perimeter; периметр]

1)可求长曲线所围平面区域的周长是这个区域的边界的全长.

2)n 维 Euclid(或 Riemann)空间中可测集 A 的周长是按体积覆盖 A 的多面体 P_i(或具有 C^1 光滑边界的集合 P_i)的边界的 $n-1$ 维面积的下极限,这种 P_i 就是当 $i\to\infty$ 时 $\mathrm{Vol}((A\setminus P_i)\cup(P_i\setminus A))\to 0$ 的多面体.

参考文献

[1] Caccoppoli, R., Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati I, II, *Rend. Accad. Naz. Lincei Ser.* 8, **12** (1952), 1, 3-11; 2, 137-146

[2] Giorgi, E. de, Sulla proprietà isoperimatrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita, *Rend. Accad. Naz. Lincei Ser.* 1, 5 (1958), 2, 33-34.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Giusti, E., Minimal surfaces and functions of bounded variation, Birkhäuser, 1984.

[A2] Berger, M., Geometry, 1-2, Springer, 1987(译自法文)(中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一卷(1987), 第二卷(1989), 科学出版社).

[A3] Burago, Yu. D. & Zalgaller, V. A., Geometric inequalities, Springer, 1988(译自俄文).

[A4] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

沈一兵 译

周期映射[period mapping; отображение периодов]

使复数域 $\mathbf{C}$ 上的代数簇族 $\{X_s\}$ 的基 S 中的一点 s 对应于这一点上的纤维的上同调空间 $H^*(X_s)$ 的一个映射,它提供一个 **Hodge 结构**(Hodge structure).这样得到的 Hodge 结构被认为是一种给定型的 Hodge 结构模簇中的一个点.

周期映射的研究可追溯到 N. H. Abel 和 C. G. J. Jacobi 关于代数函数积分的研究(见 **Abel 微分**(Abelian differential)).然而,直至最近,周期映射的研究仅限于对应于曲线族的那些周期映射.

设 $\{X_s\}$ 是光滑射影态射 $f: X\to S$ 的纤维 $X_s=f^{-1}(s)$ 构成的族,其中 S 是一个光滑簇.则上同调空间 $H^*(X_s,\mathbf{Z})=V_{\mathbf{Z}}$ 上有一个纯极化 Hodge 结构,它是由实**代数群**(algebraic group)的同态 $h:\mathbf{C}^*\to G_{\mathbf{R}}$ 定义的,其中 $\mathbf{C}^*$ 是复数域的乘法群,认为是一个实代数群,而

$$G=\{g\in\mathrm{GL}(V):\psi(gx,gy)=\lambda(g)\psi(x,y)\}$$

是空间 V 的那些线性变换的代数群,这些变换作用在一个非奇异(对称或反称)双线性型 ψ 上恰如乘上一个标量因子 λ;于是 $G_{\mathbf{R}}$ 的自同构 $\mathrm{Ad}\,h(i)$ 是一个 Cartan 对合且 $h(\mathbf{R}^*)$ 包含在 $G_{\mathbf{R}}$ 的中心里.具有上面性质的同态 $h:\mathbf{C}^*\to G_{\mathbf{R}}$ 的集合 X_G 上有一个自然的 $G_{\mathbf{R}}$ 不变的齐性 **Kähler 流形**(Kähler manifold)结构,这个流形叫 Griffiths 簇(Griffiths variety).而这时商簇 $M_G=X_G/G_{\mathbf{Z}}$ 是 Hodge 结构的模空间.同态 h 定义了群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{G}$ 的 Hodge 分解

$$\mathfrak{G}_{\mathbf{C}}=\bigoplus\mathfrak{G}^{p,-p},$$

其中 $\mathfrak{G}^{p,-p}$ 是 $\mathfrak{G}_{\mathbf{C}}$ 的子空间,$\mathrm{Ad}\,h(z)$ 在 $\mathfrak{G}^{p,-p}$ 的作用是用数 $\bar{z}^pz^{-p}$ 相乘.设 $P(h)$ 是 $G_{\mathbf{C}}$ 的抛物子群,其 Lie 代数为 $\oplus_{p\geq 0}\mathfrak{G}^{p,-p}$,则对应 $h\to P(h)$ 定义了 X_G 到紧 $G_{\mathbf{C}}$ 齐性旗流形 $\check{X}_G$ 的一个开稠密嵌入.X_G 在 h 处的切空间

$$\mathfrak{G}_{\mathbf{C}}/\bigoplus_{p\geq 0}\mathfrak{G}^{p,-p}$$

的水平子空间(horizontal subspace)

$$\bigoplus_{p\geq -1}\mathfrak{G}^{p,-p}/\bigoplus_{p\geq 0}\mathfrak{G}^{p,-p}$$

是特别的.如果一个到 X_G 或 M_G 的全纯映射的切映射的象被一个水平子丛包含,则称这个全纯映射是水平的(horizontal).

已知周期映射 $\Phi: S\to M_G$ 是水平的(见[1],[3]).周期映射的奇性可用 Schmid 幂零轨道定理(Schmid nilpotent orbit theorem)描述:当 $S=\bar{S}\setminus\{0\}$ 是一条曲线去掉一个点时,如果 z 是 S 上的局部坐标,$z(0)=0$,则当 $z\to 0$ 时,$\Phi(z)$ 渐近趋于

$$\exp\left[\frac{\log z}{2\pi i}N\right]a,$$

这里 $a\in\check{X}_G$,$N\in\mathfrak{G}_{\mathbf{Q}}$ 是一个幂零元(见[4]).单值群的象

$$\Phi_*(\pi_1(S,s))\subset G_{\mathbf{Z}}$$

在群 G 的所有有理表示中均是半单的,这时旋转变换 T 绕一具有法向交 $\bar{S}\setminus S$ 的除子在簇 S 的光滑紧化 $\bar{S}$ 中生成拟幂幺元(quasi-unipotent element)$\Phi_*(T)\in G_{\mathbf{Z}}$(即取单位根作为本征值的元素).单值群的重要性可从刚性定理(rigidity theorem)看出(见[1],[2],

[4])：如果有 S 上的两个代数簇族，那么相应的从 S 到 M_G 中的两个周期映射 Φ_1 和 Φ_2 重合的充要条件是在 S 的某一点 s_0，$\Phi_1(s_0)=\Phi_2(s_0)$ 且 $\Phi_{i*}:\pi_1(S, s_0)\to G_Z$，$i=1, 2$，重合.

关于周期映射的核及象的结构的完整结果一般是关于曲线及 $K3$ 曲面（$K3$-surface）的情形．如果 $\{X_s\}$ 是上述型的代数簇族且 $\Phi(s)=\Phi(s')$，那么 $X_s\xrightarrow{\sim}X_{s'}$（Torelli 定理（Torelli theorem）），而对 $K3$ 曲面而言，周期映射的最大可能象是 M_G（见[7]）．在曲线情形，周期映射的象已部分描述出（Schottky-Yung 关系式，见[6]，[8]）．Griffiths 猜想（Griffiths conjecture）说模簇有一个部分解析紧化，即它到一个解析空间 $\overline{M}_G$ 中的一个开嵌入，使得对 S 的任何光滑紧化 $\overline{S}\supset S$，周期映射 $S\to M_G$ 可拓展为 $\overline{S}$ 到 M_G 的一个全纯映射．仅在 X_G 是对称域的情形知道（1983）存在这样的一个部分解析紧化（[9]）．

参考文献

[1A] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds Ⅰ, *Amer. J. of Math.*, **90** (1968), 568－625.

[1B] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds Ⅱ, *Amer. J. of Math.*, **90** (1968), 805－865.

[1C] Griffiths, P. A., Periods of integrals on algebraic manifolds Ⅲ, *Publ. Math. IHES*, **38** (1970), 125－180.

[2] Griffiths, P. A., A transcendental method in algebraic geometry, in Actes du congrès international des mathématiciens Nice, 1970, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1971, 113－119.

[3] Deligne, P., Travaux de Griffiths, in Sém. Bourbaki Exp. 376, Lecture notes in math., Vol. 180, Springer, 1971, 213－235.

[4] Schmid, W., Variation of Hodge structure: the singularities of period mapping, *Invent. Math.*, **22** (1973), 211－319.

[5] Cattani, E. H. and Kaplan, A. G., Existence of period mappings for Hodge structures of weight two, *Duke Math. J.*, **4** (1977), 1, 1－43.

[6] Дубровин, Б. А.,《Успехи матем. наук》, **36** (1981), 2, 11－80.

[7] Куликов, В. А.,《Успехи матем. наук》, **32** (1977), 4, 257－258.

[8] Mumford, D., *Matematika*, **17** (1973), 4, 34－43.

[9] Baily, W. and Borel, A., Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 442－528.

А. И. Овсеевич 撰

【补注】 在一元情形，W. Schmid 还证明了周期映射渐近性的更精细结果，SL_2 轨道定理．这个结果被 E. Cattani 和 A. Kaplan（[A1]）推广到多元的情形．奇点理论中的周期映射及周期域已在[A1]，[A2]中考虑．见 **Hodge 结构的变分**（variation of Hodge structure）.

参考文献

[A1] Cattani, E. and Kaplan, A. Polarized mixed Hodge structures and the local monodromy of a variation of Hodge structure, *Invent. Math.*, **67** (1982), 101－115.

[A2] Looijenga, E., A period mapping for certain semi-universal deformations, *Compos. Math.*, **30** (1975), 299－316.

[A3] Varchenko, A. N., Mapping of periods and intersection form, *Funct. Anal. Appl.*, **16** (1982), 2, 83－93. (*Funkts. Anal. Prilozhen.* **16**, (1982), 2, 7－20).

[A4] Peters, C. and Steenbrink, J., Infinitesimal variations of Hodge structure, in K. Ueno (ed.) Classical Algebraic and Analytic Manifolds, Birkhäuser, 1984, 399－463.

[A5] Griffiths, P. Variation of Hodge structures. in P. Griffiths (ed.): Topics in Transcendental Algebraic Geometry, Princeton Univ. Press, 1984, 3－28.

[A6] Griffiths, P. and Schmid, W., Recent developments in Hodge theory, in Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli, Oxford Univ. Press, 1975, 31－128.

[A7] Cornalba, M. and Griffiths, P., Some transcendental aspects of algebraic geometry, in R. Hartshorne (ed.): Alegebraic Geometry (Arcata 1974), Proc. Symp. Pure. Math. Vol. 29 Amer. Math. Soc., 1975, 3－110.

[A8] Carlson, J., Green, N., Griffiths, P. and Harris, J., Infinitesimal variations of Hodge structure Ⅰ, *Compos. Math.*, **50** (1983), 109－205.

[A9] Donagi, R., Generic Torelli for hypersurfaces, *Compos. Math.*, **50** (1983), 325－353.

[A10] Green, M., The period maps for hypersurface sections of high degree of an algebraic variety, *Compos. Math.*, **55** (1984), 135－156.

[A11] Cox, D. A., Generic Torelli and infinitesimal variation of Hodge structure, in S. J. Bloch (ed.): Algebraic Geometry (Bowdoin 1985), Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46 Amer. Math. Soc., 1987, 235－246.

杜 宏 译 潘建中 校

函数 $f(x)$ 的周期[period of a function; период функции]

一个数 $T\neq 0$，使得对任何 $x\in X\subset \mathbf{R}$（或 $X\subset \mathbf{C}$），数 $x-T$ 和 $x+T$ 也属于 X，并且使得下列等式成立：

$$f(x \mp T) = f(x),$$

数 $\pm nT$ 也是 $f(x)$ 的周期，其中 n 是自然数．对于在轴上或平面上的函数 $f(x) =$ 常数，任何数 $T \neq 0$ 都是周期；对于 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x \text{ 是有理数}, \\ 0, & \text{如果 } x \text{ 是无理数}, \end{cases}$$

任何有理数 $T \neq 0$ 都是周期．如果 $f(x)$ 具有周期 T，则函数 $\psi(x) = f(ax + b)$ 具有周期 T/a，其中 a 和 b 是常数，且 $a \neq 0$．如果实变量的实值函数 $f(x)$ 在 X 上是周期的（并且不恒等于常数），则它具有最小周期 $T_0 > 0$，任何其他实周期都是 T_0 的倍数．存在不恒等于常数的复变量函数，它们具有两个其商为虚数的不成倍数的周期，例如**椭圆函数**（elliptic function）．

定义在一个 Abel 群上的函数的周期，也可类似地来定义． А．А．Конюшков 撰

【补注】 亦见**周期函数**（periodic function）．

杜小杨 译

群的周期 [**period of a group**; **период группы**]

一个群中各元素的阶的最小公倍数（这里假设群是周期的而且它的所有元素的阶的集合是有界的）．群的周期也称为群的指数（exponent of a group）．

О．А．Иванова 撰

【补注】 群 G 的元素 x 的阶（order of an element）是指使得 $x^n = e$ 成立的最小正整数 n（这里 e 为 G 的单位元）．

亦见**周期群**（periodic group）． 李慧陵 译

周期函数 [**periodic function**; **периодическая функция**]

具有周期（见**函数的周期**（period of a function））的函数．

1）设函数 f 定义在 $X \subset \mathbf{R}$ 上并有周期 T．为得到 f 的图象，只需确定 f 在 $[a, a+T] \cap X$ 上的图象，其中 a 是某个数，再把它沿 $\mathbf{R}$ 移动 $\pm T$，$\pm 2T$，…．如果以 T 为周期的周期函数 f 具有有限导数 f'，则 f' 是具有相同周期的周期函数．设 f 在任一区间上可积并具有周期 T，如果 $\int_0^T f(t)dt = 0$，则不定积分 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 具有周期 T，否则 $F(x)$ 不是周期函数．例如对 $f(x) = \cos x + 1$，有 $F(x) = \sin x + x$． А．А．Конюшков 撰 沈永欢 译

2）复变量 z 的周期函数是在复 z 平面 $\mathbf{C}$ 中只有孤立奇点（singular point）的单值解析函数 $f(z)$，且存在称为函数 $f(z)$ 的周期的复数 $p \neq 0$，使得

$$f(z + p) = f(z), \ z \in \mathbf{C}.$$

给定周期函数 $f(z)$ 的周期的任何整系数线性组合也是 $f(z)$ 的周期．给定周期函数 $f(z) \neq$ 常数的一切周期的集合按加法构成一个离散 Abel 群，称为 $f(z)$ 的周期群（period group）．如果这个群的基仅由一个基本周期（basic period）或原始周期（primitive period）$2\omega = 2\omega_1 \neq 0$ 组成，即如果 $f(z)$ 的任何周期都是 2ω 的整数倍，则称 $f(z)$ 为**单周期函数**（simply-periodic function）．在基由两个基本周期 $2\omega_1$，$2\omega_3$（$\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_3) \neq 0$）组成的情形，就称为**双周期函数**（double-periodic function）．如果周期函数 $f(z)$ 不是常数，则其周期群的基不可能由多于两个的独立基本周期组成（Jacobi 定理（Jacobi theorem））．

任一形如

$$\{z = (\tau e^{i\alpha} + t)2\omega : -\infty < \tau < \infty, \ 0 \leqslant t < 1, \\ 0 < \alpha \leqslant \pi/2\}$$

的带称为 $f(z)$ 的周期带（period strip），其中 2ω 是 $f(z)$ 的一个基本周期或同余于一个基本周期；通常取 $\alpha = \pi/2$ 即考虑边垂直于基本周期 2ω 的周期带．周期函数在每个周期带中取到它能取的任何值且取到的次数相等．

任一整周期函数 $f(z)$ 可在整个 $\mathbf{C}$ 中展开为 Fourier 级数：

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\pi i k z/\omega}, \qquad (*)$$

$$a_k = \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\pi i k t/\omega} dt,$$

此级数在直线 $\{z = t\omega : -\infty < t < \infty\}$ 且一般地在任一平行于此直线的宽度为有限的带上一致并绝对收敛．整周期函数 $f(z)$ 在其周期带的两边趋向于某个有限或无穷极限由下述事实所刻画：级数（*）只含有有限项，即 $f(z)$ 应是一**三角多项式**（trigonometric polynomial）．

任一在整个 $\mathbf{C}$ 中具有基本周期 2ω 的亚纯周期函数 $f(z)$ 可表示为两个具有相同周期的整周期函数之商，即两个形如（*）的级数之商．特别地，所有**三角函数**（trigonometric functions）的类可描述为满足下述条件的以 2π 为周期的亚纯周期函数的类：它们在每个周期带中只有有限个极点且在周期带的每一边趋于确定的极限．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968（中译本：А．И．马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第七章）． Е．Д．Соломенцев 撰

【补注】 在 1）中，f 具有周期 T 意味着 $T \neq 0$，且 $x \in X$ 蕴涵 $x \pm T \in X$ 并有 $f(x \pm T) = f(x)$．

双周期函数也称为椭圆函数(elliptic function).

参考文献

[A1] Siegel, C. L., Topics in complex functions, 1, Wiley, reprint, 1988.

沈永欢 译

周期群[periodic group; периодическая группа]

一个群(group),它所有的元素都是有限阶的.任意周期 **Abel 群**(Abelian group)可以分解成为相对于不同素数的准素群的直和. 关于周期群的有限性条件见周期群的 **Burnside 问题**(Burnside problem).

О. А. Иванова 撰

【补注】 周期群也称挠群(torsion group). 对于任意群 G,它的挠子群(torsion subgroup)定义成 $T(G) = \{g \in G: \exists n \in \mathbf{N}$ 使 $g^n = e\}$. 它是正规子群而商群 $F(G) = G/T(G)$ 为 G 的无挠商群. $T(\cdot)$ 和 $F(\cdot)$ 都是函子.

参考文献

[A1] Kurosh, A. G., The theory of groups, 1 – 2, Chelsea, 1955 – 1956(译自俄文).

[A2] Hall, P., The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔,群论,科学出版社,1981).

[A3] Robinson, D. J. S., Finiteness conditions and generalized soluble groups, 1. Springer, 1972.

李慧陵 译

周期点[periodic point; периодическая точка],动力系统的

定义在空间 S 上的一动力系统 $f^t(t \in \mathbf{R}$ 或 $t \in \mathbf{Z})$ 之周期运动轨道上的一点;即一点 $x \in S$,对于它有一数 $T > 0$ 存在,使得 $f^T x = x$,但当 $t \in (0, T)$ 时 $f^t x \neq x$. 数 T 称为点 x 的周期(period of the point)(有时,T 的整数倍也称为周期).

周期点的轨道称为闭轨道(closed trajectory)或圈(loop). 当使用后一名词时,通常不考虑用参数 t 对轨道上的点之集合作具体的参数化,而考虑某一类等价的参数化如下:若 f^t 是群 $\mathbf{R}$ 在拓扑空间 S 上的连续作用,则圈看作是拓扑嵌入于 S 中的圆;若 f^t 是群 $\mathbf{R}$ 在微分流形 S 上的可微作用,圈就看作是光滑嵌入于 S 中的一个圆.

若 x 是一周期点(而 S 是一度量空间),则 α 极限集 A_x 与 ω 极限集 Ω_x(见**轨道的极限集**(limit set of a trajectory)),作为点的集合,均即为其轨道. 这个性质在一定程度上将周期点与一切非不动点区别开来;这就是说,若动力系统 f^t 给定于其中的空间是一完全的度量空间,而 x 点使得 $\Omega_x = \{f^t x\}_{t \in \mathbf{R}}$,则 x 或为不动点或为 f^t 的周期点.

参考文献

[1] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本 B. B. 涅梅茨基, B. B. 斯捷巴诺夫,微分方程定性理论,上、下,科学出版社,1956, 1959).

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 在任意动力系统中(相空间不一定是度量空间),周期点可刻画如下(对 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Z}$ 的作用均同):一点为周期的,当且仅当其轨道是多于一点所成的紧集合. 一已给的动力系统是否有周期点的问题研究得很多了. 关于 2 流形上的动力系统,例如见[A4],[A6],亦见**极限环**(limit cycle); **Poincaré-Bendixson 理论**(Poincaré-Bendixson theory)和 **Kneser 定理**(Kneser theorem). 关于 **Hamilton 系统**(Hamiltonian system),例如可见[A5];关于 Hilbert 第十六问题(Hilbert 16-th problem)(即平面上的多项式向量场的极限环的个数是多少?)见[A2]. 下面的 Seifert 猜想(Seifert conjecture)是很有名的: S^3 上的每个 C^∞ 动力系统都有一个周期轨道;例如见[A3]. 关于周期轨道(的存在性)与某些拓扑不变量(亦见**奇点的指标**(singular point, index of a))的联系,例如见[A1].

参考文献

[A1] Conley, C., Zehnder, E., Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37 (1984), 207 – 253.

[A2] Lloyd, N. G., Limit cycles of polynomial systems - some recent developments, in T. Bedford and J. Swift (eds.): New directions in dynamical systems, Cambridge Univ. Press, 1988, 192 – 234.

[A3] Markus, L., Lectures in differentiable dynamics, Amer. Math. Soc., 1980, Appendix II.

[A4] Neumann, D. A., Existence of periodic orbits on 2-manifolds, *J. Differential Eq.*, 27 (1987), 313 – 319.

[A5] Rabinowitz, P. H., Ambrosetti, A., Ekeland, I. and Zehnder, E. J., (eds.), Periodic solutions of Hamiltonian systems and related topics, Proc. NATO Adv. Res. Workshop, 1986, Reidel, 1987.

[A6] Sacker, R. J. and Sell, G. R., On the existence of periodic solutions on 2-manifolds, *J. Differential Eq*, 11 (1972), 449 – 463.

【译注】 关于中国数学家在 Hilbert 第 16 个问题中的贡献,可见[B1],[B2]及其中所引用的文献.

参考文献

[B1] 叶彦谦,极限环论,上海科学技术出版社,1965.

[B2] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,董镇喜,微分方程定性理论,科学出版社,1985.

齐民友 译

周期半群[periodic semi-group; периодическая полугруппа]

一个半群(semi-group),其中每个单演子半群(见**单演半群**(monogenic semi-group))均为有限的

(换句话说，每个元素都有有限阶)．每个周期半群中都有幂等元．取定一幂等元 e，在半群中一些某个方幂(依赖于元素本身)等于 e 的元素全体组成的集合 K_e 称为对应于 e 的挠类(torsion class)．K_e 中那些以 e 为单位元的元素全体组成的集合 G_e 是一个 $\mathscr{H}$ 类(见 **Green 等价关系**(Green equivalence relation))．它是 K_e 中的最大的子群并且是 K_e 生成的子半群 $<K_e>$ 的理想；所以，$<K_e>$ 为一同群(homogroup)(见**极小理想**(minimal ideal))．仅包含一个幂等元的周期半群称为幂幺的(unipotent)．一个周期半群 S 是幂幺的，当且仅当下列条件中的一个成立：S 为一个群被一**诣零半群**(nil semi-group)的扩张，或 S 为一个群和一个诣零半群的次直积．

把周期半群分解成为挠类的并在研究周期半群的某些性质时具有决定的意义．任一挠类不必是一子半群：一个极小的反例是五元素的 **Brandt 半群**(Brandt semi-group) B_2，它也同构一个单位群上的以 2 阶单位矩阵为夹层矩阵的 **Rees 矩阵型半群**(Rees semi-group of matrix type)．在一个周期半群 S 中所有挠类都是子半群，当且仅当 S 不包含同构于幂幺半群被 B_2 的理想扩张的子半群；在此情况下 S 的挠类分解不一定是**半群的带**(band of semi-groups)．周期半群是其挠类的带的多种条件(包括一些必要充分条件)已经知道，这一事实对交换半群是显然的，对具两个幂等元的周期半群也是对的([3])．

在任意周期半群内 Green 关系 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{J}$ 一致；0 单周期半群是完全 0 单的．对周期半群 S 下列条件是等价的：1) S 是一 **Archimedes 半群**(Archimedean semi-group)；2) S 中所有幂等元对于其自然偏序是两两不可比的(见**幂等元**(idempotent))；和 3) S 是**完全单半群**(completely-simple semi-group)被诣零半群的理想扩张．与周期半群 S 是 Archimedes 半群的带等价的某些条件已经得到，这包括：a) 对任何 $a\in S$ 和任何幂等元 e，若 $e\in SaS$，则 $e\in Sa^2S$(见[5])；b) 在 S 中每个正则 $\mathscr{D}$ 类是一子半群；以及 c) S 的每个**正则元**(regular element)是群元素．

设 S 为无限周期半群且设 E_S 为它的幂等元的集合．若 E_S 为有限的，则 S 包含一无限幂幺子半群，而若 E_S 为无限的，则 S 包含一无限子半群，它是**幂零半群**(nilpotent semi-group)或幂等元半群(见**幂等元半群**(idempotents, semi-group of)).

周期半群的一个重要子类由局部有限半群组成(见**局部有限半群**(locally finite semi-group))．更大的类由拟周期半群(S 称为拟周期的(quasi-periodic)，若它的每个元素都有一方幂含于一子群 $G\subseteq S$ 内)组成．周期半群的许多性质在拟周期半群中也成立．拟周期半群亦称外群(epigroup).

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semi-groups, 1, Amer. Math. Soc., 1961.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960

[3] Просвиров, А. С., 《Матем. зап. Уральск. ун-та》, **8** (1971), 1, 77 – 94.

[4] Шеврин, Л. Н., 《Изв. вузов. Математика》, 1974, 5, 205 – 215.

[5] Putcha, M., Semilattice decompositions of semigroups, *Semigroup Forum*, **6** (1973), 1, 12 – 34.

[6] Schwarz, St., 《Чехосл. матем. Ж.》, **3** (1953), 7 – 21.

Л. Н. Шеврин 撰　李慧陵 译

周期解 [**periodic solution; периодическое решение**] 常微分方程或方程组的

周期地依赖于自变量 t 的解．对于一个周期解 $x(t)$(在方程组情况下 x 是一向量)，必有一数 $T\neq 0$ 使得

$$x(t+T)=x(t),\quad t\in\mathbf{R}.$$

所有可能的这样的 T 均称为此周期解的周期(period)；$x(t)$ 的连续性表明，或者 $x(t)$ 与 t 无关，或者所有可能的周期都是其中某一个 $T_0>0$ 即最小周期(minimal period)的整数倍．当讨论到周期解时，常常是指后一种情况，而 T_0 就直称为周期．

通常或者是对右方与 t 无关的常微分方程组(即**自治系统**(autonomous system))

$$\dot{x}=f(x),\quad x\in U \tag{1}$$

(U 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个区域)来考虑周期解，或者是对右方周期依赖于 t 的方程组

$$\dot{x}=f(t,x),\ f(t+T_1,x)=f(t,x),\ x\in U \tag{2}$$

来考虑周期解．(右方按其他方式依赖于 t 的方程组通常没有周期解．)在(2)的情况下，周期解的周期 T_0 或与 T_1 相同，或为 T_1 的整数倍；只有在例外情况下才会有其他 T_0．周期 $T_0=kT_1\,(k>1)$ 的周期解描述下调和振动(见**强迫振动**(forced oscillations))，所以有时称为下调和周期解(subharmonic periodic solutions 或 subharmonics)．

方程组(2)定义了 **Poincaré 回归映射**(Poincaré return map) F(它依赖于初始时刻 t_0 的选择)：若 $x(t,\xi)$ 是(2)的具有初始值 $x(t_0,\xi)=\xi$ 的解，则

$$F(\xi)=x(t_0+T_1,\xi).$$

(2)的性质与 F 的性质密切相关．特别是，对于具有周期 kT_1 的周期解，其在 $t=t_0$ 时的值当 $k=1$ 时是 F 的不动点，而在 $k>1$ 时则是周期为 k 的周期点，亦即 k 重迭代 F^k 的不动点．周期解的研究在相

当大程度上化为考察 Poincaré 回归映射的相应不动点或周期点.

对于自治系统(1),这种作法要作以下的修正.在相空间中周期解轨道(这是一个闭曲线)的某一点上作一局部截面,即作横截于此轨道的余维数为 1 的光滑流形 Π,并考虑将一点 $\xi \in \Pi$ 转化为(1)之过 ξ 的轨道第一次与 Π 相交的点的映射.

接近于一已给周期解的解的性态可以用对应的变分方程组(见**变分方程**(variational equations))按线性逼近来描述.这时,这个线性方程组的系数周期地依赖于 t,因此可以讨论其相应的**单值算子**(monodromy operator)和**乘子**(multipliers).后者也称为已给周期解的乘子(multipliers for the given periodic solution).线性逼近决定周期解的性质(如稳定性,不变流形)、一定程度上与决定平衡解(见**平衡位置**(equilibrium position))的性质相同.

(1)的周期解有一些特别之处.1 总是一个乘子(只要周期解不是一个常数).在研究这些周期解的稳定性时,这一点特别要记住(见 **Андронов-Витт 定理**(Andronov-Witt theorem)).又,在小扰动下周期可能变动,这在**扰动理论**(perturbation theory)中必须记住.

寻求周期解并考察其性态,不仅从纯数学观点来看是有意义的,还因为现实物理系统的周期状态通常对应于这些系统的数学描述的周期解(见**自振动**(auto-oscillations);**强迫振动**(forced oscillations);**振动理论**(oscillations, theory of),**非线性振动**(non-linear oscillations);**松弛振动**(relaxation oscillation)).然而这是一个很难的问题,因为没有一般的方法来确定一个特定的系统是否有周期解存在.在不同情况下有不同的论证和不同的方法.其中有许多与**扰动理论**(perturbation theory)有关(**调和平衡法**(harmonic balance method);**Крылов-Боголюбов 平均方法**(Krylov-Bogolyubov method of averaging)或**小参数方法**(small-parameter, method of the)),它们也涉及关于**分歧**(bifurcation)的研究;另一些则与**微分方程的定性理论**(qualitative theory of differential equations)有关.特别地,这个理论确立了 $n=2$ 时方程(1)的周期解的特殊作用;在这里,周期解,连同一些其他类型的解,完全确定了所有解的性态(亦见**极限环**(limit cycle)).在这一方面,关于这类方程组的周期解,有一些特殊的结果.(例如,关于 **van der Pol 方程**(van der Pol equation)及其推广与修正:即 **Liénard 方程**(Liénard equation)和 **Rayleigh 方程**(Rayleigh equation)的周期解).

Д.В.Аносов 撰

【补注】 [A1]是关于微分方程周期解的一个综述.对于自治系统有平移不变性(translation invariance)如下:若 $x(t)$ 是一个周期解,$x(t+\tau)$ 也是,这与有一个值为 1 的乘子的存在有关.对于周期为 T_0 的周期解,可以用相变量 $\varphi = t/T_0$ 来代替时间变量 t.相变量可以确定到模 1.相(phase)的概念也可以用于接近于极限环的轨道 $x(t)$.这时,可以把轨道的相取为该轨道当 $t\to\infty$ 时所趋向的周期解的相.这个概念在循环生物过程中起重要的作用,见[A2].在周期 T_1 的周期强迫力的情况下,可以把被扰动系统的周期运动与强迫力之相为 $\theta=\theta_0+t/T_1$ 的系统的周期运动联系起来.令被扰动系统在时刻 $t=nT_1$ 时的相为 $\varphi=\varphi(n,\theta_0)$.于是,由

$$\rho(\theta_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(n,\theta_0)}{n}$$

定义的旋转数(rotation number)等于受迫系统的周期与强迫力项的周期之比.当 ρ 是有理数时,这系统是周期的,ρ 是无理数时,极限解是拟周期的(亦见**拟周期运动**(quasi-periodic motion)).亦见[A3],其中分析了一个环面上的系统.

参考文献

[A1] Verhulst, F., Nonlinear differential equations and dynamical systems, Springer, 1990.

[A2] Winfree, A. T., The geometry of biological time, Springer, 1980.

[A3] Hale, J. K., Differential equations, Birkhäuser, 1982.

齐民友 译

周期轨道[**periodic trajectory**; **периодическая траектория**],常微分方程的自治系统的

这个系统的一个**周期解**(periodic solution)的轨道;通常认为此解不会化为常数,即轨道不会化为一点(一个**平衡位置**(equilibrium position)).周期轨道的一个同义词是闭轨道(closed trajectory)(因为它是闭曲线).

Д.В.Аносов 撰

【补注】 关于周期轨道存在性的文献,见**周期点**(periodic point).

沈海玉 译

周期图[**periodogram**; **периодограмма**]

对于正整数 N,定义在一**平稳随机过程**(stationary stochastic process)$X(t)$ $(t=0,\pm1,\cdots)$ 的样本 $X(1),\cdots,X(N)$ 上的如下函数 $I_N(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$:

$$I_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi N}\ |d_N^{(X)}(\lambda)|^2,$$

其中

$$d_N^{(X)}(\lambda)=\sum_{t=1}^{N}\exp\{-it\lambda\}X(t).$$

周期图是周期为 2π 的 λ 的周期函数.均值为 $c=\mathrm{E}X(t)$ 的平稳过程 $X(t)$ 的可微谱密度(spectral den-

sity) $f(\lambda)$，当 $\lambda \neq 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ 时可以用周期图来估计：

$$\mathrm{E} I_N(\lambda) = f(\lambda) + \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2 N\lambda/2}{\sin^2 \lambda/2} c^2 + O(N^{-1}).$$

同时，周期图并不是 $f(\lambda)$ 的**相合估计量**(consistent estimator)（见[1]）. 谱密度的相合估计量（见**谱密度估计量**(spectral density, estimator of the)）可以通过某种进一步的构造来获得，即利用不同频率 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 周期图的渐近不相关性，以及对接近 λ 的频率平均 $I_N(X)$ 可以求得一渐近相合估计量这个结果. 在 n 维随机过程 $X(t) = \{X_k(t)\}_{k=1}^n$ 的情形下，矩阵周期图(matrix periodogram) $I_N(\lambda)$ 由它的诸元

$$I_N^{(i,j)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} d_N^{X_i}(\lambda) \overline{d_N^{X_j}(\lambda)}$$

所确定. $I_N(\lambda)$ 又称为二阶周期图，有时也考虑 m 阶周期图：

$$I_N^{(k_1,\cdots,k_m)}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{m-1} N} \prod_{j=1}^m d_N^{X_{k_j}}(\lambda_j),$$

它被用来构造谱密度的 m 阶估计量（见**谱半不变量**(spectral semi-invariant)）.

参考文献

[1] Brillinger, D., Time series: data analysis and theory, Holt, Rinehart & Winston, 1974.

[2] Hannan, E. J., Multiple time series, Wiley, 1970.

И. Г. Журбенко 撰　潘一民 译

边界紧空间[peripherically-compact space; периферически бикомпактное пространство]

具有紧边界开集基(base)的拓扑空间(topological space). 一个完全正则边界紧空间具有零维剩余的紧化（在小归纳维数意义下，见**紧化**(compactification)；**剩余（空间的）**(remainder of a space)；**维数**(dimension)）. 如果每个紧子集 $A \subset X$ 含于另一个紧子集 $B \subset X$，且 B 在 X 中有可数的基本邻域系（例如，X 为可度量化空间），则 X 的边界紧性等价于具有零维剩余的 X 之紧化的存在性.

参考文献

[1] Freudenthal, H., Neuaufbau der Endentheorie, *Ann. of Math.*, 43 (1942), 261 – 279.

[2] Freudenthal, H., Kompaktisierungen und Bikompaktisierungen, *Indag. Math.*, 13 (1951), 2, 184 – 192.

[3] Скляренко, Е. Г., Бикомпактные расширения семибикомпактных пространств, 《Докл. АН СССР》, 120 (1958), 6, 1200 – 1203.

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】 这些空间也称为边缘空间(rimspace).

具有性质"每个紧子集都含于一个有可数邻域基的紧子集"的空间，称为可数型空间(space of countable type)，见[A1].

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984（译自俄文）.

[A2] Isbell, J. R., Uniform spaces, Amer. Math. Soc., 1964, Chapt. 7.

白苏华　胡师度 译

积和式[permanent; перманент]，一个 $(m \times n)$ 矩阵 $A = \| a_{ij} \|$ 的

函数

$$\mathrm{per}\, A = \sum_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{m\sigma(m)},$$

这里 a_{ij} 是一个交换环中的元素，对一切由 $\{1, \cdots, m\}$ 到 $\{1, \cdots, n\}$ 内的一一映射 σ 求和. 如果 $m = n$，则 σ 表示一切可能的置换，这时积和式是对于 $H \subseteq S_n$ 的 Schur 矩阵函数(Schur matrix function)

$$d_\chi^H(A) = \sum_{\sigma \in H} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

的一个特殊情形，这里 χ 是对称群 S_n 的子群 H 上一个一次特征标（见**群的特征标**(character of a group)）（对于 $H = S_n$，$\chi(\sigma) = \pm 1$ 视 σ 的奇偶性而定，就得到**行列式**(determinant)）.

积和式用于线性代数、概率论和组合论中. 在组合论里，积和式可以作如下的解释：一个有限集合的一个给定子集族的不同代表系的个数是关于这一族的**关联系统**(incidence system)的关联矩阵的积和式.

主要兴趣是由 0 和 1 构成的矩阵（(0, 1) 矩阵）的积和式，由非负实数构成的矩阵的积和式，特别是二重随机矩阵(doubly-stochastic matrix)（其中任意行和任意列的元素的和都是 1）的积和式，以及复 **Hermite 矩阵**(Hermitian matrix)的积和式. 积和式的基本性质中包括一个展开定理（类似于行列式的 Laplace 定理）和 Binet-Cauchy 定理，这个定理给出了将两个矩阵乘积的积和式表示成由余子式所形成的积和式的乘积之和. 对于复矩阵的积和式来说将其表示为完全对称张量的对称类内的标量积是方便的（例如，见[3]）. 计算积和式最有效的方法之一是由 Ryser 公式(Ryser formula)提供的：

$$\mathrm{per}\, A = \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^t \sum_{X \in \Gamma_{m-t}} \prod_{i=1}^m r_i(X),$$

这里 Γ_k 是方阵 A 的 $m \times k$ 维子矩阵的集合，$r_i = r_i(X)$ 是 X 的第 i 行元素的和，$i, k = 1, \cdots, m$. 由于计算积和式是复杂的，所以对它们作出估值是重要的. 有些下界被给出如下：

a) 如果 A 是一个 (0, 1) 矩阵，$r_i(A) \geq t$，$i = 1, \cdots, m$，那么当 $t \geq m$ 时，

$$\operatorname{per} A \geqslant \frac{t!}{(t-m)!},$$

当 $t<m$ 且 $\operatorname{per} A>0$ 时,

$$\operatorname{per} A \geqslant t!.$$

b) 如果 A 是一个 n 阶 (0, 1) 矩阵, 那么

$$\operatorname{per} A \geqslant \prod_{i=1}^{n}\{r_i^*+i-n\},$$

这里 $r_1^* \geqslant \cdots \geqslant r_n^*$ 是 A 的行里元素的和按不增次序排列而 $\{r_i^*+i-n\}=\max(0, r_i^*+i-n)$.

c) 若 A 是一个 n 阶正半定 Hermite 矩阵, 则

$$\operatorname{per} A \geqslant \frac{n!}{s(A)^n} \prod_{i=1}^{n}|r_i|^2,$$

这里 $s(A)=\sum_{i,j} a_{ij}$, 若 $s(A) \neq 0$.

积和式的上界:

1) 对于一个 n 阶 (0, 1) 矩阵 A,

$$\operatorname{per} A \leqslant \prod_{i=1}^{n}(r_i!)^{1/r_i}.$$

2) 对于一个 n 阶非负整元素的完全不可分解矩阵 A,

$$\operatorname{per} A \leqslant 2^{s(A)-2n}+1.$$

3) 对于一个具有本征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的复正规矩阵 A,

$$|\operatorname{per} A| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^n.$$

在积和式理论中最为熟知的问题就是 van der Waerden 猜想 (van der Waerden conjecture): 一个 n 阶双随机矩阵的积和式被 $n!/n^n$ 囿于下, 仅当这个矩阵由分数 $1/n$ 组成时才达到这个值. 这个问题的一个正面解已在[4] 中得到.

在积和式的应用中可注意到与某些组合问题的关系 (见组合分析 (combinatorial analysis)), 诸如 "相遇问题" (problème de rencontres), "附着问题" (problème d'attachement) (或挂钩问题 (hook problem)), 还有 **Fibonacci 数** (Fibonacci numbers), 拉丁方 (Latin square) 和 Steiner 三元系 (见 **Steiner 系** (Steiner system)) 的计数, 以及关于一个图 (graph) 的1因子和线性子图个数的推导,同时二重随机矩阵与某些概率模型有联系. 积和式在物理中也有有趣的应用, 其中最重要的就是 二聚物问题 (dimer problem), 这个问题产生于双原子分子在界面层的**吸附作用** (adsorption) 的研究: 一个单结构的 (0, 1) 矩阵的积和式表明物质中原子结合到双原子分子的方式的个数. 积和式在统计物理、晶体理论和物理化学中都有应用.

参考文献

[1] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics. Wiley & Math. Assoc. Amer., 1963.

[2] Сачков, В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

[3] Minc, H., Permanents, Addison-Wesley, 1978.

[4] Егорычев, Г. П., Решение проблемы Ван. дер Вардена для перманентов, Красноярск, 1980.

[5] Фаликман, Д. И., 《Матем. заметки》, 29 (1981), 6, 931 – 938.

B. E. Тараканов 撰

【补注】 在 1) 中所给出的上界见[A7]. 关于 Steiner 三元系的计数见 [A6].

van der Waerden 猜想的解于 1979 年被 Д. И. Фаликман([5]) 和 Г. П. Егорычев ([4], [A4]) 彼此独立地同时得到. 某些详细情况也见 [A2] – [A5].

参考文献

[A1] Knuth, D. E., A permanent inequality, *Amer. Math. Monthly*, **88** (1981), 731 – 740.

[A2] Lagarias, J. C., The van der Waerden conjecture: two Soviet solutions, *Notices Amer. Math. Soc.*, **29** (1982), 2, 130 – 133.

[A3] Lint, J. H., van, Notes on Egoritsjev's proof of the van der Waerden conjecture, *Linear algebra Appl.*, **39** (1981), 1 – 8.

[A4] Egorychev, G. P., The solution of van der Waerden's problem for permanents, *Adv. in Math.*, **42** (1981), 299 – 305.

[A5] Lint, J. H. van, The van der Waerden conjecture: Two proofs in one year, *Math. intelligencer*, **4** (1982), 72 – 77.

[A6] Wilson, R. M., Non-isomorphic triple systems, *Math. Zeitschr*, **135** (1974), 303 – 313.

[A7] Schrijver, A., A short proof of Minc's conjecture, *J. Comb. Theory* (*A*), **25** (1978), 80 – 83.

[A8] Minc, H., Nonnegative matrices, Wiley, 1988.

郝锡新 译

排列 [permutation; перестановка]. n 个元素的长度为 n 的有限序列, 它的所有元素均不同, 即没有重复的 n 个元素的**排列** (arrangement). 其排列的个数为 $n!$.

通常人们取集合 $\mathbf{Z}_n=\{1, \cdots, n\}$ 的元素作为被排列的元素; $\mathbf{Z}_n$ 到自身的一个一一映射 π 定义了一个排列 $\bar{\pi}=(\pi(1), \cdots, \pi(n))$. 映射 π 也称为 $\mathbf{Z}_n$ 的置换 (substitution). 有关排列计数的许多问题可以用置换的术语描述, 比如被排列元素在某些位置上有各种限制的排列计数 (见[1], [2]). 一个排列 $\bar{\pi}$, 若对 $i=1, \cdots, n$, $\pi(i)$ 先于 $\pi(i+1)$, 则可认为 $\bar{\pi}$ 是由 n 个元素组成的有序集 (ordered set).

例. (1) 若 $i<j$ 有 $\pi(i)>\pi(j)$, 那么 $\{\pi(i), \pi(j)\}$ 构成 $\bar{\pi}$ 中的一个逆序 (inversion); 如果 a_r 是具有 r 个逆序的 n 个元素的排列个数, 则

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_i x^i = \frac{(1-x)\cdots(1-x^n)}{(1-x)^n}$$

(2) 如果 b_n 是满足下述条件的 n 个元素组成的排列 π 的个数：当 i 为偶数有 $\pi(i)>\pi(i-1)$，当 i 为奇数有 $\pi(i)<\pi(i-1)$，那么有

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \tan x + \sec x .$$

通常一个排列定义为一个有限集到它自身的一个双射，即一个置换（substitution）（亦见集合的置换（permutation of a set）．

参考文献

[1] Сачков, В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977

[2] Riordan, J., An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1958.

В. М. Михеев 撰

【补注】 亦见**置换群**（permutation group）．

刘振宏 译 李 乔 校

置换群［**permutation group**；**подстановок группа**］

由集合 X 的若干置换（见**集合的置换**（permutation of a set））组成的集合在置换的乘法（合成）运算下构成的**群**（group）．换句话说，置换群是一个对 (G, X)，其中 G 为一个群而 X 为一个集合，且每个 $\gamma\in G$ 对应 X 的一个变换 $x\mapsto x^\gamma$，满足：1) $x^{\alpha\beta}=(x^\alpha)^\beta$，$x\in X$，$\alpha,\beta\in G$；2) $x^\alpha=x$ 对一切 $x\in X$ 成立，当且仅当 $\alpha=\varepsilon$ 为 G 的单位元．如果只有条件 1) 成立，就说成 G 在 X 上的作用（action）（或表示（representation））．在此情况下，G 中保持所有 $x\in X$ 不变的元素的集合 H 成为 G 的一个**正规子群**（normal subgroup）（称为作用的核（kernel of action）），而商群 G/H 作为置换群作用于 X 上．若 X 为有限集，则置换群 (G,X) 称为有限的（finite），否则称为无限的（infinite）．X 上全部置换的集合称为 X 上的对称群（symmetric group）并记作 $S(X)$，若 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 时也记作 S_n．

由置换群 (G,X) 到置换群 (G',X') 上的相似（similarity）（或同构（isomorphism））是一个映射对 (φ,ψ)，其中 φ 为 G 到 G' 上的同构而 ψ 是 X 到 X' 上的一一映射，且它们满足：对所有 $x\in X$ 和 $\alpha\in G$，$(x^\alpha)^\psi=(x^\psi)^{\alpha\varphi}$．两个置换群之间若存在相似，则它们称为相似的（similar）．若 (G,X) 为一置换群，则 X 上有一个自然规定的等价关系：$y,x\in X$ 时 $y\sim x$，当且仅当有一元素 $\alpha\in G$ 使 $y=x^\alpha$；置换群的这种等价类称为群 (G,X) 的轨道（orbit）或传递集（set of transitivity）．只有一个轨道的置换群是传递的（transitive），否则称为非传递的（intransitive）（见**传递群**（transitive group）．

任一抽象群 G 可以表示成为一适当集合上的置换群（Cayley 定理（Cayley theorem））．这里可把 G 的全体元素的集合作为 X，而把 $\gamma\in G$ 对应于把 G 中元素右乘 γ 所确定的映射：$\xi^\gamma=\xi\gamma$，如此得到的正则表示（regular representation）不是把群表示成置换群的唯一可能的方法．人们在研究置换群时感兴趣的性质与研究抽象群时有所不同．这时人们关心的不仅是群的结构，而首先是群如何作用于集合 X 上．例如，传递性是置换群的性质而不是抽象解的性质．

设 (G,X) 为一个置换群而 M 为 X 的一个子集．所有把 M 映射到自身（即 $x\in M \Leftrightarrow x^\gamma\in M$）的置换 $\gamma\in G$ 的集合组成一个子群 G_M，称为集合 M 的稳定化子（stabilizer）．使 M 的每一个单独的 $y\in M$ 保持不变的那些置换的集合称为 M 的点态稳定化子（pointwise stabilizer）（或固定子（fixator）），记作 $G_{(M)}$．点态稳定化子是稳定化子的正规子群．若 $M=\{\alpha\}$ 是单元素集，则稳定化子与点态稳定化子的概念是一致的（此时记作 G_α）．一个置换群称为半正则的（semi-regular）（或自由作用的（freely acting）），若每一点的稳定化子都是单位元素群，称为正则的（regular）（或单传递的（simply transitive）），若群还是传递的．一个置换群 G 的**中心化子**（centralizer）$Z(G)$ 按定义是指 G 在对称群 $S(X)$ 内的中心化子，即 X 上的与 G 中各元素可交换的那些置换组成的集合．传递群的中心化子是半正则的，而且反过来，半正则群的中心化子是传递的．正则置换群 (G,X) 相似于上面所说的群 G 的正则表示．正则表示的中心化子就是 G 的所谓左正则表示（left regular representation），它把每个元素 $\gamma\in G$ 对应于置换 $\xi^\gamma=\gamma^{-1}\xi$，$\xi\in G$．

有一些运算可用来由给定的置换群构造新 置换群（见[6]）．

a) 置换群的和（sum of permutation groups）．设 (G,X) 和 (H,Y) 为两个置换群且交 $X\cap Y$ 为空集．和 $(G,X)+(H,Y)$ 定义成由直积 $G\times H$ 作用于并 $X\cup Y$ 上所作成的置换群，其中对 $\alpha\in G$，$\beta\in H$，$z\in X\cup Y$，

$$z^{(\alpha,\beta)}=\begin{cases} z^\alpha & z\in X,\\ z^\beta & z\in Y.\end{cases}$$

b) 两个置换群 (G,X) 和 (H,Y) 的积（product）$(G,X)\times(H,Y)$ 是群 $(G\times H,\ X\times Y)$，其中 $G\times H$ 按公式 $(x,y)^{(\alpha,\beta)}=(a^x,y^\beta)$ 作用在 $X\times Y$ 上．

这两个运算都是结合的，并可对任意多个群来定义．

c) 圈积（wreath product）．设 (G,X) 和 (H,Y) 为两个置换群并设 $\beta\in H^X$ 表示 β 为由 X 到 H 内的

一个映射．把对 $[\alpha,\beta]$ 称为表（table）并在这些表所组成的集合上定义乘法

$$[\alpha,\beta][\alpha',\beta'] = [\alpha\alpha', x \mapsto \beta(x)\beta'(x^{\alpha})],$$

对于这个运算该集合成为一个群 $G\int H$．置换群（G, X）和（H, Y）的圈积是置换群（$G\int H, X\times Y$），其中作用由公式

$$(x,y)^{[\alpha,\beta]} = (x^{\alpha}, y^{\beta(x)})$$

规定．圈积是结合的，它可以定义在由置换群组成的任意全序族上．非单位置换群的圈积是一个**非本原群**（imprimitive group）．若（G,X)(H,Y）分别为由 G，H 的正则表示给出，这里的圈积的概念与群论中通常的**圈积**（wreath product）是一致的，只是因子的次序有所不同．

d）取幂（exponentiation）．表的群作用在集合 Y^X 上产生置换群

$$(H,Y)\uparrow(G,X) = (G\int H, Y^X).$$

其中的作用定义如下：

$$f^{[\alpha,\beta]} = (x \mapsto f(x^{\alpha})^{\beta(x)}).$$

而 $f\in Y^X$．取幂不是结合的，而且通常给出本原群，因为（H,Y）$\uparrow$（G,X）是本原的，只要（H,Y）是一个本原的非循环群．

置换群通常表现为一集合 X 上的保持某些关系或运算不变的置换所组成的群（见**变换群**（transformation group））．例如，置换群论的一个来源就是多项式的 **Galois 群**（Galois group）．设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

是系数 a_i 在某个域 K 中的多项式而 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为它在某扩域中的根，则 Galois 群就是集合 $\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 的那些保持根之间的有理关系式即形如

$$\sum c_{i_1\cdots i_n}\xi_1^{i_1}\cdots\xi_n^{i_n} = 0$$

的方程不变的那些置换所组成的群，这里 $c_{i_1\cdots i_n}\in K$．E. Galois 证明了这个群的性质决定了方程 $f(x)=0$ 可否用根式解．这一结论促使 Galois，J. Serret，C. Jordan 等人发展了置换群的理论．19 世纪末和 20 世纪初的进一步发展则应归功于 W. Burnside，W. Manning，G. Frobenius，О. Ю. Шмидт 以及 I. Schur．置换群在离散数学中有许多应用，例如在 Bool 函数和有限自动机的分类上，在纠错码理论中和复杂有机化合物的异构体的计数上都有应用．

参考文献

[1] Passman, D., Permutation groups, Benjamin, 1968.

[2] Wielandt, H., Finite permutation groups, Acad. Press, 1968（中译本：H．维兰特，有限置换群，科学出版社，1984）．

[3] Burnside, W., Theory of groups of finite order, Dover, reprint, 1955（译自德文）．

[4] Калужнин, Л. А., Сущанский, В. И., Преобразования и перестановки, М., 1979

[5] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959（中译本：M．赫尔，群论，科学出版社，1981）．

[6] Калужнин, Л. А., Клин, М. Х., Сущанский, В. И., «Известия вузов. Математика», 1979, 8, 26－33.

Л. А. Калужнин 撰　李慧陵 译

集合的置换 [**permutation of a set**；**подстановка множества**]

一个集合到自身上的一一映射．置换这一术语主要用于有限集 X 上．此时通常假设 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 而把置换写成

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1, & \cdots, & n \\ i_1, & \cdots, & i_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

的形式，这里 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 为数 $1, 2, \cdots, n$ 的某个**排列**（permutation）．(*) 的记法表示 γ 把数 k 映到 i_k，即对 $k=1,2,\cdots,n$，$\gamma(k)=i_k$（有人写成 $k^{\gamma}=i_k$）．若 $|X|=n$，则集合 X 的置换的个数等于 $n!$．集合 X 的置换 α 和 β 的乘积定义成依次施行映射 α 和 β，用公式表示即对所有的 $x\in X$，$\alpha\beta(x)=\alpha(\beta(x))$．对于这一乘法，$X$ 的全体置换的集合成为一个群（group），称为**对称群**（symmetric group）．对称群的任意子群称为**置换群**（permutation group）．

集合 X 的置换的对称群记作 $S(X)$，它包含子群 $SF(X)$，即那些只变动元素的有限子集的置换（即仅对 $x\in X$ 的一个有限子集成立 $\gamma(x)\neq x$ 的置换）组成的群．若 X 为由 n 个元素组成的有限集，则对称群记作 S_n．

对换（transposition）是 X 的只变动两个元素 i 和 j 的置换，它记作 (i,j)．S_n 中恰有 $n(n-1)/2$ 个对换．$SF(X)$ 中的任一置换都可写成对换的乘积．特别 S_n 中每个置换都是对换的乘积．同一置换可以有多种方法表示成对换的积．但是，对给定置换 γ，在 γ 分解成对换的乘积时因子的个数的奇偶性与分解方法无关．可以表示成偶数个对换的乘积的置换称为偶的（even），而可分解成奇数个对换的乘积的置换称为奇的（odd）．在 S_n 中恰有 $n!/2$ 个偶置换和相同个数的奇置换．若置换 γ 写成 (*) 的形状，它的奇偶性与排列 $i_1,\cdots,i_n$ 的逆序数（number of inversions）的奇偶性一致，而逆序数等于满足 $k<j$，$i_k>i_j$ 的数对 $\{i_k, i_j\}$ 的个数．对换显然是奇置换．在一个排列上施行一对换改变其逆序数的奇偶性．两个偶置换的乘积，或两个奇置换的乘积是偶置换，而一个偶置换与一个奇置换的乘积（不论次序如何）是奇的．全体偶置换构成群 $SF(X)$ 的一个**正规子群**（normal subgroup）

$A(X)$，称为交错群（alternating group）．对 $|X|=n$ 的情形，子群 $A(X)$ 记作 A_n．

长度为 l 的轮换（cycle）或循环置换（cyclic permutation）是有限集 $Y=\{y_1,\cdots,y_l\}$ 的置换 σ，使得

$$\sigma(y_1)=y_2,\cdots,\sigma(y_{l-1})=y_l,\sigma(y_l)=y_1.$$

有限轮换记作 $(y_1,\cdots,y_l)$．无限轮换（infinite cycle）是一形如

$$Y=\{\cdots,y_{-2},y_{-1},y_0,y_1,y_2,\cdots\}$$

的可数集的置换 σ，使得对任意 i，$\sigma(y_i)=y_{i+1}$．无限轮换的记号是

$$(\cdots,y_{-2},y_{-1},y_0,y_1,y_2,\cdots).$$

长 2 的轮换就是对换．群 S_n 中包含 $(n-1)!$ 个长 n 的轮换，对 $S(X)$ 中的任意置换 γ，有一个 X 表成为无交子集的分解，使得 γ 如同轮换那样作用于每个子集上．在这个分解中，有限子集形如

$$\{x,\gamma(x),\cdots,\gamma^{l-1}(x)\},$$

这里 $\gamma^l(x)=x$，而无限子集形如

$$\{\cdots,\gamma^{-2}(x),\gamma^{-1}(x),x,\gamma(x),\gamma^2(x),\cdots\}.$$

这里 $\gamma^k(x)\neq x$ 对 $k\neq 0$．γ 在此分解的各子集上诱导的轮换称为置换 γ 的不相交轮换（disjoint cycle）．举例说，$(1,3,4)$ 和 $(2,5)$ 是置换

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$$

的不相交轮换，且 γ 可以表成

$$(1,3,4)(2,5),$$

即不相交轮换的乘积．一般说来，若 γ 不是恒等置换并且只有有限个长大于 1 的轮换，则 γ 是这些轮换的乘积．特别地，$SF(X)$ 中每个非恒等置换是它的长度大于 1 的不相交轮换的乘积．$SF(X)$ 中置换 γ 的阶（order of a permutation），亦即循环群（cyclic group）$<\gamma>$ 的阶等于这些不交轮换长度的最小公倍数．

从一给定置换的不相交轮换，我们可以得到任一与之共轭的置换（见共轭元（conjugate elements））的不相交轮换．例如，若

$$\gamma=(a_1,\cdots,a_l)\cdots(a_j,\cdots,a_n)$$

是 S_n 中置换 γ 的不相交轮换的乘积，若 $\delta\in S_n$ 且 $\delta(a_i)=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\delta\gamma\delta^{-1}=(b_1,\cdots,b_l)\cdots(b_j,\cdots,b_n)$$

是置换 $\delta\gamma\delta^{-1}$ 写成不相交轮换的乘积的分解式．群 S_n 的两个置换在 S_n 中共轭，当且仅当对每个长度它们都有相同个数的轮换．

设 $s\in S_n$ 而设 k 为 s 的不相交轮换包括长为 1 的轮换的个数．则差 $n-k$ 称为置换 s 的减量（decrement of permutation）．把置换 s 表成为对换的乘积时所需对换个数的最小数就是这个减量．置换的奇偶性与其减量的奇偶性相同．

置换最早于 18 世纪出现于组合学中．在 18 世纪末，J. L. Lagrange 把置换用在他关于代数方程的根式可解性的研究中．A. L. Cauchy 对这一课题也很关注并提出了把置换表成为轮换分解的想法．对置换的群的性质的研究是由 N. H. Abel，特别是由 E. Galois 进行的．见 **Galois 理论**（Galois theory）和**置换群**（permutation group）．

参考文献

[1] Jordan, C., Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, 1957.

[2] Кострикин, А. И., Введение в алгебру, М., 1977（英译本：Kostrikin, A. I., Introduction to algebra, Springer, 1982）．

[3] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975（英译本：Kurosh, A. G., Higher algebra, Mir, 1972）．

[4] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959（中译本：M. 赫尔，群论，科学出版社，1981）．

Д. А. Супруненко 撰

【补注】 用记号 x^γ 时，表达式 $x^{\alpha\beta}$ 应读作 $(x^\alpha)^\beta$，即 α 在先，β 在后．

参考文献

[A1] Suzuki, M., Group theory, 1－2, Springer, 1986.

李慧陵 译

置换关系［**permutation relationships** 或 permutation relations；**перестановочности соотношения**］

置换两个产生算子或湮没算子之积的法则．也就是说，对于**湮没算子**（annihilation operators）$\{a(f):f\in H\}$ 和伴随**产生算子**（creation operators）$\{a^*(f):f\in H\}$，其中 H 是某个 Hilbert 空间，作用于在 H 上构造的对称 **Фок 空间**（Fock space）$F(H)$ 中，这些关系具有下列形式

$$a(f_1)a(f_2)-a(f_2)a(f_1)=0,$$

$$a^*(f_1)a^*(f_2)-a^*(f_2)a^*(f_1)=0, \qquad (1)$$

$$a(f_1)a^*(f_2)-a^*(f_2)a(f_1)=(f_1,f_2)E,\ f_1,f_2\in H,$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 是 H 中的内积（inner product），而 E 是作用于 $F(H)$ 中的单位算子．关系 (1) 亦称对易关系（commutation relations）．在反对称 Фок 空间的情形，产生和湮没算子的置换按照下列定则

$$a(f_1)a(f_2)+a(f_2)a(f_1)=0,$$

$$a^*(f_1)a^*(f_2)+a^*(f_2)a^*(f_1)=0, \qquad (2)$$

$$a(f_1)a^*(f_2)+a^*(f_2)a(f_1)=(f_1,f_2)E,$$

$$f_1, f_2 \in H.$$

关系(2)亦称反对易关系(anti-commutation relations).

在无穷维空间 H 的情况, 除了作用于遍及 H 的 **Фок** 空间中的产生和湮没算子之外, 对于对易和反对易关系还存在与它们不等价的不可约表示, 即, 作用于某个 Hilbert 空间并满足置换定则(1)或(2)的其他算子族([1], [2]). 在有限维 Hilbert 空间 H 的情况, (1)或(2)的全部不可约表示是酉等价的.

参考文献

[1] Березин, Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965.

[2A] Gårding, L. and Wightman, A., Representations of the anticommutation relations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 7, 617 – 621.

[2B] Gårding, L. and Wightman, A., Representations of the commutation relations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 7, 622 – 626.

Р. А. Минлос 撰

【补注】 对于关系(1)和(2)经常使用正则对易关系(canonical commutation relations)和正则反对易关系(canonical anti-commutation relations)的缩写 CCR 和 CAR. 人们也论及 CCR 代数和 CAR 代数.

参考文献

[A1] Bogolyubov, N. N., Logunov, A. A., Oksak, A. I. and Todorov, I. T., General principles of quantum field theory, Kluwer, 1990, p. 265 ff; 295 (译自俄文).

[A2] Emch, G. G., Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory, Wiley (Interscience), 1972.

[A3] Horuzhy, S. S. [S. S. Khorozhiĭ], Introduction to algebraic quantum field theory, Kluwer, 1990, p. 256 ff (译自俄文).

[A4] Zavialov, O. I., Renormalized quantum field theory, Kluwer, p. 3 ff (译自俄文).

徐锡申 译

排列检验 [permutation test; перестановок критерий]

一种统计检验, 用于检定假设 H_*: 被观测随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的概率密度(见**概率分布的密度**(density of a probability distribution))属于关于自变量的排列对称的一切 n 维密度族.

设 $\mathbf{H}_*=\{p(x)\}$ 是关于自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的排列对称的, 一切 n 维密度 $p(x)=p(x_1,\cdots,x_n)$ 族, 即

$$p(x)\in\mathbf{H}_* \Leftrightarrow p(x_1,\cdots,x_n)=p(x_{r_1},\cdots,x_{r_n}),$$

其中 $r=(r_1,\cdots,r_n)$ 是向量 $(1,\cdots,n)$ 的一切排列 $(r_1,\cdots,r_n)$ 的空间 $\mathfrak{R}$ 中的任意向量; $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中取 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 为值的随机向量. 假定拟根据 X 的实现检定关于"随机向量 X 的概率密度 $p(x)$ 属于 n 维密度族 $\mathbf{H}_*$"的假设 H_*. 设 $X^{(\cdot)}$ 是在集合 $\mathfrak{X}^{(\cdot)}\subset\mathbf{R}^n$ 中取 $x^{(\cdot)}$ 为值的顺序统计量向量, $R=(R_1,\cdots,R_n)$ 是在建立 $X^{(\cdot)}$ 时自然产生的秩向量, 则空间 $\mathfrak{R}$ 是秩向量 R 的一切实现的集合. 在假设 H_* 成立的情形下, 统计量 $X^{(\cdot)}$ 和 R 随机独立, 且

$$\mathrm{P}\{R=r\}=\frac{1}{n!}, \quad r\in\mathfrak{R}, \qquad (*)$$

而 $X^{(\cdot)}$ 的概率密度为 $n!\,p(x^{(\cdot)})$, $x^{(\cdot)}\in\mathfrak{X}^{(\cdot)}$.

在假设 H_* 成立的情形下, 统计量 R 的均匀分布性 $(*)$, 是建立排列检验的基础.

假设 $\Psi(x^{(\cdot)}, r)$ 是定义在 $\mathfrak{X}^{(\cdot)}\times\mathfrak{R}$ 上的函数, 满足条件: $0\leqslant\Psi\leqslant1$; 对于任意 $r\in\mathfrak{R}$, Ψ 关于 $\mathfrak{X}^{(\cdot)}$ 中的 Borel σ 代数可测; 对于某个 $\alpha\in(0,1)$, 几乎处处有

$$\frac{1}{n!}\sum_{r\in\mathfrak{R}}\Psi(x^{(\cdot)}, r)=\alpha,$$

则以

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\Psi(x^{(\cdot)}, r)$$

为临界函数检定假设 H_* 的统计检验称做排列检验(permutation test). 假如排列检验是非随机化的, 则 α 应取 $1/n!$ 的倍数.

对于不属于 $\mathbf{H}_*$ 的任意 n 维密度 $q(x)$, 可以在排列检验族中求得检定假设 H_* 对简单备选假设 $q(x)$ 的最大功效检验.

排列检验族, 以及关于位移和尺度参数变换的不变检验族, 在构造**秩检验**(rank test)时起重要作用. 最后需要指出, 在数理统计的文献中常用**随机化检验**(radomization test)这一术语, 来代替排列检验这一术语.

见**顺序统计量**(order statistic); **不变检验**(invariant test); **临界函数**(critical function).

参考文献

[1] Hájek, J. and Sidák, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

[2] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

置换子 [permutator; пермутатор]

随机核的一个与1不同的本征值 λ 且满足 $|\lambda|=1$. 在有限维空间中一个紧集 Ω 上给定的非负连续函数 $K(x, y)$ 称为随机核(stochastic kernel), 如果

$$\int_{\Omega} K(x, y) dy = 1, x \in \Omega.$$

这样一种核的本征值满足条件 $|\lambda| \leqslant 1$. 算子理论中，置换子这名字也给予这样一种算子 $A: E \to E$，如果其值域 $A(E)$ 是有限维的且存在 $A(E)$ 中的一组基 $e_1, \cdots, e_n$ 使得 $Ae_j = e_{k_j}$, $j = 1, \cdots, n$.

参考文献

[1] Интегральные уравнения, М , 1968 (英译本：Zabreyko, P. P., et al., Integral equations — a reference text, Noordhoof, 1975).

Б В Хведелидзе 撰

【补注】 给定一个核 $K(x, t)$，考虑齐次积分方程

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, t) u(t) dt = 0.$$

核 $K(x, t)$ 的正则点(regular point)是使得此方程只有平凡解的点 λ；特征点(值)(characteristic point (value))是使得有非平凡解的点. 如果 λ 是特征点，则 λ^{-1} 称为核 $K(x, t)$ 的一个本征值(eigen value). 注意它也是由 $K(x, t)$ 定义的积分算子的本征值；见[1], pp. 27ff.

葛显良 译 鲁世杰 校

垂线[**perpendicular**; **перпендикуляр**]，对给定直线(平面)的

与给定直线(平面)相交成直角的直线.

【补注】 两条相交成直角的直线也称为正交的(orthogonal)或垂直的(perpendicular)(亦见**垂直直线**(perpendicular straight lines)).

杜小杨 译

垂直直线[**perpendicular straight lines**; **перпендикулярные прямые**]

相互成直角的直线(在空间中这种直线不一定相交). 直线 l 和平面 α 称为相互垂直的，如果 l 垂直于处于 α 上的任何直线. 关于垂直性概念的推广，见正交性(orthogonality).

杜小杨 译

Perron-Frobenius 定理[**Perron-Frobenius theorem**; **Перрона-Фробениуса теорема**]

设把实 $(n \times n)$ 阶矩阵 A 看作 $\mathbf{R}^n$ 上的一个算子，它没有不变坐标子空间(这样的矩阵称为不可分解的(indecomposable))，并且设它是非负的(即它的所有元素都是非负的). 此外，设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是它的本征值，适当编号使得

$$|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_h| > |\lambda_{h+1}| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|, 1 \leqslant h \leqslant n.$$

这时，

1) 数 $r = |\lambda_1|$ 是 A 的特征多项式(characteristic polynomial)的单正根；

2) 存在 A 的一个具有正坐标的本征向量，对应于 r；

3) 数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_h$，除编号外，与数 $r, \omega r, \cdots, \omega^{h-1} r$ 相同，其中 $\omega = e^{2\pi i/h}$；

4) A 的任何本征值与 ω 之积都是 A 的本征值；

5) 对于 $h > 1$，总可找到一种行与列的置换，使得 A 化为下列形式：

$$\begin{Vmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{h-1} \\ A_h & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}.$$

其中 A_i 是 n/h 阶矩阵.

O. Perron 对于正矩阵证明了断言 1) 和 2)([1])，而 G. Frobenius([2]) 给出了这个定理的完全形式.

参考文献

[1] Perron, O., Zur Theorie der Matrizen, *Math. Ann.*, **64** (1907), 248 - 263.

[2] Frobenius, G., Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen, *Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.*, 1912, 456 - 477.

[3] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967 (中译本：Φ. P. 甘特马赫尔，矩阵论，上、下，高等教育出版社，1955).

Д А. Супруненко 撰

【补注】 Perron-Frobenius 定理具有许多应用，见[A1], [A2].

参考文献

[A1] Seneta, E., Nonnegative matrices, Allen & Unwin, 1973.

[A2] Lancaster, K., Mathematical economics, MacMillan, 1968.

杜小杨 译

Perron 积分[**Perron integral**; **Перрона интеграл**]

Lebesgue 积分(Lebesgue integral)概念的一个推广. 函数 $f(x)$ 称为 $[a, b]$ 上在 Perron 意义下可积的(integrable in the sense of Perron)，如果存在函数 $M(x)$(强函数)和函数 $m(x)$(弱函数)，使得对于 $x \in [a, b]$，有

$$M(a) = 0, \underline{D} M(x) \geqslant f(x), \underline{D} M(x) \neq -\infty,$$

$$m(a) = 0, \overline{D} m(x) \leqslant f(x), \overline{D} m(x) \neq +\infty$$

($\underline{D}$ 和 $\overline{D}$ 是上导数和下导数)，而且，强函数 $M(x)$ 的值 $M(b)$ 的下界等于弱函数 $m(x)$ 的值 $m(b)$ 的上界. 二者的共同值称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 Perron 积分(Perron integral)，记为

$$(P)\int_a^b f(x)dx$$

Perron 积分由一个函数的逐点有限导数恢复了这个函数，它等价于狭义的 **Denjoy 积分**（Denjoy integral）．有界函数的 Perron 积分是 O．Peron（[1]）引入的，而 H．Bauer（[2]）给出了精确的定义．

参考文献

[1] Perron，O．，Ueber den Integralbegriff，*Sitzungsber Heidelberg．Akad．Wiss*．VA（1914）．1－16．

[2] Bauer，H．，Der Perronsche Integralbegriff und seine Beziehung auf Lebesguesschen．*Monatsh Math Phys*．，**26**（1915），153－198．

[3] Saks．S．，Theory of the integral．Hafner．1952（译自波兰文）．

[4] Виноградова，И．А．，Скворцов，В．А．，Итоги науки．Математический анализ，1970，М．，1971

Т．П．Лукашенко 撰

【补注】 Perron 方法比 Denjoy 方法简便，但是 Denjoy 方法更具构造性．见 **Denjoy 积分**（Denjoy integral）的补注．

关于 $f(x)$ 的强函数和弱函数的定义，见 **Perron-Stieltjes 积分**（Perron-Stieltjes integral）的补注．

杜小杨 译

Perron 法［Perron method；Перрона метод］

解 **Laplace 方程**（Laplace equation）的 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）的一种方法，它基于**下调和函数**（subharmonic function）（与上调和函数）的性质．该方法由 O．Perron 最先提出，N．Wiener（[3]）和 M．B．Келдыш（[4]）作了实质性发展．

设 Ω 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 的一个有界区域，其边界为 $\Gamma=\partial\Omega$，又设 $f=f(y)$ 是 Γ 上的一个实值函数，$-\infty\leqslant f(y)\leqslant+\infty$．令 Φ 表示在宽的意义（即函数 $v(x)\equiv+\infty$ 属于 Φ）下由所有这样的上调和函数 $v(x)$ 组成的非空族，即 $v(x)$ 下有界且满足

$$\varliminf_{x\to y} v(x)\geqslant f(y),\quad y\in\Gamma.$$

记

$$\overline{H}_f(x)=\overline{H}_f(x;\ \Omega)=\inf\{v(x):v\in\Phi\},\ x\in\Omega,$$

为 Φ 的下包络．与 Φ 一起，考虑在宽的意义下（指函数 $u(x)\equiv-\infty\in\Psi$），这样的下调和函数 $u(x)$（$x\in\Omega$）的非空族 Ψ，即 $u(x)$ 上有界且满足

$$\varlimsup_{x\to y} u(x)\leqslant f(y),\quad y\in\Gamma.$$

记

$$\underline{H}_f(x)=\underline{H}_f(x;\ \Omega)=\sup\{u(x):u\in\Psi\},\ x\in\Omega,$$

为 Ψ 的上包络．

对于 $\overline{H}_f$（和 $\underline{H}_f$）只有三种可能：$\overline{H}_f(x)\equiv+\infty$，$\overline{H}_f(x)\equiv-\infty$ 或者 $\overline{H}_f(x)$ 是**调和函数**（harmonic function）；同时总有

$$\underline{H}_f(x)\leqslant\overline{H}_f(x),\quad x\in\Omega.$$

函数 $f(y)(y\in\Gamma)$ 称为可解的（resolutive），如果两个包络 $\overline{H}_f$ 与 $\underline{H}_f$ 都是有限的且二者相等．在这种情况下，调和函数 $H_f=\overline{H}_f=\underline{H}_f$ 是关于 $f(y)(y\in\Gamma)$ 的 Dirichlet 问题的广义解（generalized solution to the Dirichlet problem）（按 Wiener-Perron 定义）．$f(y)(y\in\Gamma)$ 可解的必要与充分条件是，它关于 Γ 上的**调和测度**（harmonic measure）可积（Brelot 定理（Brelot theorem））．任意有限的连续函数 $f(y)(y\in\Gamma)$ 是可解的（Wiener 定理（Wiener theorem））．

一个点 $y_0\in\Gamma$ 称为正则边界点（regular boundary point），如果下面的极限关系对任意有限的连续函数 $f(y)$（$y\in\Gamma$）都成立：

$$\lim_{x\to y_0} H_f(x)=f(y_0).$$

每个点 $y\in\Gamma$ 都正则，当且仅当对任意有限的连续函数 $f(y)(y\in\Gamma)$ Dirichlet 问题的古典解 $w_f(x)$ 都存在且 $H_f(x)\equiv w_f(x)$；若一个有界区域 Ω 的所有边界点都是正则的，则 Ω 有时也称之为正则的（regular）区域．一个点 $y_0\in\Gamma$ 正则的必要与充分条件是，在 y_0 存在**闸函数**（barrier）．

若点 $y_0\in\Gamma$ 不是正则的，则称为非正则边界点（irregular boundary points）．例如，孤立点为非正则边界点，还有，当 $n\geqslant3$ 时，插入 Ω 的足够尖的楔形的顶点（Lebesgue 脊（Lebesgue spines））亦如此．Γ 的所有非正则点组成的集合是零容量的 F_σ 型集．

假设存在区域列 Ω_k，$\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}$，使得 $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Omega_k$，又设一个有限的连续函数 $f(y)$（$y\in\Gamma$）可以连续扩张到 Ω，则

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\Omega_k)=H_f(x;\Omega),\ x\in\Omega,$$

在 Ω 的紧子集上一致收敛．若 Ω_k 为正则区域列，就得到 Wiener 所构造的 Dirichlet 问题的广义解．现在考虑无内边界的区域 Ω 与任意区域列 G_k，$\partial G_k\to\Gamma$，$G_k\supset\overline{\Omega}$．此时在一般情况下

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\ G_k)\neq H_f(x;\ \Omega).$$

Dirichlet 问题在一个区域 Ω 或闭区域 $\overline{\Omega}$ 中是稳定的，如果对所有的 $x\in\Omega$，或相应地对所有的 $x\in\overline{\Omega}$，有

$$\lim_{k\to\infty} H_f(x;\ G_k)=H_f(x;\ \Omega).$$

关于一个区域 Ω 的 Dirichlet 问题为稳定的必要与充分条件为，余集 $C\Omega$ 与 $C\overline{\Omega}$ 的所有非正则点组成的集合是相等的；关于闭区域的稳定性要求 $C\overline{\Omega}$ 没

有非正则点（见 **Келдыш 定理**（Keldysh theorem）和[4]．在[4]中还给出一个正则区域 Ω，在其中 Dirichlet 问题不稳定的例子）．

亦见**上函数与下函数方法**（upper-and-lower functions method）．

参考文献

[1] Perron, O., Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Z.*, 18(1923), 42 – 54.

[2] Петровский, И. Г., 《Успехи матем. наук》, 8(1941), 107 – 114.

[3A] Wiener, N., Certain notions in potential theory, *J. Math. Phys.*, 3(1924), 24 – 51.

[3B] Wiener, N., The Dirichlet problem, *J. Math. Phys.*, 3(1924), 127 – 146.

[3C] Wiener, N., Note on paper of O. Perron, *J. Math. Phys.*, 4(1925), 21 – 32.

[4] Келдыш, М. В., 《Успехи матем. наук.》, 8(1941), 171 – 231.

[5] Brelot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1969.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 从 S. Zaremba([A5]) 和 H. Lebesgue([A2]) 的反例得知，不能保证 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的古典解总存在．因此 Lebesgue([A3]) 构造了一个从边界函数空间到区域上的调和函数所组成的集合的解算子．这算子是线性、保序的（见**保序映射**（isotone mapping）），且当古典解存在时可求得该解．N. Wiener([3C]) 证明，对于连续的边界函数，这个解算子可由 Perron 方法得到．M. Brelot 把这个方法推广到任意的边界函数，从此就称为 Perron-Wiener-Brelot 法（Perron-Wiener-Brelot method）．M. B. Келдыш 证明了这个解算子的唯一性（见 **Келдыш 定理**（Keldysh theorem））．所有这些结果在**抽象调和空间**（harmonic space）理论中都有对应的结论，见[A4]．

参考文献

[A1] Brelot, M., Familles de Perron et probléme de Dirichlet, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), 9 (1938 – 1940), 133 – 153.

[A2] Lebesgue, H., Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire, *C. R. Séances Soc. Math. France*, 41(1913), 17.

[A3] Lebesgue, H., Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci.*, 178 (1924), 349 – 354.

[A4] Netuka, I., The Dirichlet problem for harmonic functions, *Amer. Math. Monthly*, 87 (1980), 621 – 628.

[A5] Zaremba, S., Sur le principe de Dirichlet, *Acta Math.*, 34(1911), 293 – 316.

尚琪仁 吴炯圻 译

Perron-Stieltjes 积分[**Perron-Stieltjes integral**; **Перрона-Стилтьеса интеграл**]

一元实变函数 **Perron 积分**（Perron integral）的推广．一个有限函数 f 称为在 $[a,b]$ 上关于某有限函数 G 依 Perron-Stieltjes 意义可积，是指在 $[a,b]$ 上存在 f 关于 G 的一个上函数 M 和一个下函数 m，满足 $M(a)=m(a)=0$，且对一切 $x\in[a,b]$ 以及一切充分小的正数 $\alpha\geqslant 0$ 与 $\beta\geqslant 0$，有

$$M(x+\beta)-M(x-\alpha)\geqslant$$
$$\geqslant f(x)(G(x+\beta)-G(x-\alpha))$$

以及

$$m(x+\beta)-m(x-\alpha)\leqslant$$
$$\leqslant f(x)(G(x+\beta)-G(x-\alpha)).$$

此外，对满足上述性质的所有上函数 M 与下函数 m，相应 $M(b)$ 中的最大下界与相应 $m(b)$ 中的最小上界相等．这个公共值称为 f 在 $[a,b]$ 上关于 G 的 Perron-Stieltjes 积分，并记为

$$(P-S)\int_a^b f(x)dG(x).$$

Perron 积分的这一推广由 A. J. Ward([1])引入．

参考文献

[1] Ward, A. J., The Perron-Stieltjes integral, *Math. Z.*, 41(1936), 578 – 604.

[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952.

[3] Виноградова, И. А., Скворцов, В. А., в кн.: Математический анализ, 1970, М., 1971, 65 – 107.

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】 函数 f 在 $[a,b]$ 上关于函数 G 在 $[a,b]$ 上的一个**上函数**（major function）U，是满足如下条件的函数 U：对每个 $x\in[a,b]$，存在正数 $\varepsilon>0$，使当 $|d-c|<\varepsilon$ 时，对一切 $c\leqslant x\leqslant d$，有 $U(d)-U(c)\geqslant f(x)\ (G(d)-G(c))$．**下函数**（minor function）的定义类似，只要把不等号反向．所以，U 关于 G 的一个适当的下导数控制了 f．更一般地，可以考虑满足上述性质的加性区间函数 U 和 G，细节见[2]．若 G 是 $[a,b]$ 上的通常的函数，那么和它关联的加性区间函数，仍记为 G 的话，就是 $G([c,d])=G(d)-G(c)$．如果不指定 G，则 f 的上函数就理解为 f 关于恒等函数 $x\mapsto x$，$x\in[a,b]$ 的上函数．

王斯雷 译

Perron 变换[**Perron transformation**; **Перрона преобразование**]

正交（酉）变换

$$x^i=\sum_{j=1}^{n}u_j^i(t)y^j,\ i=1,\cdots,n, \qquad (1)$$

光滑地依赖于 t，并把线性常微分方程组

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t) x^j, \ i = 1, \cdots, n \tag{2}$$

变换为三角形方程组

$$\dot{y}^i = \sum_{j=i}^{n} p_j^i(t) y^j, \ i = 1, \cdots, n. \tag{3}$$

这个变换是由 O. Perron 引入的（[1]）. Perron定理成立：对于任何具有连续系数 $a_j^i(t)$ 的线性方程组（2），都存在一个 Perron 变换.

设向量组 $x_1(t), \cdots, x_n(x)$ 是（2）的某一**基本解组**（fundamental system of solutions），可以通过对 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 的**正交化**（orthogonalization）（对每个 t）来构造 Perron 变换；一般地说，由不同的基本解组得到不同的Perron 变换，见 [1]，[2]. 对于具有有界连续系数的方程组（2），一切 Perron 变换都是 **Ляпунов 变换**（Lyapunov transformation）.

如果矩阵值函数 $\| a_j^i(t) \|$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ 是**递归函数**（recurrent function），则可求出递归矩阵值函数 $\| u_j^i(t) \|$ $(i, j = 1, \cdots, n)$，使得（1）是这样一个 Perron 变换，它把方程组（2）化成三角形方程组（3），并且使得函数

$$\| p_j^i(t) \|, \ i, j = 1, \cdots, n$$

是递归的.

参考文献

[1] Perron, O., Ueber eine Matrixtransformation, *Math.*, *Z.*, 32 (1930), 465 – 473.

[2] Diliberto, S. P., On systems of ordinary differential equations, in S. Lefschetz, et al. (ed.): Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Ann. Math. Studies, Vol. 20, Princeton Univ. Press, 1950, 1 – 38

[3] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966.

[4] Изобов, Н. А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 71 – 146.

В. М. Миллионщиков 撰

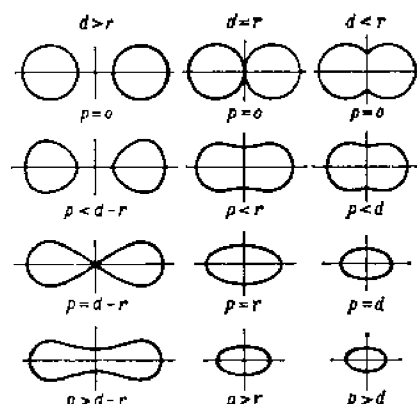
杜小杨 译

Persei 曲线 [**Persian curve**; **Персея кривая**]，平面与环面相交生成的曲线（spiric curve）

一种四次平面代数曲线，即环面与平行于其轴的平面的交线（见图）. 在直角坐标系中的方程是

$$(x^2 + y^2 + p^2 + d^2 - r^2)^2 = 4d^2(x^2 + p^2),$$

其中 r 是环面的生成圆的半径，d 是从坐标原点到生成圆中心的距离，p 是从环面的轴到该平面的距离. 下述曲线都是 Persei 曲线：**Booth 双纽线**（Booth lemniscate）；**Cassini 卵形线**（Cassini oval）和 **Bernoulli 双纽线**（Bernoulli lemniscate）.



因古希腊几何学家 Persei（公元前 2 世纪）而得名，他在研究给出曲线的各种方式时考察了这种曲线.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

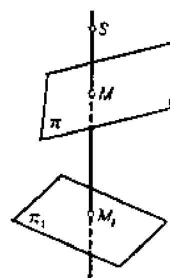
[A1] Gomez Teixeira, F., Traité des courbes, 1 – 3, Chelsea, reprint, 1971.

[A2] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesellschaft, 1962.

杜小杨 译

透视 [**perspective**; **перспектива**]，具有中心 S 的

平面 π 到平面 π' 中的映射，在此映射下 π 中的每一点 M 对应于直线 SM 与 π' 的交点 M'（如果 SM 不平行于 π'，见图）.



更一般地，设 V 与 V_1 是射影空间 Ω 中维数相等的两个真子空间，T 是一个与 V 或 V_1 没有公共点的最大维数的子空间，U 是一个包含于 V 中的子空间，W 是包含 U 与 T 的最小维数的子空间，U_1 是 W 与 V_1 的交.

使得包含于 V 的每一个子空间 U 对应于包含于

V_1 的子空间 U_1 的对应称为具有透视中心 T 的从 V 到 V_1 中的透视映射（perspective mapping）.

一个透视是一个直射变换（collineation）. 如果子空间 V 与 V_1 相交，那么子空间 $V \cap V_1$ 中的每一点对应到自身.

如果在空间 V 与 V_1 中引入射影坐标，那么透视对应能够用一个线性映射给出.

参考文献

[1] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

[2] Глаголев, Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963.

П. С. Моденов 撰

【补注】 透视映射也称为中心投影（central projection）或透视（perspectivity）.

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, I, Springer, 1987（中译本：M. 贝尔热，几何，第一—五卷，科学出版社，1987－1991）.

[A2] Busemann, H. and Kelly, P., Projective geometry and projective metrics, Acad. Press, 1953（中译本：Busemann, H. and Kelly, P.，射影几何与射影度量，天津师范大学出版社，1985）.

[A3] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A4] Coxeter, H. S. M., Projective geometry, Blaisdell, 1964.

[A5] Coxeter, H. S. M., The real projective plane, McGraw-Hill, 1949.

林向岩 译

线性方程组的扰动 [perturbation of a linear system; возмущение линейной системы]

常微分方程组

$$\dot{x} = A(t)x + f(x, t) \tag{1}$$

中的映射 f. 通常都设扰动在某种意义下是微小的，例如设

$$\frac{|f(x, t)|}{|x|} \to 0, \quad 当\ |x| \to 0 时. \tag{2}$$

被扰动方程组（1）的解 $\varphi(t)$ 和线性方程组

$$\dot{y} = A(t)y \tag{3}$$

的具有相同初值（即当 $t = t_0$ 时的值 y_0）的解 $\Psi(t)$ 之间有以下的关系式

$$\varphi(t) = \Psi(t)\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(\tau)f(\varphi(\tau), \tau)d\tau\right],$$

称为常数变易公式（formula of variation of constants），其中 $\Psi(t)$ 是线性方程组（3）的**基本矩阵**（fundamental matrix）.

A. M. Ляпунов（[1]）指出，方程组（1）的平凡解是渐近稳定的（见**渐近稳定解**（asymptotically-stable solution）），若关系式（2）对 t 一致成立，而且 $A(t)$ 是常数矩阵，其一切本征值的实部均为负；只要有一个本征值的实部为正，平凡解就是不稳定的.

研究描述振动过程的方程组 $\dot{x} = P(x, t)$ 之周期解 φ，可以在一般情况下通过变换 $x = \varphi(t) + y$ 化为研究一个扰动线性方程组，其右方对 t 是周期的（[3]）.

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.-Л., 1950（英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.

[2] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Е., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости, М., 1966.

[3] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974（中译本：庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962）.

Л. Э. Рейзинь 撰

【补注】 这一类结果通常称为 Poincaré-Ляпунов 定理（Poincaré-Lyapunov theorems）. 它有好几种推广，例如在 [A1] 中讲到. [A2] 是包含了这些材料的新教材.

参考文献

[A1] Roseau, M., Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer, 1966.

[A2] Verhulst, F., Nonlinear differential equations and dynamical systems, Springer, 1989.

齐民友 译

扰动理论 [perturbation theory; возмущений теория]

在数学、力学、物理学和工程技术的许多分支中使用的研究各种问题的一些方法. 本文将从统一的观点给出扰动理论的主要思想.

扰动理论的基础是这样的事实，即可以用一个特别选定的能正确地、完全地研究的"理想系统"，对正在研究的系统给出一个近似的描述. 扰动理论的某些部分可以应用的判据之一在于，依据所研究的问题的性质，描述所考虑的过程的方程中显含（或隐含）一个（或几个）小参数. 进一步再要求若此小参数为零，则方程恰好可解，于是问题归结为寻求真解的准确到 $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots$ 阶的最佳近似的渐近性态.

1）扰动理论首先是为了求解天体力学中的问题，源起于太阳系中行星的运动. 因为这些行星相距遥远，而其质量又远小于太阳的质量，行星间的引力可以忽略不计，而作为一级近似，行星可以看作是沿 Kepler 轨道运动的，这些轨道则由**二体问题**（two-body problem）的方程决定，二体即行星与太阳.

因为对天文数据要求知道得越来越精确，就有必要考虑一行星绕太阳的运动如何受到其他行星的影响. 这就是**三体问题**（three-body problem）的来源；于是，

在考虑月－地－日系统时，月球和地球的质量比就取作小参数．J. L. Lagrange 和 P. Laplace 最早提出以下的观点，即描述行星绕日运动的那些常数可以说是受到了其他行星运动的扰动，而作为时间的函数而变动．"扰动理论"一词即由此而来．

扰动理论经过经典大师们，如 P. Laplace，S. Poisson 和 C. F. Gauss 的研究，使得计算的精度极高．海王星于 1848 年被 J. Adams 和 U. le Verrier 发现，是基于天王星运动的偏离，这是扰动理论的一个胜利．

这个特殊的理论开始发展时遇到的困难是这样的事实：展开式的各项除正弦或余弦函数之外还含有 t．这些项对扰动理论的级数的影响只有在很长的时间周期（其数量级为数百年）中才显现出来，而即便如此，还得不到准确的行星运动而只能得到其一次近似．这种所谓久期项的出现，是由于所研究的行星运动（旋转）的频率依赖于其他行星的相应频率．如果考虑到这样的关系，则在解中既会出现久期项（形如 At^n），又会出现混合项（形如 $Bt\cos(\omega t+\psi)$）．所以，在扰动理论的框架下，由关系式

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 \tag{1}$$

可得以下的关于 $\varepsilon(\varepsilon \ll 1)$ 的展开式：

$$\sin\omega t = \sin\omega_0 t + \varepsilon\omega_1 t\cos\omega_0 t + \cdots. \tag{2}$$

这个等式中混合项的出现是由于把频率为（1）的振动按频率 ω_0 的振动展开而得．

A. Lindstedt，P. Guldin，Ch. Delaunay，B. Bohlin，和 S. Newcomb 等人发展了扰动理论的一些特殊的方法，以消除久期项，即可得出用纯三角形式表示的解．这些人得到的频率展开式就不再是小参数展开式，即这些展开式不涉及零级近似的频率，而是按某种意义上重新定义的（用现代物理的行话来说就是重整化的）频率来展开．其结果是，扰动理论中的幂级数之每一项，若按小参数之幂展开，是一收敛的表达式．然而，扰动理论中的级数作为一个整体，其收敛性仍是一个未解决的问题，这是由于所谓**小分母**（small denominators）的出现，在每一次近似的求积时，都会得出形如 $\exp\{i\sum_j\omega_j n_j t+\varphi\}$ 的表达式，这里 $\{\omega_j\}$ 是相应于不同类型运动的频率．如果这些频率是几乎可公度的，指数式中的和就可以很小，因此在适当地积分时，就会出现各项有小分母的、从而是发散的级数．特别地，若两个频率 ω_1 与 ω_2 之比是一无理数，可以选择 $(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$，使扰动理论中的相应级数是发散的．

H. Poincaré 和 A. M. Ляпунов 从一般数学的观点研究小分母问题，结果是提出了构造一类特殊的周期解的方法，它不但对天体力学中的问题有效，而且在一般的微分方程理论中也有效．

他们对小分母问题的解决作出了实质性的贡献（[4]，[5]，[6]）．逐次使用典则变换可以"降低"扰动的阶，而可以利用较好的收敛性（所谓超收敛性）来"克服"扰动理论中由于小分母出现而来的任意阶级数的发散性，只需适当选取典则变换即可．

2）在天体力学的扰动理论中，只对保守系的微分方程建立了渐近积分．扰动理论进一步的进展是与振动理论，特别是非线性振动理论的发展相联系的．

B. van der Pol 关于含小参数 ε 的 Rayleigh 型方程

$$\frac{d^2J}{dt^2} - \varepsilon\left[\frac{dJ}{dt} - \frac{1}{3}\left(\frac{dJ}{dt}\right)^3\right] + J = 0 \tag{3}$$

的工作起了重要的作用，这是 Lagrange 的工作的一个继续．**van der Pol 方程**（van der Pol equation）是方程（3）的一个特例．

为了求解方程

$$\ddot{x} - \varepsilon(1-\dot{x}^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{4}$$

van der Pol 提出了（但缺少充分的数学论证）使用"缓变系数"法，它很像很早以前 Lagrange 在天体力学问题中使用的方法．这就是把(4)之解表示成谐振，但其振幅与相均为参数 t 的缓变函数．

非线性振动的一般理论是 Н. М. Крылов 和 Н. Н. Боголюбов 建立的．在此，他们克服了本质的数学困难而将扰动理论推广到一般的非保守系．这些工作中发展起来的非线性力学的新的渐近方法能够给出较原来扰动理论方法更好的近似解，并有一个坚实的数学基础；此外，不仅周期解，还有拟周期解，都得到了严格的处理．

为了把 Крылов-Боголюбов 的扰动理论渐近方法的思想看得更清楚（亦见 **Крылов-Боголюбов 平均方法**（Krylov-Bogolyubov method of averaging）），考虑描述一个自由度的非线性振动的方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right). \tag{5}$$

振动过程性质的物理概念，可作为正确地陈述渐近方法的出发点．于是，在完全线性即当 $\varepsilon=0$ 时，方程（5）所描述的振动是纯粹的谐和振动，其振幅为常数，其相作匀速旋转．当 $\varepsilon\neq0$，即出现非线性扰动时，自然会设想方程（5）之解出现泛音，出现瞬时频率对振幅的依赖性，最后还有由于扰动力而产生的能量的流入与损失，使振动的振幅系统地增大或减小．计及所有这些物理的考虑，自然设想在以下的级数形式中寻求方程（5）之解：

$$x = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi) + \cdots, \tag{6}$$

其中 $u_i(a, \psi)(i=1, 2, \cdots)$ 是角 ψ 的周期为 2π 的函数，而量 a 和 ψ 作为时间的函数由以下方程组决定：

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \dot{a} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \cdots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \dot{\psi} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \cdots. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

这样，问题化为对函数 $u_i(a, \psi)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$ $(i=1, 2, \cdots)$ 选取适当的表达式．在（6）中将 a 和 ψ 代以由方程组（7）所决定的时间函数，所得的表达式将是原方程（5）的解．再加上一些附加的条件，以保证在解（6）中没有久期项．

若限取形式级数（6）中的前几项，即得 m 次近似，它有下述意义的渐近性质，即对固定的 m，当 $\varepsilon \to 0$ 时，表达式（6）趋于方程（5）的准确解；一次近似的方程与 van der Pol 方程一样．m 次近似的误差估计没有特别的困难．N 个自由度的问题可以类似地解出．

若不把公式（6）解释为方程（5）的解，而看作变量变换的公式，则可以得到振幅 a 和相 ψ 对时间的导数的准确表达式．

众所周知（见[8]，[9]），在许多情况下，描述振动过程并含有"小"参数的微分方程，可以化为所谓标准形式

$$\frac{dx_s}{dt} = \varepsilon X_s(t, x_1, \cdots, x_n);\ s=1, 2, \cdots, n. \quad (8)$$

ε 是正的小参数．许多物理和工程问题都可以化成这种形式．对于形如（8）的方程，建立了特殊的称为平均方法（averaging method）的近似方法．按平均化方法，若在有限区间上的 ε 都充分小，则这些方程恒可通过变量变换

$$x_i = \xi_i + \varepsilon X_i$$

化为平均化方程：

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \varepsilon X_{s,0}(\xi_1, \cdots, \xi_n),\ s=1, 2, \cdots, n,$$

其中

$$X_{s,0}(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_s(t, \xi_1, \cdots, \xi_n)\, dt.$$

应用平均化方法可以得到例如关于自振动方程组解的存在性与稳定性的许多判据．

在[13]中得到了关于差 $|X_i - \xi_i|$ 在长为 L/ε 的时间区间上的估计．除此以外，也可以得到一般方程组解的依赖于解在无穷区间上的性态的那些相应性质．用这种方法证明了拟周期解的存在性与稳定性定理．

3）在研究非线性振动系统时，也可以不把相应方程组化为"标准形式"，而直接研究原来的具有弱非线性作用的谐振子系统的微分方程．这时，除了这种方程组的通解外，也可以通过适当的变量变换得到特解．

事实上，这就是 Н. Н. Боголюбов 处理一些统计力学问题时采用的方法，这些问题要求对大量相互作用的粒子系统计算 s 个粒子的分布函数（$s=1, \cdots, N$）．在统计力学中，系统中的小的相互作用常数与小的粒子密度都可以用作统计力学问题中的小参数．在这样一种近似中，高阶的 s 粒子分布函数可用这些粒子的单粒子分布函数表示出来．甚至用扰动理论的一次近似就可以从动理学方程组得出著名的 Boltzmann 方程，还有 Ландау 的，Власов 的和 Боголюбов-Liénard-Balescu 的方程，这些方程广泛地应用于等离子体理论中（例如见 **Боголюбов 方程系列**（Bogolyubov chain of equations）；**Boltzmann 方程**（Boltzmann equation）；**Власов 动理学方程**（Vlasov kinetic equation））．

应该提到，这些方法是为了用于研究方程的正则部分带有小参数（而不是作为最高阶导数的系数）的情况．然而，例如 Rayleigh 形式的 van der Pol 方程对于 ε 的大值可以自动地化为最高阶导数之系数是小参数的方程．对这一类需要特殊处理的问题，已经发展了强有力的研究方法（[14]，[15]，[16]，[17]）．

正是以小参数为最高阶导数之系数的问题，是统计力学和流体力学的典型问题．**Navier-Stokes 方程**（Navier-Stokes equations）应用于小的粘性系数和小的热传导系数是一个例子，它的零阶近似就是理想流体的 Euler 方程．这使得在这个情况下寻求最佳近似更为复杂．

4）扰动理论方法在量子力学领域中有特殊的重要性，和经典力学中一样，这里仅对二体问题（可以化为在外势场中的单体问题）得到了准确解．在这时可按两种形式使用扰动理论：其一用于定态，另一用于在散射理论框架中计算由一个定态转移到另一定态的转移概率．在量子力学中扰动理论是表述为以下形式的线性自伴算子

$$H = H_0 + \varepsilon H_1$$

的本征值问题，这里 ε 是小参数，而"未扰动"的算子 H_0 的本征值问题的解是已知的，即知道本征值和本征函数的完全系 $\{E_n^{(0)}\}$ 和 $\{\psi_n^{(0)}\}$，要求算子 H 之谱．

设 ε 很小，波函数

$$\psi_n = \sum_m C_m \psi_m^{(0)}$$

之系数与能量的本征值 E_n 可以写为扰动 ε 的幂级数形式：

$$C_m = C_m^{(0)} + \varepsilon C_m^{(1)} + \varepsilon^2 C_m^{(2)} + \cdots,$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \varepsilon E_n^{(1)} + \varepsilon^2 E_n^{(2)} + \cdots.$$

于是，扰动理论将给出第 n 态的扰动结果如下：

$$C_m^{(0)} = 0,\ m \neq n;\ C_n^{(0)} = 1;$$

$$C_m^{(1)} = \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}},\ m \neq n;\ C_n^{(1)} = 0;$$

$$C_m^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{V_{mk} V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} + $$

$$- \frac{V_{nn} V_{mn}}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2},\quad m \neq n;$$

$$C_n^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2};\ \cdots;$$

$$E_n^{(1)} = V_{nn};\ E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}};\ \cdots.$$

其中 V_{mn} 是扰动算子的矩阵元素，定义如下（其中 $\hat{V} = \varepsilon H_1$）：

$$V_{mn} = \int \bar{\psi}_m^{(0)} \hat{V} \psi_n^{(0)} dq,$$

dq 是体积元．

扰动理论可以应用于这种问题的条件是：

$$|V_{mn}| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$$

若未扰动系统的能级是简并的，此式不能成立：相对于一蜕化能级 $E_n^{(0)}$，有 s 个态 $\{\psi_{nj}^{(0)}\}(j = 1, \cdots, s)$，$s$ 是简并的重数．在简并情况下，应用扰动理论必须稍作修改：第一步先考虑扰动对于态的简并影响，其他能级的影响则看作小扰动来处理；作简并态的 s 个本征函数的线性组合，组合的系数 $C_r^{(0)}$ 由以下方程给出：

$$E_n^{(1)} C_r^{(0)} = \sum_{r'=1}^{s} V_{rr'} C_{r'}^{(0)}, \tag{9}$$

这里

$$V_{rr'} = \int \psi_{nr}^{(0)} \hat{V} \psi_{nr'}^{(0)} dq.$$

能量的修正值 $E_n^{(1)}$ 将由方程组（9）的久期方程给出．这个久期方程是 s 次方程，因而有 s 个解 $\{E_{n,p}^{(1)}\}(p = 1, 2, \cdots, s)$，把它们分别代入（9），即可由（9）得出系数 $\{C_{r,p}^{(0)}\}$（这是一个 s 维向量），以及波函数

$$\psi_{n,p} = \sum_{r=1}^{s} C_{r,p}^{(0)} \psi_{n,r},\ p = 1, \cdots, s,$$

它相应于解除了蜕化的能量

$$E_{n,p} = E_n^{(0)} + E_{n,p}^{(1)},\quad p = 1, \cdots, s.$$

以后的修正则可用扰动理论的通常的方法求出．

在非定态情况下，则提出了由态 $\psi_n^{(0)}$ 到态 $\psi_m^{(0)}$ 的转移概率的扰动理论问题．扰动理论既可用于 Heisenberg 表象，也可用于 Schrödinger 表象或相互作用表象．

量子力学还处理另一种完全不同类型的问题，即如何求出两个或多个粒子的**散射矩阵**（scattering matrix）．这种问题在量子电动力学中特别重要，其中也涉及一个小参数——精细结构常数．

转移概率的计算化为研究以下形状的 Hamilton 函数：

$$H = H_0 + H_1,$$

其中 H_0 是自由 Hamilton 函数，H_1 是相互作用 Hamilton 函数．

在 Schrödinger 表象中，方程的形状是

$$i \frac{d\psi}{dt} = (H_0 + H_1)\psi.$$

作变量变换

$$\psi = e^{-iH_0 t} \varphi,$$

可以得到下面的关于态 φ 的方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = H_1(t)\varphi,$$

其中

$$H_1(t) = e^{iH_0 t} H_1(0) e^{-iH_0 t}.$$

表示"入射"粒子的初始态 φ_{in} 和表示"离去"粒子的终态 φ_{out} 之间的联系，可以用所谓散射算子 S 来表述，S 由以下的关系式来定义：

$$\varphi_{out} = S\varphi_{in}.$$

可以用逐步逼近法形式地把方程（10）的解表示为相互作用的幂级数

$$S = 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)dt +$$

$$+ \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t')dt' + \cdots.$$

在量子场论中也有一个类似的公式适用，其中 $H_1(t)$ 要代以相应的 Lagrange 密度，而 S 算子可以用 T 乘积来表示：

$$S(t) = T[e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)dt}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)\}.$$

T 是编时算子，其作用按以下规则定义：

$$T\{H(t_1)H(t_2)\} = \begin{cases} H(t_1)H(t_2),\ t_1 > t_2, \\ H(t_2)H(t_1),\ t_2 > t_1, \end{cases}$$

当变元相同时 T 乘积无形式的定义. 为克服在应用扰动理论于量子场论时出现的这种困难, 发展了一种特殊的正则化方法. 扰动理论的相对论不变性用于计算所谓 S 矩阵, 其元素定义了量子态之间的转移概率.

参考文献

[1A] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1 – 3, Gauthier-Villars, 1892 – 1899.

[1B] Poincaré, H., Oeuvres de Henri Poincaré, Vol. 1 – 3, Gauthier-Villars, 1916 – 1965.

[2] Charlier, C., Die Mechanik des Himmels, 1 – 3, de Guyter, 1927.

[3] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927.

[4] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, 93 (1953), 5, 763 – 766.

[5] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974 (中译本: В. И. 阿诺尔德, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).

[6] Moser, J. K., Lectures on Hamiltonian systems, Amer Math. Soc., 1968.

[7] Боголюбов, Н. Н., Крылов, Н. М., в кн., Збірник праць з нелінійної механіки, К, 1937, 55 – 112 (乌克兰文).

[8] Боголюбов, Н. Н., Крылов, Н. М., Введение в нелинейную механику, К., 1937 (英译本: Bogoliuboff, N. N., Kryloff, N. M., Introduction to non-linear mechanics, Kraus, 1970).

[9] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 5 изд., М., 1974 (英译本: Bogolyubov, N. N., Mitropol'skiĭ, Yu. A., Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Hindushtan Publ. Comp. Delhi, 1961).

[10] Моисеев, Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, М., 1969.

[11] Челомей, В. Н., 《Докл. АН СССР》, 110 (1956), 3, 345 – 347.

[12] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Самойленко, А. М., Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике, К., 1969 (英译本: Bogoliubov, N. N., [N. N. Bogolyubov], Mitropoliskii, Yu. A. [Yu. A. Mitropol'skii], Samolenko, A. M. [A. M. Samoilenko], Methods of accelerated convergence in non-linear mechanics, Springer, 1976).

[13] Боголюбов, Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945.

[14] Дородницын, А. А., 《Прикл. матем. и мех.》, 11 (1947), 313 – 328.

[15] Тихонов, А, Н., 《Матем. сб.》, 22 (1948), 193 – 204.

[16] Понтрягин, Л. С., 《Изв. АН СССР Сер матем.》, 21 (1957), 605–626.

[17] Мищенко, Е. Ф., 《Изв АН СССР, Сер. матем.》, 21 (1957), 627–654.

[18] Блохинцев, Д. И., Основы квантовой механики, 5 изд., М., 1976 (中译本: Д. И. 布洛欣采夫, 量子力学原理, 高等教育出版社, 1955).

[19] Боголюбов, Н. Н., Лекції з квантової статистики, К., 1949 (英译本: Bogolyubov, N. N., Lectures on quantum statistics, Gordon and Breach, 1967).

[20] Боголюбов, Н. Н., Избранные труды, т. 2, К, 1970.

[21] Боголюбов, Н. Н., Ширков, Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976 (中译本: Н. Н. 波戈留波夫, Д. В. 希尔柯夫, 量子场论引论, 科学出版社, 1966).

[22] Боголюбов, Н. Н., Логунов, А. А., Тодоров, И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969 (英译本: Bogolyubov, N. N., Logunov, A. A., Todorov, I. T., Introduction to axiomatic quantum field theory, Benjamin, 1975).

[23] Ахиезер, А. И., Берестецкий, В. Б., Квантовая электродинамика, 3 изд., М. 1969.

[24] Маслов, В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.

Н. Н. Боголюбов (мл.) 撰

【补注】 在扰动理论这个巨大的领域中, 本文只讲了一些主题.

节 1) 是关于经典的构造周期解的 Poincaré-Lindstedt 法 (Poincaré-Lindstedt method), 并且触及 Колмогоров-Арнольд-Moser 理论 (KAM 理论) (Kolmogorov-Arnol'd-Moser theory (KAM theory)), 见**拟周期运动** (quasi-periodic motion) 和 [4] – [6]. [A6] 是关于这方面的现代的教材.

节 2) 是关于由 van der Pol, Крылов, Боголюбов 和 Митропольский 所开创的渐近方法. 然而, 从原来的应用到现在, 这个领域里发生了许多事, 关于其现代的情况, 可以参考 [A7].

节 3) 阐述了其他各种各样的主题, 其中也非常简要地讲到奇异扰动这个很大的领域. 在此领域中, 有两类主要的问题: 松弛振动 (relaxation oscillations) ([A8]) 和边界层问题 (boundary layer problems) ([A9]).

奇异扰动. 一个奇异扰动就是微分方程的一项或一个成分, 其中含有带一个小系数 ε 的 (方程中的最高阶) 导数项.

许多微分方程组都有这样的解, 它们按照不同的时间尺度而有光滑或非光滑的性态. 在一定的时间尺度下, 有些解可以看作是慢的 (slow) (即前几阶导数

范数相对为小)，另一些则可以看作是快的(fast)(即导数范数相对大)．这种系统的广为人知的例子有描述电路或化学反应的常微分方程；例如，在后一种情况下，时间尺度可以直接与所涉及的反应速率相关．这些问题通常可以建模为一个多层系统，而时间尺度之比则用(小)参数来表示．这种系统的形状是

$$\operatorname{diag}(1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}),$$

这里 $\mathbf{x}: I \to \mathbf{R}^n$, $I \subset \mathbf{R}$, $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是小的正常数．这类微分方程的一个例子是标量常微分方程

$$\varepsilon \frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t, x) \frac{d^j x}{dt^j} = 0.$$

相当一般的情况是考虑二层系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y, t).$$

对这个常微分方程组应该给出两个初值(或边值)条件．特别有趣的是当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时解 (x, y) 的性态．为避免混淆，为表示此解依赖于 ε，对解加上标 ε．令 $\varepsilon = 0$，将得到所谓简化方程(reduced equation)．如果 $(\partial g/\partial y)(x^0, y^0, t)$ 在相关的区域上非奇异，则可以形式地解出 y^0 而得到只含 x^0 的一阶常微分方程．很清楚，这时只需要一个初值(或边值)条件，所以一般说来，降阶问题的解不会满足另一个初值或边值条件．于是，这就可以解释奇异扰动(singular perturbation)一词，因为 $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ 到 (x^0, y^0) 的收敛决非一致的，见[A5]．然而，给出了降阶解以后，可以设法找一个快解成分，从已给的初值或边值数据移动到一个"接近"于 (x^0, y^0) 的积分曲线，这样把 $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$ 与 (x^0, y^0) 连接起来．这件事常称为"边界层效应"(boundary-layer effect)，它在那个初值点或边值点的 ε 邻域(至少是与 ε 相关的区域中)很引人注意．使用上述的关于降低解的做法有一些解析技巧．这里，降阶解(称为外解(outer solution))在层内修正为一瞬态解(transient solution)(称为内解(inner solution))，其方法是在层内与层外作幂级数展开．为了使这些成分逼近于所要求的解，就需要将它们匹配起来，所以这个技术就称为匹配渐近展开(matched asymptotic expansions)．

层或瞬态不只可能产生于边界处，也可能产生于区域内部．这是气体动力学中众所周知的现象，这里激波时常可以描述为这种问题的内部的层(见**激波的数学理论**(shock waves, mathematical theory of))．举一个例，考虑粘性 Burgers 方程

$$\varepsilon y'' - y y' - \lambda y = 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

的激波的形成．应该注意，一阶导数项是乘上了一个可以变成零的因子 y 的．若 y 通过零，则此方程的线性化形式有一本征值将从很大的负值变为很大的正值，或者反过来变．这种问题称为转向点问题(turning-point problem)，关于它在线性理论中的处理可以参看[A4]．

参考文献

[A1] Smith, D. R., Singular perturbation theory, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A2] Eckhaus, W., Matched asymptotic expansion and singular perturbations, North-Holland, 1973.

[A3] O'Malley, R. E., Jr., Introduction to singular perturbation, Acad. Press, 1974.

[A4] Wasow, W., Linear turning point theory, Springer, 1985.

[A5] Васильева, А. Б., «Успехи Матем. Наук», **18** (1963), 3, 15－86.

[A6] Verhulst, F., Nonlinear differential equations and dynamical systems, Springer, 1989.

[A7] Sanders, J. A., Verhulst, F., Averaging methods in non-linear dynamical systems, Springer, 1985.

[A8] Grasman, J., Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications, Springer, 1987.

[A9] Eckhaus, W., Asymptotic analysis of singular perturbations, North-Holland, 1979.

[A10] Arnol'd, V. I., Avez, A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, 1967 (译自俄文).

[A11] Bellman, R., Perturbation techniques in mathematics, physics and engineering, Holt, Rinehart & Winston, 1964.

齐民友 译

Peter-Weyl 定理 [Peter-Weyl theorem; Петера-Вейля теорема]

用**表示函数**(representation function)逼近紧拓扑群(topological group)上函数的一条定理．设 Σ 是由紧群 G 的不可约连续酉表示(见**拓扑群的表示**(representation of a topological group))的所有等价类的代表组成的族，并设 π 遍取 Σ．记 $\dim \pi$ 为表示 π 的维数并设 $u_{ij}^{(\pi)}$ 是 π 的在某个规范正交基下的矩阵元素．Peter-Weyl 定理的结论是：函数

$$\sqrt{\dim \pi} \ u_{ij}^{(\pi)} \quad (\pi \in \Sigma)$$

构成了空间 $L_2(G)$ 中的一组规范正交基，$L_2(G)$ 是关于 G 上的 Haar 测度(整个群的测度取为 1)平方可积的函数的空间．而且，与函数 $u_{ij}^{(\pi)}(\pi \in \Sigma)$ 的有限线性组合集相一致的 G 上的所有复值表示函数的代数，在 G 上的所有复值连续函数的空间中一致稠密．

在 $G = T$ 是平面的旋转群的情形，这一结论与用三角多项式逼近连续周期函数的初等定理相同．

Peter-Weyl 定理的一个推论是：G 的不可约表示

的特征标的线性组合集，在 G 上的所有在共轭元素类上是常数的连续函数的代数中稠密．它的另一个推论是：对于任意元素 $a \in G$，$a \neq e$，存在 G 的一个不可约连续表示 φ 使得 $\varphi(a) \neq e$；另外，如果 G 是一个紧 Lie 群，则 G 有一个一一线性表示．

由 Peter - Weyl 定理还能推得下面的更普遍的结论（[5]，[6]）．假定给出了紧群 G 在 Fréchet 空间 E 中的一个连续线性表示 φ，则 E 的表示元的子空间在 E 中稠密．这里，元素 $v \in E$ 称为**表示元**（representation element）、**球形元**（spherical element）或**殆不变元**（almost - invariant element），如果轨道 $\varphi(G)v$ 生成 E 中的一个有限维子空间．特别地，这可应用于 E 是光滑向量 G 纤维丛的某个光滑类的截面空间的情形：例如某种类型的张量场的空间，或者带有紧 Lie 群 G 的光滑作用的光滑流形上的给定的光滑类的空间．

Peter - Weyl 定理由 F．Peter 和 H．Weyl 于 1927 年证得（[1]）．

参考文献

[1A] Peter，F．and Weyl，H．，Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe，*Math．Ann．*，97（1927），737 – 755．

[1B] Peter，F．and Weyl，H．，Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe，in Gesammelte Abh．H．Weyl，Vol，III．Springer，1968，58 – 75．

[2] Понтрягин，Л．С．，Непрерывные группы，3 изд．М．，1973（中译本：Л．С．邦德列雅金，连续群（上、下），科学出版社，1957，1958）．

[3] Hewitt，E．and Ross，K．A．，Abstract harmonic analysis，1 – 2，Springer，1979．

[4] Chevalley，C．，Theory of Lie groups，1，Princeton Univ．Press，1946．

[5] Palais，R．S．and Stewart，T．E．，The cohomology of differentiable transformation groups，*Amer．J．Math．*，83（1961），623 – 644．

[6] Mostow，G．D．，Cohomology of topological groups and solvmanifolds，*Ann．of Math．*，73（1961），20 – 48．

А．Л．Онищик，А．И．Штерн 撰

【补注】 表示元现在一般称为 G **有限元**（G-finite element）．

关于复值表示函数的代数在 G 上的连续函数的代数中一致稠密这一事实称为 Weyl 逼近定理（Weyl approximation theorem）．Peter - Weyl **定理**用（左或右）正则表示的不可约分量给出了该表示的完全的刻画．特别地，每一个不可约分量出现的重数等于它的维数，参见[A1]第 7 章 §2．对于幺模 Lie 群有推广的 Peter - Weyl 定理，参见[A1]第 14 章 §2．利用不可约表示描述 $L_2(G)$（以及其他酉表示），包括不可约酉表示是有限维的这一事实，称为 Peter - Weyl **理论**（Peter - Weyl theory），例如参见[A2]．

参考文献

[A1] Barut，A．O．and Raczka，R．，Theory of group representations and applications，PWN，1977．

[A2] Wawrzyńczyk，A．，Group representations and special functions，Reidel，1984，Sect．4．4．

[A3] Knapp，A．W．，Representation theory of semisimple groups，Princeton Univ．Press，1988，p．17．

朱学贤 译 赵春来 校

Петерсон - Codazzi 方程 [Peterson - Codazzi equations；Петерсона - Кодацци уравнения]

与 Gauss 方程（见 **Gauss 定理**（Gauss theorem））一起构成一组偏微分方程之可积性的充要条件的方程，其中由曲面的第一和第二基本形式复原该曲面的问题就化为那组偏微分方程的可积性（见 **Bonnet 定理**（Bonnet theorem））．Петерсон - Codazzi 方程取如下形式：

$$\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + \Gamma_{11}^1 b_{12} + \Gamma_{11}^2 b_{22} =$$

$$= \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} + \Gamma_{12}^1 b_{11} + \Gamma_{12}^2 b_{21},$$

其中 b_{ij} 是第二基本形式的系数，Γ_{ij}^k 是第二类 Christoffel 符号．

这方程首先被 К．М．Петерсон 在 1853 年发现，后又被 G．Mainardi 在 1856 年和 D．Codazzi 在 1867 年发现．

参考文献

[1] Рашевский，П．К．，Курс дифференциальной геометрии，М．，1956．

А．Б．Иванов 撰

【补注】

在西方文献中这些方程常称为 Mainardi - Codazzi 方程，或 Gauss - Mainardi - Codazzi 方程．

一般地，对于 n 维 Euclid 空间中的超曲面，通过把外围空间的（其值为零的）曲率张量分解成切向和法向部分并且用曲面的术语来表达这些部分，便可得到 Gauss 方程和 Mainardi - Codazzi 方程．利用这种术语，Mainardi - Codazzi 方程有下列形式：

$$D_X L(Y) - D_Y L(X) - L([X, Y]) = 0,$$

其中 L 是超曲面的 Weingarten 映射（形状算子），D 是诱导共变导数，X, Y 是光滑切向量场．

参考文献

[A1] Blaschke，W．& Leichtweiss，K．，Elementare Differentialgeometrie，Springer，1973．

[A2] Hicks，N．J．，Notes on differential geometry，v．Nostrand，1965．

[A3] Guggenheimer，H．W．，Differential geometry，Dover，reprint，1977．

沈一兵 译

Петерсон 对应 [Peterson correspondence、Петерсона соответствие]

两曲面间的一种对应，使得它们在对应点的切平面平行． К．М．Петерсон（[1]）在有关**主基上的形变**（deformation over a principal base）的问题中以一般形式考虑了这种对应． 例如，在曲面与它的球面象（见**球面映射**（spherical map））之间、曲面与它的**旋转标形**（rotation indicatrix）之间、以及伴随极小曲面（见**伴随曲面**（adjoint surface））之间都存在 Петерсон 对应．

若在 Петерсон 对应下的两曲面 S 和 S^* 取共同的参数化，则它们的第三基本形式相等． 对于 S 和 S^* 的**渐近网**（asymptotic net），主网与它们的每一个都共轭（见**共轭网**（conjugate net））．若渐近网没有共同的曲线族，则主网是唯一定义的；若这些网相连接，则主网蜕化；若这些网相互对应，则主网变成不定了．在 S 和 S^* 上主网曲线的对应切线是平行的．

若主网取作 (u,v) 坐标网，则 S 和 S^* 的位置向量 x 和 x^* 有如下关系：

$$x_u^* = \rho x_u, \quad x_v^* = \sigma x_v,$$

其中函数 ρ 和 σ 满足下列方程组：

$$\rho_v E - \sigma_u F = \frac{\sigma-\rho}{2}, \quad \rho_v F - \sigma_u G = \frac{\sigma-\rho}{2} G_u,$$

即 ρ 和 σ 只与 S 的度量有关（E，F 和 G 是**第一基本形式**（first fundamental form）的系数）．所以，可把 Петерсон 对应自然地应用于一对等距曲面 S 和 $\widetilde{S}$ 上：它给出另一对等距曲面 S^* 和 $\widetilde{S}^*$，分别具有相同的法向量 $n=n^*$ 和 $\widetilde{n}=\widetilde{n}^*$． 这些曲面的旋转图也相同，并且新曲面的等距基具有与原曲面一样的球面象． 例如，一个球面和与它等距的一张常正曲率曲面，在 Петерсон 对应下，对应于具有对应曲率线的等距曲面，即所谓 Bonnet 曲面．

特别地，若 S 和 S^* 的等距基为主基，则在 Петерсон 对应下仍保持这样． 这就是一曲面在主基上形变到另一同型曲面的所谓 Петерсон 变换（Peterson transformation）．这种变换可推广到一族网的情况（[2]）．

Петерсон 对应的一种特殊情况是主网同时是 S 和 S^* 上的曲率线网．这称为 Combescour 对应（Combescour correspondence）．

若 Петерсон 对应是共形的，则或者一个曲面为极小曲面而另一个为球面（即 Петерсон 对应是球面映射），或者两曲面都是极小的且共形映射向量满足 Laplace 方程，或者两曲面相似，或者两曲面为等温曲面且做成 Combescour 对应．

存在着 Петерсон 对应的高维推广（[4]）．

参考文献

[1] Петерсон, К. М., «Матем. сб», 1 (1866), 391-438.

[2] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геаметрия в тензорком изложении, М., 1963.

[3] Фиников, С. П., Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.-Л., 1937.

[4] Широков, П. А., Широков, А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959（英译本．Shirokov, P. A. and Shirokov, A. P., Affine differential-geometric, Teubner, 1962）.

М. И. Войцеховский 撰 沈一兵 译

Петерсон 曲面 [Peterson surface; Петерсона поверхность]

具有圆锥曲线或圆柱曲线共轭网的曲面，使得这些曲线构成一形变之主基（见**主基上的形变**（deformation over a principal base））．例如，**管道曲面**（canal surface），**平移曲面**（translation surface）和**旋转曲面**（rotation surface）．都是 Петерсон 曲面． Петерсон 曲面的**旋转标形**（rotation indicatrix）是直劈锥面（特别地，对于管道曲面，它是螺旋面；对于平移曲面，它是双曲抛物面）．这些曲面最先被 К．М．Петерсон 作为容有主基上形变的曲面的例子来考虑．

И. Ж. Сабитов 撰

【补注】

参考文献见 **Петерсон 对应**（Peterson correspondence）．

沈一兵 译

Petri 网 [Petri net; Петри сеть]

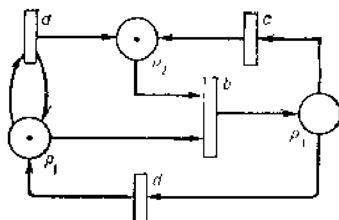
包括相应数据系统在内的种种离散动态系统（并行程序、操作系统、计算机及相应设备和计算机网络）的数学模型，用于这些系统的定性分析和综合（发现系统种种死锁或冲突的各种情况以及各种瓶颈，进行并行程序和计算机部件的辅助综合等等）．这一概念由 C．Petri 于 20 世纪 60 年代引入．一个 Petri 网为一个四元组 $N=(T, P, F, M_0)$，其中 T 是有限符号集，其元素称为转换（transition），P 也是有限符号集，其元素称为位置（place），$P \cap T = \varnothing$，F 是一个关联函数：

$$F: T \times P \cup P \times T \to \{0, 1\},$$

M_0 为初始标记（initial marking）

$$M_0: P \to \{0, 1, \cdots\}.$$

一般来讲，Petri 网是一个带标号的有向图，它的结点集为 $T \cup P$（如图所示）．



一条弧（由直线、折线或弧线表示）从一个位置结点（由圆圈表示）$p\in P$ 出发，到达一个转换结点（由矩形表示）$t\in T$，当且仅当

$$F(p, t)=1$$

（p 称为 t 的输入位置；图中 $P=\{p_1, p_2, p_3\}$，$T=\{a, b, c, d\}$）. 一条弧从一个转换结点 t 出发，到达一个位置结点 p，当且仅当

$$F(t, p)=1$$

（p 称为 t 的输出位置）. 开始时，位置 p 可以标上标记 $M_0(p)$，如果 $M_0(p)$ 不为 0 的话. $M_0(p)$ 代表该位置的记号个数.

模拟系统的动态变化由 Petri 网的运行来刻画. 网络按离散时间运作，其状态从一个标记变化为另一个标记. 每个标记是一个函数 $M: P\to\{0, 1, \cdots\}$，标记的改变（初始为 M_0）是由网络的转换造成的. 称一个转换 $t\in T$ 能在标记 M 下点火，如果对所有的 $p\in P$ 有

$$M(p)-F(p, t)\geqslant 0,$$

即该转换的每个输入位置至少有一个记号（即该位置的标记值大于等于 1）. 在给定 M 下，t 的点火使网络得到新的标记 M'，规则如下：对所有的 $p\in P$，

$$M'(p)=M(p)-F(p, t)+F(t, p),$$

即点火的 t 从它的每个输入位置移出一个记号，并向它的每个输出位置移入一个记号. 如果几个转换均能点火，就由其中一个进行点火. 如果在某个标记（死锁标记）下，所有转换均不能点火，那么网络停止运行. 从给定的初始标记开始，经 Petri 网的不确定性运作，产生了点火序列的各种各样的集合. 这就形成了字母集 T 上的一些字. 由该 Petri 网产生的所有字的集合称为它的语言（language）. 如果两个 Petri 网产生的语言相同，就称它们是等价的.

Petri 网的研究有两个方向. 第一个方向是：对 Petri 网性质的形式分析所发展的数学理论. 其中最令人感兴趣的问题是识别死锁情形，从所产生的语言的角度识别网络的等价性，估算网络复杂度，以及比较 Petri 网的各种子类和其扩充的语言表达能力. 已经发现死锁问题是可解的；另外，Petri 网所产生的语言类的性质也得到了考察. 这个语言类真包含于递归可枚举语言类中，又真包括正规语言类，并同上下无关语言类部分相交. 第二个方向是将 Petri 网作为信息技术、经济、数字工程等学科中的离散动力系统模型的基础.

Petri 网与**有限自动机**（automaton, finite）不同，后者是用来描述系统状态的全局变化，而前者集中刻画局部事件（与转换对应）、局部条件（与位置对应）以及两者的局部连接. 因此，可以以 Petri 网的术语对分布式异步系统给出比用自动机更适宜的模拟.

参考文献

[1] Peterson, J. L., Petri net theory and the modelling of systems, Prentice Hall, 1981.
[2] Котов, В. Е., 《Кибернетика》, 1980, 5, 10－18.
[3] Starke, P. H., Petri-Netze, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1981.
[4] Reissig, W., Petri nets, Springer, 1985.

В. Е. Котов 撰

【补注】 作为并行计算的基本模型，Petri 网近年来得到十分广泛的研究. 现在，每年有一个关于 Petri 网的年会，这个会议的论文集由 Springer 出版社出版，它包含了目前热门研究的最佳展望. 专著[A1]有 Petri 网的简要介绍；文献[3]是 Petri 网的一本入门教科书. 关于 Petri 网在分析并发进程中的应用请参考[A2].

参考文献

[A1] Salomaa, A., Computation and automata, Cambridge Univ. Press, 1985.
[A2] Varshavsky, V. I. [V. I. Varshavskiĭ], Self-timed control of concurrent processes, Kluwer, 1990（译自俄文）.

【译注】 Petri 网又称为位置/转换网（place/transition net）. 关于 Petri 网中转换的点火问题，有些学者认为多个转换可以同时点火，只要他们都满足点火条件.

骆 源 符方伟 沈世镒 译 徐书润 校

Pettis 积分 [Pettis integral; Петтиса интеграл]

向量值函数对标量测度的一种积分，它是一种所谓的弱积分，它是由 B. J. Pettis 引入的（[1]）.

设 $F(X, E, \mathfrak{B}, \mu)$ 是函数 $x(t)$，$t\in E$ 的向量空间，其中 $x(t)$ 在 Banach 空间 X 中取值，而在具有 E 的子集的 σ 代数 $\mathfrak{B}$ 上的可数可加测度 μ 的集合 $(E, \mathfrak{B}, \mu)$ 上给定. 函数 $x(t)$ 称为**弱可测的**（weakly measurable），如果对任何 $f\in X^*$，标量函数 $f[x(t)]$ 可测. 函数 $x(t)$ 是在可测子集 $M\subset E$ 上 **Pettis 可积的**（Pettis integral），如果对任何 $f\in X^*$ 函数 $f[x(t)]$ 在 M 上可积且存在一个元素 $x(M)\in X$ 使得

$$f[x(M)]=\int_M f[x(t)]d\mu.$$

则由定义,

$$\int_M x(t)d\mu=x(M)$$

称为 Pettis 积分. 对 $E=(a,b)$ 带有普通 Lebesgue 测度的情况, 这样的积分是由 И. М. Гельфанд 引入的 ([2]).

参考文献

[1] Pettis, B. J., On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 2, 227 – 304.

[2] Гельфанд, И. М., 《Зап. Научоводосл. инст матем. и мех. Харков. матем. тов.》, 13 (1936), 1, 35 – 40.

[3] Hilderbrant, T., Integration in abstract spaces, *Bull Amer Math. Soc.*, **59** (1953), 111 – 139.

[4] Hille, E. and Philips, R., Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: 希尔, 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964). В И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Diestel, J. and Uhl, J. J., Jr., Vector measures, Math. Survey, 15, Amer. Math. Soc., 1977.

[A2] Talagrand, M., Pettis integral and measure theory, Memoirs, 307, Amer. Math. Soc., 1984.

[A3] Bichteler, K., Integration theory (with special attention to vector measures), Lecture notes in math., 315, Springer, 1973.

葛显良 译 吴绍平 校

Pfaff 式 [Pfaffian; Пфаффиан], 斜对称矩阵 X 的 X 的元素的多项式 PfX, 它的平方是 det X. 更确切地说, 如果 $X=\|x_{ij}\|$ 是有单位元的交换结合环 A 上一个 $2n$ 阶斜对称矩阵 (即 $x_{ij}=-x_{ji}$, $x_{ii}=0$; 这样的矩阵有时也称为交错矩阵 (alternating matrix)), 则 PfX 是由公式

$$\mathrm{Pf}X=\sum_s \varepsilon(s)x_{i_1j_1}\cdots x_{i_nj_n}$$

所给出的 A 中一个元素, 这里对集合 $\{1,\cdots,2n\}$ 的一切可能的分成不相交的对 $\{i_\alpha,j_\alpha\}$ 的分划 s 求和, 可以假定 $i_\alpha<j_\alpha$, $\alpha=1,\cdots,n$, $\varepsilon(s)$ 是置换

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n\\ i_1 & j_1 & \cdots & i_n & j_n\end{pmatrix}$$

的符号. Pfaff 式具有以下性质:

1) 对于任意 $2n$ 阶矩阵 C 来说, $\mathrm{Pf}(C^TXC)=(\det C)(\mathrm{Pf}X)$;

2) $(\mathrm{Pf}X)^2=\det X$;

3) 如果 E 是一个自由 A 模, 具有基 $e_1,\cdots,e_{2n}$, 而

$$u=\sum_{i<j}x_{ij}e_i\wedge e_j\in\overset{2}{\wedge}A,$$

则

$$\overset{n}{\wedge}u=n!(\mathrm{Pf}\,X)e_1\wedge\cdots\wedge e_{2n}.$$

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Modules, Rings Forms, 2, Addison-Wesley, 1975, Chapt. 4, 5, 6 (译自法文).

А. Л. Онищик 撰 郝锕新 译

Pfaff 方程 [Pfaffian equation; Пфаффа уравнение]

形如

$$\omega\equiv a_1(x)dx_1+\cdots+a_n(x)dx_n=0,\ n\geqslant 3 \quad (1)$$

的方程, 其中 $x\in D\subset\mathbf{R}^n$, ω 是一个微分 1 次形式 (见微分形式 (differential form)), 而函数 $a_j(x)$ $(j=1,\cdots,n)$ 取实值. 令 $a_j(x)\in C^1(D)$, 而且设向量场 $a(x)=(a_1(x),\cdots,a_n(x))$ 在区域 D 中没有临界点.

维数 $k\geqslant 1$ 的 C^1 类流形 $M^k\subset\mathbf{R}^n$, 如果使在 M^k 上 $\omega\equiv 0$, 就称为 Pfaff 方程 (1) 的积分流形 (integral manifold). 如果过区域 D 中每一点有一个且仅有一个具有最大可能维数 $n-1$ 的积分流形, 则称 Pfaff 方程为完全可积的 (completely integrable).

Frobenius 定理 (Frobenius theorem): Pfaff 方程 (1) 完全可积的必要充分条件是

$$d\omega\wedge\omega\equiv 0. \quad (2)$$

这里 $d\omega$ 是由 ω 经外微分而得的 2 次微分形式, $\wedge$ 是外积. 这时, Pfaff 方程的求积化为一个常微分方程组的求积.

三维 Euclid 空间中的 Pfaff 方程的形状是

$$Pdx+Qdy+Rdz=0, \quad (3)$$

其中 P, Q 和 R 是 x, y 和 z 的函数, 而完全可积性的条件 (2) 成为

$$P\left[\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right]+Q\left[\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right]+ +R\left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right]=0, \quad (4)$$

或写为

$$(\mathrm{curl}\,F, F)=0,\quad 其中\ F=(P, Q, R).$$

这时存在光滑函数 μ, $U(\mu\neq 0)$ 使

$$Pdx+Qdy+Rdz=\mu dU,$$

而 Pfaff 方程 (3) 的积分曲面由方程 $U(x, y, z)=$ 常数给出. 若 F 是某个力场, 则场 $\mu^{-1}F$ 以 U 为势函数. 若 Pfaff 方程 (3) 不完全可积, 则它没有积分曲面, 但可以有积分曲线. 若给出任意函数 $x=x(t)$, $y=y(t)$, 则 (3) 将成为 z 的常微分方程, 而曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ 就是一积分曲线.

J. Pfaff([1]) 提出了对任意的 $n\geq 3$ 研究方程 (1) 和将微分 1 次形式 ω 化为典范形式的问题. 条件 (4) 第一次由 L. Euler 在 1755 年给出 (见 [2] 第九章).

任何 Pfaff 方程都可以用光滑的变量变换局部地化为以下形式:

$$dy_0-\sum_{j=1}^{p}z_j\,dy_j=0, \qquad (5)$$

其中 $y_0,\cdots,y_p,z_1,\cdots,z_p$ 是新的自变量 $(2p+1\leq n,\ p\geq 0)$, 数 $2p+1$ 称为 Pfaff 方程的类 (class of Pfaffian equation); 这里 p 是使得 $2p+1$ 次微分形式 $\omega\wedge d\omega\wedge\cdots\wedge d\omega$ 不恒为零的最大数. 当 $p=0$ 时 Pfaff 方程是完全可积的. 函数 $y_0(x),\cdots,y_p(x)$ 称为 Pfaff 方程 (5) 的首次积分 (first integrals), 而最大可能维数 $n-p-1$ 的积分流形由以下诸方程给出:

$$y_0(x)=c_0,\ \cdots,\ y_p(x)=c_p.$$

Pfaff 方程组 (Pfaffian system) 是形式为

$$\omega_1=0,\ \cdots,\ \omega_k=0,\quad k<n \qquad (6)$$

的方程组, 其中 $x\in D\subset\mathbf{R}^n$ 而 ω_j 是微分 1 次形式:

$$\omega_j=\sum_{q=1}^{n}\omega_{jq}(x)\,dx_q,\quad j=1,\cdots,k.$$

矩阵 $\|\omega_{jk}(x)\|$ 的秩 r 称为 Pfaff 方程组在 x 点的秩 (rank of Pfaffian system). 如果过每一点 $x\in U$ 有 Pfaff 方程组的一个且仅有一个最大可能维数 $n-r$ 的积分流形, 就称它为完全可积的 (completely integrable).

Frobenius 定理 (Frobenius theorem). 秩为 k 的 Pfaff 方程组 (6) 完全可积的必要充分条件是

$$d\omega_j\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k=0,\ j=1,\cdots,k.$$

求积任一有限非线性偏微分方程组的问题等价于求积某个 Pfaff 方程组的问题 (见 [6]).

对 Pfaff 方程组的解析理论已经有了好些结果. 已经考虑过含 m 个方程的完全可积 Pfaff 方程组

$$dy=x^{-p}f\,dx+z^{-q}g\,dz,$$

其中 p,q 是正整数而向量函数 $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ 在点 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 为全纯的; 已得到了于原点全纯的解存在的充分条件 (见 [7]); 也得到了对多个自变量情况的推广.

参考文献

[1] Pfaff, J. F., *Berl. Abh.* (1814－1815), 76－135.

[2] Euler, L., Institutiones Calculi differentialis, in G. Kowalewski (ed.): Opera Omnia, series prima; opera mathematica, Vol. 10, Teubner, 1980, Chapt. IX (拉丁文).

[3] Петровский, И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 常微分方程论讲义, 高等教育出版社, 1954).

[4] Богданов, Ю. С., Лекции по дифференциальным уравнениям, Минск, 1977.

[5] Cartan, E., Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité, *Bull. Soc. Math. France*, 59 (1931), 88－118.

[6] Рашевский, П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л., 1947.

[7] Gérard, R. and Ramis, J.-R. (eds), Equations différentielles et systèmes de Pfaff dans le champ complexe 1－2, Lecture notes in math., 712 1015, Springer, 1979.

М. В. Федорюк 撰

【补注】 上文讲的是局部情况. 令 M 为一 n 维流形, U 为一坐标卡 (之一部分). U 上的一个处处不为零的微分 1 次形式一方面定义了 U 上的一个 Pfaff 方程组, 另一方面又定义了 U 之余切丛 T^*U 的一维子丛. 这就导出了现代的关于 M 上的 Pfaff 方程之整体定义, 即 T^*M 的秩为 1 的子向量丛, 亦见 **Pfaff 结构** (Pfaffian structure).

上面条目的公式 (5) 中所体现的命题称为关于 Pfaff 方程的 Darboux 定理 (Darboux theorem on Pfaffian equations). 这里包含有奥妙之处. 定义 $2s+1$ 类的 Pfaff 方程的 **Pfaff 形式** (Pfaffian form) 可以是 $2s+1$ 类或 $2s+2$ 类. 这样 Darboux 定理 (按其现代形式) 分两步达到: i) 设 ξ 是流形 M 上 $2s+1$ 常数类 Pfaff 方程, 则处处局部地存在定义该方程的 $2s+1$ 类 Pfaff 形式; 且 ii) 对 $2s+1$ 类 Pfaff 形式的典范形式的陈述, 见 **Pfaff 形式** (Pfaffian form).

这里, Pfaff 方程 ξ 在 $x\in M$ 的类定义为: 设 ξ 在 x 附近由微分形式 ω 定义; 则此方程之类为 $2s+1$, 当且仅当 $(\omega\wedge(d\omega)^s)(x)\neq 0$, $(\omega\wedge(d\omega)^{s+1})(x)=0$. 详见 [A1].

参考文献

[A1] Liebermann, P. and Marle, C.-M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987, Chapt. V (译自法文).

齐民友 译

Pfaff 形式 [Pfaffian form; Пфаффа форма]

一个一次微分形式 (differential form)

【补注】 定义在流形 M 的一开子集 $U\subset M$ 上的 Pfaff 形式 $\omega=a_1(x)dx^1+\cdots+a_n(x)dx^n$，在 x 点为奇数 $2s+1$类的，如果它满足

$$\omega\wedge(d\omega)^s(x)\neq 0,\quad (d\omega)^{s+1}(x)=0;$$

它在 x 点是偶数 $2s+2$ 类的，如果

$$\omega\wedge(d\omega)^s(x)\neq 0,\ \omega\wedge(d\omega)^{s+1}(x)=0,$$
$$(d\omega)^{s+1}(x)\neq 0.$$

$2s+1$ 类和 $2s+2$ 类 Pfaff 形式都定义一个 $2s+1$ 类 **Pfaff 方程** (Pfaffian equation).

关于 Pfaff 形式的 Darboux 定理 (Darboux theorem on Pfaffian forms) 即是:

1) 若在流形 M 的开子集 U 上的 Pfaff 形式 ω 之类为常数 $2s+1$，则每一点 $x\in U$ 均有一个邻域 V 以及一族独立的函数 $x^0,\cdots,x^{2s}$，使在 V 上

$$\omega=dx^0-\sum_{k=1}^{s}x^{s+k}dx^k.$$

2) 若在流形 M 的开子集 U 上的 Pfaff 形式 ω 之类为常数 $2s+2$，则每一点 $x\in U$ 均有一邻域 V 以及一族独立的函数 $x^0,\cdots,x^s,z^0,\cdots,z^s$，使在 V 上

$$\omega=z^0dx^0-\sum_{k=1}^{s}z^kdx^k,$$

其中函数 z^0 在 V 上没有零点.

这样，若 $\dim(M)=2s+2$，则函数 $(-x^0,x^1,\cdots,x^s,z^0,\cdots,z^s)$ 是辛形式 $d\omega$ 的典范坐标 (canonical coordinates).

参考文献

[A1] Libermann, P. and Marle, C.-M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987, Chapt. V(译自法文).

齐民友 译

Pfaff 问题 [Pfaffian problem; Пфаффа проблема]

描述由 q 个微分 1 次形式

$$\theta^\alpha=0,\quad \alpha=1,\cdots,q,\qquad (*)$$

所构成的 **Pfaff 方程组** (Pfaffian system) 的最大维数的积分流形的问题，这 q 个微分 1 次形式给定在某一区域 $M\subset\mathbf{R}^n$ (或在某一流形) 上，且在其每一点均线性无关. 子流形 $N\subset M$ 称为方程组 (*) 的积分流形 (integral manifold)，如果 θ^α 诸形式在 N 上的限制恒为零. 这个问题是 Pfaff 提出的 (1814).

从几何观点看来，方程组 (*) 在 M 上决定了一个 $(n-q)$ 维分布 (即一个 **Pfaff 结构** (Pfaffian structure))，亦即 $(n-q)$ 维子空间的场

$$x\mapsto P_x=\{y\in\mathbf{R}^n:\ \theta^\alpha_x(y)=0\},\ x\in M,$$

而 Pfaff 问题即寻求切于此场的最大可能维数的子流形. Pfaff 问题的重要性在于以下事实: 求积任意偏微分方程的问题均归结为一 Pfaff 问题. 例如，求积一阶方程

$$F\left[x^i,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x^i}\right]=0$$

的问题就可归结为在空间 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 的由方程

$$F(x^i,\ u,\ p_i)=0$$

所定义的子流形 (一般说来可能有奇性) 上求积 Pfaff 方程

$$\theta=du-p_idx^i=0$$

这一 Pfaff 问题.

一个完全可积 **Pfaff 方程组** (Pfaffian system) (还有其类为常值的单个 **Pfaff 方程** (Pfaffian equation)) 都可局部地化为简单的典范形式. 在这些情况下，求解 Pfaff 问题归结为求解常微分方程. 一般情况下(在光滑函数类中)的 Pfaff 问题迄今(1989)尚未解决. E. Cartan 在他的**对合方程组** (involutional system) 理论中解决了解析情况的 Pfaff 问题. Cartan 的基本定理的提法基于正则积分元的概念. 切空间 T_xM 的 k 维子空间 E_k 称为方程组 (*) 的 k 维积分元 (k-dimensional integral element)，如果

$$\theta^\alpha(E_k)=0,\quad d\theta^\alpha(E_k\wedge E_k)=0,\ \alpha=1,\cdots,q.$$

余切空间 $T_x^*(M)$ 的由 1 次形式 $\theta^\alpha|_x$, $(v\lrcorner d\theta^\alpha)_x$ ($v\in E_k$, $\lrcorner$ 是内乘积运算，即缩并) 所生成的子空间 $S(E_k)$ 称为积分元 E_k 的极系统 (polar system). 如果有旗 $E_k\supset\cdots\supset E_1\supset 0$ 存在，使得

$$\dim E_i=i,\quad \dim S(E_i)=\max\dim S(E_i^{'}),$$

这里最大值是对所有包含 E_{i-1} 的 i 维积分元 $E_i^{'}$ 取的，则积分元 E_k 称为正则的 (regular). Cartan 定理 (Cartan theorem) 指出: 如果 N 是具有解析系数的 Pfaff 方程组的 k 维积分元，并令某一点 $x\in N$ 的切空间 T_xN 是一正则积分流形，则对任一 $k+1$ 维的积分元 $E_{k+1}\supset T_xN$，必在 x 的某一个邻域中存在一个局部包含 N 的积分流形 $\widetilde{N}$，使得 $E_{k+1}=T_x\widetilde{N}$. Cartan 的定理已被推广到由流形上的微分形式代数之理想所给出的任意微分形式组 (Cartan－Kähler 定理 (Cartan－Kähler theorem)).

参考文献

[1] Cartan, E., Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité, *Bull. Soc. Math. France*, 59 (1931), 88－118.

[2] Cartan, E., Leçons sur les invariantes integraux, Her-

mann, 1922

[3] Рашевский, П.К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.-Л., 1947.

[4] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.

[5] Griffiths P. A., Exterior differential systems and the calculus of variations, Birkhauser, 1983

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 **Pfaff 问题和偏微分方程.** 令

$$F_h\left[x^i, u^j, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u^k\right] = 0 \qquad (A1)$$

$$h = 1, \cdots, p, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m,$$

$$\alpha = (a_1, \cdots, a_n), |\alpha| = a_1 + \cdots + a_n \leqslant r, a_i \in \{0, 1, \cdots\}$$

是由含 m 个 n 变量的未知函数的阶数 $\leqslant r$ 的 p 个偏微分方程之方程组. 引入变量

$$p^{\alpha, k}, 1 \leqslant |\alpha| \leqslant r, k = 1, \cdots, m.$$

若把方程组 (A1) 换成方程组

$$\widetilde{F}_h(x^i, u^j, p^{\alpha, k}) = 0, \qquad (A2)$$

再附加以 Pfaff 方程组

$$d p^{\alpha, k} - \sum_{i=1}^{n} p^{\alpha(i), k} d x^i = 0, \ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant r - 1, \ (A3)$$

其中 $p^{0, k} = u^k$ 而 $\alpha(i) = (a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ 如果 $\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$, $i = 1, \cdots, n$, 则可知方程组 (A2) - (A3) 在适当的意义下等价于方程组 (A1). 这样, 若 (A2) (局部地) 定义了 $(x^i, u^j, p^{\alpha, k})$ 空间中的子簇 M, 则 M 上的 Pfaff 问题 (A3)的解在以下意义下确定了 (A1) 的一个解, 即此解在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$(或可能是在 $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m$) 上的投射给出 (A1) 的一个解的图象.

例如, 对于单个二阶方程

$$F\left[x^1, x^2, u, \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^2}\right] = 0,$$

(A2) 和 (A3)分别为

$$\widetilde{F}(x^1, x^2, u, p^1, p^2, p^{11}, p^{12}, p^{22}) = 0, \quad (A2')$$

$$\left.\begin{aligned} d u &= p^1 d x^1 + p^2 d x^2, \\ d p^1 &= p^{11} d x^1 + p^{12} d x^2, \\ d p^2 &= p^{12} d x^1 + p^{22} d x^2. \end{aligned}\right\} \qquad (A3')$$

(A2) 是主要的方程. 余下的方程 (A3) 则表示想要找的 (A2) 的解是 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 的函数的 r 节 (jet). (又见**流形上的偏微分方程** (partial differential equations on a manifolds)). 这就导致把流形上的 r 阶偏微分方程组看作是由 r 阶节丛上的一组函数所决定的这一想法; 详见**流形上的偏微分方程**.

在如方程 (A2), (A3) 这样的背景下, 以下的关于完全可积性的 Frobenius 定理的推广是有意义的. 令 $\omega^1, \cdots, \omega^r$ 为流形 M 上的一组微分形式, $f^1, \cdots, f^s$ 是 M 上的一组函数. 设 $m \in M$ 使 $f^j(m) = 0$, $j = 1, \cdots, s$. 又设

i) $d\omega^i$ 和 df^j 在 $\omega^1, \cdots, \omega^r; f^1, \cdots, f^s$ 所生成的微分形式理想之中;

ii) ω^i 在 m 处线性无关.

(记住, 线性无关的微分 1 次形式 $\omega^1, \cdots, \omega^r$ 构成一个对合系 (involutive system), 如果 $d\omega^i$ 在由 ω^i 生成的理想中. 见**对合分布** (involutive distribution)). 则这时存在唯一的 n 维子流形 N 在 m 点的芽, $r + n = \dim M$, 使微分形式 ω^i 和函数 f^j 在 N 上的限制为零. 此外, 若 $x^1, \cdots, x^n$ 是 M 上在 m 点附近的函数, 而且 $\omega^1, \cdots, \omega^r, dx^1, \cdots, dx^n$ 在 m 点线性无关, 则 $x^1, \cdots, x^n$ 给出 N 在 m 点附近的一个坐标卡.

由理想所定义的微分形式组的 Cartan - Kähler 定理. 令 $\theta^a = 0$, $a = 1, \cdots, q$ 为 M 上的 Pfaff 方程组, N 为其积分流形. 则显然 $d\theta^a$ 和 $\theta^a \wedge \omega$ 在 N 上也都为零, 这里 ω 是M上任意的微分形式. 所以由$\theta^1, \cdots, \theta^q$ 在外微分形式的微分代数 (differential algebra of exterior differential form) $F(M)$ 中所生成的微分理想 (见**微分形式** (differential form); **微分环** (differential ring)) 中的一切元均在 N 上为零. 这就导致把 M 上的微分形式 (方程) 组看成由这样一个理想所决定的想法. 以下均设 M 为一**实解析流形** (analytic manifold). 令 $\mathscr{F}(M)$ 为与 $F(M)$ 相关的**层** (sheaf), 即是说 $\mathscr{F}(M)$ 是 M 上的微分形式环的芽所成的层. 令 $\mathscr{O}(M)$ 为 M 上的解析函数层, 而 $\mathscr{F}_p(M)$ 是 M 上的 p 形式 $\mathscr{O}(M)$模. M 上的一个微分形式组 (differential system) 就是 $\mathscr{F}(M) = \mathscr{F}$ 的一个理想的分次微分子层 (graded differential subsheaf) $\mathscr{C}$, 即有 $\mathscr{F}\mathscr{C} = \mathscr{C} = \mathscr{C}\mathscr{F}$ (理想性质), $\mathscr{C}$ 由 $\mathscr{C}_p = \mathscr{F}_p \cap \mathscr{C}$ 生成 (分次性质) 以及 $d\mathscr{C} \subset \mathscr{C}$ (微分性质). $\mathscr{C}$ 的 p 维积分流形 (integral manifolds) 就是 M 的一个子流形 N 而 $\mathscr{C}$ 在其上为零. 对每一点 $m \in M$, 令 $\mathrm{Gr}_p(m)$ 为切空间 $T_m M$ 的 p 维子空间所成的 **Grassmann 流形** (Grassmann manifold). $\mathrm{Gr}_p(m)$ 对于 $m \in M$ 之并具有一个自然的实解析流形结构, 而投射 $\mathrm{Gr}_p(m) \ni E_p \to m$ 定义一个局部平凡纤维丛 $\mathrm{Gr}_p(M) \to M$. 元素 $E_p \in \mathrm{Gr}_p(m)$ 称为 m 处的一个切触元 (contact element). 若对一切 $\omega \in \mathscr{C}_p$ 均有 $\omega(E_p) = 0$, 则此元素是 $\mathscr{C}_p$ 的一个积分元 (integral element); 若对一切 $E_q \subset E_p$, $0 \leqslant q \leqslant p$, E_q 都是 $\mathscr{C}_q$ 的积分元, 则它是 微分形式组 $\mathscr{C}$ 的

积分元(integral element of a differential system). 零维积分元(即 M 的一点)称为**积分点**(integral point)(它只不过是方程组 $f(m)=0$ 的解,对于函数 $f\in\mathcal{S}_0$). $\mathcal{S}$ 的积分元 E_p 的**极元**(polar element)是一个元素 $P(E_p)\supset E_p$,它由一切这样的向量 $v\in T_mM$ 构成,v, E_p 张成 $\mathcal{S}$ 的积分元. 令 $z^{i_1\cdots i_p}$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$ 为 E_p 的 Grassmann 坐标(见**外代数**(exterior algebra);它们只能确定到相差一个公共的标量倍数). 现在对 $\mathcal{S}_p$ 联结一个 $\mathcal{F}(\mathrm{Gr}_p(M))$ 中的 $\mathcal{F}(M)$ 模的层 $\mathcal{S}_p^0$,它由相应于 p 形式 $\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\in\mathcal{S}_p$ 的所有函数 $\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}z^{i_1\cdots i_p}$ 构成. 令 $\mathcal{I}(\mathcal{S}_p)$ 为 $\mathcal{S}_p$ 的积分元的集合(于是 $\mathcal{I}(\mathcal{S}_p)$ 是 Grassmann 丛 $\mathrm{Gr}_p(M)$ 的一个子集). 若 $\mathcal{S}_p^0$ 是 $\mathcal{I}(\mathcal{S}_p)$ 在 E_p 处的正则局部方程,且 $\dim P(E_p)$ 在 $\mathcal{I}(\mathcal{S}_p)$ 上 E_p 附近为常值,则称元素 E_p 为一**正则积分元**(regular integral element). 回忆一下,当 X 是一流形,子层 $\mathcal{A}\subset\mathcal{F}(X)$ 是 $N\subset X$ 在 $m\in N\subset X$ 处的**正则局部方程**(regular local equation)(N 为其零点的集合),如果环绕 m 局部地存在截面 $s_1,\cdots,s_r\in\Gamma(U,\mathcal{A}(X))$,使 $ds_1,\cdots,ds_r$ 在 U 上线性无关,而 $m'\in N\cap U$,当且仅当 $s_1(m')=\cdots=s_r(m')=0$.

现在,**第一 Cartan - Kähler 存在定理**(first Cartan - Kähler existence theorem)如下所述. 令 N 为 $\mathcal{S}$ 的 p 维积分流形,它在 $m\in N\subset M$ 处定义一个正则元 $T_mN\subset T_mM$. 设 M 有一个包含 N 的 $n+p+1-\dim P(T_mN)$ 维的子流形 M' 使得 $\dim(T_mM'\cap P(T_mN))=p+1$,则环绕 m 局部存在唯一的 $p+1$ 维的积分流形 N' 含于 M' 之中.

若 $\dim P(T_mN)=p+1$,则对 M' 的唯一可能的选取法是(局部地)取之为 M 本身,而有唯一的 $p+1$ 维积分流形扩展 N. 若 $\dim P(T_mN)=p+2$,则在选取 M' 时有"相当于一个任意函数"的自由度,而又再次见到一个偏微分方程的解可以依赖于任意函数的现象(例如 $u_x=u_t$ 以形式为 $\varphi(x+t)$ 的任意函数为解). 重复应用第一 Cartan - Kähler 存在定理而得到的**第二 Cartan - Kähler 存在定理**(second Cartan - Kähler existence theorem),详细说明了这种对初值和任意函数的依赖性.

第一 Cartan - Kähler 存在定理有直接的推论如下. 设已知一在 $m\in M$ 的微分形式组 $\mathcal{S}$ 的 $p+1$ 维积分元 E_{p+1},它包含一个正则积分元 E_p,则(局部地)存在一个 $p+1$ 维积分流形 N 使 $T_mN=E_{p+1}$.

参考文献

[A1] Libermann, P. and Marle, C. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987, Chapt V, Appendix 3 (译自法文).

[A2] Cartan, E., Systèmes différentielles extérieurs et leur applications géométriques, Hermann, 1945.

[A3] Cartan, E., Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 18 (1901), 241 - 311.

[A4] Kähler, E., Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Teubner, 1934.

[A5] Kuranishi, M., Lectures on exterior differential systems, Tata Inst., 1962.

[A6] Dieudonné, J., Eléments d'analyse, 4, Gauthier - Villars, 1977, Chapt. XVIII, Sect. 13.

齐民友 译

Pfaff 结构[Pfaffian structure; Пфаффа структура], 分布(distribution)

流形 M 的**切丛**(tangent bundle) $TM\to M$ 的子向量丛 $\pi:P\to M$. 纤维 $P_x=\pi^{-1}(x)$ 的维数 p 称为 Pfaff 结构 π 的**维数**(dimension of Pfaffian structure),而数 $q=n-p$(其中 $n=\dim M$)称为其**秩**(rank)或**余维数**(codimension). 维数为 p 的 Pfaff 结构可以看作是流形 M 上的 p 维子空间的场 $x\to P_x$.

Pfaff 结构通常由一组 **Pfaff 方程**(Pfaffian equation) $\theta^1=\cdots=\theta^q=0$ 给出,或者对偶于此,由对任一点 $x\in M$ 指出构成子空间 P_x 的基的向量场来给出.

子流形 $N\subset M$ 称为 Pfaff 结构的**积分流形**(integral manifold),如果对于一切 $x\in N$ 有 $T_xN\subset P_x$. 一个 Pfaff 结构称为**完全可积的**(completely integrable),如果在每一点 $x\in M$ 均有一 p 维积分流形通过,或者与此等价,它局部地可以由Pfaff方程组 $dy^1=\cdots=dy^q=0$ 给出,$y^1,\cdots,y^n$ 是 M 的局部坐标. 这个概念相应于完全可积 Pfaff 方程组的概念. 令 $\Gamma(\pi)$ 为丛 $\pi:P\to M$ 的截面之空间(亦见**映射的截面**(section of a mapping)),$L(\pi)$ 为在 P 上为零的微分 1 形式(见**微分形式**(differential form))的空间. 按照 Frobenius 定理(Frobenius theorem),Pfaff 结构 π 完全可积,当且仅当空间 $\Gamma(\pi)$ 是 M 上的向量场的Lie 代数 $D(M)$ 之子代数,或与此等价,当且仅当微分形式代数 $\Omega(M)$ 的由空间 $L(\pi)$ 生成的理想对于外微分为闭的.

令 $A(\pi)$ 为 Pfaff 结构 π 的无穷小自同构的 Lie 代数,即适合 $[X,\Gamma(\pi)]\subset\Gamma(\pi)$ 的向量场 $X\in\Gamma(\pi)$ 之集合. 代数 $A(\pi)$ 是 Lie 代数 $D(M)$ 的子代数,同时又是 M 上的光滑函数环 $F(M)$ 上的模. 商模 $\Gamma(\pi)/A(\pi)$ 刻画了 Pfaff 结构不可积的程度.

若空间 $A_p(\pi)=\{X_p;X\in A(\pi)\}$ 的维数不依赖于 $p\in M$,就称 Pfaff 结构 π 为**正则的**(regular). 这时 $A(\pi)$ 是完全可积 Pfaff 结构 $\pi':P'=\bigcup_{p\in M}A_p(\pi)\to M$ 的截面的空间,π' 称为 Pfaff 结构 π 的**特征方程组**(characteristic system of Pfaffian structure π). π'

的秩称为 Pfaff 结构 π 的类(class of a Pfaffian structure),它等于 $L(\pi)$ 中所有 1 形式可用以表出的局部坐标系中的最小可能的坐标数,秩为 1 的正则 Pfaff 结构(即一超平面场)的类为奇数,而构成局部不变量的完全系:类为 $2k+1$ 的 Pfaff 结构可以在某一局部坐标系 y^i 下局部地用 Pfaff 方程

$$dy^1 + y^2 dy^3 + \cdots + y^{2k} dy^{2k+1} = 0$$

给出.

Pfaff 结构的另一个重要的局部不变量是它的亏格(genus),它指出极大的非奇异积分流形之维数(见 **Pfaff 问题**(Pfaffian problem)). p 维的 Pfaff 结构当 $1 < p < n-1$ 时的局部不变量的完全系还不知道.

一个 Pfaff 结构可以看成一个无限型的 G 结构(G − structure),G 是空间 $\mathbf{R}^n$ 中保持一个 p 维坐标平面不变的线性变换群.它的一阶结构函数相应于由向量场的换位子所定义的 $F(M)$ 双线性映射 $c: \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to D(M)/\Gamma(\pi)$. 空间 $A(\pi)$ 就是向量值双线性型 c 的核.

参考文献见 **Pfaff 问题**(Pfafian problem).

Д. В. Алексеевский 撰 齐民友 译

Pfaff 方程组[Pfaffian system; Пфаффа система]

见 **Pfaff 方程**(Pfaffian equation);亦见 **Pfaff 结构**(Pfaffian structure).

相平衡图[phase equilibrium diagram; фазового равновесия диаграмма]

对应于热力学系统的 n 相态($n \geqslant 2$),完全热力学变量族的空间中,平衡态曲面的那些区域在任意两个热力学变量的平面上的投影.对于单元系,这个曲面的区域是柱面,它们投射上(p, T)平面(压强温度平面)后为曲线形状,其方程(不同相的化学势等式 $\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T)$)的一般形式在第一类相变的情形可以写成 Clapeyron-Clausius 方程

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(v_1 - v_2)}$$

的形式,其中 L 是相变潜热,而 v_1 和 v_2 分别是第一相和第二相的比体积.三相态由一个点表示,称为三相点(triple point).

参考文献

[1] Kubo, R., Thermodynamics, North-Holland, 1968 (中译本:久保亮五,热力学,人民教育出版社,1982.)

И. А. Квасников 撰

【补注】

参考文献

[A1] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., Statistical physics, 1, Pergamon, 1980 (中译本:Л. Д. 朗道、E. M. 栗弗席茨,统计物理学,人民教育出版社,1964)
[A2] Fermi, E., Thermodynamics, Dover, reprint, 1956

【译注】

[B1] 王竹溪,热力学,高等教育出版社,第 2 版,1960.

徐锡申 译

相积分方法[phase integral, method of the; фазовых интегралов метод]

同 **WKB 方法**(WKB method).

相平面[phase plane; фазовая плоскость]

平面 $\mathbf{R}^2$,可用于对两个一阶常微分方程(或一个二阶常微分方程)所成的**自治系统**(autonomous system)作几何解释.相平面是**相空间**(phase space)的特例.亦见**动力系统**(dynamical system)(这种解释在那里称为运动学的解释),**微分方程定性理论**(qualitative theory of differential equations),**Poincaré-Bendixson 理论**(Poincaré − Bendixson theory).

Д. В. Аносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hajek, O., Dynamical systems in the plane, Acad. Press, 1968.

齐民友 译

相空间[phase space; фазовое пространство]

一个物理系统(就此词的最广义的意义而言)的一切可能的瞬时状态的全体,并赋以由所研究的系统和所考虑的问题而定的确定的结构.更明确地说,相空间就是一个空间(即具有附加的结构的集合),其元素(称为相点)(通常地)表示此系统的状态(例如**相平面**(phase plane)).这些对象从数学观点来看是同构的,因此人们对状态和表示它们的相点通常都不加区分.

各种类型的"系统"的概念之数学形式化通常都包含相应的相空间(或一类相空间)之定义为其不可少的部分,这反映了系统的状态这一概念的重要性.系统的演化(即其状态随时间的变化)可以是严格确定性的(这时它是由相空间的变换之群或半群 $\{S_t\}$ 来描述的:状态 w 在时刻 t 变为 $S_t w$),它也可能有概率性质(即一**随机过程**(stochastic process)).即使在第一种情况下也可能需要考虑系统的统计状态;对于经典的(非量子的)系统,这种统计状态用相空间上的概率分布来描述.决定系统演化的规则构成"系统"的定义中另一个不可少的部分.

在微分动力系统(dynamical system)的经典的情况下(其中包括解析力学和经典统计物理学中的主要方程组),相空间是一**微分流形**(differentiable manifold) M

(可以有奇性并且(或者)带边). 若动力系统由常微分方程的**自治系统**(autonomous system)来表示, 就说其相空间是"自治系统的相空间". 这时 M 就是自治系统的右方定义于其上的 Euclid 空间或其他空间的区域. 这种情况下, 即令解不是对一切 t 都有定义, 也用"相空间"一词. 此外, M 上也可能给有**不变测度**(invariant measure)(经典地是用其密度给定)或**辛结构**(symplectic structure)(它在流的作用下不变这一条件刻画了 **Hamilton 系统**(Hamiltonian system)). 特别是, 在具有完整的理想约束, 且不显含时间的系统的动力学中, 相空间是某一流形——即构形空间(configuration space)的切从或余切从, 流形的一个点给出系统的位置(构形), 切向量描述其运动的速度(构形的变化率), 而余切向量则描述其动量.

在动力系统理论的其他领域中, 相空间可以具有拓扑空间结构(在**拓扑动力学**(topological dynamics)中), 可以具有**可测空间**(measurable space)或(更为常见的)**测度空间**(measure space)结构(在**遍历理论**(ergodic theory)中). 量子力学中的相空间是一复 Hilbert 空间(然而对于具有经典类似物的量子系统, 相空间时常是指其类似物的相空间). 在随机过程理论中, 相空间是一可测空间(时常还有附加的拓扑结构、微分结构或向量结构), 过程即在其中取值. 特别是只在当相空间在某种意义下为非平凡时, 才讲到相空间. 在 **Марков 过程**(Markov process)理论中时常就是这种情况, 而对于那些时常遇到的具有数字值的过程, 相空间就简单地化为具有标准结构的 $\mathbf{R}$, 这时再特别称之为相空间就没有必要了. (应该记住, 如果把一个狭义的平稳随机过程解释为一个动力系统, 则后者的相空间与过程的相空间是不同的.) Д. В. Аносов 撰

【补注】 亦见**动力系统**(dynamical system). 动力系统的轨迹在相空间中的"图象", 时常称为**相图**(phase portrait).

参考文献

[A1] Hirsch, M. W. and Smale, S., Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Acad. Press, 1974(中译本: M. W. Hirsch 和 S. Smale, 微分方程, 动力系统和线性代数, 上、下册高等教育出版社, 1986).

[A2] Butkovsky, A. G., Phase portraits of control dynamical systems, Kluwer, 1990(译自俄文).

[A3] Libermann, P. and Marle, C. M., Symplectic geometry and analytical mechanics, Reidel, 1987(译自法文).

[A4] Khinchin, A. I., Mathematical foundations of statistical mechanics, Dover, reprint, 1949(译自俄文).

[A5] Ruelle, D., Statistical mechanics, Benjamin, 1969.

[A6] Choquet - Bruhat, Y., Witt - Morette, C. de and Dillard - Bleick, M., Analysis, manifolds and physics, North - Holland, 1977(译自法文).

[A7] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, Наука, 1974(中译本: В. И. 阿诺尔德, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).

[A8] Gantmacher, F., Lectures in analytical mechanics, Mir, 1975(译自俄文).

齐民友 译

相轨道 [phase trajectory; фазовая траектория]

相空间(phase space)中一点的轨道, 表示**动力系统**(dynamical system)的状态如何随时间而变化. 如果系统由常微分方程的**自治系统**(autonomous system)(几何上, 由**向量场**(vector field))描述, 则称自治系统的(或场的)相轨道. 当系统的解不是对所有 t 值定义时也使用这个术语. 形容词"相"常常省略.

当状态与 t 无关时, 相轨道衰退为一个点——**平衡位置**(equilibrium position); 当状态对 t 的依赖性是周期式的时候, 就得到一条闭的相轨道(通常称为"周期相轨道"), 它也包括前面的情形(但在提及闭相轨道时, 通常不是指它衰退成一个点的情形). 一般说来, 非闭相轨道可以是很不相同的; 在**拓扑动力学**(topological dynamics)中它们按多种观点分类. 非闭相轨道上的一个点 w 把它分为两部分——正半轨道和负半轨道. 如果系统在 $t=0$ 具有状态 w, 则这两部分表示相应于 $t\geqslant 0$ 和 $t\leqslant 0$ 的状态. (最后一个定义形式上也用于闭相轨道, 但它的两个半轨道是相同的.)

有时, 不单纯用相轨道表示一条曲线(作为点的集合)或一条定向曲线(其方向按状态随 t 增加时的变化情况来区别), 而且表示在系统中相点沿曲线运动过程中被参数化的曲线. 使用"相轨道"这个术语的部分原因是, 参数化曲线还没有一个公认的名称. 事实上, 如果一个动力系统用常微分方程组来描述, 就简单地提后者的解, 但当动力系统被当作相空间的变换群 $\{S_t\}$ 来讨论时, 这个术语就不适合一般的情形. (对于固定的 w, 函数 $t\to S_t w$ 有时称为"运动", 但在数学中, "运动"通常指整个空间的变换.) Д. В. Аносов 撰

【补注】 非周期轨道分类的某些概念见**回复点**(recurrent point).

相空间中"所有"相轨道的"图象"通常称为动力系统的**相图象**(phase portrait).

参考文献

[A1] Bhatia, N. P. and Szegö, G. P., Stability theory of dynamical systems, Springer, 1970, p.6, 14.

[A2] Butkovskij, A. G. [A. G. Butkovskii], Phase portraits of control dynamical systems, Kluwer, 1990(译自俄文).

[A3] Hirsch, M. W. and Smale, S., Differential equations, dynamical systems, and linear algebra, Acad. Press, 1974.

[A4] Anosov, D. V. and Arnold, V. I. (eds.), Dynamical systems I, Springer, 1988, p. 159 ff.

白苏华 胡师度 译

相变 [phase transition; фазовый переход]

在宏观系统中发生的一种物理现象，其内容如下：在系统的某些平衡态中任意小的影响将导致其性质的突变：系统由一种均匀相转变为另一种．在数学上，相变是被处理成当决定平衡的参量任意小变化时描述系统平衡态的所谓 Gibbs 分布之结构和性质的突变（见 **Gibbs 分布**（Gibbs distribution）；**Gibbs 统计系综**（Gibbs statistical aggregate））．

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Статистическая физика, 3 изд., ч. 1, М., 1976（中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，统计物理学，高等教育出版社，1964）．

[2] Синай, Я. Г., Теория фазовых переходов, М. 1980（英译本：Sinaǐ, Ya. G., Theory of phase transitions Pergamon, 1982）．

P. A. Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Frisch, H. L. and Lebowitz, J. L. (eds.), The equilibrium theory of classical fluids, Benjamin, 1964.

[A2] Stanley, H. E., Introduction to phase transitions and critical phenomena, Pergamon, 1971.

李维新 译

相速度向量 [phase velocity vector; фазовой скорости вектор]

自治系统（autonomous system）

$$\dot{x} = f(x),\ f \in C^1(G),\ G \subset \mathbf{R}^n$$

的**相空间**（phase space）G 中以 x 为起点的向量 $f(x)$．令 Γ 为此系统过一点 $\xi \in G$ 的**相轨道**（phase trajectory），若 $f(\xi) \neq 0$，则相速度向量 $f(\xi)$ 切于 Γ 而且表示系统的代表点在通过位置 $\xi \in \Gamma$ 时刻的沿 Γ 运动的瞬时速度．若 $f(\xi) = 0$，则 $\xi \in G$ 是**平衡位置**（equilibrium position）．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные Дифференциальные уравнения, 5 изд., М. 1983（中译本：Л. С. 庞特利雅金，常微分方程，高等教育出版社，1962）．

H. X. Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Арнольд, В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных уравнений, Наука, Москва, 1978（中译本：阿诺尔德，常微分方程续论，科学出版社，1989）．

齐民友 译

Phragmén-Lindelöf 定理 [Phragmén-Lindelöf theorem; Фрагмена-Линделёфа теорема]

解析函数最大模原理（maximum-modulus principle）在以演绎方式给定的函数视为无界的情形的推广；其最简单形式首先由 E. Phragmén 与 E. Lindelöf（[1]）给出．设 $f(z)$ 是平面 $\mathbf{C}$ 的区域 D 内具有边界 Γ 的单复变量 z 的正则解析函数．说 $f(z)$ 的模在边界点 $\zeta \in \Gamma$ 不超过数值 M，如果

$$\lim_{z \to \zeta} \sup_{z \in D} |f(z)| \leqslant M,$$

即对于每个 $\varepsilon > 0$，存在以 ζ 为心的圆盘 Δ（依赖于 ζ 与 ε），使得对 $z \in D \cap \Delta$ 有 $|f(z)| < M + \varepsilon$．Phragmén 与 Lindelöf 的结果的主要内容，以稍加改进的形式表述，系由下面两个命题组成，它们相继是最大模原理的推广．

1）若正则解析函数 $f(z)$ 的模在 Γ 上无处超过 M，则在 D 内处处有 $|f(z)| \leqslant M$．此命题通常称之为 Phragmén-Lindelöf 原理（Phragmén-Lindelöf principle）．它把最大模原理推广到关于其边界性质仅有部分信息的函数．

2）假设正则解析函数 $f(z)$ 的模在 Γ 上不属于某集 $E \subset \Gamma$ 的任何一点不超过 M．还假定存在具有如下性质的函数 $\omega(z)$：a）$\omega(z)$ 在 D 内正则；b）在 D 内 $|\omega(z)| < 1$；c）在 D 内 $\omega(z) \neq 0$；以及 d）对每个 $\sigma > 0$，函数 $|\omega(z)|^{\sigma} |f(z)|$ 的模在任何一点 $\zeta \in E$ 不超过 M．在这些条件下，在 D 内处处有 $|f(z)| \leqslant M$．

Phragmén-Lindelöf 定理有得到确认的大量应用，通常也将它们统称为 Phragmén-Lindelöf 定理，且伴有 D，E 和 $\omega(z)$ 的一个具体形式（见[1]－[4]，特别是[4]中给出的推广）．在应用中，E 多半是由单个点 ∞ 组成．例如，设 $f(z)$ 在角域

$$D = \{z = re^{i\varphi}: |\varphi| < \lambda \frac{\pi}{2},\ \lambda > 0,\ 0 < r < \infty\} \tag{*}$$

内正则，并且在角边上其模不超过 M．则下面二者之一成立：或者在 D 内处处有

$$|f(z)| \leqslant M,$$

或者对每个 k，$0 < k < 1/\lambda$，当 $r \to \infty$ 时，最大模

$$M(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r,\ z \in D\}$$

比 $\exp(r^k)$ 增长更快．这一定理系由命题 1 和 2 取

$\zeta = \infty$, $\omega(z) = \exp(-z^{k})$ 而得到，其中 $k < k' < 1/\lambda$.

对于在复空间 $\mathbf{C}^n (n \geqslant 1)$ 的区域 D 中给定的全纯函数 $f(z)$, $z = (z_1, \cdots, z_n)$, 命题 1 和 2 的陈述仍成立. 有许多论文致力于得到关于椭圆型偏微分方程及方程组的解的一类 Phragmén-Lindelöf 定理. 对于定义在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 或 $\mathbf{C}^n (n \geqslant 1)$ 的区域 D 内的**下调和函数** (subharmonic function) $u(P)$, 命题 1 和 2 仍成立，只需将 $|f(z)|$ 代之以 $u(P)$ 并假设函数 ω, $0 < \omega < 1$, 在 D 内是对数次调和的 (见[5], [6]; 见**对数下调和函数** (logarithmically-subharmonic function)). 例如，设 $u(z)$ 是角域 (*) 内的次调和函数，在角边上其模不超过 M. 则下面二者之一成立：或者在 D 内处处有 $u(z) \leqslant M$, 或者对每个 k, $0 < k < 1/\lambda$, 最大值

$$M(r) = \max\{u(z): |z| = r, z \in D\}$$

比 r^k 增长更快. 对其他椭圆方程的解也有类似的结果, 可将这些结果称之为 Phragmén-Lindelöf 型 "弱" 定理，这是因为仅仅对函数本身在边界上有弱约束，且所得到的关于其增长的结论相当弱.

另外一些结果可称之为 Phragmén-Lindelöf 型 "强" 定理，这是因为对函数本身及其法微商在边界上作了限制，所得到的关于其增长的结论较强. 关于 $\mathbf{R}^3$ 中圆柱域

$$D = \{(\rho, \varphi, t): 0 \leqslant \rho < a, 0 \leqslant \varphi < 2\pi, |t| < \infty\}$$

的如下命题便是一例. 设 $u(P)$ 是圆柱 D 内及其侧面 Γ 上的调和函数，在 Γ 上满足 $|u(P)| \leqslant M$, $|\partial u / \partial n| \leqslant M$. 则或者在 D 内处处有 $|u(P)| \leqslant M$, 或者对每个 ε, $c > 0$, 当 $|t| \to \infty$ 时，最大值

$$M(t) = \max\{u(\rho, \varphi, t): 0 \leqslant \rho < a, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$$

比

$$c \exp\left[\frac{\pi |t|}{e^{2(a+\varepsilon)}}\right]$$

增长更快 (见[5]－[8]).

参考文献

[1] Phragmén, E. and Lindelöf, E., Sur une extension d'un principle classique de l'analyse, *Acta Math.*, 31 (1908), 381 – 406.

[2] Titchmarsh, E., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1979.

[3] Стоилов, С., Теория функций камплексного переменного, пер. с рум., т. 1 – 2, М., 1962.

[4] Евграфов, М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968 (英译本: Evgrafov, M. A., Analytic functions, Saunders, Philadelphia, 1966).

[5] Привалов, И. И., Субгармонические функции, М.-Л., 1937.

[6] Соломенцев, Е. Д., в сб.: Итоги науки, Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962, М., 1964, 83 – 100.

[7] Евграфов, М. А., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», 27 (1963), 843 – 854.

[8] Ландис, Е. М., Уравнение второго порядка эллиптического и параболического типов, М., 1971.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于 $\mathbf{R}^n$ 中下调和函数的 Phragmén-Lindelöf 型定理可见[A3].

关于抛物型方程的 Phragmén-Lindelöf 定理亦已知. 例如，若 $u(x, t)$ 是热方程 $\Delta u - u_t = 0$ 在上半空间 $t > 0$ 的解并且对 $t = 0$ 连续，则 $|u(x, 0)| \leqslant M$ 蕴含对于带域 $\mathbf{R}^n \times (0, T)$ 中所有的 (x, t) 有 $|u(x, t)| \leqslant M$, 只须 u 对于某个正常数 α 和 k 关于 $t \in (0, T)$ 一致地满足增长条件 $|u(x, t)| \leqslant \alpha \exp(kx^2)$. 去掉上述增长条件，就能求得具有有界初始值的无界解. А. Н. Тихонов ([A1]) 给出一个著名的例子.

参考文献

[A1] Tikhonov, A. N., Uniqueness theorems for the heat equation, *Mat. Sb.*, 42 (1935), 199 – 216.

[A2] Cannon, J. R., The one-dimensional heat equation, Addison-Wesley, 1984.

[A3] Ronkin, L. I., Introduction to the theory of entire functions of several variables, Transl. Math. Mon., 44, Amer. Math. Soc., 1974 (译自俄文).

杨维奇 译

PI 代数 [PI-algebra; PI-алгебра]

域上的满足某些多项式恒等式的代数. 设 A 是域 F 上的一个结合代数 (见**结合环与结合代数** (associative rings and algebras)), 设

$$F[X] = F[x_1, \cdots, x_n, \cdots]$$

是域 F 上的生成元为可数集 $x = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ 的**自由结合代数** (free associative algebra) (非交换多项式代数 (algebra of noncommutative polynomials)), 设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $F[X]$ 中的非零元. 称

$$f(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

为代数 A 的多项式恒等式 (polynomial identity), 如果对任意选取的元素 $a_1, \cdots, a_n \in A$, 有 $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$.

PI 代数和恒等式的例子. 在**交换代数** (commutative algebra) 中下述恒等式为真:

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

(交换性的恒等式 (identity of commutativity)); 在线

性空间上的外代数（exterior algebra）中，亚 Abel 恒等式（metAbelian identity）$[[x_1,x_2],x_3]=0$ 被满足；域 F 上的 $n-1$ 维的有限维代数 A 满足所谓 n 次标准恒等式（standard identity）

$$S_n(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}=0.$$

这里 S_n 是前 n 个正整数集的置换群，$(-1)^\sigma=\operatorname{sgn}\sigma$；它也满足更一般的 Capelli 恒等式（Capelli identity）

$$K_n(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_{n+1})=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma y_1x_{\sigma(1)}\cdots y_nx_{\sigma(n)}y_{n+1}=0.$$

在域 F 上的 n 阶方阵的代数 F_n 中，次数为 $2n$ 的标准恒等式被满足．PI 代数的张量积是 PI 代数．

对于特征为零的域 F 上的任何 PI 代数 A，可以找到一个正整数 n，使得 A 的恒等式能由矩阵代数 F_n 的恒等式的幂给出，进而，F_n 的任何恒等式的某次幂是代数 A 的恒等式．这样，在特征为零的域上的任何 PI 代数中，标准恒等式的某次幂被满足．

被给定代数 A 满足的全体恒等式的左式构成自由代数 $F[x]$ 的完全特征理想（简称为 T 理想（T-ideal））；反之，对任何 T 理想存在一个代数（例如商代数 $F[x]/T$），其恒等式的集合与这个 T 理想相重．如果 F 的特征为零，恒等式可以被微分，而 $F[x]$ 的 T 理想恰好是微分闭的单侧理想．例如，诣零恒等式 $x^n=0$ 的累次微分得到恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x}(x_n)\cdots\frac{\partial}{\partial x}(x_1)x^n=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_n}x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}=0,$$

这是多重线性的（multi-linear）（更确切地，n 线性的（n-linear）），即关于它包含的每一个变量都是线性的．反之，在最后的恒等式中，令 $x_1=\cdots=x_n=x$ 得到恒等式 $n!x^n=0$，或 $x^n=0$．恒等式的这一线性化过程使得可以认为（对特征为零的域）代数的所有恒等式由它的多重线性恒等式导出．此外，对有单位元的代数，所有的恒等式都能由这样一些多重线性恒等式导出，这些多重线性恒等式可以表示为生成元 x_i 的不同次数的右正规化**换位子**（commutator）的积的线性组合．Specht 问题（Specht problem）讨论是否所有的结合代数对恒等式有一组有限基．

满足给定恒等式组的所有代数全体称为一个簇（variety）．一个簇也可定义为关于子代数，同态象，次直积都闭的代数类（亦见**代数系统簇**（algebraic systems, variety of））．一些代数簇已被证明是具有有限基的（即在这样的簇中 Specht 问题有正解）．这些簇包括（仍在特征为零的域上）给定指数 n 的幂零代数簇，长度为 n 的加性换位子是零的代数簇（Lie 幂零代数（Lie-nilpotent algebras）），以及由 M_2（2×2 阶矩阵代数）的半恒等式的 T 理想定义的代数簇．但是，对阶 $n>2$ 的矩阵代数，即对由 M_n 的恒等式的理想定义的簇，这一问题还没有解决．

多项式恒等式的存在严格地确定了结合代数的结构．满足 d 次多项式恒等式的本原代数 A（见**本原环**（primitive ring））同构于中心为 Z 的**除环**（skew-field）D 上的矩阵代数 D_n，并且

$$\dim_Z A\leqslant\left[\frac{1}{2}d\right]^2.$$

因此，一个半单（在 **Jacobson 根**（Jacobson radical）意义下）PI 代数能被展开为除环上全矩阵代数的次直和，矩阵代数的阶和除环在其中心上的维数是有界的，并且半单代数的恒等式的 T 理想与 M_n 的某些"矩阵"T 理想相重．有序 PI 代数是交换的．准素 PI 代数 A（见**准素环**（primary ring））具有双侧经典分式环 $Q(A)$，$Q(A)$ 同构于除环 D 上的矩阵代数 D_m，D 在其中心 Z 上是有限维的，环 $Q(A)$ 是代数 A 的中心扩张，即 $Q(A)=AZ$．代数 A 与 $Q(A)$ 有相同的恒等式理想．PI 代数满足若干 Burnside 类型条件（见 **Burnside 问题**（Burnside problem））．例如，一个代数的（诣零的）PI 代数是局部有限的（局部幂零的）．一个幂零指数上界为 n 的结合**诣零代数**（nil algebra），如果基域的特征为零或大于 n，则是幂零的．

无非零诣零理想的 PI 代数可由交换环上的矩阵表示．然而，并非所有的 PI 代数能用这种方法表示．例如，可数维空间上的外代数由于不满足任何标准恒等式而不能这样表示．可由交换环上的矩阵表示的代数的内部特征是 PI 代数理论中一个独立的研究分支．

特征为零的域上的有限生成 PI 代数的 Jacobson 根是一个诣零理想．在写本条目时（1977），其幂零性问题仍然没有解决．如果 PI 代数的 Jacobson 根是幂零的，则对某个值 n，这个代数满足阶为 n 的矩阵代数的所有恒等式．对有限生成代数，逆命题已被证明．此外，对特征为零的域上的有限生成代数，Jacobson 根的幂零性等价于某个标准恒等式在这个代数上的有效性．

如果一个代数的部分元素满足一个恒等式，在许多情况下，这推出这个代数的所有元素满足某个恒等式．例如，在一个带有对合的代数（见**对合代数**（involution algebra））中，如果对称元素满足一个恒等式，则该代数为一个 PI 代数；如果一个有限自同构群作用在一个特征为零的域上的代数上，并且不变子代数满足给定的恒等式，则原代数是一个 PI 代数．

令人感兴趣的问题是在哪些条件下，给定的特殊代数满足多项式恒等式．

群 G 在特征为零的域上的**群代数**（group algebra）$F(G)$ 满足某一多项式恒等式的充要条件是，G 有一个指数有限的 Abel 子群．如果 F 的特征是有限的并且等于 p，则 $F[G]$ 是 PI 代数，当且仅当 G 有一个指数有限的 p-Abel 子群（称一个群是 p-Abel 的（p-Abelian），如果其换位子群是有限 p 群（p-group））．

特征为零的域 F 上的 Lie 代数 L 的**泛包络代数**（universal enveloping algebra）U_L 是 PI 代数，当且仅当 L 是 Abel 的（即 U_L 是交换的）．如果 F 是一个特征有限的域，则 U_L 是一个 PI 代数，当且仅当 L 有一个余维数有限的 Abel 理想，而代数 L 的伴随表示的代数次数是有界的．

自由结合代数的所有 PI 子代数是交换的．

PI 代数的理论是交换代数的自然推广．它的深刻性和明确性与交换代数相类似，以致可以说成是非交换代数几何的结构．

域 F 上生成元为 $a_1, \cdots, a_k$ 的任何有限生成 PI 代数满足**高的有界性条件**（condition of boundedness of heights），即存在生成元 a_i 中的有限个字 $v_1, \cdots, v_m$ 和一个正整数 h，使得生成元 a_i 中的任何字 u 可在 A 中为表示为字

$$v_{i_1}^{s_{i1}} \cdots v_{i_d}^{s_{id}}$$

的线性组合，这里 $d \leqslant h$，它们关于 a_i 的组合与字 u 相同．在交换的情形下，生成元 a_i 本身可作为字 v_i．**自由非交换仿射环**（free non-commutative affine ring）是一个商代数

$$\mathfrak{A}(F, k, n) = F[x_1, \cdots, x_k]/M_n,$$

这里 $F[x_1, \cdots, x_k]$ 是含有限个生成元 x_i 的特征为零的域 F 上的自由代数，而 M_n 是前面定义的矩阵代数 F_n 的恒等式的 T 理想．代数 $\mathfrak{A}(F, k, n)$ 是一个无零因子 PI 代数，并且具有经典分式除环 $D(F, k, n)$，这个除环在其中心 Z 上是有限维的．进一步，设 $(F_n)_k$ 是一个空间，它的元素是由代数 F_n 的矩阵组成的长度为 k 的列．可以谈及 $\mathfrak{A}(F, k, n)$ 的元素在 $(F_n)_k$ 中的零点，$(F_n)_k$ 中的代数簇，等等，经典代数几何的基本假设成立．这样，Hilbert 零点定理（见 **Hilbert 定理**（Hilbert theorem））的非交换形式成立．符合 Noether 条件的代数的准素理想对应于不可约代数簇．Krull 定理描述了代数 $\mathfrak{A}(F, k, n)$ 的准素理想极大链的长度与 Z 在 F 上的超越次数的一致性，在这种情形下为

$$kn^2 - (n^2 - 1).$$

与结合代数类似，可以利用自由代数的元素来定义含有自由代数的其他代数类（Lie 代数，交错代数，等等）中的 PI 代数．

特征为零的域上满足 n 次 Engel 恒等式

$$[x, y, \cdots, y] = 0 \ (n \text{ 个 } y)$$

的 Lie 代数是局部幂零的．Higgins 问题（Higgins problem）（即 Engel 恒等式蕴涵幂零性吗?）仅对 $n = 4$ 有肯定解．对特征为正的域，解是否定的．

参考文献

[1] Procesi, C., Rings with polynomial identities, M. Dekker, 1973.

[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math Soc., 1956.

[3] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[4] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[5] Ширшов, А. И, 《Матем. сб.》, 43(85)(1957), 2, 277 – 283.

[6] Кострикин, А. И, 《Известия АН СССР. Сер. матем.》, 23(1959), 1, 3 – 34.

[7] Higman, G., On a conjecture of Nagata, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1), 52(1956), 1 – 4.

[8] Higgins, P. J., Lie rings satisfying the Engel condition. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* (1), 50(1954), 8 – 15.

В. Н. Латышев 撰

【补注】 A. R. Kemer 证明了特征为零的域上的每个结合代数簇是有限基的（[A1]）．

参考文献

[A1] Kemer, A. R., Solution of the problem as to whether associative algebras have a finite basis of identities, *Soviet Math. Dokl.*, 37 (1988), 60 – 64. (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 298(1988), 273 – 277).

[A2] Rowen, L. H., Polynomial identities in ring theory, Acad. Press, 1980.

蔡传仁 译

圆周率（数 π）[pi (number π); пи]

圆的周长与直径之比；它是无限不循环小数

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793 \cdots.$$

常常作为某些包含简单规律的算术序列的极限而得到数 π．一个例子是 **Leibniz 级数**（Leibniz series）

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

然而，这个级数收敛得很慢．有一些收敛较快的级数适合于计算 π．

纯解析地定义数 π 的可能性对于几何学也有重要意义．例如，数 π 也出现在非 Euclid 几何学的某些公式中，但不是作为圆的周长与直径之比（在非 Euclid 几何学中这个比不是常数）．数 π 的算术性质被用解

析学工具阐明了，其中 Euler 公式

$$e^{\pi i}=-1$$

起着决定性的作用．在 18 世纪末，J．Lambert 和 A．Legendre 证明了 π 是一个**无理数**（irrational number），而在 19 世纪，F．Lindeman 证明 π 是一个**超越数**（transcendental number）．

取自 БСЭ-3 中的同名条目

【补注】 对于 Lindemann 的证明的一个很好的阐述可在[A3]（第 6 章）中找到．

数 π 的已知数字的位数近年来急骤增加，目前已达亿位（Д．В．Чудновский 和 Г．В．Чудновский）．关于这种计算的讨论，见[A1]．直到 20 世纪 60 年代，计算 π 的标准方法是利用 Machin 公式（Machin formula）$\pi/4=4\arctan(1/5)-\arctan(1/239)$ 和 $\arctan(z)$ 的幂级数．现在利用 Ramanujan 的一些很有用的公式．数 π 的各位数字是怎样随机分布的：特别是，π 是否是**正规数**（normal number），目前还不知道．

参考文献

[A1] Borwein，J．M．and Borwein，P．B．，Pi and AGM，Interscience，1987

[A2] Beckmann，P．，A history of pi，The Golem Press，Boulder（Co．），1971．

[A3] Stewart，I．，Galois theory，Chapman & Hall，1979．

杜小杨 张鸿林 译

Picard 群［Picard group；Пикара группа］

可逆层（或线丛）类的群．更精确地说，设（X，$\mathcal{O}_X$）是赋环空间．如果 $\mathcal{O}_X$ 模的层（sheaf）$\mathcal{L}$ 局部同构于结构层 $\mathcal{O}_X$，就称为**可逆的**（invertible）．X 上同构可逆层的类的集合记为 $\operatorname{Pic}(X)$．张量积 $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}'$ 在集合 $\operatorname{Pic}(X)$ 上定义了一个运算，使它成为 Abel 群，称为 X 的 Picard 群（Picard group）．群 $\operatorname{Pic}(X)$ 自然同构于上同调群 $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$，这里 $\mathcal{O}_X^*$ 是 $\mathcal{O}_X$ 内可逆元的层．

对于一个交换环 A，Picard 群 $\operatorname{Pic}A$ 是可逆 A 模的类的群；$\operatorname{Pic}A\cong\operatorname{Pic}(\operatorname{Spec}A)$．对于 Krull 环，群 $\operatorname{Pic}A$ 与这个环的**除子类群**（divisor class group）有密切的联系．

完全正规**代数簇**（algebraic variety）X 的 Picard 群具有自然的代数结构（见 **Picard 概形**（Picard scheme））．$\operatorname{Pic}(X)$ 的零元的约化连通分支记为 $\operatorname{Pic}^0(X)$，称为 X 的 Picard 簇（Picard variety），它是一个代**数群**（algebraic group）（当 X 是完全非奇异簇时，是一个 Abel 簇）．商群 $\operatorname{Pic}(X)/\operatorname{Pic}^0(X)$ 称为 Néron-Severi 群（Néron-Severi group），它是有限生成的，其秩称为 Picard 数（Picard number）．在复数的情形 X 是 $\mathbf{C}$ 上光滑射影簇，群 $\operatorname{Pic}^0(X)$ 同构于 X 上全纯 1 形式的空间 $H^0(X,\Omega_X^1)$ 关于格 $H^1(X,\mathbf{Z})$ 的商群．

参考文献

[1] Mumford，D．，Lectures on curves on an algebraic surface，Princeton Univ．Press，1966

В．И．Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne，R．，Algebraic geometry，Springer，1977．

陈志杰 译

Picard 概形［Picard scheme；Пикара схема］

光滑代数簇 X 的 **Picard 簇**（Picard variety）$\mathfrak{P}(X)$ 的概念在概形理论框架内的自然推广．为了对任意的 S 概形 X 定义 Picard 概形，先要考虑概形 S 上的概形的范畴 Sch/S 里的相对 Picard 函子（relative Picard functor）$\operatorname{Pic}_{X/S}$．这个函子在 S 概形 S' 上的值是一个群

$$H^0(S',R^1_{fpqc}f_*(G_{m,X'})),$$

这里 $f':X\times_S S'\to S'$ 是基变换态射，$R^1_{fpqc}f_*(G_{m,X'})$ 是在严格平坦拟紧态射的 Grothendieck 拓扑 S_{fpqc} 里与预层

$$T\to H^1(T_{fpqc},G_m)=H^1(T_{et},G_m)$$

相关联的层，G_m 表示标准乘法群层．如果 Picard 函子 $\operatorname{Pic}_{X/S}$ 是在 Sch/S 上可表示的，则表示它的 S 概形被称为 S 概形 X 的相对 Picard 概形（relative Picard scheme），记为 $\operatorname{Pic}_{X/S}$．如果 X 是某个域 $\bar{k}$ 上的代数概形，$\bar{k}$ 有一个有理 k 点，则对任意 k 概形 S' 有（[3]）：

$$\operatorname{Pic}_{X/k}(S')=\operatorname{Pic}(X\times_k S')/\operatorname{Pic}(S').$$

特别地，$\operatorname{Pic}_{X/k}(k)=\operatorname{Pic}(X)$ 可被等同于 $\operatorname{Pic}_{X/k}$ 的 k 有理点的群 $\operatorname{Pic}_{X/k}(k)$（如果这个群存在的话）．

如果 $f:X\to S$ 是具有几何整纤维的射影态射，则概形 $\underline{\operatorname{Pic}}_{X/S}$ 存在而且是局部有限可表示的可分群 S 概形．如果 $S=\operatorname{Spec}(k)$，则 $\underline{\operatorname{Pic}}_{X/k}$ 的单位连通分支 $\operatorname{Pic}^0_{X/k}$ 是一个代数 k 概形，而且对应的约化 k 概形 $(\underline{\operatorname{Pic}}^0_{X/k})_{red}$ 正是 Picard 簇 $\mathfrak{P}_c(X)$（[4]）．概形 $\underline{\operatorname{Pic}}^0_{X/k}$ 的局部环里的幂零元给出了 Picard 概形的许多附加的信息，而且能解释在特征数 $p>0$ 的域上的代数几何里的各种"病态"．另一方面，在特征数 0 的域上概形 $\underline{\operatorname{Pic}}^0_{K/k}$ 总是约化的（[6]）．当 F 是光滑代数曲面且 $H^2(F,\mathcal{O}_F)=0$ 时已经知道 $\underline{\operatorname{Pic}}_{F/k}$ 是一种约化概形（[5]）．

对任何有 $f_*(\mathcal{O}_{X'})=\mathcal{O}_{S'}$ 的真平坦态射 $f:X\to S$

(当基 S 为 Noether 时，它是有限可表示的)，函子 $\mathrm{Pic}_{X/S}$ 对于任何基变换态射 $f': X' = X \times_S S' \to S$ 是 S 上代数空间([1])．特别地，当基域 S 是局部 Artin 环的谱时，函子 $\underline{\mathrm{Pic}}_{X,S}$ 是可表示的．

参考文献

[1] Artin, M., Algebraization of formal moduli Ⅰ, in Global Analysis, Papers in honor of K. Kodaira, Univ. Tokyo Press, 1969, 21 – 77.

[2] Chevalley, C., Sur la théorie de la variété de Picard, *Amer. J. Math.*, **82** (1960), 435 – 490.

[3] Grothendieck, A., Technique de déscente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, V. Les schémas de Picard. Théorèmes d'existence, *Sém. Bourbaki*, **14** (1962), 232/01 – 232/19.

[4] Grothendieck, A., Eléments de géométrie algébrique, Ⅰ. Le langage des schémas, *Publ. Math. IHES*, 1960, 4, 1 – 228.

[5] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.

[6] Oort, F., Algebraic group schemes in character zero are reduced, *Invent. Math.*, **2** (1966), 1, 79 – 80.

[7] Итоги науки и техники. Алгебра, Топология, Геометрия, М., **10** (1972), 47 – 112.

В. В. Шокуров 撰

【补注】 概形 X 上的标准乘法层(standard multiplicative sheaf)对于 X 内的仿射开集 U 指定 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 的单位群 $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)^*$.

参考文献

[A1] Grothendieck, A., Fondements de la géométrie algébrique, Secr. Math. Univ. Paris, 1961/1962.

[A2] Altman, A. and Kleiman, S., Compactification of the Picard Scheme Ⅰ, *Adv. in Math.*, **35** (1980), 50 – 112.

[A3] Altman, A. and Kleiman, S., Compactification of the Picard scheme Ⅱ, *Amer. J. Math.*, **101** (1979), 10 – 41.

[A4] Murre, J. P., On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups (with an application to the Picard functor), *Publ. Math. IHES*, **23** (1964), 581 – 619.

[A5] Oort, F., Sue le schéma de Picard, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 1 – 14.

陈志杰 译

Picard 定理[Picard theorem; Пикара теорема]

1) 关于一个复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 邻近其本质奇点(essential singular point) a 的性态的 Picard 定理是经典函数论中成为许多深刻研究起点的一个命题，它由两部分构成：a) Picard 小定理(Picard little theorem)：整函数 $f(z) \neq$ 常数取可能有一个值例外的任一有限复值；b) Picard 大定理(Picard big theorem)：任一单值解析函数在其孤立本质奇点 a 的任意邻域内取可能有一个值例外的任一有限复值．

此定理由 E. Picard 首次发表([1]，[2])．它极大地充实了 **Сохоцкий 定理**(Sokhotskiĭ theorem)．Picard 小定理是 Picard 大定理的推论．由 Picard 大定理直接推出，任一有限复值，除可能有一个值例外，可被单值解析函数在其孤立本质奇点的任意邻域内取到无穷多次．对于有限平面 $\mathbf{C} = \{z: |z| < \infty\}$ 内的亚纯函数，Picard 定理取下述形式：如果点 $a = \infty$ 是在 $\mathbf{C}$ 内亚纯的函数 $F(z)$ 的本质奇点，则在 a 的任意邻域内，函数 $F(z)$ 取扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}} = \{z: |z| \leqslant \infty\}$ 上可能有两个值例外的任何复值，而且可取无穷多次．整函数 $e^z \neq 0$ 和亚纯函数 $\tan z \neq i, -i$ 这两个例子表明上述这些论断是精确的．Picard 定理中出现的例外的值称为 Picard 例外值(Picard exceptional value)．

Picard 定理又由 **Iversen 定理**(Iversen theorem)和 **Julia 定理**(Julia theorem)得到极大充实；前者断言 Picard 例外值是**渐近值**(asymptotic value)，后者断言存在由本质奇点 a 出发的 Julia 射线 L，使得非例外值甚至可在以 a 为顶点、以 L 为对称轴的任意小扇形中无穷次地取到．

下面两个方向显示了关于 Picard 定理现代研究的特征．设 E 是亚纯函数 $F(z)$ 的本质奇点的集合，即 $F(z)$ 是任一点 $z_0 \notin E$ 的某个邻域内的亚纯函数(meromorphic function)，并设 $F(z)$ 在点 $z_0 \in E$ 处的聚值集 $C(z_0; F)$ 不退化为一个值．设 $a \in E$，令 $R(a; F)$ 是 F 在 a 的任一邻域无穷次地取到的值 $w \in \overline{\mathbf{C}}$ 的集合，则 Picard 定理断言，如果 a 是 E 中的孤立点，则补集

$$CR(a; F) = \overline{\mathbf{C}} \setminus R(a; F)$$

具有 Picard 性质(Picard property)，即它至多含有两个点．В. В. Голубев 于 1916 年证明，如果 E 的容量为零即 $\operatorname{cap} E = 0$，则对所有 $a \in E$，$CR(a; F)$ 具有零容量．为使集合 $CR(a; F)$ 对所有 $a \in E$ 具有 Picard 性质所必须置于集合 E 上的最小条件尚未(到 1983 年为止)完全确定．有例子表明，一方面，条件 $\operatorname{cap} E = 0$ 不是充分的；另一方面，存在集合 E，$\operatorname{cap} E > 0$，使得不存在 E 外的亚纯超越函数，它不取 4 个值([4]，[5]，[8])．

第二个方向涉及把 Picard 定理推广到多复变量 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ $(n \geqslant 1)$ 的解析函数 $f(z)$．对于 $n = 1$，也可把 Picard 定理表述为：任一不取至少两个值的全纯映射 $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 是常数．然而，P. Fatou 于 1922 年构造了非奇异全纯映射(甚至双全纯映射) $f: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ 的例子，其例外值集 $\mathbf{C}^2 \setminus f(\mathbf{C}^2)$ 包

含一个非空开集．这表明 Picard 定理（甚至 Сохоцкий 定理）不能直接推广到 $n>1$ 的情形．但如果从另一种表述出发，推广 Picard 定理仍是可能的，例如下面这种对 $n=1$ 情形不太自然的表述：任一不取至少 3 个超平面（对 $n=1$ 即为点）的映到复射影平面 $\mathbf{C}P=\bar{\mathbf{C}}$ 中的全纯映射 $F: \mathbf{C}\to\mathbf{C}P$ 是常数．特别地，Green 定理（Green theorem）成立：任一不取至少 $2n+1$ 个一般位置超平面的全纯映射 $F: \mathbf{C}^m\to\mathbf{C}P^n$ 是常数（见[3]，[6]，[8]）．

2）关于代数曲线单值化的 Picard 定理：如果代数曲线（algebraic curve）$\Phi(z, w)=0$ 的亏格 $g>1$，则不存在亚纯函数偶 $z=f(t)$，$w=h(t)$，使得 $\Phi(f(t), h(t))\equiv 0$．换言之，亏格 $g>1$ 的代数曲线不可能通过亚纯函数单值化．另一方面，在 $g=1$ 的情形，总能通过（亚纯）椭圆函数实现单值化．

此定理是 E．Picard 建立的（[7]）．

参考文献

[1A] Picard, E., Sur une propriété des fonctions entières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **88** (1879), 1024－1027.

[1B] Picard, E., Sur les fonctions entières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **89** (1879), 662－665.

[2] Picard, E., Mémoire sur les fonctions entières, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, **9** (1880), 145－166.

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1－2, М., 1976（第二卷英译本：Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992）.

[4] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[5] Ловатер, А., 载于 Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, 99－259.

[6] Griffiths, P., King, J., Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math.*, **130** (1973), 145－220.

[7] Picard, E., Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une équation algébrique, *Acta Math.*, **11** (1887－1888), 1－12.

[8] Шабат, Б. В., Распределение значений голоморфных отображений, М., 1982（英译本：Shabat, B. V., Distribution of values of holomorphic mappings, Amer. Math. Soc., 1987）.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1978（中译本：J. B. 康威，单复变函数，*上海科学技术出版社，1985*）.

[A2] Griffiths, P., Entire holomorphic mappings in one and several complex variables, Ann. of Math. Studies, 85, Princeton Univ. Press, 1976.

沈永欢 译

Picard 簇［Picard variety；Пикара многообразие］

代数闭域上完全光滑代数簇 X 的 Picard 簇就是 Abel 簇 $\mathfrak{P}(X)$．它参数化了商群 $\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$，这里 $\mathrm{Div}^a(X)$ 是代数等价于零的除子的群，$P(X)$ 是主除子，即有理函数的除子的群．从层论的观点看，Picard 簇参数化了陈（省身）类为零的可逆层同构类的集，即 $\mathfrak{P}(X)$ 与 X 的 **Picard 群**（Picard group）$\mathrm{Pic}(X)$ 的单位连通分支 $\mathrm{Pic}^0(X)$ 是一致的．群 $\mathfrak{P}(X)=\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$ 上的 Abel 簇结构由下述性质唯一确定：对于以 S 为基 X 上除子 D 的任何代数族，存在一个正则映射 $\varphi: S\to\mathfrak{P}(X)$，使得 $D(s)-D(s_0)\in\varphi(s)$，这里 s_0 是 S_0 的某个固定点（[2]）．维数 $q=\dim\mathfrak{P}(X)$ 称为 X 的**非正则度**（irregularity）．

Picard 簇的经典例子是光滑射影曲线的 **Jacobi 簇**（Jacobi variety）．另一个例子由对偶 Abel 簇提供（[3]）．

如果 X 是光滑复射影簇，$\mathfrak{P}(X)$ 可等同于 X 上陈类为零的可逆解析层的群（[4]）．在这种情形下 Picard 簇 $\mathfrak{P}(X)$ 同构于空间 $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ 关于格 $H^1(X, Z)\subset H^1(X, \mathcal{O}_X)$ 的商群．特别地，X 的非正则度 q 等于 $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)=\dim H^0(X, \Omega_X^1)$，这里 Ω_X^1 是正则 1 形式的层．对于代数闭域上非奇异代数曲线的情形以及特征数 0 的代数闭域上完全光滑簇的情形，后一结果仍然正确．在任意特征的情形下只能得到**井草不等式**（Igusa inequality）：$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)\geqslant q$（已经知道非正则度为 1 的光滑代数曲面 F 的例子，其中 $\dim H^1(F, \mathcal{O}_F)=2$（[6]））．这表明 Picard 簇与一维微分形式的理论有密切的关系．E．Picard 自己（[1]）开创了对 Riemann 曲面上这种微分形式的研究，他证明了处处正则形式的空间 $H^0(X, \Omega_X^1)$ 是有限维的．

Picard 簇的概念可被推广到完全正规簇 X 的情形．人们也研究了这样的 Picard 簇 $\mathfrak{P}_c(X)$，它对应于 Cartier 除子并且有好的函子性质，这与 $\mathfrak{P}(X)$ 不同（[9]）．对于完全正规簇 X（[5]）以及任意的射影簇（[8]）已经构造了簇 $\mathfrak{P}_c(X)$．

参考文献

[1] Picard, E., Sur les intégrales de différentielles totales algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **99** (1884), 961－963.

[2] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）.

[3] Mumford, D., Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1974.

[4] Griffiths, P. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[5] Chevalley, C.. Sur la théorie de la variété de Picard, *Amer. J. Math.*, **82** (1960), 435 – 490.
[6] Igusa, J.-I., On some problems in abstract algebraic geometry, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **41** (1955), 11, 964 – 967.
[7] Matsusaka, T., On the algebraic construction of the Picard variety I. *Jap. J. Math.*, **21** (1951), 2, 217 – 235.
[8] Seshadri, C.. Variété de Picard d'une variété complète, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **57** (1962), 117 – 142.
[9] Seshadri, C., Universal property of the Picard variety of a complete variety, *Math. Ann.*, **158** (1965), 3, 293 – 296
В. В. Шокуров 撰

【补注】（代数闭域上的）对于 Weil 除子的 Picard 簇已由松阪辉久（[7]），周炜良（见 [A1]）以及 A. Weil（见[A1]）构造，对于 Cartier 除子由 C. Chevalley([5]，[8] 和[9]) 构造.

完全（可能奇异，可能多重）代数曲线的 Jacobi 簇已由 M. Rosenlicht（[A2]）及 F. Oort（[A3]，[A5]）所构造.

参考文献

[A1] Lang, S., Abelian varieties, Springer, 1983.
[A2] Rosenlicht, M., Generalized Jacobian varieties, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 505 – 530.
[A3] Oort, F., A construction of generalized Jacobian varieties by group extensions, *Math. Ann.*, **147** (1962), 277 – 286.
[A4] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.
[A5] Oort, F., Sur le schéma de Picard, *Bull. Soc. Math. France*, **90** (1962), 1 – 14
陈志杰 译

Pick 定理 [Pick theorem; Пика теорема], Schwarz 引理的不变形式（Schwarz lemma in invariant form）

Schwarz 引理（Schwarz lemma）的如下推广：设 $w=f(z)$ 是单位圆盘 $\Omega=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 内有界正则解析函数，对 $|z|<1$ 有 $|f(z)|\leq 1$，则对于 Ω 内任何点 z_1 与 z_2，它们的象点 $w_1=f(z_1)$ 与 $w_2=f(z_2)$ 的非 Euclid 距离 $d(w_1, w_2)$ 不超过它们的非 Euclid 距离 $d(z_1, z_2)$，即

$$d(w_1, w_2)\leqslant d(z_1, z_2),\ |z_1|, |z_2|<1 \quad (1)$$

亦有非 Euclid 长度元素之间的不等式

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}\leqslant\frac{|dz|}{1-|z|^2},\ dw=f'(z)dz,\ |z|<1, \quad (2)$$

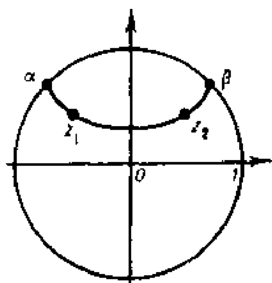
（Pick 定理或 Schwarz 引理的微分形式）. 在 (1) 和 (2) 中出现等号仅当 $w=f(z)$ 是把 Ω 映射于自身的 Möbius 函数（见分式线性映射（fractional-linear mapping））.

当 Ω 是 Лобачевский 平面时，非 Euclid 距离（non-Euclidean distance）或双曲距离（hyperbolic distance）$d(z_1, z_2)$ 是 z_1 与 z_2 之间的 Лобачевский 几何距离，同单位圆周垂直的圆弧充当 Лобачевский 直线（Poincaré 模型（Poincaré's model）），且有

$$d(z_1, z_2)=\frac{1}{2}\ln(\alpha, \beta, z_1, z_2)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-\bar{z}_1 z_2|+|z_1-z_2|}{|1-\bar{z}_1 z_2|-|z_1-z_2|},$$

其中 $(\alpha, \beta, z_1, z_2)$ 是点 z_1 和 z_2 以及过 z_1 和 z_2 的 Лобачевский 直线同单位圆周的交点 α 和 β 之间的交比（cross ratio），参看下图



在映射 $w=f(z)$ 下，任何可求长曲线 $L\subset\Omega$ 的象 $f(L)$ 的非 Euclid 长度不超过 L 的非 Euclid 长度.

这一定理是由 G. Pick（[1]）建立的；由双曲度量原理（hyperbolic metric, principle of the）得到它的一种深远的推广. 在几何函数论中，这些定理给出与映射函数有关的种种泛函的界限（[2]，[3]）.

参考文献

[1] Pick, G., Ueber eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche, *Math. Ann.*, **77** (1916), 1 – 6.
[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（英译本：Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969）.
[3] Carathéodory, C., Conformal representation, Cambridge Univ. Press, 1952.
[4] Garnett, J. B., Bounded analytic functions, Acad. Press, 1981.
Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Conformal invariants, topics in geometric function theory, McGraw-Hill, 1973.
[A2] Lang, S., Introduction to complex hyperbolic spaces, Springer, 1987.
杨维奇 译

分片线性拓扑学 [piecewise-linear topology; кусочно линейная топология]

涉及多面体的拓扑学的一个分支．一个**多面体** (polyhedron) 首先是指有界维的凸多胞形的有限或局部有限并的**拓扑向量空间** (topological vector space) 的一个子集，也指具有固定分片线性结构 (见下文) 的拓扑多面体．局部有限是指环绕空间中的每个点都有一个邻域，它只与并的有限个元素相交．多面体的概念处于**拓扑空间** (topological space) 和**单纯复形** (simplicial complex) 二个概念的中间 (后者的引进是为了有可能先对同胚于多面体的空间，随后对较一般的空间进行进一步的构造性研究)．同胚于一个多面体的空间称为拓扑多面体 (topological polyhedron)(t 多面体 (t-polyhedron))．t 多面体的类包含了有限维拓扑的最重要的对象——最初的可光滑流形．

为了多面体研究的有限化，考虑四个范畴 $\mathcal{T}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$. $\mathcal{T}$ 的对象是 t 多面体；它的态射是连续映射．$\mathcal{P}$ 的对象是多面体；其态射是分片线性映射 (piecewise-linear mappings)(pl 映射 (pl-mappings))．即将区域的某个覆盖的凸多胞形线性地变换到值域中的某个覆盖的多胞形中的映射．$\mathcal{K}$ 中的对象是单纯复形 (simplicial complexes)，即用单形固定的正则覆盖的多面体 (该覆盖使得两个单形只能沿它们公共的面相交)．$\mathcal{K}$ 中的态射是单纯映射 (simplicial mappings)，即将区域中的每一个单形线性地变换到值域中的某个单形上的 pl 映射．最后，$\mathcal{A}$ 由抽象复形 (abstract complexes) (a 复形) 和它们的单纯映射组成．$\mathcal{A}$ 中的一个 a 复形 (a-complex) 是一个具有有界基数的有限子集的辨别系统的至多可数集 $\bar{A}$，称为单形 (simplices)，它满足下列条件：1) 对每个单形 σ，辨别系统也包括该单形的所有的子集——σ 的面 (faces)；2) 每个单形是至多有限个其他单形的一个面．拥有 a 复形的结构的集合的映射称为单纯的 (simplicial)，如果它将定义域的单形变到值域的单形上．a 复形中一个单形的维数 (dimension) 比它的元素的个数少 1．集合 $\bar{A}$ 的每一个元素是复形 A 的一个面，并称作 A 的顶点 (vertex)．为了方便，假设每一个 a 复形包含用 1 表示的空集复形．

存在遗忘函子

$$\mathcal{T} \xleftarrow{t} \mathcal{P} \xleftarrow{p} \mathcal{K} \xleftarrow{a} \mathcal{A}.$$

事实上，一个多面体定义了一个拓扑空间，而 pl 映射是连续的，这给出了 t; $t(P)$ 称为多面体 P 的空间 (space of the polyhedron)．每一个复形定义了一个多面体，而复形的单纯映射是一个 pl 映射，这给出了 p; $p(K)$ 称为复形的体 (body) 或骨架 (skeleton)，用 $|K|$ 表示．最后，一个复形 K 的顶点的集合包含着辨别子集——K 中单形的顶点的集合．这就定义了一个 a 复形，复形的单纯映射定义了相应于 a 复形的一个单纯映射．这就给出了 a，称 $a(K)$ 为复形 K 的概形 (scheme of the complex)．这些函子没有自然的逆．然而，如果通过一个合适的商范畴，它们就变成等价的了．自然的同构分别称为 $\mathcal{T}$ 中的同胚 (homeomorphisms)，$\mathcal{P}$ 中的 pl 同胚 (pl-homeomorphisms) 和 $\mathcal{K}$ 及 $\mathcal{A}$ 中的单纯同构 (simplicial isomorphisms)．对每一个 a 复形 A，可以定义一个实现 (realization) 如下：在一个拓扑向量空间 R 中，选择一个与 A 的顶点一一对应的点 b_i 的集合且是 R 中的**一般位置** (general position)(这可做到，例如 R 的维数超过 A 的维数的二倍)．用这样的方法，只能使有限多个点落在空间的有界区域内．对应于 A 中同一个单形的每一个点 b_i 的集合张成 R 中的某个单形；所有这样的单形的并产生出一个恰如 A 的概型一样的复形——A 的一个实现．同一个 a 复形的所有实现是同构的，以致于函子 a 在 $\mathcal{A}$ 中和 $\mathcal{K}$ 中的同构复形的类之间建立了一个一对一的对应．任何多面体 P 是某个复形 K 的骨架，这样的情况中，K 就是皆知的 P 的直线三角剖分 (rectilinear triangulation)，或简称三角剖分 (triangulation)；K 的一个概形就是皆知的 P 的抽象三角剖分 (abstract triangulation)．给定一个 pl 映射 $f: P \to Q$，存在 P 的三角剖分 K 和 Q 的三角剖分 L 使得 f 是 K 到 L 中的单纯映射．多面体的不同的三角剖分不必是同构的，以致于得到 $\mathcal{K}$ 中的一个较粗糙的等价关系．复形 K_1 的加细 (refinement) 定义为一个复形 K_2 使得 $|K_2|=|K_1|$ 且 K_2 的每一个单形是 K_1 的某个单形的子集．复形 K 组合等价 (combinatorially equivalent) 于 K'，如果 K 和 K' 具有同构加细．两个复形 K 和 K' 组合等价，当且仅当 $|K|$pl 同胚于 $|K'|$．换言之，函子 p 在组合等价复形的类和 pl 同胚多面体之间建立了一个自然对应．函子 t 是满同态 (由定义)．多面体 P 被认为是 t 多面体 $t(P)$ 的直线实现 (rectilinear realization)．一个 t 多面体的任何两个实现是 pl 同胚的，这个断言是著名的组合拓扑学的主猜想 (fundamental conjecture of combinatorial topology (Hauptvermutung))；它已被证明是错的 ([3])．这样，在 t 多面体上定义 pl 结构是意义深远的：一个 pl 结构 (pl-structure) 由一个 t 多面体到另一个多面体上的同胚 $\tau: T\to P$ 给出，二个同胚 $\tau_1: T\to P_1$ 和 $\tau_2: T\to P_2$ 被认为确定了相同的结构，如果 $\tau_1\tau_2^{-1}$ 是 pl 同胚；τ_1 和 τ_2 定义了等价 (但不必是恒同) 结构，如果 P_1 和 P_2 是 pl 同胚的．具有固定 pl 结构的 t 多面体也称为多面体 (polyhedron)．最后，$\mathcal{K}$ 中的组合等价关系通过函子 a 蕴涵着 $\mathcal{A}$ 中的一个新的等价关系．为了用

公式表示这个内蕴在 中的关系．下面定义一个星形重分（stellar subdivision）运算是方便的：顶点处在向量空间 R 中一般位置的两个单形 $\sigma_1^{n_1}$ 和 $\sigma_2^{n_2}$ 的统联（join of two simplices）或并（union）定义为它们的凸包（convex hull）；后者是 (n_1+n_2-1) 维单形，用 $\sigma_1^{\cdot}\sigma_2$ 表示．σ 与空集单形 1 的统联是 σ．位于拓扑向量空间 R 中的两个复形 K_1 和 K_2 使得 K_1 的每个单形与 K_2 的每个单形处在一般位置，两个复形 K_1 和 K_2 的统联（join of two complexes）定义为 K_1 的单形和 K_2 的单形两两成对的统联所形成的复形（假定 1 在 K_1 和 K_2 两者之中）．在复形 K 中的单形 σ 的星形（star of a simplex）定义为由所有以 σ 为面的闭单形所组成的子复形 $\mathrm{St}_K\sigma$ 星形可以被想象成为 σ 与某种复形 $\mathrm{lk}_K\sigma$ 的统联，lk_K 皆知是 K 中的 σ 的链环（link）且由星形中的那些不与 σ 相交的单形所组成．设 x 是 σ 内部中的任一点．在 K 中，用单形 $x^{\cdot}\sigma_1^{\cdot}\sigma_2$ 代替所有星形中的单形，其中 σ_1 是 $\mathrm{lk}_K\sigma$ 中的单形，σ_2 是 σ 的一个面；K 的所有另外的单形都保留．结果是 K 的一个重分称为它的具有中心 σ 的重分（subdivision），用 σK 表示．两个复形是组合等价的，当且仅当它们具有通过逐次的星形重分及其逆得到的同构的重分（Alexander 定理（Alexander theorem），[4]）．

星形重分的概念引伸进了范畴 $\mathscr{A}$．为此，将复形表示为特殊类型的多项式：变量是复形的顶点，而单项式就是它的单形，包括 1．当多项式相加时，重复出现的单形被单个的单项式所代替．多项式的乘法（仅当因子没有公共的变量时才定义）解释为相应的复形的并．设 σ 是复形 A 中的一个固定单形，将 A 写成 $A=\sigma^{\cdot}\mathrm{lk}_A\sigma+A_1$，其中 σ 是从包含 σ 的所有单项式（即 $\mathrm{St}_A\sigma$ 中的所有单项式）的并中去掉括号．在该括号中，σ 的连接保留着；A_1 是所有其他单形的统联．用 $x^{\cdot}\partial\sigma$ 代替 σ，其中 $\partial\sigma$ 是 σ(除 σ 自身外）的面（包括 1）的并．得到一个新复形 $\sigma A=x^{\cdot}\partial\sigma^{\cdot}\mathrm{lk}_A\sigma+A_1$．变换 $A\to\sigma A$ 和 σA 自身是熟知的 A 的（抽象）星形重分（(abstract) stellar subdivision）．$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}$ 中的星形重分运算是与函子 a 相容的，所以，可用具有可数字母表的形式系统来表示 $\mathscr{A}$，它的构造性的对象正是被描述的单项式，而它的初等变换（从一个对象到另一个对象）是星形重分．因此，可以系统阐明关于 A 的算法的可解性问题．例如，a 复形（和随着而来的也有多面体的 pl 同胚）的组合等价问题是不可解的（Марков 定理（Markov theorem），[5]）．

有穷逼近复形的最初目的是引进不变量：不变量的定义与三角剖分有关，它的不变性只在初等变换下被证实（这个过程的模型是 **Euler 示性数**（Euler characteristic）．然而，这个方法没有达到大众化：首先，归功于 Hauptvermutung 的无效性，它不产生拓扑不变性的证明，其次，三角剖分不变量的实际计算常常是没有希望的工作．方法已或多或少地系统地应用于三维流形（见**流形的拓扑学**（topology of manifolds）；**三维流形**（three-dimensional manifold））和**纽结理论**（knot theory）．在同伦理论中，已产生了胞腔分解的技术（见 **CW 复形**（CW-complex））．a 复形的思想的发展导致了半单纯复形的理论，它帮助避免了同伦理论中不必要的拓扑的复杂情况（见**半单纯复形**（semi-simplicial complex））．

分片线性拓扑的基本目标是 pl 流形，它在微分流形和拓扑流形之间起了重要的联系的链环的作用．流形的概念可以在四个范畴 $\mathscr{A}$，$\mathscr{P}$，$\mathscr{T}$，$\mathscr{A}$ 的每一个中自然地定义．在 $\mathscr{T}$ 中，它是简单的可三角剖分的拓扑流形的概念．在 $\mathscr{P}$ 中，有 pl 流形（pl-manifolds——多面体，它的每一个点有一个邻域 pl 同胚于一个适当维数的立方体；在 $\mathscr{K}$ 中和 $\mathscr{A}$ 中，分别考虑组合流形（combinatorial manifolds）和形式流形（formal manifolds）——复形（a 复形），在其中，顶点的星形组合等价于单形的标准三角剖分，即由单形自身和它的所有的面组成．Hauptvermutung 在 pl 流形的类中如[6]一样是错误的．已经设计出了一个拓扑流形的非组合三角剖分的例子（见[7]，[8]），在该例中，某些单形的嵌入不是局部平坦的．如果假设所有的单形是局部平坦的，此外，接受 **Poincaré 猜想**（Poincaré conjecture）在 3 维、4 维时的正确性就可以证明流形的三角剖分是组合流形．最后，虽然具有无组合三角剖分的流形的例子已出现（[6]），但不知道任何一个（可度量化的）流形是否可三角剖分（1989）．

参考文献

[1] Rourke, C. P. and Sanderson, B. J., Introduction to piecewise-linear topology, Springer, 1972.

[2] Munkres, J. R., Elementary differential topology, in J. Milnor and J. Stasheff (eds.), Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974, 270 – 359.

[3] Milnor, J., Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, *Ann. of Math.*, **74**(1961), 575 – 590.

[4] Alexander, J. W., Combinatorial analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28**(1926), 301 – 329.

[5] Марков, А. А., 《Докл. АН СССР》, **121**(1958), 2, 218 – 220.

[6] Kirby, R. and Siebenmann, L., On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75(1969), 742 – 749.

[7] Edwards, R. D., The double suspension of a certain homology 3-sphere in S^5, *Notices Amer. Math. Soc.*, **22**(1975), 2, A-334.

[8] Cannon, J. W., Shrinking cell-like decompositions of manifolds, Codimension three. *Ann. of Math.*, 110 (1979), 83 - 112.

A. B. Чернавский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stallings, J. R., Lectures on polyhedral topology, Tata Inst. Fundam. Research, 1967.

[A2] Zeeman, E. C., Seminar on combinatorial topology, IHES, 1963.

[A3] Kirby, R. C. and Siebenmann, L. C., Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations, Princeton Univ. Press, 1977.

徐森林 译

Pierpont 变差 [Pierpont variation; Пьерпонта вариация]

多元函数的一种数值特征，可以视为一元函数的**函数的变差** (variation of a function) 在多元情形下的类比. 设函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$, $n=2,3,\cdots$. 在某个 n 维平行多面体

$$D_n=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$$

上给定，又设 $\Pi_k^m(k=1,\cdots,n)$ 是把线段 $[a_k,b_k]$ 等分为 $m(m=1,2,\cdots)$ 个等长线段的剖分，其分点为

$$a_k=a_k^0<a_k^1<\cdots<a_k^m=b_k$$

$$\left(a_k^s-a_k^{s-1}=\frac{b_k-a_k}{m}, s=1,\cdots,m\right).$$

这些剖分构成了一个剖分

$$\Pi^m=\Pi_1^m\times\Pi_2^m\times\cdots\times\Pi_n^m$$

它将平行多面体 D_n 分割成 m^n 个边平行于坐标轴的平行多面体 d_1, $\cdots$, d_{m^n}.

令

$$\Omega(f,\Pi^m)=\sum_{j=1}^{m^n}\omega(f,d_j),$$

其中 $\omega(f,d_j)$ 是 f 在 d_j 上的振幅 (见**函数的振幅** (oscillation of a function)). 记

$$P(f,D_n)=\sup_m\sup_{\Pi^m}\frac{1}{m^{n-1}}\Omega(f,\Pi^m).$$

如果 $P(f,D_n)<\infty$, 则称 f 在 D_n 上具有有界 (有限) 的 Pierpont 变差, 并记所有这样的函数组成的类为 $P(D_n)$. 这个定义是 J. Pierpont([1]) 提出的. 函数类 $P(D_n)$ 包含了所有在 D_n 上具有有界 **Arzelà 变差** (Arzelà variation) 的函数类 $A(D_n)$ 作为其子类.

参考文献

[1] Pierpont, J., Lectures on the theory of functions of real variables, 1. Dover, reprint, 1959.

[2] Hahn, H., Reellen Funktionen, 1, Chelsea, reprint, 1948.

Б. И. Голубов 撰 王斯雷 译

Pitman 估计量 [Pitman estimator; Питмена оценка]

在平方损失函数下具有最小风险的、关于实移位群的移位参数的**同变估计量** (equivariant estimator).

设随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的分量 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同分布随机变量，其概率密度属于族

$$\{f(x-\theta),|x|<\infty, \theta\in\Theta=(-\infty,\infty)\},$$

且对于任意 $\theta\in\Theta$, 有

$$\mathsf{E}_\theta X_1^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x-\theta)\,dx<\infty.$$

其次, 设 $G=\{g\}$ 是作用于 $X_i(i=1,\cdots,n)$ 的实现空间 $\mathbf{R}^1=(-\infty,\infty)$ 的实移位变换群:

$$G=\{g:gX_i=X_i+g,\ |g|<\infty\}.$$

在此情形下, 参数 θ 的估计问题关于平方损失函数 $L(\theta,\hat\theta)=(\theta-\hat\theta)^2$ 为不变的, 如果选用 θ 的同变估计量 $\hat\theta=\hat\theta(X)$, 即对于一切 $g\in G$, 有 $\hat\theta(gX)=g\hat\theta(X)$. E. Pitman([1]) 证明了, 在平方损失函数下有最小风险的、关于群 G 的移位参数 θ 的同变估计量 $\hat\theta(X)$ 形如

$$\hat\theta(X)=X_{(n1)}-\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\prod_{i=2}^{n}f(x+Y_i)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\prod_{i=2}^{n}f(x+Y_i)\,dx},$$

其中 $Y_i=X_{(ni)}-X_{(n1)}$, 而 $X_{(ni)}$ 是观测向量 X 的第 i **顺序统计量** (order statistic). Pitman 估计量是无偏的 (见**无偏估计量** (unbiased estimator)); 在移位参数 θ 的一切估计类中, 在平方损失函数下, 如果 θ 的一切同变估计量, 都有有限风险函数, 则 Pitman 估计量是**极小化极大估计量** (minimax estimator)([2]).

例 1. 如果

$$f(x-\theta)=e^{-(x-\theta)},\ x\geqslant\theta,$$

即 $X_i(i=1,\cdots,n)$ 服从具有移位未知参数 θ 的指数分布, 则 θ 的 Pitman 估计量 $\hat\theta(X)$ 为

$$\hat\theta(X)=X_{(n1)}-\frac{1}{n},$$

其方差为 $1/n^2$.

例 2. 如果

$$f(x-\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\theta)^2/2},\ |x|<\infty,$$

即 $X_i(i=1,\cdots,n)$ 服从正态分布 $N(\theta,1)$, 其数学期望 θ 未知, 则算术平均数

$$\bar X=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$

是其 Pitman 估计量.

参考文献

[1] Pitman, E. J., The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form, *Biometrika*, 30 (1939), 391 – 421.

[2] Girshick, M. A. and Savage, L. J., Bayes and minimax estimates for quadratic loss functions, in J. Neyman (ed.), Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., Univ. Calif. Press, 1951, 53 – 73.

[3] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1971

М. С. Никулин 撰 周概容 译

域的位 [**place of a field**; **точка поля**], 域 K 取值于域 L 中的, 域 K 的 L 值的位 (L-valued place of a field K)

一个映射 $f: K \to L \cup \{\infty\}$, 它满足条件

$$f(1) = 1,$$

$$f(a+b) = f(a) + f(b),$$

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b),$$

(只要右边的表达式有定义). 有下列约定:

$$\infty \cdot \infty = \infty,$$

$$c + \infty = \infty + c = \infty, \ c \in L,$$

$$c \cdot \infty = \infty \cdot c = \infty, \ c \in L, \ c \neq 0,$$

而表达式 $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$ 和 $\infty \cdot 0$ 无定义.

域 K 的满足 $f(a) \in L$ 的元素 a 称为在位 f 中有限的 (finite); 所有有限元素的集合 A 是 K 的一个子环, 并且映射 $f: A \to L$ 是一个环同态. 环 A 是局部环 (local ring), 它的极大理想为 $\mathfrak{m} = \{a \in K: f(a) = 0\}$.

一个位 f 决定 K 的一个**赋值** (valuation) v, v 的值群是 K^*/A^* (其中 $K^* = K \setminus \{0\}$ 和 $A^* = A \setminus \mathfrak{m}$ 分别为 K 和 A 的可逆元所成的群). v 的赋值环就是 A. 反过来, 域 K 的任何一个赋值 v 决定 K 的一个取值于 v 的剩余类域的位. 这里, 有限元素组成的环就是赋值 v 的 (整量) 环.

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

Ю. Г. Зархин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 2, Wiley, 1977, Chapt. 9.

裴定一 译 赵春来 校

Plancherel 公式 [**Plancherel formula**; **Планшереля формула**]

表述在空间 $L_2(X)$ 上, **内积** (inner product) 在 **Fourier 变换** (Fourier transform) 下保持不变的公式:

$$\int_Y \hat{f}_1(y) \overline{\hat{f}_2(y)} \, d\mu(y) = \int_X f_1(x) \overline{f_2(x)} \, d\mu(x).$$

在经典的情形, 上式中的 $X = Y = \mathbf{R}^n$ 是 n 维 Euclid 空间, $\mu(x)$ 和 $\mu(y)$ 表示 n 维 Lebesgue 测度, 而 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 上的 Fourier 变换

$$f(x) \mapsto \hat{f}(y)$$

是经典 Fourier 变换

$$g(x) \mapsto \hat{g}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} g(x) e^{i(x,y)} dx,$$

$$g \in L_1(\mathbf{R}^n), \ x = (x_1, \cdots, x_n), \ y = (y_1, \cdots, y_n)$$

(其中的 (x,y) 是 $\mathbf{R}^n$ 中的内积) 从集合 $L_1(\mathbf{R}^n) \cap L_2(\mathbf{R}^n)$ 到空间 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 的连续扩张.

对于下面的情形, Plancherel 公式也成立: X 是局部紧的交换**拓扑群** (topological group), Y 是它的**特征标群** (character group), $x \in X$, $y \in Y$, $\mu(x)$ 和 $\mu(y)$ 分别是 X 和 Y 上的规范**不变测度** (invariant measure), 而空间 $L_2(X)$ 上的 Fourier 变换 $f(x) \mapsto \hat{f}(y)$ 是映射

$$g(x) \mapsto \hat{g}(y) = \int_X g(x) y(x) \, d\mu(x),$$

$$g(x) \in L_1(X), \ y(x) \in Y$$

从集合 $L_1(X) \cap L_2(X)$ 到空间 $L_2(X)$ 的连续扩张.

Plancherel 公式能被推广到非交换拓扑群. 例如, 设 G 是一个紧 Hausdorff 群, μ 是其上的不变测度且 $\mu(G) = 1$, 设 $g \mapsto U_g^{(\alpha)}$ 是 G 在 Hilbert 空间中的维数为 n_α 的有限维不可约酉表示 (见**紧群的表示** (representation of a compact group)), $g \in G$, $\alpha = 1, 2, \cdots$, $x(g) \in L_2(G)$, 设

$$T_x^{(\alpha)} = \int_G x(g) U_g^{(\alpha)*} d\mu(g)$$

(* 表示伴随算子), 又设 $\mathrm{Tr}(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*})$ 是算子 $T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}$ 的**迹** (trace), 则推广的 Plancherel 公式是:

$$\int_G |x(g)|^2 d\mu(g) = \sum_\alpha n_\alpha \mathrm{Tr}(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}). \quad (*)$$

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: А. Н. 柯尔莫果洛夫, С. В. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上、下册, 高等教育出版社, 1992).

[2] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naĭmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 也见 **Fourier 变换**的参考文献. 在局部紧的

幺模 1 型群的情形，有非常类似于 (*) 的 Plancherel 公式 (参见 [A3] 的 § 18.8)：只是将 (*) 中的 $\sum_\alpha n_\alpha$ 换成在 G 的酉对偶 $\hat{G}$ 上的积分 $\int_{\hat{G}} d\nu(\alpha)$. 一般地，这一公式仅用于抽象形式．一个重要的研究领域是获取有关 Plancherel 测度 (Plancherel measure) ν 的更多信息，诸如它的支集、它的离散部分以及它的完整显式表达式等．在实的非紧半单 Lie 群的情形，这一课题已被 Harish-Chandra 成功地完成了．更一般地，可以考虑齐性空间 (例如伪 Riemann 齐性空间) 上的 Plancherel 公式，参见 [A1] § 11.2．将群上或齐性空间上的 Plancherel 公式具体应用于那些关于一个子群满足某些共变性质的函数，可以得到关于带有特殊函数核的积分变换的 Plancherel 公式．导出的 Plancherel 测度经常会被选择作为解释涉及常微分或偏微分算子本征值问题的谱测度．

参考文献

[A1] Flensted-Jensen, M., Analysis on non-Riemannian symmetric spaces, Amer. Math. Soc., 1986.

[A2] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, 1968.

[A3] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

[A4] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 2, Springer, 1979.

朱学贤 译 刘和平 校

Plancherel 定理 [Plancherel theorem; Планшереля теорема]

对于任意平方可积函数 $f\in L_2(-\infty,\infty)$，积分

$$\hat{f}_\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{+\omega} f(y)e^{-ixy}dy$$

当 $\omega\to\infty$ 时在 L_2 中收敛到某个函数 $\hat{f}\in L_2$，即

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)-\hat{f}_\omega(x)|^2dx=0. \qquad (1)$$

同时，函数 f 本身也可以表示成积分

$$f_\eta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\eta}^{+\eta}\hat{f}(y)e^{ixy}dy,\quad \eta>0$$

当 $\eta\to\infty$ 时在 L_2 中的极限，即

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-f_\eta(x)|^2dx=0.$$

而且等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\lambda)|^2d\lambda$$

(Parseval-Plancherel 公式 (Parseval-Plancherel formula)) 成立．

函数

$$\hat{f}(x)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\omega}^{+\omega}f(y)e^{-iyx}dy$$

(与 (1) 式相同，其中的极限是 L_2 意义下的收敛) 称为 f 的 **Fourier 变换** (Fourier transform)；用符号公式

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-ixy}dy \qquad (2)$$

表示 f 的 Fourier 变换，(2) 式中的积分必须理解为依 L_2 度量在 ∞ 处的主值意义的积分．同样的解释也适用于表达式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)e^{ixy}dy. \qquad (3)$$

如果 $f\in L_2$，则积分 (2) 和 (3) 在主值意义下对几乎处处 x 存在．

对几乎处处 x，函数 f 和 $\hat{f}$ 还满足下面的关系式：

$$\hat{f}(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}dy\right\},$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(y)\frac{e^{ixy}-1}{iy}dy\right\}.$$

如果用 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{-1}$ 分别表示 Fourier 变换及 Fourier 逆变换，则 Plancherel 定理可以简短地叙述为，$\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}^{-1}$ 是 L_2 上互逆的**酉算子** (unitary operator)．

这一定理是由 M. Plancherel (1910) 建立的．

参考文献

[1] Zygmund, A., Trigonometric series, 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[2] Titchmarsh, E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1948.

[3] Bochner, S., Lectures on Fourier integrals, Princeton Univ. Press, 1959 (译自德文).

П. И. Лизоркин 撰

【补注】 Plancherel 定理的核心是如下的结论：如果 $f\in L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$，则有：a) $\hat{f}\in L_2(\mathbf{R})$，$\hat{f}(y)$ ($y\in\mathbf{R}$) 由 (2) 定义；b) $\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$；c) 由所有这些 $\hat{f}$ 组成的集合在 $L_2(\mathbf{R})$ 中稠密．因此，可以扩张映射 $f\to\hat{f}$ 为 $L_2(\mathbf{R})$ 映上自身的满足关系式 $(\mathscr{F}^{-1}f)(y)=(\mathscr{F}f)(-y)$ (几乎处处 $y\in\mathbf{R}$) 的酉映射 $\mathscr{F}$．Plancherel 定理已被推广到 $\mathbf{R}^n$ 及任意局部紧 Abel 群，参见**抽象调和分析** (harmonic analysis, abstract)．

参考文献

[A1] Rudin, W., Fourier analysis on groups, Wiley, 1962.

[A2] Weil, A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940.

[A3] Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958 (译自俄文).

[A4] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic

analysis, I－2, Springer 1979.

[A5] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups, Oxford Univ. Press, 1968.

朱学贤 译 刘和平 校

Planck 常数 [Planck constant; Планка постоянная]

一个绝对物理常数，在国际单位制中具有作用量(能量 × 时间)的量纲. Planck 常数 h 是

$$(6.626\,0755 \pm 0.000\,0040) \times 10^{-34}\,\mathrm{Js},$$

其中 ±0.000 0040 是测量中的标准偏差不确定度. 它是由 M. Planck(1900)在一篇关于光的辐射的文章中首次引进的；在这篇文章中他提出一个光子(一个电磁波)的能量 E 是 $E = h\nu$，其中 ν 是光波频率. 以后，当量子力学出现时，Planck 常数被用在主要量子力学量(动量和能量算子，等等)的定义中，并且出现在几乎一切量子力学方程中.

Planck 常数在一定意义上表征经典力学的应用极限：仅当物理系统中的特征距离、速度和质量使得相应作用量与 h 为相同量级时，量子力学定律才会与经典力学定律有实质偏离. 在形式数学处理中，这意味着当 $h \to 0$ 时，量子力学方程转到相应经典力学方程.

常数 h 可用常数 $\hbar = h/2\pi$ 来代替，后者也称为 Planck 常数. P. A. Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schiff, L. I., Quantum mechanics, McGraw-Hill, 1968.

[A2] Messiah, A., Quantum mechanics, I－II, North-Holland, 1961.

[A3] Taylor, Th. T., Mechanics: classical and quantum, Pergamon, 1976, p. 124 ff.

徐锡申 译

平面 [plane; плоскость]

几何学中的基本概念之一；通常不直接由几何公理定义. 一个平面可以看作两个不相交集合——点的集合和直线的集合的组合，点和直线之间具有对称的关联关系. 按照关联关系所满足的不同条件，可以分为射影、仿射、双曲、椭圆和其他平面.

平面可以根据直射变换群(例如见[7]的第三章，那里给出了射影和仿射平面的 Lenz-Barlotti 分类)或各种构形在平面中的实现(如见 **Desargues 几何学**(Desargues geometry)；**Pascal 几何学**(Pascal geometry))分类.

一个平面称为度量的(metrical)，如果关联关系伴有任意两点间距离的定义. 例如，在 Euclid 几何学的 **Hilbert 公理系统**(Hilbert system of axioms)中，距离是在合同公理和连续公理的基础上引入的，这时的平面称为连续的([1]). 由有限个点，因而有限条直线组成的平面称为有限的(finite)([7]).

研究平面的一种方式是引入坐标和一个三元运算，然后再考察([7], [8]).

在 E^3 的解析几何学中，平面是由"向量"和"点"的概念导出的概念. 通过一点 $A \in E^3$ 并通过向量 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{n}$ 的一个平面可看成满足

$$\overline{AM} = t\mathbf{m} + \tau\mathbf{n}\ (t, \tau \in \mathbf{R})$$

的点 M 的集合.

在 E^3 的直角坐标系 (x, y, z) 中，一个平面由一个线性方程

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

给出，其中系数 A, B, C 定义了这个平面法向量的坐标. 在 m 维空间中，n 维平面由线性方程组描述([5]).

各种 m 维空间中平面间的相互位置由对应的关联公理决定，如同平面和直线的关联性质.

参考文献

[1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Teubner, reprint, 1962(中译本：D. 希尔伯特，几何基础，科学出版社，1995).

[2] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

[3] Об основаниях геометрии, М., 1956.

[4] Bachmann, F., Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer, reprint, 1973.

[5] Doneddu, A., Géométrie euclidienne plane, Dunod, 1965.

[6] Розенфельд, Б. А., Многомерные пространства, М., 1966.

[7] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.

[8] Pickert, G., Projektive Ebenen, Springer, reprint, 1975.

В. В. Афанасьев, Л. А. Сидоров 撰

【补注】**射影平面**(projective plane)的公理是：

i) 对每两条线，存在唯一一个点与它们相关联；

ii) 对每两个点，存在唯一一条线通过它们；

iii) 存在四个点，其中任意三点不共线.

最后一条公理排除了像三条线相交于这些点的几何学的特殊情形.

一个仿射平面(affine plane)(见**仿射几何学**(affine geometry))是一个点-线关联结构，使得

iv) 对每一个点 p 和不与 p 相关联的线 L，存在唯一一条线通过 p 且与 L 无公共点；

v) 存在三个不共线的点；

vi) = ii).

对每一个仿射平面，存在一个与之相伴的**射影平面**，由对每一类平行(即不相交的)线引入一个外加的理想点和一条由理想点构成的外加的线 W 而得到. 反

之，一个射影平面 P 去除一条(可区分的)线 W 后是一个仿射平面 $A = P^{w} = P \setminus W$

仿射平面或射影平面的一个直射变换（collineation）是其点的将线变到线的一个置换（见**集合的置换**（permutation of a set））. 仿射平面 A 的一个膨胀（dilatation）是其相伴的射影平面 P 的一个直射变换，它在理想线 $W = P \setminus A$ 上为恒等变换. 仿射平面 A 是一个平移平面（translation plane），如果其所有膨胀都是传递的（transitive）（即对所有 $p, q \in A$，存在一个膨胀将 p 变到 q）.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.

[A2] Coxeter, H. S. M., Projective geometry, Univ. Toronto Press, 1974.

陆珊年 译

平面实代数曲线 [**plane real algebraic curve; плоская действительная алгебраическая кривая**]

实**仿射平面**（affine space）内的点集 L，其坐标满足

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

这里 $f(x, y)$ 是坐标 x 和 y 的 n 次**多项式**（polynomial）；数 n 称为曲线 L 的次（order）数. 如果 f 是可约多项式，即它可分裂为因子 $f_1, \cdots, f_k$，则(1)式定义的曲线 L 称为可约的（reducible），它是由下列方程

$$f_1 = 0, \cdots, f_k = 0$$

定义的曲线 $L_1, \cdots, L_k$（L 的分支（component））的并. 当 f 是不可约多项式时，L 称为不可约曲线（irreducible curve）. 两条次数分别为 n 和 m 的不可约平面实代数曲线至多交于 mn 个点（Bezout 定理（Bezout theorem））.

给定的一条平面实代数曲线 L 可由不同的方程定义. 把在 L 的所有点上均取零值的多项式的集合记为 I_L. 如果 L 不可约，则在 L 上 $fg = 0$ 蕴含着 f 或 g 是零；这时商环 $K_L = K / I_L$ 没有**零因子**（zero divisor），称为 L 上的多项式环（ring of polynomials）（这里 K 是所有多项式的环）.

不可约平面实代数曲线 L 可以联系一个**域**（field）$K(L)$，称为 L 上的有理函数域（field of rational functions）. 它由有理函数 $p(x, y)/q(x, y)$ 构成，q 不能被 f 除尽，考虑到在 L 上的等价性（设 L 由(1)式定义，如果多项式 $p\widetilde{q} - \widetilde{p}q$ 被 f 除尽，则称 p/q 和 $\widetilde{p}/\widetilde{q}$ 在曲线 L 上相等）. 域 $K(L)$ 是 K_L 的分式域. 见**分式环**（fractions, ring of））.

设 $F: (x, y) \to (\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 是平面到自身的映射，如果 $\varphi, \psi \in K(L)$，则称它在平面实代数曲线 L 上是正则的（regular）. 如果存在（曲线 L 上以及 M 上的）正则映射 $F: L \to M$ 和 $G: M \to L$，它们互为逆映射，则称曲线 L 和 M 是同构的（isomorphic）. 此时环 $K(L)$ 和 $K(M)$ 同构. 特别地，仿射等价的曲线是同构的.

更一般地，从曲线 L 到曲线 M 的有理映射（rational mapping）可用有理函数表示. 它建立了曲线间除去有限多点外其他所有点间的一个对应，而且可如下定义. 设 $f = 0$ 和 $g = 0$ 分别是 L 和 M 的定义方程，则有理映射 F 可由一对定义在 L 上且满足 $g(\varphi, \psi) = 0$ 的有理函数 φ 和 ψ 所定义. 如果存在从 L 到 M 和从 M 到 L 的互逆有理映射，则称曲线 L 与 M 是双有理等价的（birationally equivalent）. 这样的有理映射称为双有理变换（birational transformation）或 Cremona 变换（Cremona transformation）. 平面上的所有 Cremona 变换可通过逐次执行标准二次变换（standard quadratic transformation）$x \to 1/x$，$y \to 1/y$，以及射影变换来实现. 双有理等价性比同构粗糙，但是从这个观点对平面实代数曲线作分类则更简单且易于观察.

有理变换的一个很简单的例子是**射影变换**（projective transformation）. 从一条不是直线的不可约曲线 L 到 L 的对偶（dual）曲线 L^* 里的对偶映射（dual mapping）起着重要的作用，这个对偶映射由下式定义：

$$u = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{f - x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

$$v = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{f - x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y}}, \tag{2}$$

其中 f 是定义 L 的多项式. 从(1)和(2)中消去 x 和 y 得到的方程

$$g(u, v) = 0$$

定义了 L^*. 从对偶映射与**切线变换**（tangential transformation）间的关系，可以看出在某些情形里 L^* 可被表示为与 L 相切的直线族的包络.

L^* 的次数称为曲线 L 的类（class）n^*. 对偶关系是互反的，即 $L^{**} = L$，它是射影几何里的**对偶原理**（duality principle）的一个反映.

由(1)定义的平面实代数曲线 L 的点 x 当在 x 处有 $\operatorname{grad} f = 0$ 时被称为奇点（singular point）. 奇点的分析对于 L 的研究是十分必要的，可是奇点的分类迄今尚远未完成.

如果多项式 f 在 x 点的直至 $r-1$ 阶的导数都等于 0，而 x 点的 r 阶导数异于零，则称 x 为 r 重

点(point of multiplicity r)，如果在这个点有 r 条不同切线，则称为寻常 r 重点．奇点的例子有．

1) $x^3-x^2+y^2=0$；$(0,0)$ 是寻常二重点，一个自相交点；

2) $x^2+x^3+y^2=0$；$(0,0)$ 是一个孤立点；

3) $x^3+y^2=0$；$(0,0)$ 是尖点，或称回点；

4) $2x^4-3x^2y+y^2-2y^3+y^4=0$；$(0,0)$ 是自相切点．

由(1)定义的平面实代数曲线 L 上的非奇异点 x 称为拐点(point of inflection)，如果在 x 处有

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}=0. \quad (3)$$

换句话说，拐点就是 L 与(3)式定义的曲线 H 的交点．H 称为 L 的 Hesse 行列式(Hessian)．曲线 L 上的拐点对应于对偶曲线 L^* 的尖点．

对平面实代数曲线有关系式(F. Klein, 1876)

$$n+2d+r=n^*+2d^*+r^*,$$

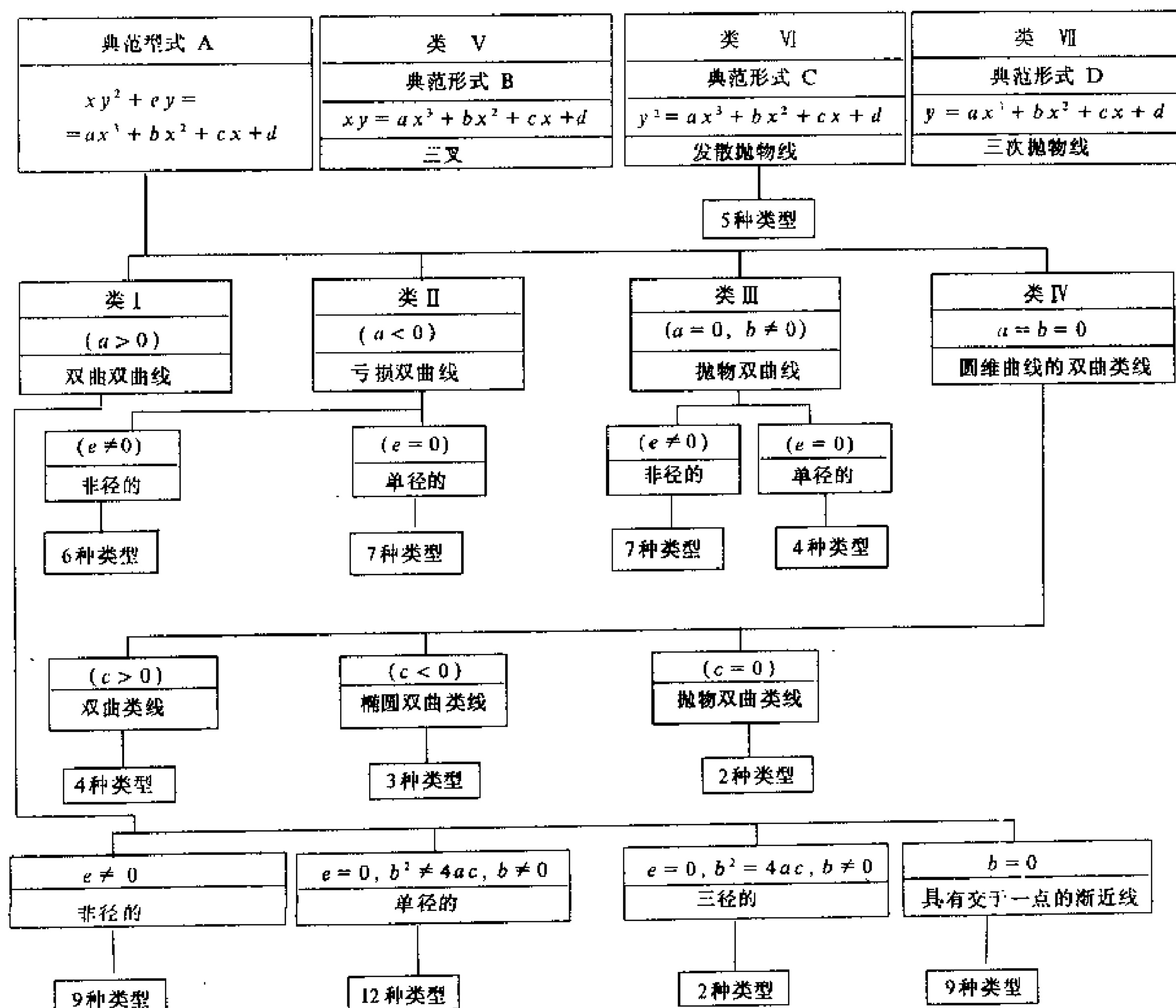
这里 n 是 L 的次数，n^* 是它的类，r^* 是 L 上的拐点数，d^* 是 L 的孤立双重切线的条线(即 L^* 上的二重点)，r 是 L 的尖点数(L^* 的拐点数)，d 是 L 的二重点数．亦见 **Plücker 公式**(Plücker formulas)．

任何不可约平面曲线 L 双有理等价于只有寻常奇点的不可约曲线 L_0．

平面实代数曲线 L 的亏格(genus)或类型(type)被定义为 L 可能具有的二重点的最多个数与它实际所有的个数间的差．曲线 L 的亏格 p 与次数 n 间的关系是

$$2p=n(n-1)-\sum r_i(r_i-1),$$

三次曲线的 Newton 分类



这里的和式是在所有的 r_i 重点上取值.

亏格零的曲线(也被称为有理曲线(rational curve)或单行曲线(unicursal curve))有一个重要的性质: 在这条曲线上移动的点的坐标可以用某个参数 t 的有理函数 ξ 和 η 表示. 换句话说, 亏格零的曲线双有理等价于直线. 单行曲线有重要的应用. 例如设这样曲线的方程把 y 定义成 x 的代数函数, 则对任何有理函数 $g(x, y)$, 不定积分

$$\int g(x, y)dx$$

可写成初等函数的表达式.

亏格为 1 的曲线与**椭圆函数**(elliptic function)有密切的联系而且双有理等价于无奇点的三次曲线. 某些亏格 $p>1$ 的曲线(所谓超椭圆曲线(hyper-elliptic curves))双有理等价于具有唯一的 p 重奇点的 $p+2$ 次曲线.

亏格 p 是双有理不变量, 但是两条有相同亏格的曲线不一定双有理等价.

次数 $n \geqslant 4$ 的曲线的完全分类还没有得到过(1983). 一条不可约二次曲线或是空集, 或是椭圆, 双曲线或抛物线(见**二次曲线**(second-order curve)), 这些曲线是非奇异且单弯的.

I. Newton (1704) 提出了三次曲线的第一个分类, 从而为平面实代数曲线的系统研究奠定了基础. 这个分类的基础是按照无限分支的个数与性状对三次曲线作区分. 通过适当选取坐标系, 可把曲线方程化简为四种典范形式 A, B, C, D 的一种, 然后再分为点、子类与类型(见插图).

对于每条三次曲线 L, 或有一个(唯一的)二重点, 此时 L 是单弯的; 或有一个可能位于无穷远的拐点; 如果有三个拐点, 则它们必须在一条直线上, 而且不可能多于三个拐点.

用无穷远元素对仿射平面作完全化就导出了射影平面. 其中平面实代数曲线由方程

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0$$

所定义, 这里的 F 是关于射影坐标 x^1, x^2, x^3 的 n 次齐次多项式. 曲线的射影分类较为简单. 例如任何三次曲线可被看成以五条被称为发散抛物线中的一条为准线的锥面的截口, 即有五种类型的射影不等价三次曲线(Newton 定理(Newton theorem)).

利用复数以及转移到复平面上往往有助于研究平面实代数曲线. 见**代数曲线**(algebraic curve).

参考文献

[1] Walker, R. J., Algebraic curves, Springer, 1978.

[2] Смогоржевский, А. В., Столова, Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.

[3] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 亦见**实代数簇**(real algebraic variety).

Cremona 变换(Cremona transformation)是射影空间的双有理同构, 即在 $P^n(\mathbf{C})$ 的齐次坐标下可表为 $(x_0, \cdots, x_n) \mapsto (F_0(x_0, \cdots, x_n), \cdots, F_n(x_0, \cdots, x_n))$. 这里的 F_i 是有相同次数的齐次多项式. 在平面的情形下, И. Р. Шафаревич 有一个定理: 所有的 Cremona 变换都可以通过拉开有限个点然后再收缩相同数目的第一类例外曲线而得到.

参考文献

[A1] Brieskorn, E. and Knörrer, H., Plane algebraic curves, Birkhäuser, 1986(译自德文).

陈志杰 译

平面三角学[**plane trigonometry**; **плоская тригонометрия**], Euclid 平面上的三角学(trigonometry in the Euclidean plane)

【补注】 三角形的元素——三条边 a, b, c 和三个角 A, B, C(角 A 相对 a 边, 等等)之间存在各种关系. 在 Euclid 平面上, 最重要的关系是角和公式(angle sum formula)

$$A + B + C = \pi$$

(以弧度为单位), 以及三角不等式(triangle inequalities)

$$a+b>c, b+c>a, c+a>b.$$

这些不等式是三条具有正长度的线段 a, b, c 构成一个三角形三边的必要和充分条件.

另一个关系是**余弦定理**(cosine theorem)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

特别是, 当 $C = \pi/2$ 时, 该三角形成为正三角形, 余弦定理成为 **Pythagoras 定理**(Pythagoras theorem)

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

在直角三角形中, 有

$$\cos A = \frac{b}{c}, \sin A = \frac{a}{c},$$

$$\tan A = \frac{a}{b}, \operatorname{cotan} A = \frac{b}{a},$$

$$\sec A = \frac{c}{b}, \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}.$$

在一般三角形中, 还有下列关系, 称为**正弦定理**(sine theorem):

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

其中 R 是三角形外接圆的半径(见**内接形与外接形, 内切形与外切形**(inscribed and circumscribed figu-

res)). 正弦定理的一个推论是正切公式(tangent formula)

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan[(A-B)/2]}{\tan[(A+B)/2]}=\tan\frac{A-B}{2}\operatorname{cotan}\frac{C}{2}.$$

记 $s=(a+b+c)/2$, 为三角形的半周长(semi-perimeter), 由余弦定理可得半角公式(half-angle formulas)

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc},$$

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc},$$

$$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}.$$

三角形的几何学. 在同任何三角形相联系的许多值得注意的线、点和圆中, 有外接圆(circumcircle), 中心为 O, 半径为 R; 内切圆(incircle)和三个旁切圆(excircle), 中心为 I, I_a, I_b, I_c, 半径为 r, r_a, r_b, r_c; 中线(median) m_a, m_b, m_c, 及其公共点——形心(centroid) G; 内角平分线(inner bisectors) AI, BI, CI 和外角平分线(outer bisectors) I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b; 高线(altitude lines) h_a, h_b, h_c; 及其公共点——垂心(orthocentre) H; Euler 线(Euler line)——通过点 O, G 和 H 的一条直线, 以及**九点圆**(nine-point circle)——通过三角形三边的中点、三高线的垂足和连接三顶点和垂心的线段的中点的一个圆. 九点圆的半径为 $R/2$, 中心 N 处于点 G 和 H 之间的 Euler 线上, 使得 $HN:NG:GO=3:1:2$; 九点圆与内切圆和三个旁切圆相切(Feuerbach 定理(Feuerbach theorem)).

如果用 (ABC) 表示三角形 ABC 的面积, 则下列关系式成立:

$$(ABC)=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=$$
$$=r\cdot s=r_a(s-a)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

此外, 还可得到

$$4R=r_a+r_b+r_c-r \text{ 和 } \frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}.$$

很值得注意的是 Morley 定理(Morley theorem): 任何三角形三对相邻的角的三等分线的交点, 构成一个等边三角形的顶点. 实际上, 直接计算可以证明: Morley 三角形的边长为

$$8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3},$$

此式关于 A, B 和 C 是对称的.

Ceva 定理和 Menelaus 定理. 设 X, Y, Z 分别是三角形 ABC 的三边(或延长线) a, b, c 上的三个点. 这时, 根据 **Ceva 定理**(Ceva theorem), 为使直线 AX, BY 和 CZ 相交于一点, 或者都平行, 其必要和充分条件是

$$(BX:XC)(CY:YA)(AZ:ZB)=1$$

(带符号距离); 根据 **Menelaus 定理**(Menelaus theorem), 为使点 X, Y 和 Z 共线, 其必要充分条件是

$$(BX:XC)(CY:YA)(AZ:ZB)=-1.$$

凸四角形. **Ptolemy 定理**(Ptolemeus theorem): 对于三角形 ABC 所在平面上的任何点 P, 不等式

$$AB\cdot CP+BC\cdot AP\geqslant AC\cdot BP$$

成立; 当且仅当点 P 处于三角形 ABC 的外接圆的弧 CA 上时等式成立(在这种情况下, $ABCP$ 是圆四角形(circle quadrangle)).

Brahmagupta 公式(Brahmagupta formula): 对于任何凸圆四角形 $ABCD$, 设其面积为 $(ABCD)$, 四边为 a, b, c, d、半周长 $s=(a+b+c+d)/2$, 这时, 关系式

$$(ABCD)=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

成立. 一般地, 对于任何四角形 $ABCD$, 面积 $(ABCD)$ 满足

$$(ABCD)^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-$$
$$-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

可以证明, 在给定四边长度的一切四角形中, 圆的内接四角形具有最大面积. (边的循环顺序无关紧要.)

正 n 边形. 半径为 R 的圆的内接正 n 边形, 其周长为 $2nR\sin(\pi/n)$, 面积为 $(n/2)R^2\sin(2\pi/n)$; 半径为 R 的圆的外切正 n 边形, 其周长为 $2nR\tan(\pi/n)$, 面积为 $nR^2\tan(\pi/n)$.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.

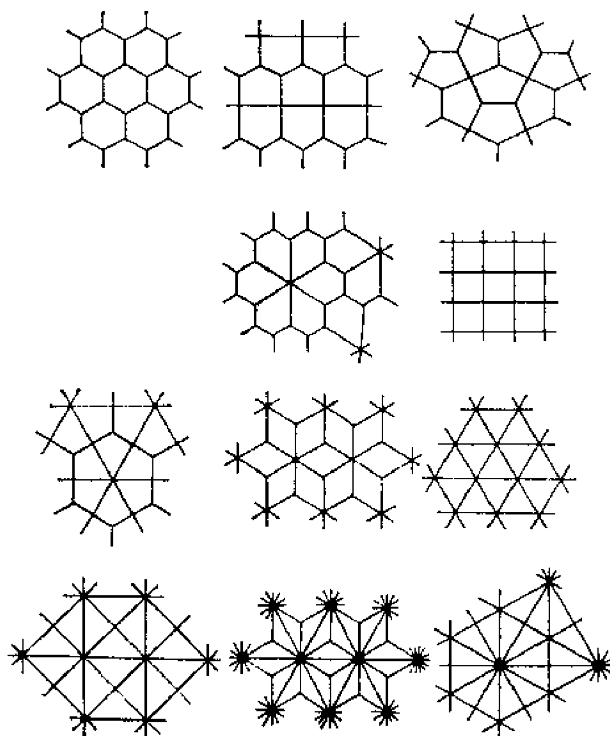
[A2] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L., Geometry revisited, Random House, 1967.

[A3] Berger, M., Geometry, 2, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何,第一 – 五卷, 科学出版社, 1987–1991).

杜小杨 张鸿林 译

平面基多边形[planigon; планигон]

用相等**多边形**(polygon)对平面进行正则分解(或称铺砖(tiling))中的凸多边形, 也称为原砖(prototile); 正则分解是满足下述条件的分解: 存在把该分解映射为自身的平面运动的群, 它传递地作用于砖集上. 在 Euclid 平面上, 有 11 种铺砖组合类型, 称为 Шубников-Laves 铺砖(Shubnikov-Laves tiling)(见图). 然而, 关于单个组合类型的对称群能



以不同的方式作用．组合类型与对称群之间的关系由所谓邻接符号（adjacency symbol）刻画．在 Euclid 平面上，共有 46 种具有不同邻接符号的一般正则铺砖．

Лобачевский 平面中的平面基多边形是具有任意 k 边的正多边形，满足：其中任意固定的 α 个在所给平面基多边形的每个顶点处相交．对于边数 $k=3, 4, 5$, 6 和大于 6，可选使得 $\alpha \geqslant 7, \geqslant 5, \geqslant 4, \geqslant 4$ 和 $\geqslant 3$ 的一个平面基多边形．类似于平面基多边形的高维概念是**立体基多面体**（stereohedron）．

参考文献

[1] Делоне, Б. Н.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 23 (1959), 3, 365 – 386.

[2] Делоне, Б. Н., Долбилин, Н. П., Штогрин, М. И.,《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 148 (1978), 109 – 140.

[3] Узоры симметрии（译自英文）, М., 1980.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 对于更一般的周期图案类，组合类型与对称群之间的关系可通过所谓 Делоне 符号（Delone symbol 或 Delaney symbol）描述，见 [A2], [A3].

[A1] 中给出了关于包括平面基多边形即等面铺砖的原砖的一般概述和现代分类．

参考文献

[A1] Grünbaum, B. and Shephard, G. C., Tilings and patterns, Freeman, 1986.

[A2] Dress, A. and Huson, D., On tilings of the plane, Geom. Ded. 24 (1987), 295 – 310.

[A3] Dress, A., Presentations of discrete groups in terms of parametrized Coxeter matrices — A systematic approach, Adv. Math., 63 (1987), 196 – 212.

[A4] Weyl, H., Symmetry, Princeton Univ. Press, 1952

沈水欢 译

塑性力学的数学理论 [plasticity, mathematical theory of; пластичности математическая теория]

可变形塑性固体的理论，其中研究在给定的初始条件和边界条件下以及在体力 $K(x, t)$ 和面力 $F(x, t)$ 的作用下，一个占据边界为 S 的区域 Ω 的物体内部的位移向量场 $u(x, t)$ 或速度向量场 $v(x, t)$、应变张量场 $\varepsilon_{ij}(x, t)$ 或变形率场 $v_{ij}(x, t)$、以及应力张量场 $\sigma_{ij}(x, t)$ 之确定；以及确定使该物体的平衡（或运动）成为不稳定的载荷和过程．塑性力学的数学理论有如下特点：

a) $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 的关系是非线性的和不可逆的，并在一般情况下可用泛函（屈服条件（yield conditions））加以描写；因此，塑性力学数学理论中的问题在本质上是非线性的；

b) 未知的拟静态场的构形是由给定的泛函在区间 $[0, t]$ 上的变化确定的，而不是决定于某一时刻 t 的瞬时值；

c) 当 K 和 F 变化时，我们将有弹性应变区、主动塑性应变区（加载）和被动塑性应变区（卸载），其中的 $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 关系是不同的．这些区域应在问题的求解过程中确定；

d) 边值问题的方程，一般地说，在物体的不同部分有不同的类型（椭圆型或双曲型）．

对于一个任意的复杂的过程，只知道塑性力学泛函的非常一般的特征，而并不清楚其显式的解析结构．对于一些典型的变形过程，人们已确定不明显地包含泛函的、具体的 $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 关系，并且已被实验所证实．有时，也考虑人为的 $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ "模型"，这只能部分地反映材料的弹塑性性质．

静态边值问题．在弹塑性过程的理论中（[1]），按照 А. А. Ильюшин 的各向同性假定，$\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 关系可以表示成如下形式：

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k \qquad (1)$$

（对于 k，从 1 到 6 求和），其中，ε_{ij}^k 为根据小变形张量构造的基底，A_k 为变形张量不变量、压力 p、温度 T、以及其他可能的非力学性质不变量的泛函．未知函数 $u_i(x, t)$, $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ 在平衡时满足如下方程：

$$\sigma_{ij,j} + \rho K_i = 0,\ x \in \Omega, \qquad (2)$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i},\ x \in \Omega \qquad (3)$$

$$\sigma_{ij} = A_k \varepsilon_{ij}^k,\ x \in \Omega \cap S, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij} l_j = F_i,\ x \in S_\sigma, \tag{5}$$

$$u_i = \varphi_i,\ x \in S_u,\ S_\sigma \cup S_u = S,\ S_\sigma \cap S_u = 0 \tag{6}$$

其中 $K_i(x, t)$、$F_i(x, t)$，$\varphi_i(x, t)$ 为给定函数，Ω、S_σ、S_u 为给定区域，l_j 为边界面 S 外法线的方向余弦，t 为过程参数（例如、真实的或名义的时间），ρ 为材料的密度；式（2）为平衡微分方程；式（3）为小变形与位移之间的运动学关系；式（5）和式（6）分别为用应力和位移表示的边界条件．式(2)到(6)并未给出边值问题的数学提法，因为在不知道塑性泛函结构的情况下就不能解决解的存在性问题．

考虑到求解式（2）到（6）的不确定性，认为对于任意复杂的载荷，解是存在的．建议采用下述计算机求解方法（[1]）．在下面的讨论中，由式（2），（3），（5）到（6）所组成的方程组称为不完全方程组（B）．与利用有限差分方法相联系，区域 Ω 将分成 N 个格子（元素），未知函数在每个格子中取为一个依赖于参数 t（有关的时间间隔$[0, t]$将分成 M 步）的常（平均值），而在格子 ν 中的式（4）被代之以下面的近似关系：

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k} \varepsilon_{\nu ij}^k, \tag{7}$$

其中 $C_{\nu k}$ 是使方程组（B）和（7）的解存在的那种 t 的函数．例如，在一级近似的意义下给定一个具体的 $C_{\nu k}$ 值（尽可能用最简单的方法，例如，可根据广义 Hooke 定律来取），就有：

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k}^{(1)} \varepsilon_{\nu ij}^k, \tag{7'}$$

这里，方程组（B）和（7）的解为 $u_{\nu i}^{(1)}(t)$，$\varepsilon_{\nu ij}^{(1)}$，$\sigma_{\nu ij}^{(1)}(t)$．包含函数 $P_\nu(t)$ 和 $T_\nu(t)$ 的不变量组 $I_\nu^{(1)}(t)$ 确定了一组程序，可以在均匀的应力状态下作 N 个试样的试验．借助于复合加载矩阵的试验可以提供在 $I_\nu^{(1)}(t)$，$p_\nu(t)$，$T_\nu(t)$ 过程中的真 $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 关系．这样，就确定了下面改进的近似关系：

$$\sigma_{\nu ij} = C_{\nu k}^{(2)} \varepsilon_{\nu ij}^k \tag{7''}$$

它在二级近似的意义下用于求解方程组（B）和（7"）．类似地，可以得到之后的各级近似．根据两个相邻级近似之差的模来判断其收敛性．

与在已知式（4）下求解边值问题的各种理论 - 实验方法的使用方案不同，这里用的是均匀应力状态下对于标准试样采用标准研究方法的试验，而不是自然物体或其模型在复杂应力状态下的试验．

已经提出如下经验的存在性准则[2]：如上述迭代过程收敛，则对于未知结构的泛函 A_k，方程组（2）－（6）的解存在，并可在 n 级近似中以给定的精度加以确定．

如果式（4）已知，但形式复杂，则同样可采用本方法并利用式（4）来代替复合加载联合试验机．

在一般情况下表述和求解塑性力学的边值问题很难，但考虑一些特殊类型的过程可使问题大大简化．化．在物体中一点的变形过程的复杂程度可以通过将应变轨迹（即在五维 Euclid 空间中变形偏量 $E_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$（$3\varepsilon = \varepsilon_{ii}$）变化的路径）与由实验确定的材料之典型滞后轨迹 h 相比较来确定．这样，就可以区分出特殊的过程类别，其中式（4）可以具体确定且不显含泛函．对于这一类过程，式（2）－（6）定义的边值问题是完全确定的，可以证明其存在和唯一性定理，并构造出求通解的方法．但是，解在物理上的可靠性问题还有待解决，因为，在给定 $K_i(x, t)$，$F_i(x, t)$ 和 $\varphi_i(x, t)$ 的条件下，由解所确定的过程不一定对应于问题数学提法中采用的式（4）的特殊形式所代表的可靠性区域．可以这样来提出问题：即确定给定的函数类 K_i，F_i 和 φ_i，也许还有施加于特殊形式的式（4）上的约束条件，使得式（2）－（6）在附加上定义相应过程类别的方程之后，是相容的．

在描写简单变形（零曲率）过程的弹塑性小变形理论中（[3]），式（4）有如下形式：

$$\sigma_{ij} = \frac{2\Phi(\varepsilon_u)}{3\varepsilon_u}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}) + 2K\varepsilon\delta_{ij}, \tag{8}$$

其中，$\varepsilon_u = \sqrt{(2E_{ij}E_{ij})/3}$ 为变形强度，Φ 为实验确定的硬化函数，而 K 为一常数（弹性体变形模量）；$3\varepsilon = \varepsilon_{ii}$．

对于建筑材料，在满足下面条件时：

$$3G \geqslant \frac{\Phi(\varepsilon_u)}{\varepsilon_u} \geqslant \frac{d\Phi}{d\varepsilon_u} \geqslant \lambda > 0 \tag{9}$$

（λ 为小于 1 的数），则边值问题（B），（8）是椭圆的，可以证明解的存在性和唯一性定理，确立最小原理以及相应的变分提法．可以证明一个简单加载的定理，从而确立一类（单参数加载的）函数 K_i、F_i 和 φ_i，使解在物理上为可靠的．在原理上可以用 Ritz 法和 Бубнов-Галеркин 法来求解（B），（8），但由于问题的非线性，这样做的效率不高．人们广泛使用弹性解的方法（[3]）．这在满足条件（9）的情况下是收敛的：在各级近似中，求解的是一个较简单的、线弹性边值问题（[3]）．同时，在求解过程中确定使广义 Hooke 定律成立的弹性变形的区域．也可用变弹性参数的方法（[4]）．

问题（B），（8）的提法以及上面提到的解法也可以用于热塑性的问题．这时，在由热传导问题的解确定温度场 $T(x, t)$ 的情况下，在式（8）中应该有 $\Phi \equiv \Phi(\varepsilon_u, T)$，且 $3K\varepsilon\delta_{ij}$ 项由 $3K(\varepsilon - \alpha T)\delta_{ij}$ 代替．由于 $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 之间的泛函特点，只有一些特殊的热过

程可以使用 $\Phi(\varepsilon_u, T)$. 特别使人感兴趣的是循环加载的情况([5]), 其中符号相反的加载和卸载区域周期出现.

对于小曲率(最大曲率比起 h^{-1} 来要小得多)的弹塑性过程的理论, 其中带有

$$\sigma_{ij} = \frac{2\Phi(\varepsilon_u)}{3 v_u}(v_{ij} - v\delta_{ij}) + \sigma\delta_{ij}, \dot{\sigma} = 3Kv, \tag{10}$$

其中

$$v_u = \left[\frac{2}{3} V_{ij} V_{ij}\right]^{1/2}, V_{ij} = v_{ij} - v\delta_{ij}, 3v = v_{mm},$$

$s = \int_0^t v_u dt$ 为应变轨线的弧长, 以及运动学方程

$$2v_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}, \tag{11}$$

其中 $v_i(x, t)$ 为介质中一点速度向量的坐标, 可以提出式(2), (10), (11), (5)和(6)组成的边值问题, 对于这个边值问题, 其存在和唯一性定理已得到证明, 已建立相应的变分原理, 也已提出了一个逐次近似的求解方法. 但是解的物理上可靠性的试验还不清楚. 特别是, 对于金属加工工艺过程(冲压、轧制等)中硬化金属的稳态塑性流动的计算, 就归结为这样的边值问题.

类似地, 对于中等曲率的应变过程和多边形(双线性)过程, 也已建立了应力应变关系, 并提出了相应的边值问题和作了分析. 在两种情况下, 都没有证明一个由推理得到的物理可靠性的准则.

对于任何复杂的载荷, 弹塑性过程的局部理论的应力应变关系

$$\dot{E}_{ij} = \frac{3V_u}{2\sigma_u} P s_{ij} + Q\dot{S}_{ij}, \sigma = 3K\varepsilon \tag{12}$$

已为实验所证实([12], [13]). 人们已分析了相应的边值问题, 并给出了数值解的算法([14]). 在上式中, P, Q 为变量 θ 和 σ_u 的函数, 可以分别对于加载和卸载过程用实验加以确定, 式中符号之上的小点为对时间的导数. 关系式(12)的可靠性保证了相应的数学模型的物理可靠性, 从而对于这个问题提出了可以接受的解答.

在近代流动理论中, 根据能量类型的塑性假定, 对于变形张量的塑性部分 ε_{ij}^p, 导得了下面形式的关系:

$$\Delta\varepsilon_{ij}^p = H\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\Delta\sigma_{mn}, \tag{13}$$
$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^l,$$

同时, 对于弹性部分用了广义的 Hooke 定律:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{mm}^l\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^l,$$

其中, λ 和 μ 为 Lamé 常数, 加载函数 f 为加载过程 $\sigma_{ij}(t)$ 的泛函, 硬化函数 H 也依赖于增量 $\Delta\sigma_{ij}$. 通常假定硬化函数 H 不依赖于增量 $\Delta\sigma_{ij}$. 式(13)相对于这些增量线性化, 使得可以严格地提出(B), (13)型的边值问题, 证明各种普遍定理和最小原理([6]); 还提出了数值-解析求解方法的程式. 由于其中线性化关系式(13)在物理上可靠的区域至今尚未建立, 因此, 线性化带来的简单性优点被大大削弱了.

在塑性力学的数学理论中, 常用基于 Prandtl-Reuss 塑性理论的一种边值问题的提法, 它可由下式加以描写:

$$2G\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}\delta_{ij} + R(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) + \frac{2G}{3K}\dot{\sigma}\delta_{ij},$$

其中, G 和 K 是弹性常数, R 为 $\sigma_u = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ 的函数. 这些方程的可靠性区域是有界的, 但还没有精确地加以确定.

基于 Saint-Venant-Levy-von Mises 的物理关系, 提出了理想塑性体的理论([7], [8]). 这些理论在形式上可由小曲率的式(10)导得, 只要令 $\Phi(s) = \sigma_s =$ 常数(这里 σ_s 为材料的屈服应力)并采用不可压缩性条件:

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{2\sigma_s}{3V_u} v_{ij}, v = 0. \tag{14}$$

理想塑性的概念也意味着, 在主动塑性应变区域内下面形式的屈服条件是满足的:

$$F(\sigma_{ij}) = 0, \tag{15}$$

它可以是 Hencky-von Mises 条件(Hencky-von Mises conditions) $3s_{ij}s_{ij}/2 = \sigma_s^2$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, 或 Tresca-Saint-Venant 条件(Tresca-Saint-Venant conditions) $\tau_{max} = \tau_s$, 其中 τ_{max} 是最大剪应力, σ_s 和 τ_s 则为材料常数.

边值问题(2), (5), (6), (11), (14)和(15)通常是双曲型的(有时是椭圆型的)方程. 理想塑性理论的完整任务是在有塑性变形的区域 Ω_1 内求解(2), (11), (14)和(15), 在弹性变形的区域 Ω_2 内联同广义的 Hooke 定律求解(2)和(3), 相应的边界条件和(对于弹塑性问题)在 Ω_1 和 Ω_2 的未知边界上联结解的运动学和动力学条件.

有时, 一些有用的结果可由刚塑性的分析得到, 即忽略弹性变形, 假定在塑性变形区域之外的部分不可变形. 这样做, 通常会出现质点速度不连续的驻面, 与连续介质力学的经典概念相悖. 对于边界条件由应力给出的情况, 平衡方程加上式(15)那样的条件, 就可以认为组成了一个双曲型的自治系统. 塑性变形区域和在这些区域内的应力, 有可能不是唯一确定的, 这样的矛盾要靠一些启发式的想法加以解决. 在求解弹塑性问题时, 并不出现这种多值性的情况.

在需用理想塑性理论的方法来求解的问题之中，值得一提的是在"通道内"非硬化材料的稳态流动问题，涉及到确定速度和应力，以及接触的速度和应力，这在金属的加工工艺方面（锻造、冲压或模压）有很多应用.

薄层金属的塑性流动的理论，其基础是运动学的和物理的各种合理的假定，对于工程应用特别重要．确定了维持塑性流动的必要条件，例如压力，确定了速度的分布，从而可以预测对象在制造后的形状.

塑性力学数学理论的应用问题，例如薄壳平衡问题，导致一些包括高阶的（例如四阶的）非线性偏微分方程的边值问题.

关于有塑性变形的平衡的稳定性问题，其特征是变形过程的类型在屈曲的瞬间发生分叉变化，而在应变轨迹上造成角点．例如，在简单加载的条件下，在分叉瞬间出现复杂的应力，为了求解稳定性问题，必须应用描写在轨迹角点之后的无穷小过程的关系式（[1]）.

塑性力学中的动力学问题．动力学问题的一般提法是用下面的运动方程代替式（2），

$$\sigma_{ij,j} + \rho K_i = \rho U_{i,tt},\ x \in \Omega,$$

并在式（2）-（6）中加上初始条件，例如：

$$u_i(x,0) = \psi_i(x),\ u_{i,t}(t,0) = \chi_i(x),\ x \in \Omega.$$

这里会出现下面两种类型的困难：

1）由于出现传播速度各不相同的不同类型的波，取决于变形的绝对值，物体中各点的变形即使是对于简单的加载类型都具有不同程度的复杂性，这也适用于同一点在不同时刻的变形过程，并且不可能凭推理确定采用某种类型的动力学的 $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 关系.

2）必须采用考虑变形对于时间的依赖关系的动力学的 $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 关系.

即使对于一维的过程，即对于简单的变形过程，动力学的塑性力学泛函也没有得到充分的研究．对于在复杂的变形过程中、处于复合应力状态下的材料的动力学特征，只有很零星的知识，所有的数据甚至于不足以确定动力学塑性力学泛函的一些定性的特征．因此，塑性力学的动力学问题是用静力学的关系提出的，由此已经提供一些解法、已经阐明一些动力学所特有的力学特点，并已给出一些对实际问题的估计有用的解来．由于在结构和建筑中研究动力学过程的极端重要性，因此上面的方法作为在研究工作中的一个阶段，是无可厚非的.

研究在复杂应力状态下主动的非线性变形的传播发觉了只有在非线性问题中才是典型的各种模式的复合的不连续性．根据已有的结果可以推断，最复杂的过程出现于邻近间断面的区域，然而在运动的主要区域，就其应变轨迹的曲率以及随时间的变化而言，复杂性有限．因此，我们在求解复杂情况下塑性力学的动力学问题时，可以采用复合的方法，即在主要区域内应用一种特殊形式的关系，例如采用针对于中等曲率过程的关系；而在邻近间断面处使用多边形（双线性）轨迹的理论．在动力学理论中，找到卸载面，区分主动变形区和被动变形区，不是一件无足轻重的易事，具有特殊的意义.

已经对一维弹塑性波的传播问题作了极为详细的研究（[9]）．已经研究了受拉压作用的杆内的卸载波的传播问题（[9]）．也已经研究了杆内弹塑性纵波的传播和相互作用的问题，其中考虑了机械载荷与变形率之间的不同类型的关系．得到的解反过来已用于解释材料动力学性质研究的实验结果，包括基本结果和控制结果（[10]）.

状态方程理论中的数学问题．塑性力学的现象是太复杂了，不可能直接根据实验数据进行推广，来建立状态方程（$\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 关系）．因此，人们大多倾向于建立一个普适的理论，它在特殊的情况下确定适用于实验的理论．这样，人们就要从数学上研究什么是状态方程的容许形式，使之与力学的和热力学的定律不相矛盾．人们研究了 n 维空间中的曲线和曲面，将其与过程和极限构形的研究联系起来，为一些在一定程度上是理想化的材料类别表述了一些确定的原理，由此指明了独立的状态参数，并在相当普遍的形式下确定了 $\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ 关系的结构，从而可以研究塑性泛函的特征，阐明过程的类别，在普遍方程的框架下容许较简单的数学描述（[1]，[11]）．泛函表示理论的发展是很重要的．特殊情况下，可从分析在自然界比较容易重复的现象出发，用泛函表示理论的结果，确立具有复杂泛函结构的状态方程的物理上的可靠性.

参考文献

[1] Ильюшин, А. А., Пластичность. Основы общей математической теорий, М., 1963.

[2] Ильюшин, А. А., Ленский, В. С., Модель и алгоритм.《Прикладные проблемы прочности и пластичности》, 1975, 1, (Горький).

[3] Ильюшин, А. А., Пластичность, ч. 1—Упруго-пластические деформации, М.-Л., 1948.

[4] Биргер, И. А.,《Прикл. матем. и механ.》, 15 (1951), 6, 765 − 770.

[5] Москвитин, В. В., Пластичность при переменных нагружениях, М., 1965.

[6] Koiter, W. T., General theorems for elastic-plastic media, in I. N. Sneddon and R. Hill (eds), Progress in Solid Mechanics, Vol. 1, North-Holland & Interscience, 1960, pp. 167 − 224.

[7] Соколовский, В. В., Теория пластичности, 3

изд., М., 1969.

[8] Hill, R., The mathematical theory of plasticity, Oxford Univ. Press, 1950(中译本: R. 希尔, 塑性数学理论, 科学出版社, 1966).

[9] Рахматулин, Х. А., Демьянов, Ю. А., Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках, М., 1961.

[10] Васин, Р. А., Ленский, В. С., Ленский, Э. В., Динамические зависимости между напряжениями и деформациями, в кн.: Проблемы динамики упруго-пластических сред, М., 1975.

[11] Truesdell, C., A first course in rational continuum mechanics, Acad. Press, 1977.

[12] Lenskiĭ, V. S., Experimental corroboration of basic postulates of a general theory of elastic-plastic strains, in Problems of the Theory of Plasticity, Moscow, 1961, pp. 58 – 82(译自俄文).

[13] Lenskiĭ, V. S. and Lenskii, E. V., Trinomial relation in the general theory of plasticity, *Mekh. Tverd. Tela*, 4(1985), 111 – 115(译自俄文).

[14] Dao Zuy Bic, On the uniqueness theorem in the theory of plasticity based on the hypothesis of local determinability, *Mekh. Tverd. Tela*, 1(1982), 119 – 124(译自俄文).

В. С. Ленский 撰

【补注】 从上面的讨论很清楚，有两类塑性力学数学理论的表述方法：Hencky 形变理论(Hencky deformation theory)和 Prandtl-Reuse-Saint-Venant-von Mises 塑性流动理论(Prandtl-Reuse-Saint-Venant-von Mises plastic flow theory). 其本质的区别是：对于形变理论来说，塑性应变和应力之间有一个线性关系；而对于流动理论来说，这是(塑性)应变率和应力之间的(线性)关系(对于无穷小应变). 虽然我们可以证明，在某些加载条件下，例如在比例加载的条件下，这两种理论是等价的；但在普遍情况下两者是不同的，取决于加载历史. 一般认为流动理论更正确. 式(2)至式(6)加式(8)为形变理论；而式(10)，(13)和(14)为流动理论的表达式.

参考文献

[A1] Prager, W. and Hodge, P. G., Theory of perfectly plastic solids, Wiley, 1951.

[A2] Reckling, K. A., Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme, Springer, 1967.

[A3] Hoffman, O. and Sachs, G., Introduction to the theory of plasticity for engineers, McGraw-Hill, 1953.

[A4] Kachanov, L. M., Fundamentals of the theory of plasticity, North-Holland, 1971(译自俄文).

王克仁 译 诸德超 校

Plateau 问题[Plateau problem; Плато задача]

求具有给定边界 Γ 的极小曲面(minimal surface)的问题. 这个问题最早被 J. L. Lagrange(1760)公式化地表达，他对形如 $z=z(x,y)$ 的曲面类，把问题化为求极小曲面的 Euler-Lagrange 方程的解. J. Plateau(1849)的实验表明，极小曲面可由伸展在金属丝框架上的肥皂膜形状来得到([1])，而该问题就此被称为 Plateau 问题(Plateau problem).

在对 Plateau 问题的严格阐述中还需要某些与未知极小曲面及边界有关的附加的精细描述. 例如，必须确定：解是否应是正则极小曲面或它是否可在广义极小曲面中寻找；曲面是否必须为面积绝对极小的；曲面的共形或拓扑类型应是什么；应在何种意义下理解曲面的边界，等等. 这些描述决定解及其性质(存在性，唯一性，正则性等)，它们可能有本质上的差别.

在 19 世纪时期，对于某些特殊形状的 Γ，主要是各种多边形的边界线，Plateau 问题被解决(B. Riemann, H. A. Schwarz, K. Weierstrass). 1928 年圆盘型广义极小曲面的 Plateau 问题的解的存在性被证明了，它由 Weierstrass 公式来表示，并且边界由一条不打结的 Jordan 曲线围成(R. Garnier). 1931 年 Plateau 问题的一个解由下列叙述给出(T. Rado)：设 Γ 是 $\mathbf{R}^n$ 中($n\geqslant 2$)的一条 Jordan 曲线，则在 $\mathbf{R}^n$ 中存在一广义极小曲面，它在等温坐标(u,v)下由位置向量 $r=r(u,v)$ 所定义，r 在圆盘 $|w|\leqslant 1$ ($w=u+iv$)中是连续的，并且圆周 $|w|=1$ 被同胚映射到 Γ 上；这个广义极小曲面的面积在所有伸展于边界线 Γ 上的圆盘型连续曲面中是最小的，如果假定至少有一个面积为有限的这种曲面能被伸展在 Γ 上.

在 1931 年对单连通曲面的 Plateau 问题被解决(J. Douglas)之后，Douglas 系统地描述了所谓 Douglas 问题(Douglas problem)，即关于 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中具有给定拓扑型(即给定 Euler 示性数和定向性特征)和给定边界线 Γ 围成的极小曲面的存在性，其中 Γ 由 $k\geqslant 1$ 个 Jordan 曲线 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_k$ 的并集所组成. 在 1936 – 1940 年，这个问题的充分可解性条件被给出了，其中之一是把某张给定拓扑型的曲面伸展在 Γ 上的可能性，使得它的面积小于具有更小 Euler 示性数的伸展在同样边界线上的任何曲面的面积. 在那个系统描述中，Riemann 空间中的 Plateau 问题也被考虑和解决了.

60 年代初期，主要进展是在解 $k(\geqslant 3)$ 维曲面的 Plateau 问题方面. 基于对曲面、边界和面积等概念的新的定义，Plateau 问题的若干推广被提出来了. 推广之一是基于对 $\mathbf{R}^n$ 中曲面 X 及其边界 L 的下述定义. 假设存在紧集 $X\subset\mathbf{R}^n$，紧集 $A\subset X$；设 G 为 Abel 群，$k\geqslant 1$ 为整数. 于是，可定义 Александров-Čech 同调群 $H_{k-1}(A,G)$，$H_{k-1}(X,G)$，以及由嵌入 $i:A\rightarrow X$ 所诱导的同态 $i_*:H_{k-1}(A,G)$

$\to H_{k-1}(X,G)$ 的核. 它称为 X(在维数 k)关于 A 的代数边界. 若 L 是 $H_{k-1}(A,G)$ 的子群且 L 属于 X 的代数边界, 则 X 就是具有边界 $\supset L$ 的曲面. $\mathbf{R}^n$ 中紧集 X 的面积, 就可理解为它的 k 维 Hausdorff(球面)测度 $\mathscr{H}^k$. 在这种定义下, 对于在具有给定边界 L 的一切紧集 X 中按测度 $\mathscr{H}^k$ 成为最小的紧集 X_0, Plateau 问题的存在性和几乎处处正则性(拓扑的局部 Euclid 结构和解析性)均已被证明. 这些定理又被推广到Riemann空间中曲面 X 的场合.

其他提出的推广, 尤其是利用积分流的术语, 在某种意义下等价于用同调语言的描述.

在 1969 年的一个经典的系统论述(A. T. Фоменко)中, 高维 Plateau 问题(见多维 **Plateau 问题** (Plateau problem, multi-dimensional))被解决了, 证明了定理: 若在 Riemann 空间 V^n 中给定一 $(k-1)$ 维子流形 $\Gamma (k \geq 3)$, 则存在曲面, 它在所有参数化曲面 X 中按 Hausdoff 测度 $\mathscr{H}^k$ 成为极小, 这些 X 是 k 维带边界光滑流形 M 到 V^n 的连续 f 变换的象, 使得在映射 $f: M \to V^n$ 下, M 的边界同胚于 Γ.

与 Plateau 问题的可解性同样有趣的是解的唯一性和正则性. 正则性被研究得最多. 已经证明: $\mathbf{R}^3$ 中由 Douglas 给出的解不含有内部分支点. 对于高维 Plateau 问题的情况, 几乎处处正则性已被证明, 并且非正则点存在的可能性已由例子确认. 至于唯一性, 仅知道某些充分性准则(例如, 在中心射影或平行射影到某一平面上时, 若所给边界 Γ 具有单值的凸射影, 则解是唯一的). 为了强调这个问题的复杂性, 只能说有理由期望存在张成圆盘型极小曲面连续统的光滑 Jordan 边界线. Plateau 问题最近结果的概论, 见[14].

参考文献

[1] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 213, Teubner, 1903.

[2] Darboux, G., Lecons sur la theorie génerale des surfaces et ses applications géometriques du calcul infinitesimal, 1, Gauthier-Villars, 1887.

[3] Bianchi, L., Valesungen über Differentialgeometrie, Teubner, 1910(译自意大利文).

[4] Courant, R., Dirichlet's principle, conformal mapping, minimal surfaces, Interscience, 1950.

[5] Morrey, C., The problem of Plateau on a Riemannian manifold, *Ann. of Math.*, **49**(1948), 807 – 851.

[6] Rado, T., On the problem of Plateau, Chelsea, reprint, 1951.

[7] Nitsche, J. C. C., On new results in the theory of minimal surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71**(1965), 195 – 270.

[8] Osserman, R., A proof of the regularity everywhere of the classical solution of Plateau's problem, *Ann. of Math.* (2), **91**(1970), 550 – 569.

[9] Фоменко, А. Т., 《Изв АН СССР, Сер. мат-ем.》, 36(1972), 1049 – 1079.

[10] Nitsche, J. C. C., The boundary behaviour of minimal surfaces, Kellog's theorem and branch points on the boundary, *Invent. Math.*, **8**(1969), 4, 313 – 333.

[11] Osserman, R., A survey of minimal surfaces, v. Nostrand Reinhold, 1969.

[12] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

[13] Morrey, C., Multiple integrals in the calculus of variations, Springer, 1966.

[14] Fomenko, A. T. & Dao Chong Tkhi, Minimal surfaces and Plateau's problem, Amer. Math. Soc., Forthcoming(译自俄文).

И. Ж. Сабитов 撰

【补注】

1973 年 J. C. C. Nitsche 证明了下列唯一性定理: 一条全曲率不大于 4π 的正则解析曲线 $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ 恰好界定 Plateau 问题的一个解曲面. 上界 4π 是最佳的.

参考文献

[A1] Struwe, M., Plateau's problem and the calculus of variations, Princeton Univ. Press, 1988.

[A2] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975.

沈一兵 译

多维 Plateau 问题[Plateau problem, multi-dimensional; Плато многомерная задача]

表示与达到 k 维体积 vol_k 中泛函的极值与总体极小值有关的很多问题的一个术语, 其中 vol_k 由嵌入于 n 维 Riemann 空间 M^n 且满足一定边界条件的 k 维广义曲面界定.

在这个变分问题的历史中(见 **Plateau 问题**(Plateau problem)), 可以以关于"曲面""边界""极小化"等概念, 以及相应的得到极值解的方法的不同手段为特征, 区分为几个时期. 多维 Plateau 问题表述如下. 设 $A^{k-1} \subset M^n$ 是 Riemann 空间 M^n 中一个固定的闭光滑 $(k-1)$ 维子流形且设 $X(A)$ 是以 A 为边界的所有膜(曲面) $X \subset M^n$ 的类. 这里每一个膜 $X \in X(A)$ 可以有一个连续的参数化(它可表成具有边界的某流形的变换), 即 $f(W) = X$, 这里 W 是具有同胚于 A 的边界 ∂W 的某一 k 维流形, 而 $f: W \to M^n$ 是一个连续映象, 它在 ∂W 上与给定的同胚一致, 即 $f: \partial W \to A$. 问题是能否在类 $X(A)$ 中找到一个膜 X_0 使它在某种合理的意义下为极小, 即它的 k 维体积是小于同一类中其他膜 X 的体积. 把经典的"二维"方法转换到多维情况遇到了严重的困难. 例如多维 Plateau 问题的经典提法被搁置了一段时间, 而且使用了另外的(同调的)术语表述. 如果抛弃具有边界 $\partial W = A$ 的流形膜的概念且极大地推广膜及其边界的概念,

同时減弱这两者之间的联系(特别是如果考虑非参数化的膜),且如果抛弃条件 $X=f(W)$,则多维问题可用通常整数同调群 H_* 的语言来表述:求极小膜 X_0 使得它零化流形 A 的基本闭链 $[A]\in H_{k-1}(A)$(在 A 可定向的假设下),即 $i_*[A]=0$, $i_*: H_{k-1}(A)\to H_{k-1}(X)$,这里 i_* 是由嵌入 $i: A\to X$ 诱导的同态. 为了按这个新的和扩展了的提法解此多维问题,一个几何途径已经得到发展([1],[2]),其中对定义在 M^n 中 k 维可测紧集(曲面)上的每一个 k 维 Hausdorff 测度(体积)函数作极小化,而且一种关于以 M^n 中 k 维可求长子集为支集的积分流动形和可变褶皱的理论已有发展([3],[4]). 在这两个方向关于具有给定边界的极小曲面的存在性的基本定理已被证明(E. R. Reǐfenberg, C. B. Morrey, H. Federer, W. Fleming, F. J. Almgren, E. de Giorgi, R. Harvey, H. B. Lawson, J. Simons, E. Giusti 以及其他人). 这个问题大量文献的评介,见[1],[3],[4]. 特别是在 Reǐfenberg 的著名工作中多维 Plateau 问题已借助于谱同调论(Čech 同调论)而得到解决. 也已经证明:展布在"多维"周线上的极小曲面是几乎处处有相应光滑性类的流形,除了可能有一个测度为零的奇点集合之外. 关于借助于具有固定边界或无边界的极小流动形、极小可变褶皱的极小曲面存在性的著名定理已被 Federer, Fleming 和 Almgren([3],[4])证明了. 与前面的情形一样,极小曲面也被证明是流形,可能除了一个测度为零的集合外. 以后等价的 Plateau 问题被项武义(W. Y. Hsiang)和 Lawson([16])解决了. 更确切地说,在多维边界"周线上"有同样对称群的 Euclid 空间中极小曲面的存在性已经被证明. 把这定理转换到任意 Riemann 流形上是由 J. E. Brothers([17])完成的. Plateau 问题的复的说法是由 Harvey 和 Lawson([18])得到的. 特别,具给定边界的复极小膜的存在条件被发现了. 以后,多维 Plateau 问题的 Lagrange 变形也被 Harvey 和 Lawson([19])发现. 作为一个结果,在辛复线性空间 $\mathbf{C}^n$ 中对 Lagrange 子流形的极小性条件被得到了. 对极小曲面的深刻结果和存在定理被丘成栋(S. S.-T. Yau)([20])得到. 他揭示了复极小曲面存在性和 Kohn-Rossi 上同调之间的联系. 应用极小曲面理论关于三维流形理论的清晰结果由 W. H. Meeks 和丘成桐得到([21]). 注意,如果有了一个关于同调类 $X(A)$ 中极小解的存在性定理、在所有是具有边界的流形的连续变换的膜,即允许有参数化的膜的类中极小解的存在性,仍和以前一样无话可说. 事实就是如此:如果流形 A 在膜 X_0 中同调于零(作为一个链),则 X_0 不一定有形如 $X_0=f(W_0)$ 的表示,这里 W_0 是某个具有边界的 k 维流形.

在[5],[6]中多维 Plateau 问题的一种变形的一个解借助于谱下配边给出. 对任意紧空间,谱下配边群是用类似于定义谱(Čech)同调的 Čech 过程定义的. 这过程允许推广通常的多面体类和胞腔复形的下配边群到更广的紧统类(例如,在 Riemann 流形中). 谱下配边群的一个元素可表成一个由映射联系的流形序列. 对有限胞腔复形这个元素由一个流形(通常的下配边)表示. 例如,如果一个拓扑空间是一有限胞腔复形,则它的谱下配边群与通常的奇异下配边一致. 已发现了经典问题有个用**下配边**(bordism)语言的等价提法. 设 V 是一个紧有向($k-1$)维流形且设 $f: V\to M^n$ 是一连续映射,则偶对 (V,f) 称为 M^n 的**奇异下配边**(singular bordism). 两个下配边 (V_1,f_1) 和 (V_2,f_2) 称为**等价的**(equivalent),如果存在一个具有边界 $\partial W=V_1\cup(-V_2)$(这里 $-V_2$ 表示具有相反方向的 V_2)的 k 维有向流形 W 和一个连续映射 $F: W\to M^n$ 使得 $F|_{V_1}=f_1$, $F|_{V_2}=f_2$. 下配边 (V,f) 等价于零,如果 $V=\partial W=V_1$, $V_2=\varphi$. 奇异下配边的等价类构成一个 Abel 群,它在稳定后构成广义同调论之一(下配边理论). 多维 Plateau 问题(按这语言)表述如下:a)在所有具有以下性质的薄膜 $X\subset M$, $A\subset X$ 中:奇异下配边 (A,i) 在 X 中等价于零,其中 $i: A\to X$ 是嵌入,能否找到一个具有最小体积 $\mathrm{vol}_k X_0$ 的 X_0? b)在所有等价于给定下配边 (V',g') 的奇异下配边 (V,g)(这里 $g: V\to M^n$)中,能否找到一个下配边 (V_0,g_0) 使得薄膜 $g_0(X_0)\subset M^n$ 的体积最小?

经典多维 Plateau 问题与同调的变形有相当大的不同.

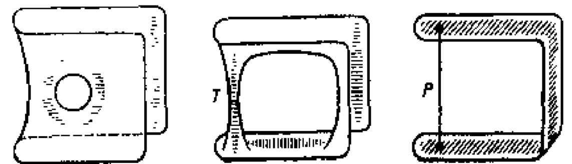


图 1

图 1 表示周线 $A=S^1$ 和在 $\mathbf{R}^3$ 中趋向于占有一个对应于极小面积位置的薄膜. 在某一瞬间,该薄膜连接起来且崩溃,且代替二维管 T 得到一个一维线段 P. 在二维情形,线段 P 可连续地映射到粘合于 A 的一个二维圆盘中. 在多维情形,出现于极小薄膜中的具有较低维数的带的效应展现到更大的程度,且同时所有这样的 P 部分,$\dim P\leqslant k-1$,在二维情形可以不失去 X_0 的参数化性质被映入这薄膜的 k 维(二维)部分,对 $k>2$ 这些较低维的带一般地不能消除(如果要求保持零化下配边 (A,i) 的 X_0 的拓扑性质). 由于同样的原因,较低维的带不能抛弃,由于薄膜 X 的 k 维部分 $X^{(k)}$ 不必有连续参数化,

因而一般地说，不必零化下配边 (A, i)．这表明必须引入薄膜 X 的分层体积，由所有的带 $X^{(i)}$ 的体积，即 $\mathrm{vol}_k X^{(k)}$, $\mathrm{vol}_{k-1} X^{(k-1)}$, … 组成．用谱下配边术语表示的多维 Plateau 问题的一种变形形式的解的一个定理如下([5], [6])：存在一个总体极小曲面使得分层体积为极小．

推论：对 Riemann 空间 M^n 中任一固定有向光滑闭 $(k-1)$ 维子流形 A (在 $X(A) \neq \emptyset$ 的情形)，存在一个零化谱下配边 (A, i) 的总体极小曲面 X_0．如果极小薄膜 X_0 是有限胞腔复形，它可表示成形式 $X_0 = f(W_0)$，其中 W_0 是某流形而 $f: W_0 \to M$ 是一映射，它是从 W_0 的边界 ∂W_0 到流形 A 上的同胚([5], [13])．而且，薄膜 X_0 按它的每一个 $\leqslant k$ 的维数是极小的；如果 $X^{(s)}$ 是 X 的具有维数 s 的部分，则 $X^{(s)}$ 包含一个 s 维体积为零的子集 $Z^{(s)}$，而其补 $X^{(s)} \setminus Z^{(s)}$ 是 M^n 中一个开的 s 维处处稠密的解析子流形．这里 $Z^{(s)}$ 是维数 s 中的奇异点的集合．

这结果是关于总体极小曲面存在性和几乎处处正则的一个一般定理的特殊情形，该定理对任何广义(上)同调论和任意边界条件的集合已经被证明([5], [6], [13])．而且，这样一个曲面在每一稳定同伦类中存在．以下是用上同调术语来表述和解决的一个变分问题的例子．设 ξ 是紧 Riemann 空间 M^n 上一个稳定非平凡向量丛；设 $X(\xi)$ 是使得 ξ 到 X 的限制 $\xi|_X$ 是稳定非平凡(即 X 是 ξ 的支集)的所有曲面 $X \subset M^n$ 的类．则存在一个总体极小曲面 $X_0 \in X(\xi)$ 在类 $X(\xi)$ 中有最小体积．该一般存在定理也可用积分流动形的语言来表述和证明，为此引入了具有不同维数的流动形组成的滤过流动形．用这方法多维 Plateau 问题的一个解在多维褶皱的同伦类中得到([14])．

在与多维 Plateau 问题有关问题的领域中，可以区分关于总体极小曲面的特殊的、解析的和拓扑的特征的研究．例如，有在 Riemann 空间中表示特殊曲面的流动形问题．例如，已知([3]) $\mathbf{C}^n$ 和 $\mathbf{C}P^n$ 中复代数子簇是总体极小曲面．结果之一有明显的复特征．在实子簇的情形，很长时间没有方法去发现特殊的总体极小曲面．此领域中的第一个结果[6]，与拓扑学相结合，是这样一种方法，使得能证明每一紧 Riemann 空间 M^n 可与一通用函数 $\Omega_x(k)$ 建立对应，这里 $x \in M^n$, k 是整数，$1 \leqslant k \leqslant n$．如果 X_0 是在 $H_k(M^n)$ 中实现非平凡(上)闭链的一个总体极小曲面，则对任意点 $x \in X_0$, $\mathrm{vol}_k X_0 \geqslant \Omega_x(k)$．如果 $M = G/H$ 是齐性空间，则 $\Omega_x(k) \equiv \Omega(k)$ 是与点 x 无关的．函数 $\Omega_x(k)$ 按显式计算且给出了 M^n 中所有 k 维(上)闭链的体积的一般下界．这个界在一般情况下不能被改进，即存在总体极小薄膜 X_0 的无穷序列使得 $\mathrm{vol}_k X_0 = \Omega(k)$．关于对称空间的一个结果([6], [13], [15])是使得 $\mathrm{vol}_k X_0 = \Omega(k)$ 的一切曲面的一个完全的描述．为得到特殊的总体极小曲面的进一步的更多的方法已经被设计出来([11], [12], [14], [15])．

在变分学、拓扑学、代数几何学和复分析的各种不同问题中发生了以下情况：a) 给定流形 M^n 和它的用 n 维区域 D_r 的穷举，D_r 随着 r 的增加而扩大；b) M^n 中有一个确定的总体极小曲面 X^k；c) 提出了这样的问题：$\mathrm{vol}_k(X^k \cap D_r)$ 作为 r 的函数以什么样的速度增长？例如，关于计算 $\Omega_k(x)$ 的问题，关于在整函数空间中构造基的问题，Stoll 型定理([11])等等可归结为这问题．已经发现([6], [15])对 $\mathrm{vol}_k(X^k \cap D_r)$ 的增长速度存在一个普遍的精确的可有效地计算的下界估计，由此，作为特殊情形得出了关于 $\mathrm{vol}_k X^k$ 的显式，这里 X^k 是一总体极小曲面．例如，包含在球 $B^n \subset \mathbf{R}^n$ 中且通过该球中心(且其边界在球的边界上)的这样的曲面的体积以通过 B^n 中心的标准 k 维球 B^k (一个平面截口)为最小([13], [15])．

一个特别的研究方向是余维数为一的多维 Plateau 问题：考虑 $\mathbf{R}^n$ 中余维数为 1 的总体极小曲面．例如 Бернштейн 问题 (Bernstein problem) (С. Н. Бернштейн) 已经解决([7])：设 V^{n-1} 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个光滑的完全的局部极小子流形，容许一一地投影到某一超平面上，即 V^{n-1} 是由定义在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上函数 f 的图象给出的；f 是线性函数是否为真？对 $3 \leqslant n \leqslant 8$ 答案是肯定的([8])．这样一些超曲面的极小性与 $\mathbf{R}^n$ 中锥的极小性紧密相关：局部极小曲面的存在性蕴涵极小锥 CM^{n-2} 的存在性，即存在由点 $O \in R^n$ 到点 $x \in M^{n-2}$ 引的半径上的点所组成的一个曲面，其中 M^{n-2} 是球面 S^{n-1} 中的局部极小曲面．已经建立了下述结果([8])：如果 M^{n-2} 是 S^{n-1} 中一个闭局部极小子流形(即零化 Euler 算子)且不是赤道 $S^{n-2} \subset S^{n-1}$，则当 $n \leqslant 7$ 时以 M^{n-2} 为底以该球面的中心为顶点的锥 CM^{n-2} 不使该 $(n-1)$ 维体积 vol_{n-1} 极小化(对 M^{n-2} 中一个固定的边界)，即存在变分(其支集集中于球心附近)使得可减小该锥的体积．由此推出当 $n < 9$ 时 f 是一线性函数．对 $n = 9$ 答案是否定的：存在作为非线性函数图象的局部和甚至整体极小曲面 $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ ([7])．其构造可明显地实现；然后发现 $\mathbf{R}^{2m}$ 中由方程

$$x_1^2 + \cdots + x_m^2 = x_{m+1}^2 + \cdots + x_{2m}^2 \qquad (*)$$

具体确定的锥是具有固定边界 $V = S^{m-1} \times S^{m-1}$ ($m \geqslant 4$) 的总体极小曲面．这些锥表示那些确是总体极小曲面的更一般形式的锥的一种特殊情况([10])．

有关于多维 Plateau 问题的一个新的研究路线，即研究同变多维 Plateau 问题 (equivariant multi-dimensional Plateau problems). 在总体极小曲面中，自然地区分出一类薄膜，它们在一定的对称群作用下变换到自身中 ([9], [10]). 设 G 是一紧连通 Lie 群，以等距方式光滑地作用在 M^n 上且把它分层成轨道 $G(x)$, $x \in M^n$. 那么为了求 M^n 中关于 G 不变的总体极小曲面 X^k, 只需转移到商空间 $P = M^n/G$ 且赋予 P 一个形如

$$dl_p = v^{1/p} d\bar{s}$$

的 Riemann 度量，这里 $v = \mathrm{vol}\, G(x)$ 且

$$p = \dim X^k - \dim G(x) = k - \dim G(x),$$

其中 $\dim G(x)$ 表示 M^n 中在一般位置的一个轨道的维数，而 $d\bar{s}$ 是在 G 的等距作用下在 P 中引起的自然投影度量. 为了求 M^n 中关于 G 不变的总体极小曲面，只要在赋予度量 dl_p 的 M^n/G 中描述这样的曲面就足够了 ([9])，所以

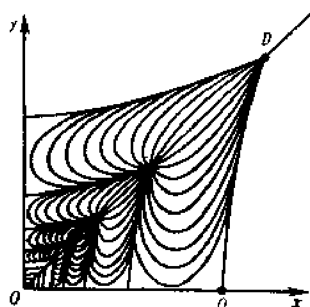


图 2

得到了将 M^n 中多维 Plateau 问题化到维数较低的 M^n/G 中同样问题的简化. 这方法提供了许多有大对称群的特殊的总体极小曲面 ([13]).

特别地，由 (*) 定义的 "Simons 锥" 在赋予度量

$$(xy)^{2(2m-2)}(dx^2 + dy^2)$$

且表示平面 $\mathbf{R}^2$ 中第一象限 K 的二维商空间

$$\mathbf{R}^{2m}/SO_m \times SO_m = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$

上是用线 OD 表示的 (图 2) ([10]). 为了求具有边界

$$S^{m-1} \times S^{m-1} = G(D),\ G = SO_m \times SO_m$$

的总体极小曲面，只需要求从 D 跑到 K 的边界且有极小长度的测地线. 图 2 表示从 D 出发的一束测地线; 这束线可理解为在充满 K 的具有折射指数 $(xy)^{2m-2}$ 的透明介质中从光源 D 传播的一束光线. 对 $m < 5/2 + \sqrt{2}$, 除了曲面 OD 外，进一步还存在一个有更小长度的极小解，它用测地线 OQ 表示，这表明 Simons 锥不是总体极小曲面. 当 m 增加时，点 Q 趋向于 O, 且对 $m > 5/2 + \sqrt{2}$, 存在唯一的测地线连接 D 到此象限的边界，即 Simons 锥是总体极小曲面 ([10]).

参考文献

[1] Morrey, C., Multiple integrals in the calculus of variations, Springer, 1966.

[2] Reifenberg, F., Solution of Plateau's problem for m-dimensional surfaces of varying topological type, *Acta Math.*, 104 (1960), 1/2, 1－92.

[3] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

[4] Almgren, F. J., Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure, *Ann. of Math.* (2), 87 (1968), 2, 321－391.

[5] Фоменко, А. Т., 《Матем. сб.》, 89 (1972), 3, 475－519.

[6] Фоменко, А. Т., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 36 (1972), 5, 1049－1079.

[7] Bombieri, E., Giorgi, E. de and Giusti, E., Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent. Math.*, 7 (1969), 3, 243－268.

[8] Simons, J., Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, 88 (1968), 1, 62－105.

[9] Lawson, H., The eqivalent Plateau problem and interior regularity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 173 (1972), 446, 231－249.

[10] Lawson, H. and Simons, J., On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry, *Ann. of Math.*, 98 (1973), 3, 427－450.

[11] Фоменко, А. Т., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 35 (1971), 3, 667－681.

[12] Дао Чонг Тхи, 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 44 (1980), 5, 1031－1065.

[13] Фоменко, А. Т., 《Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу…》, 17 (1974), 3－176.

[14] Дао Чонг Тхи, 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 42 (1978), 3, 500－505.

[15] Фоменко, А. Т., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 45 (1981), 1, 187－213.

[16] Hsiang, W. Y. and Lawson, H. B., Minimal submanifolds of low cohomogenety, *J. Diff. Geom.*, 5 (1971), 1, 1－38.

[17] Brothers, J. E., Invariance of solutions to invariant parametric variational problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262 (1980), 1, 159－180.

[18A] Harvey, R. and Lawson, H. B., On boundaries of complex analytic varieties I, *Ann. of Math.*,

102 (1975), 233 – 290.

[18B] Harvey, R. and Lawson, H. B., On boundaries of complex analytic varieties II, *Ann. of Math* 106 (1977), 213 – 238.

[19] Harvey, R. and Lawson, H. B. Calibrated geometries, *Acta Math*., 148 (1982), 47 – 157.

[20] Yau S. S.-T., Kohn-Rossi cohomology and its application to the complex Plateau problem, *Ann. of Math*., 113 (1981), 1, 67 – 110.

[21] Meeks, W. H. and Yau, S. S.-T., The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds. The embedding of the solution given by Dehn's lemma, *Topology*, 21 (1982), 4, 409 – 442.

[22] Fomenko, A. T., Plateau problem, 1 – 2, Gordon & Breach, 1990(译自俄文).

А. Т. Фоменко 撰

【补注】 关于 C^n 中极小曲面亦见[A4]、[A5].

参考文献

[A1] Fomenko, A. T., Variational principles in topology-Multidimensional minimal surface theory, Kluwer, 1990(译自俄文).

[A2] Giusti, E., Minimal surfaces and functions of bounded variation, Birkhauser, 1984.

[A3] Fomenko, A. T. and Dao Chong Tkhi, Minimal surfaces and Plateau's problem, Amer. Math. Soc., Forthcoming(译自俄文).

[A4] Stolzenberg, G., Volumes, limits and extensions of analytic varieties, Springer, 1966.

[A5] Chirka, E. M., Complex analytic sets, Kluwer, 1989, § 19(译自俄文).

葛显良 译 吴绍平 校

Plato 立体[Platonic solids; Платона тела]

下列五种**正多面体**(regular polyhedra)的统称: **正四面体**(tetrahedron)、**立方体**(cube)、**正八面体**(octahedron)、**正十二面体**(dodecahedron)和**正二十面体**(icosahedron). Plato 在《蒂迈》(Timei, 公元前 4 世纪)一书中赋予这种立体以神秘的意义, 故称之为 Plato 立体; 在 Plato 以前已为人所知.

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, MacMillan, 1963.

[A2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952(译自德文).

杜小杨 译

局中人[player; игрок]

对策中各自活动的有关当事人(见**对策论**(games, theory of)).

Plessner 定理[Plessner theorem; Плеснера теорема]

解析函数的边界性质(boundary properties of analytic functions)理论中的一个基本结果. 设 $f(z)$ 是单位圆盘 $D=\{z\in\mathbf{C}: |z|<1\}$ 内的亚纯函数, 令 $\Delta=\Delta(e^{i\theta})$ 是以圆周 $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}: |z|=1\}$ 上的 $e^{i\theta}$ 为顶点、由 D 的两条通过 $e^{i\theta}$ 的弦构成的开角. 点 $e^{i\theta}$ 称为 Plessner 点(Plessner point)或称 $e^{i\theta}$ 具有 Plessner 性质(Plessner property), 如果对扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的每个值 w, 在每个任意小角 Δ 内存在序列 $\{z_k\}\subset\Delta$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} z_k = e^{i\theta},\quad \lim_{k\to\infty} f(z_k)=w.$$

点 $e^{i\theta}$ 称为关于 $f(z)$ 的 Fatou 点(Fatou point), 如果当 z 在任一角 Δ 内趋于 $e^{i\theta}$ 时有唯一的单个极限

$$\lim f(z)=A.$$

Plessner 定理(Plessner theorem)断言([1]): Γ 上关于 Lebesgue 测度几乎所有的点都是 Fatou 点或 Plessner 点.

也已知道所有 Plessner 点的集合 $P(f)$ 在 Γ 上是 G_δ 型的. 已经构造出 D 中解析函数 f 的例子, 使得 $P(f)$ 在 Γ 上稠密且具有任意给定的 Lebesgue 测度 $\operatorname{mes}P(f)=m$, $0\leqslant m<2\pi$ ([3]). Plessner 定理适用于任一具有可求长边界 Γ 的单连通域 D 中的任何亚纯函数 $f(z)$. 此时 $\zeta\in\Gamma$ 称为 Fatou 点, 如果当 z 沿任一非切向路径趋于 ζ 时下述极限存在(亦见**聚值集**(cluster set)):

$$\lim f(z)=A,\ z\in D;$$

Plessner 点 $\zeta\in\Gamma$ 的定义必须作这样的改动, 即考虑以 ζ 为顶点、其边与 Γ 在 ζ 处的法线构成的角度小于 $\pi/2$ 的角域 Δ([2]).

Meier 定理(Meier theorem)是以集合的范畴表述的类似于 Plessner 定理的命题.

参考文献

[1] Plessner, A. I., Über das Verhalten analytischer Funktionen auf dem Rande des Definitionsbereiches, *J. Reine Angew. Math*., 158 (1928), 219 – 227.

[2] Привалов, И. И. Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950(中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[3] Ловатер, Дж., 载于 Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10. М., 1973, 99 – 259.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 形如 Δ 的角称为 Stolz 角(Stolz angle). [A3] 是一本好参考书, [3] 是其俄文续本.

对于 $\mathbf{C}^n$ 内的单位球, 有完全类似于 Plessner

定理的命题，见[A1]：单位球上的每个全纯函数把边界分解为如同经典情形的 3 个可测集.

参考文献

[A1] Rudin, W., Function theory in the unit ball of C', Springer, 1981.

[A2] Tsuji, M. (辻正次), Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A3] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

[A4] Noshiro, K. (能代清), Cluster sets, Springer, 1960

沈永欢 译

PL/Ⅰ语言[PL/Ⅰ; ПЛ/Ⅰ]

一种通用**算法语言**(algorithmic language). PL/Ⅰ语言是 Programming Language One 的缩写，在 1963 1964年由 IBM公司设计的. PL/Ⅰ语言不仅反映从以前的语言 **Algol 语言**(Algol), **Fortran 语言**(Fortran)和 **Cobol 语言**(Cobol)得到的经验，而且还有在设计 PL/Ⅰ语言时已经有的其他许多有关程序设计的概念. 这个语言也很受 IBM 计算机的体系结构和它们的操作系统的影响.

PL/Ⅰ语言设计成可按满足特定应用的需求而分离成不同子集. PL/Ⅰ语言程序由称为外部过程的独立编译模块组成，它有 Algol 型分程序结构，包括过程和分程序(过程可能递归，还可以有多重二级进入点).

PL/Ⅰ语言贡献于可应用性的主要特征是它能表示和操纵各种数据类型. 该语言包括算术数据(具有定点或浮点，二进或十进制的实数和复数)，字符串数据(字符和位)，形象数据(与 Cobol 语言中的形象类似)和程序控制数据(控制转移标号，入口，指针，文件，任务和事件).

PL/Ⅰ语言提供把数据组成聚集—数组和结构的可能性. 数组(array)是具有同样特性的元素的 n 维集合. 数组元素可以是标量或结构. 结构(structure)定义为每个有名元素有它自己的数据类型(标量，数组或结构)的层次体系上有序的集合.

求值表达式的规则使人们能产生任意值. 如果一个表达式中有不同数据类型，就自动转换到按具体内容要求的类型.

PL/Ⅰ语言的一个重要的特征是它的默认原理(default philosophy)，它使程序员不必指出数据的所有性质，语句的所有成分，内部函数的所有参数. 这种情况下就运用默认规则.

PL/Ⅰ语言有管理存储的扩展功能. 这就使得程序员自己可以决定变量什么时候分配在存储器里，要求的存储大小，数据元素存取速率，其他名字下已经分配的存储的重复使用，且所包含的值可能有不同的解释而无需重新分配存储. 存储可以静态分配(在程序运行前)或动态分配(在分程序入口或执行分配语句时). 对某个变量的存储分配可以组织为有相应存取规则的栈，或者可以用指针来访问.

和常规的用于赋值，转移，迭代执行，过程调用和条件语句一起，PL/Ⅰ语言还有用于并行执行同步过程，编译时执行一些操作，或在标准或程序员定义的条件产生时引起程序执行中断时执行某些动作(系统的或程序员定义的动作)的功能. PL/Ⅰ语言也对数据输入输出提供各种功能(按记录，按字符和通过编辑). PL/Ⅰ语言也包括各种标准函数，它大大简化程序设计.

1976年出版的 PL/Ⅰ语言标准，给出语言一个更形式和精确的规格说明，推广了类型的概念以及表达式和函数值的求值规则. 同时，语言标准不包括并行执行和编译时组织计算的功能.

参考文献

[1] The universal programming language *PL/Ⅰ*, IBM Library, 1966.

[2] Scott, R. and Sondac, N., *PL/Ⅰ for programmers*, Addison-Wesley, 1970.

[3] Программирование на ПЛ/1 ОС ЕС, М., 1979

[4] Бухтияров, А. М., Фролов, Г. Д., Олюнин, В. Ю., Сборник задач по программированию на языке ПЛ/1, М., 1978

[5] American National Standard Programming language *PL/Ⅰ*, X3 53 – 1976, ANSI, 1976.

Л. А. Корнева 撰 程虎 译 刘椿年 校

Plücker 坐标[Plücker coordinates; Плюккеровы координаты]

三维空间中一条直线的坐标，即六个数 p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31} 与 p_{12}，其中前三个是直线 L 的方向向量 l 的坐标，后三个是这个向量关于原点的矩. 设直线 L 分别通过具有射影坐标 $(x_0:\cdots:x_3)$ 与 $(y_0:\cdots:y_3)$ 的点 X 与 Y，则这条直线的 Plücker 坐标是数

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i.$$

Plücker 坐标用于线几何学中，是由 J. Plücker 在 1869 年首先考虑的. 有时，代替 Plücker 坐标而用 Klein 坐标(Klein coordinates)$(x_0:\cdots:x_5)$，它与 Plücker 坐标有如下联系:

$$p_{01} = x_0 + x_1,\ p_{02} = x_2 + x_3,\ p_{03} = x_4 + x_5,$$

$$p_{23} = x_0 - x_1,\ p_{31} = x_2 - x_3,\ p_{12} = x_4 - x_5.$$

更一般地，自然地考虑 Plücker 坐标作为 n 维向量空

间 V 的一个 p 维向量子空间的坐标，它们被理解为等于列为 $a_i(1\leqslant i\leqslant p)$ 的 $(n\times p)$ 矩阵 $A(a_1,\cdots,a_p)$ 的 $(p\times p)$ 子行列式的数的集合，其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant p)$ 是子空间 W 的基向量（在 V 的某个基下）的坐标列．如果 a_i^j 是一个列 a_i 的分量，$1\leqslant i\leqslant p$，那么 Plücker 坐标（或 Grassmann 坐标（Grassmann coordinates））是数

$$u^{i_1\cdots i_p}=\begin{vmatrix} a_1^{i_1} & \cdots & a_p^{i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{i_p} & \cdots & a_p^{i_p}\end{vmatrix}=p!a_1^{[i_1}\cdots a_p^{i_p]},\ 1\leqslant i_s\leqslant n.$$

Plücker 坐标关于所有的指标是反对称的．有效的 Plücker 坐标的个数是 $\binom{n}{p}$．

当 W 的基改变而 V 的基固定时，Plücker 坐标同时乘一个非零数．当 V 的基改变而 W 的基固定时，Plücker 坐标像一个 p 价反变张量的分量一样变换（见**多向量**（poly-vector））．两个子空间是重合的，当且仅当在 V 的同一基下计算它们的 Plücker 坐标仅相差一个非零因子．

一个向量 x 属于子空间 W，如果系数是 W 的 Plücker 坐标的线性方程

$$\sum_{\alpha=1}^{p+1}(-1)^{\alpha-1}x^{i_\alpha}u^{i_1\cdots i_{\alpha-1}i_{\alpha+1}\cdots i_p}=0$$

成立．在这些方程里 $i_1<\cdots<i_p$ 是数 $1,\cdots,n$ 的所有可能的子集．

Л. П. Купцов 撰

【补注】 涉及如上的 Plücker 与 Klein 坐标，Plücker 恒等式

$$p_{01}p_{23}+p_{02}p_{31}+p_{03}p_{12}=0$$

成为

$$x_0^2+x_2^2+x_4^2-x_1^2+x_3^2+x_5^2.$$

（任何域上）n 维空间 V 的 p 维子空间 W 的 Plücker 坐标定义 Grassmann 簇 $G_p(V)$ 到 N 维射影空间 $P^N(N=\binom{n}{p}-1)$ 中的一个嵌入．作为 P^N 的一个子簇，$G_p(V)$ 由如下二次关系 —— Plücker 关系给出．

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k u^{i_1\cdots i_{p-1}j_k}u^{j_1\cdots\hat{j}_k\cdots j_{p+1}}=0,$$

即取 $2p$ 个指标 $1\leqslant i_1,\cdots,i_{p-1};j_1,\cdots,j_{p+1}\leqslant n$ 并且写出如上关系，$u^{k_1\cdots k_p}=0$，如果 k 中有两个相等．如果 $p=2$，$n=4$，则恰有一个关系：$u^{12}u^{34}-u^{13}u^{24}+u^{14}u^{23}=0$．

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965, 88 – 90.

[A2] Waerden, B. L. van der, Einführung in die algebraische Geometrie, Springer, 1939, Chapt. 1.

林向岩 译

Plücker 公式［**Plücker formulas; Плюккера формулы**］

把**代数簇**（algebraic variety）的内在示性数与对应于射影嵌入的外部示性数相联系的公式．代数几何中最古老且最著名的数值公式就是平面约化不可约曲线 $Z\subset \mathbf{C}P^2$ 的 Plücker 公式，这里的 Z 只有寻常二重奇点与尖点．设 d 是曲线 Z 的次数（degree of the curve），即 $\mathbf{C}P^2$ 中处于**一般位置**（general position）的直线与 Z 的交点个数，设 d^* 是 Z 的类（class），即通过 $\mathbf{C}P^2$ 内一个处于一般位置的定点且与 Z 相切于非奇异点的直线的条数．两个基本的 Plücker 公式是

$$d^*=d(d-1)-2\delta-3k, \qquad (1)$$

$$d^*=2d+(2g-2)-k, \qquad (2)$$

这里 g 是 Z 的非奇异分解（见**奇点的分解**（resolution of singularities））X 的亏格，δ 是寻常二重点的个数，k 是尖点个数．当 Z 是非奇异曲线时公式（1）简化成 $d^*=d(d-1)$ 的形式．

其他的经典 Plücker 公式可从（1）和（2）通过对偶导出．如果 Z 不是直线，则与 Z 对偶的曲线 Z^* 被定义为对偶平面 $\mathbf{C}P^{2*}$ 内对应于 Z 的切线的点集的闭包．J. Plücker 的一个定理（[3]）断言双重对偶曲线 Z^{**} 与 Z 重合．如果假设 Z^* 只有 δ^* 个寻常二重点以及 k^* 个尖点，则可得以下公式：

$$d=d^*(d^*-1)-2\delta^*-4k^*, \qquad (1^*)$$

$$d=2d^*+2(2g-2)-2k^*, \qquad (2^*)$$

数 δ^* 可被解释为 Z 的双切线（bitangent）数，即恰在两个不同的非奇异点处与 Z 相切且接触的阶等于 2 的直线的条数；h^* 是拐点数．

这四个公式（1），（2），（1*）和（2*）并不独立：第四个可从其余三个推导出．不过其中的任何三个都是独立的．它们也蕴含下列公式：

$$k^*=3d(d-2)-6\delta-8k, \qquad (3)$$

$$k=3d^*(d^*-2)-6\delta^*-8k^*. \qquad (3^*)$$

这些公式以及（1）和（1*）是 Plücker 在 1834 – 1839 年间导出的．

在有限特征基域的情形 Plücker 公式以及对偶定理并非始终正确．例如在特征数为 2 的情形圆锥曲线的所有切线都通过一个点，称为圆锥曲线上的奇怪点，所以对偶曲线是一条直线．在特征数为 3 的情形下存在只有三个拐点甚至只有一个拐点的非奇异三次曲线（根据 Plücker 公式应该有九个拐点）．在对 d^*

作正确解释后，对于所有 $\neq 2$ 的特征数（1）和（2）仍然正确．在特征数等于 2 时它们必须用以下公式取代：

$$d^{*} = d(d-1) - 2\delta - 4k, \qquad (1^{**})$$

$$d^{*} = 2d + (2g-2) - 2k. \qquad (2^{**})$$

Plücker 公式已被推广到具有任意奇点的 P^n 内的曲线（[2]）以及到 P^n 内超曲面的情形．

参考文献

[1] Berzolari, L., Algebraische Transformationen und Korrespondenzen, in Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. 3, Teubner, 1906. 1787 – 2218.

[2] Griffiths, P. A. and Harris, J. E., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[3] Kleiman, S. L., The enumerative theory of singularities, in Real complex singularities, Proc. Nordic Summer School Oslo 5 – 25 Aug. 1976. Sythoff & Noordhoff, 1977, 297 – 396. В. В. Шокуров 撰

【补注】 关于曲线的类、次数、对偶等概念亦见平面实代数曲线（plane real algebraic curve）．

陈志杰 译

Plücker 解释 [Plücker interpretation；Плюккера интерпретация]

在双曲空间 ${}^3S_5$ 中实现三维射影空间 P_3 的几何学的一个模型．Plücker 解释是建立在直线的 **Plücker 坐标**（Plücker coordinates）的一个特殊解释的基础上的，这种坐标对于 P_3 中的任意直线定义．

在 P_3 的射影变换下 Plücker 坐标线性地变换；P_3 中直线的 Plücker 坐标给出 P_3 的直线与射影空间 P_5 中的点之间的一个一一对应；P_5 中点的坐标在数值上等于 P_3 中的 Plücker 坐标．

P_3 中的直线用 P_5 的一个指数 3 的非奇异二次曲面的点表示．

如果以这个二次曲面作为绝对形并且在 P_5 定义一个射影（非 Euclid）度量，可得到五维双曲空间 ${}^3S_5$．在 P_3 的每个**直射变换**（collineation）与**对射变换**（correlation）下，Plücker 坐标线性地变换，即每个直射变换与对射变换用 P_5 的一个将绝对形映到自身中的直射变换表示．这些直射变换是 ${}^3S_5$ 的位移．${}^3S_5$ 的位移表示 P_3 中的直射变换或对射变换．

P_3 中的每个线丛对应于 ${}^3S_5$ 中的一点．P_3 的射影几何学能够理解为 ${}^3S_5$ 中的一种非 Euclid 几何学．这个在 ${}^3S_5$ 中的 P_3 的几何学的解释与 Plücker 坐标的作用相联系，称为 Plücker 解释（Plücker interpretation）．

如果以直线作为 P_3 中的基本对象，这个空间的几何学能够考虑为 ${}^3S_5$ 的绝对形上的几何学．

P_3 的射影变换群同构于 ${}^3S_5$ 的位移群，并且 P_3 的任意对合射影变换对应于 ${}^3S_5$ 中的一个对合位移．例如，P_3 中的一个零系对应于 ${}^3S_5$ 中关于一点的反射与它的极超平面；P_3 中的一个对合透射对应于 ${}^3S_5$ 中的一个关于一条半直线的双曲挠平行位移，等等．P_3 的射影变换群的每个连通分支对应于 ${}^3S_5$ 的位移群的一个连通分支．

1）P_3 的一个具有正行列式的直射变换，包括恒等变换，对应于 ${}^3S_5$ 中一个具有行列式 +1 的位移（其中包括了恒等变换）．

2）P_3 的每个具有正行列式的对射变换（包括零系）对应于 ${}^3S_5$ 中一个具有行列式 −1 的位移；这个位移分别将常态域与理想域变换到它们自身中（包括关于一点的反射）．

3）P_3 的任何有负行列式的直射变换对应于 ${}^3S_5$ 中一个具有行列式 +1 的位移；这个位移将常态域变换为理想域，同时将理想域变换为常态域，并且这个分支包含一个关于一条半直线的双曲位移．

4）P_3 中任何有负行列式的对射变换对应于 ${}^3S_5$ 中一个具有行列式 −1 的位移；这个位移将常态域变换为理想域，同时将理想域变换为常态域．

在对称下 P_3 与 ${}^3S_5$ 中互相对应的象导出数值不变量之间的对应，它们之间有某些关系．

Plücker 解释用来研究三维非 Euclid 空间 S_3，${}^1S_3$ 与 ${}^2S_3$ 的位移群，这些群同构于 ${}^3S_5$ 的位移群的某些子群．在这些（椭圆的和双曲的）三维空间的运动群与低维空间的位移群之间也有一个关系（见 **Fubini 模型**（Fubini model）；**Котельников 解释**（Kotel'nikov interpretation））．Plücker 解释也用来研究三维辛空间 SP_3 在 ${}^3S_5$ 中的解释．

Plücker 解释是 J. Plücker 提出的（[1]）．

参考文献

[1] Plücker, J., Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Teubner, 1868.

[2] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

[3] Klein, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 1926. Л. А. Сидоров 撰

【补注】 P_5 中的二次曲面，它的点表示 P_3 中的直线，常被称为 Plücker 二次曲面（Plücker quadric）．

参考文献

[A1] Hirschfeld, J. W. P., Finite projective spaces of three dimensions, Oxford Univ. Press, 1985.

[A2] Waerden, B. L. van der, Einführung in die algebraische Geometrie, Springer, 1939.

[A3] Sommerville, D. M. Y., Analytical geometry of three dimensions, Cambridge Univ. Press, 1934.

林向岩 译

多重调和函数[pluriharmonic function; плюригармоническая функция]

复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 中区域 D 上 n 个复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的函数 $u=u(z)$，在 D 有关于坐标 x_ν、y_ν，$z_\nu=x_\nu+iy_\nu(\nu=1,\cdots,n)$ 的直到二阶的连续导数并在 D 满足下列 n^2 个方程组:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial x_\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu\partial y_\nu}=0,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial y_\nu}-\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu\partial x_\nu}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$\mu,\nu=1,\cdots,n.$$

用形式导数

$$\frac{\partial u}{\partial z_\nu}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_\nu}-i\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z_\nu}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_\nu}+i\frac{\partial u}{\partial y_\nu}\right]$$

将(1)写成更紧凑的形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar z_\mu\partial z_\nu}=0,\ \mu,\nu=1,\cdots,n.\qquad(2)$$

多重调和函数的重要性是由这样的事实决定的，D 上任一全纯函数 $f=u+iv$ 的实部和虚部 $u=\mathrm{Re}f$ 和 $v=\mathrm{Im}f$ 都是 D 的多重调和函数；两个这样的实值多重调和函数称为共轭的(conjugate)．反之，如果在一点 $z^0=x^0+iy^0\in\mathbf{C}^n$ 的一个单连通邻域 V 中给定一多重调和函数，那么在 V 中存在一全纯函数 $f=u+iv$，它的实部等于 u．决定这个全纯函数等于由公式

$$v(z)=\int_{z^0}^{z}\sum_{\nu=1}^{n}\left[-\frac{\partial u}{\partial y_\nu}dx_\nu+\frac{\partial u}{\partial x_\nu}dy_\nu\right]+C,$$

$$z\in V,$$

找共轭多重调和函数 v，由(1)这个积分与路线无关．

一般也可以考虑由(1)或(2)的解定义的复值多重调和函数．当 $n>1$ 时，多重调和函数是更广的**多重调和函数**(multiharmonic function)类的一真子类，它又是调和函数类的一真子类(见**调和函数**(harmonic function))；当 $n=1$ 时三类重合．另一方面，当 $n\geqslant 1$ 时，实值多重调和函数构成**多重下调和函数**(plurisubharmonic function))类的一真子类(当 $n>1$ 时，它又是**下调和函数**(subharmonic function))类的一真子类．当 $n>1$ 时，多重调和函数不仅有调和函数的一般性质，而且有一特征性质，因为这时(1)或(2)是一超定系统．例如，假定在单位多圆盘

$$U^n=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_\nu|<1,\nu=1,\cdots,n\}$$

中的多重调和函数 $u(z)$ 在闭多圆盘 $\bar U^n(n>1)$ 中是连续的，那么甚至它在骨架 $T^n=\{\zeta\in\mathbf{C}^n:|\zeta_\nu|=1,\nu=1,\cdots,n\}$(它是全部边界 ∂U^n 的一部分)上的边界值不能随意给定为一连续函数 $U^*(\zeta)$，$\zeta\in T^n$；它们必须满足某些附加条件．所以，在多重调和函数类中在骨架上给定数值的 Dirichlet 问题只当边界值是特殊选定的才可解([3])．

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

[2] Соломенцев, Е. Д., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964, 83–100.

[3] Rudin, W., Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 对取值 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球的多重调和函数的 Dirichlet 问题，当然也仅对特殊数值是可解的．边界值必须满足某组三阶(!)的偏微分方程．参照切向 Cauchy-Riemann 方程(tangential Cauchy-Riemann equations)，见[A1]，第 18 章．

在多复变数的情形多重调和函数常代替调和函数．一个例子是在单位圆盘 Δ 上经典 Hardy 空间(见 **Hardy 类**(Hardy classes))的模拟．Δ 上 Lumer 的 Hardy 空间(Lumer Hardy space) LH^p 由在 Δ 上对某些多重调和函数 U 使得 $|f|\leqslant U$ 的全纯函数 f 构成．

参考文献

[A1] Rudin, W., Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980.

钟同德 译

多重下调和函数[plurisubharmonic function; плюрисубгармоническая функция]，亦称多重次调和函数

在复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 的区域 D 里关于 n 个复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 的一个实值函数 $u=u(z)$，$-\infty\leqslant u<+\infty$，它满足下述条件：1) $u(z)$ 在 D 里处处上半连续(见**半连续函数**(semi-continuous function))；2) 对任意固定的点 $z^0\in D$，$a\in\mathbf{C}^n$，在开集 $\{\lambda\in\mathbf{C}: z^0+\lambda a\in D\}$ 的每一个连通分支里，$u(z^0+\lambda a)$ 是变量 $\lambda\in\mathbf{C}$ 的**下调和函数**(subharmonic function)．一个函数 $v(z)$ 称为多重上调和函数(plurisuperharmonic function)，若 $-v(z)$ 是多重下调和函数．当 $n>1$ 时，多重下调和函数类是下调和函数类的一个真子类；而当 $n=1$ 时，这两类一致．多重下调和函数的最重要例子是 $\ln|f(z)|$，$\ln^+|f(z)|$，$|f(z)|^p$，$p\geqslant 0$，其中 $f(z)$ 是 D 里的一个**全纯函数**(holomorphic function)．

一个上半连续函数 $u(z)$、$u(z)<+\infty$，在区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 为多重下调和的必要和充分条件是，对于每个取定的点 $z\in D$，$a\in\mathbf{C}^n$，且 $|a|=1$，存在一个数 $\delta=\delta(z,a)>0$，使得当 $0<r<\delta$ 时，下列不等式成立：

$$u(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{i\varphi}a)d\varphi.$$

对于 $C^2(D)$ 类的函数 $u(z)$，下述判别准则更方便：$u(z)$ 是 D 里的一个多重下调和函数，当且仅当 **Hermite 型**（Hermitian form）(u 的 Hesse 式（见 **Hesse 式**（函数的）（Hessian of a function)))

$$H((z;u)a,\overline{a})=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}a_j\overline{a}_k$$

在每一点 $z\in D$ 是半正定的．

除具有下调和函数的一般性质外，多重下调和函数还有如下性质：a) $u(z)$ 在区域 D 里为多重下调和的，当且仅当在每一点 $z\in D$ 的一个邻域里，$u(z)$ 是多重下调和函数；b) 多重下调和函数的具有正系数的线性组合也是多重下调和的；c) 一致收敛或单调减少的多重下调和函数列的极限是多重下调和的；d) $u(z)$ 在区域 D 里为多重下调和函数，当且仅当 $u(z)$ 能表示成单调减少的多重下调和函数列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限，其中每个 u_k 分别是 $C^{\infty}(D_k)$ 类，D_k 是区域，满足 $D_k\subset\overline{D}_k\subset D_{k+1}$ 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty}D_k=D$；e) 对任意点 $z^0\in D$，若球 $V(z^0,R)=\{z\in\mathbf{C}^n:|z-z^0|<R\}$ 位于 D 中，那么在半径为 r 的球面上的平均值

$$J(z^0,r;u)=\frac{1}{\sigma_{2n}}\int_{|a|=1}u(z^0+ra)da,$$

(其中 $\sigma_{2n}=2\pi^n/(n-1)!$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 中单位球面的面积）在闭区间 $0\leqslant r\leqslant R$ 上是 r 的增函数，关于 $\ln r$ 是凸的，且 $u(z^0)\leqslant J(z^0,r;u)$；f) 多重下调和函数经全纯映射后仍是多重下调和的；g) 设 $u(z)$ 是区域 D 里的一个连续的多重下调和函数，E 为 D 的一个闭的、连通的解析子集（见**解析集**（analytic set)），若在 E 上的限制 $u|_E$ 取到最大值，则在 E 上 $u(z)=$ 常数．

下述多重下调和函数类的真子类在应用中也很重要．函数 $u(z)$ 称为*严格多重下调和的*（strictly plurisubharmonic），若存在一个凸的增加函数 $\varphi(t)$，$-\infty<t<+\infty$，

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=+\infty,$$

使得 $\varphi^{-1}(u(z))$ 是一个多重下调和函数．特别当 $\varphi(t)=e^t$ 时，所得到的是*对数多重下调和函数*（logarithmically-plurisubharmonic functions)．

多重下调和函数类和上述子类在描述复空间 $\mathbf{C}^n$ 以及更一般的解析函数空间里的全纯函数与区域的各种特征时是重要的．见[1]－[4]，[7]．例如，Hartogs 类函数（Hartogs functions）类 $H(D)$，其定义是，包含所有函数 $\ln|f(z)|$（其中 $f(z)$ 是 D 里的全纯函数），且对下述运算封闭的，D 里的实值函数的最小类：

α) $u_1,u_2\in H(D)$，$\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$ 蕴涵 $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2\in H(D)$；

β) 若 $u_k\in H(D)$，$u_k\leqslant M(D_1)$ 对每个区域 $D_1\subset\overline{D}_1\subset D$ ($k=1,2,\cdots$)成立，则 $\sup\{u_k(z):k=1,2,\cdots\}\in H(D)$；

γ) $u_k\in H(D)$，$u_k\geqslant u_{k+1}$，$k=1,2,\cdots$，蕴涵 $\lim_{k\to\infty}u_k(z)\in H(D)$；

δ) $u\in H(D)$，$z\in D$，蕴涵 $\lim_{z_1\to z}\sup u(z_1)\in H(D)$；

ε) 若对每个子区域 $D_1\subset\overline{D}_1\subset D$ 有 $u\in H(D_1)$，则 $u\in H(D)$．

上半连续的 Hartogs 函数是多重下调和的，但不是每个多重下调和函数都是 Hartogs 函数．如果 D 是一个**全纯域**（domain of holomorphy)，则 D 里的上半连续的 Hartogs 函数类与多重下调和函数类一致（[5]，[6]）．

亦见多重调和函数（pluriharmonic function)．

参考文献

[1] Владимиров，В．С．，Методы теории функций многих комплексных переменных，М．，1964（英译本：Vladimirov，V．S．，Methods of the theory of many complex variables，M．I．T，1966）．

[2] Gunning，R．C．and Rossi，H．，Analytic functions of sevaral complex variables，Prentice-Hall，1965．

[3] Lelong，P．，Fonctions plurisousharmonique；mesures de Radon associées．Applications aux fonctions analytiques，in Colloque sur les fonctions de plusieurs variables，Brussels 1953，G．Thone & Masson，1953，21－40．

[4] Bremermann，H．J．，Complex convexity，*Trans．Amer．Math Soc．*，82(1956)，17－51．

[5] Bremermann，H．J．，On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions，*Math．Ann．*，131(1956)，76－86

[6] Bremermann，H．J．，Note on plurisubharmonic and Hartogs functions，*Proc．Amer．Math．Soc．*，7(1956)，771－775．

[7] Соломенцев，Е．Д．，в кн．：Итоги науки．Математический анализ．Теория вероятностей．Регулирование．，1962，М．，1964，83－100．

Е．Д．Соломенцев 撰

【补注】一个函数 $u\in C^2(D)$ 是严格多重下调和的，当且仅当复 Hesse 式 $H((z;u)a,\overline{a})$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上一个正定 Hermite 型．

关于任意多重下调和函数 u 的 Hesse 式也有一种

解释．对于每一点 $a\in\mathbf{C}^n$，$H((z;u)a,\overline{a})$ 可以看成是一个分布（见**广义函数**（generalized function）），它是正的，因而可表示成测度．这完全类似于 Laplace 算子作用于下调和函数的解释．

然而在这个框架中通常采用流动形（currents），见［A2］．设 $C_0^\infty(p,q)(D)$ 表示 D 上具有紧支集，对 $\{dz_1,\cdots,dz_n\}$ 为 p 阶而对 $\{d\overline{z}_1,\cdots d\overline{z}_n\}$ 为 q 阶的微分形式 $\varphi=\sum_{|I|=p,|J|=q}\varphi_{I,J}dz_I\wedge d\overline{z}_J$ 的空间（见**微分形式**（differential form））．外微分算子 ∂、$\overline{\partial}$ 和 d 定义为

$$\partial\varphi=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}\frac{\partial\varphi_{I,J}}{\partial z_k}dz_K\wedge d\overline{z}_J\in C_0^\infty(p+1,q),$$

$$\overline{\partial}\varphi=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}\frac{\partial\varphi_{I,J}}{\partial\overline{z}_k}d\overline{z}_k\wedge d\overline{z}_J\in C_0^\infty(p,q+1),$$

$$d\varphi=\partial\varphi+\overline{\partial}\varphi.$$

d 的核中的形式称为闭的（closed），d 的象中的形式称为恰当的（exact）．当 $dd=0$ 时，恰当形式的集合包含于闭的形式的集合之中．一个 (p,p) 型形式称为 p 阶正的（positive of degree p），如果对于 $(1,0)$ 型 $a_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}dz_j$，$a_{ij}\in\mathbf{C}$ 的每一组 $a_1,\cdots,a_{n-p}$，有 (n,n) 型 $\varphi\wedge ia_1\wedge\overline{a}_1\wedge\cdots\wedge ia_{n-p}\wedge a_{n-p}=gdV$，其中 $g\geqslant 0$，而 dV 是 Euclid 体积元素．

令 $p'=n-p$，$q'=n-q$．D 上一个 (p',q') 型流动形是 $C_0^\infty(p,q)(D)$ 上具有如下性质的一个线性形式 t：对于每一个紧集 $K\subset D$，存在常数 C，k 使得当 $z\in K$ 且 $|\alpha|\leqslant k$ 时，$|<t,\varphi>|<C\sup_{I,J,\alpha,z}|D^\alpha\varphi_{IJ}(z)|$，这里 $D^\alpha=\partial^{|\alpha|}/(\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial\overline{z}_n^{\alpha_{2n}})$．利用对偶性，算子 $d,\partial,\overline{\partial}$ 得到了延拓．例如，若 t 为 (p',q') 型流动型，则 $<dt,\varphi>=(-1)^{p'+q'}<t,d\varphi>$．可像微分流形一样定义闭的与恰当的流动形．一个 (p',p') 型流动形称为正的（positive），如果对于如上述 $(1-0)$ 型的每一组 $a_1,\cdots,a_p$ 及对每个 $\varphi\in C_0^\infty(D)$，有

$$<t,\varphi ia_1\wedge\overline{a}_1\cdots\wedge ia_p\wedge\overline{a}_p>\geqslant 0.$$

一个 $<p',q'>$ 型 ψ 通过积分 $<t_\psi,\varphi>=\int_D\varphi\wedge\psi$ 生成一个 $<p',q'>$ 流动形 t_ψ．一个 p 维的**复流形**（complex manifold）$M\subset D$ 生成 D 上的一个正的闭 (p',p') 型流动形 $[M]$，即沿 M 积分的流动形（current of integration）：

$$<[M],\varphi>=\int_M\varphi.$$

对 D 里的解析簇 Y 也可定义积分流动形（见**解析流形**（analytic manifold））：对 $D\setminus\{Y$ 的奇异点$\}$ 上的，Y 的正则点集，定义积分流动形并且证明了它可以扩充成 D 上的一个正的闭流动形．一个多重下调和函数 h 属于 L_{loc}^1，因此恒等于一个 $(0,0)$ 型流动形．从而 $i\partial\overline{\partial}h$ 是一个 $(1,1)$ 流动形，它是正的且闭的．反之，一个正的闭流动形局部地具有形式 $i\partial\overline{\partial}h$．在 $Y=\{z:f(z)=0\}$ 的不可约簇上的积分流动形等于 $(i/\pi)\partial\overline{\partial}\log|f|$，其中 f 是全纯函数且其梯度在 Y 上不恒等于 0．亦见**解析函数的残数**（residue of an analytic function）及**残留形式**（residue form）．

参考文献

［A1］Gamelin, T. W., Uniform algebras and Jensen measures, Cambridge Univ., Press, 1979, Chapts 5, 6.

［A2］Lelong, P. and Gruman, L., Entire functions of several complex variables, Springer, 1980.

［A3］Ronkin, L. I., Introduction to the theory of entire functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1974（译自俄文）．

［A4］Range, R. M., Holomorphic functions and integral representation in several complex variables, Springer, 1986.

［A5］Chirka, E. M., Complex analytic sets, Kluwer, 1989, p. 292 ff（译自俄文）．

高琪仁　吴炯圻 译

多重上调和函数［plurisuperharmonic function；плюрисупергармоническая функция］

见**多重下调和函数**（plurisubharmonic function）．

Pochhammer 方程［Pochhammer equation；Похгаммера уравнение］

一个 n 阶线性常微分方程，形式为

$$Q(z)w^{(n)}-\mu Q'(z)w^{(n-1)}+\cdots+$$

$$+(-1)^n\frac{\mu\cdots(\mu+n-1)}{n!}Q^{(n)}(z)w+$$

$$-\left[R(z)w^{(n-1)}-(\mu+1)R'(z)w^{(n-2)}+\cdots+\right.$$

$$\left.(-1)^{(n-1)}\frac{(\mu+1)\cdots(\mu+n-1)}{(n-1)!}R^{(n-1)}(z)w\right]=0,$$

其中 μ 是一个复常数，$Q(z)$，$R(z)$ 是次数分别 $\leqslant n$ 和 $\leqslant n-1$ 的多项式．Pochhammer 方程最初为 L. Pochhammer（［17］）和 C. Jordan（［2］）所研究．

Pochhammer 方程可用 **Euler 变换**（Euler transformation）来积分，其特解具有形式

$$w(z)=\int_\gamma(t-z)^{\mu+n-1}u(t)dt,$$

$$u(t)=\frac{1}{Q(t)}\exp\left[\int^t\frac{R(\tau)}{Q(\tau)}d\tau\right],\qquad(*)$$

其中 γ 是复 t 平面上的某一围道．设多项式 $Q(z)$

的所有根 a_1、…、a_m 都是单根，而 $R(z)/Q(z)$ 在这些点上的残数都不是整数．设 a 是一个固定点，使得 $Q(a)\neq 0$，而 γ_j 是始点和终点均在点 a 的、正定向的简单闭曲线，其中只包含根 a_j、$j=1$、…、m．公式（*）给出 Pochhammer 方程的解．如果

$$\gamma=\gamma_j\gamma_k\gamma_j^{-1}\gamma_k^{-1},\ j\neq k,\ j,\ k=1,\ \cdots,\ m;$$

在这些解中恰好有 m 个是线性无关的．为了构造其余的解，需要利用其他闭道，包括非闭围道（见[3]，[4]）．已计算出 Pochhammer 方程的**单值群**（monodromy group）（见[3]）．

Pochhammer 方程的两个特殊情况是 Tissot 方程（Tissot equation）（见[4]），即 Pochhammer 方程当

$$Q(z)=\prod_{j=1}^{n-1}(z-a_j),$$

$$R(z)=Q(z)\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{b_j}{z-a_j}\right]$$

时的情况，以及 **Papperitz 方程**（Papperitz equation）．

参考文献

[1] Pochhammer, L., Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf, *Math. Ann.*, 35 (1889), 470－494.

[2] Jordan, C., Cours d'analyse de l'Ecole Polytechn. 3, Gauthier-Villars, 1915.

[3] Ince, F. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[4] Kamke, E., Handbuch der gewöhnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947（中译本：E．卡姆克，常微分方程手册，科学出版社，1977）．

М. В. Федорюк 撰　杜小杨　张鸿林 译

Pohlke-Schwarz 定理［Pohlke-Schwarz theorem；Польке-Шварца теорема］

任何完全平面**四边形**（quadrilateral）能够作为与一个给定的四面体相似的四面体的平行投影．

这个定理是 K. Pohlke 于 1853 年首先以不同形式陈述，由 H. A. Schwarz 于 1864 年一般化．

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4—Геометрия, 1963.

А. Б. Иванов 撰　林向岩 译

Poincaré－Bendixson 理论［Poincaré－Bendixson theory；Пуанкаре－Бендиксона теория］

微分方程定性理论（qualitative theory of differential equations）和动力系统理论的一部分，讲到两个一阶微分方程所成的自治系统

$$\dot{x}_i=f_i(x_1,\ x_2),\ i=1,\ 2 \qquad (*)$$

的轨道的极限（当 $t\to\pm\infty$ 时）性态．（假设保证解的存在和唯一性的条件已满足）．此系统在平面的有界部分中只有有限个**平衡位置**（equilibrium position）这个最重要的情况下，H. Poincaré 和 I. Bendixson 的基本结果（见[1]和[2]）是，任意有界半（正向或负向）轨道，或者趋于**平衡位置**（equilibrium position），或者像螺线那样缠绕一个**极限环**（limit cycle）或按类似方式缠绕一个闭**分界线**（separatrix）或者缠绕由几个"联结"某些平衡位置的分界线所构成的"分界周线"，或者这半轨道本身就是平衡位置或闭轨道．用得最多的推论就是：若半轨道不离开一个已给的不包含平衡位置的紧区域，则在此区域中必有闭轨道．对于有无限多个平衡位置的情况，或者半轨道为无界的情况，也有一个相当完备但是比较复杂的描述（见[4]）．最后也能考虑一个平面上的**连续流**（continuous flow）而不假设它是由微分方程（*）所给出的，因为这时仍然能用 Poincaré－Bendixson 理论的基本的"技巧上的"前提：即 **Jordan 定理**（Jordan theorem）和对于同胚于一线段的局部截面的 **Poincaré 回归映射**（Poincaré return map）（其存在性在[7]中证明了，亦见[8]）．

与 Poincaré－Bendixson 理论有关的问题有：Poincaré 所发现的向量场在一区域边界上的旋转与区域内平衡位置的指标的关系（见**奇点的指标**（singular point, index of a））；Bendixson 和 L. E. J. Brouwer 关于轨道在平衡位置附近的性态的可能类型的结果（见[2]－[5]）；将"奇异轨道"（平衡位置、极限环、分界线）在相平面上出现的"定性图象"中的作用弄得更准确的结果（见[6]）．

虽然这个一般理论已对系统（*）的相轨道的性态的可能类型给出了完全的信息，但它没有回答对一个实际的系统会出现哪种类型的问题．有许多文章（通常不是对个别的系统，而是对某一类系统）试着回答这种问题，但是照例都是本质地应用了一般理论，却完全未能化为自动应用这一理论．

参考文献

[1A] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 7 (1881), 375－422.

[1B] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 8 (1882), 251－296.

[1C] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 1 (1885), 167－244.

[1D] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 2 (1886), 151－217.

[2] Bendixson, I., Sur les courbes définiés par des équations différentielles, *Acta Math*, **24** (1901), 1 – 88.

[3A] Brouwer, L. E. J., On continuous vector distributions, *Verhand. K. Ned. Acad. Wet Afd. Nat I Reeks*, **11** (1909), 850 – 858

[3B] Brouwer, L. E. J., On continuous vector distributions, *Verhand. K Ned Acad. Wet Afs Nat I Reeks*, **12** (1910), 716 – 734.

[3C] Brouwer, L. E. J., On continuous vector distributions, *Verhand K. Ned Akad Wet Afd Nat. I Reeks*, **13** (1910), 171 – 186.

[4] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд, М., 1949 (中译本: B. B. 涅梅茨基, B. B. 斯捷帕诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956)

[5] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhauser, 1982.

[6] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И, Майер, А. Г, Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本 Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I., and Maier, A G., Qualitative theory of second – order dynamic systems, Wiley, 1973).

[7] Whitney, H., Regular families of curves, *Ann. of Math*, **34** (1933), 2, 244 – 270.

[8] Немыцкий, В. В., «Вестн. Моск. ун-та.», 1948, no. 10, 49 – 61.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 关于不由微分方程定义的平面上的连续流的 Poincaré – Bendixson 理论, 可在[A3]第 8 章中找到完整的讨论; 亦见[A1], 第 2 章(那里甚至连局部截面也避免使用). 至于平面以外的 2 维流形, 只要 Jordan 曲线定理成立, 则 Poincaré – Bendixson 理论对每个可定向 2维流形也成立(例如对 S^2, $S^1\times\mathbf{R}^1$ 成立; 但对 2 维环面 $S^1\times S^1$ 不成立).

Poincaré – Bendixson 定理的一个重要推论(或宁可说是证明它的技巧的一个推论)是 H. Bohr 和 W. Fenchel 的如下结果(1936): 在平面上的连续流中,每个 Poisson 稳定的轨道或为周期的或为静止点([A3], Ⅷ.1.21). 这个结果也可对某些其他 2 维流形证明: 如 Klein 瓶([A5])(直接应用 **Kneser 定理**(Kneser theorem))与射影平面([A4]). 对于任一紧 2 维流形上的 C^2 流, 可以证明, 一个 Poisson 稳定轨道的闭包或包含一固定点, 或为一周期轨道, 或者就是整个流形, 这时此流形必为一个 2 维环面([A6]). 关于 Poisson 稳定轨道的进一步的描述, 可见[A2].

参考文献

[A1] Beck, A., Continuous flows in the plane, Springer, 1974.

[A2] Gutierrez, C., Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences, *Ergod Th & Dynam. Sys*, **6** (1986), 17 – 44.

[A3] Hajek, O., Dynamical systems in the plane, Acad. Press, 1968

[A4] Lam, P.-F., Inverses of recurrent and periodic points under homomorphisms of dynamical systems, *Math Syst Theory*, **6** (1972), 26 – 36

[A5] Markley, N. G., The Poincaré – Bendixson theorem for the Klein bottle, *Trans Amer. Math. Soc*, **135** (1969), 159 – 165.

[A6] Schwartz, A. J., A generalization of a Poincaré – Bendixson theorem to closed two - dimensional manifolds, *Amer J Math*, **85** (1963), 453 – 458.

齐民友 译

Poincaré-Bertrand 公式 [Poincaré-Bertrand formula; Пуанкаре-Бертрана формула]

关于 Cauchy 主值型累次**反常积分**(improper integral)重排积分次序的一个公式.

设 Γ 是复平面中的简单闭或开光滑曲线, $\varphi(t,t_1)$ 是定义在 Γ 上的(一般为复值)函数且关于 t 和 t_1 满足一致 **Hölder 条件**(Hölder condition), 并设 t_0 是 Γ 上的一个固定点, 当 Γ 为开时不是端点, 则有 Poincaré-Bertrand 公式:

$$\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t,t_1)}{t_1-t}\,dt_1 =$$
$$= -\pi^2\varphi(t_0,t_0)+\int_\Gamma dt_1\int_\Gamma \frac{\varphi(t,t_1)}{(t-t_0)(t_1-t)}\,dt. \tag{1}$$

此公式在关于曲线 Γ 和函数 φ 的更一般的假定下为真(见[4]). 如果 $\varphi(t,t_1)=\alpha(t)\beta(t_1)$, 其中 $\alpha\in L_p$, $\beta\in L_q$, $q=p/(p-1)$, 则方程(1)对几乎所有 $t_0\in\Gamma$ 为真(见[5],[6]). 如果曲线 Γ 是闭的且函数 φ 只依赖于一个变量, 则方程(1)取下述形式:

$$\frac{1}{(\pi i)^2}\int_\Gamma \frac{dt}{t-t_0}\int_\Gamma \frac{\varphi(t_1)}{t_1-t}\,dt_1=\varphi(t_0), \tag{2}$$

依赖于 φ 满足 Hölder 条件或 $\varphi\in L_p(p>1)$, 公式(2)分别对所有或几乎所有 $t_0\in\Gamma$ 成立. 方程(2)也称为 Poincaré-Bertrand 公式.

对多重积分也已构造出类似于(1)的公式(见[8]–[11]).

G. H. Hardy (见[7])在某些条件下早于 H. Poincaré (见[1])和 G. Bertrand(见[2],[3])得到了公式(1).

参考文献

[1] Poincaré, H., Leçons de mécanique céleste, t. 3, Gauthier-Villars, 1910.

[2] Bertrand, G., Equations de Fredholm à intégrales principales au sens de Cauchy, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **172** (1921), 1458 – 1461.
[3] Bertrand, G., La théorie des marées et les équations intégrales, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **40** (1923), 151 – 258.
[4] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里, 奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966).
[5] Хведелидзе, Б. В., 《Сообщ. АН Груз. ССР》, **8** (1947), 5, 283 – 290.
[6] Хведелидзе, Б. В., 载于 Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, М., 7 (1975), 5 – 162.
[7] Hardy, G. H., The theory of Cauchy's principal values, *Proc. London Math. Soc.*, 7 (1909), 2, 181 – 208.
[8] Tricomi, F., Equazioni integrali contenenti il valor principale doppio, *Math. Z.*, **27** (1928), 87 – 133.
[9] Giraud, G., Sur une classe générale d'équations à intégrales principales, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **202** (1936), 26, 2124 – 2127.
[10] Giraud, G., Equations à intégrales principales, étude suivie d'une application, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **51** (1934), 3 – 4, 251 – 372.
[11] Михлин, С. Г., 《Успехи матем. наук》, 3 (1948), 3, 29 – 112.
[12] Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962 (英译本: Mikhlin, S. G., Multidimensional singular integrals and integral equations, Pergamon, 1965).

Б. В. Хведелидзе 撰 沈永欢 译

Poincaré 复形 [Poincaré complex; Пуанкаре комплекс]

流形(manifold)概念的一个推广; 在某种意义下, 具有象闭可定向流形的同调群相同结构的同调群的空间. H. Poincaré 证明了一个流形的同调群满足某种关系(**Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)同构). Poincaré 复形是一个空间, 其中, 这个同构看作是一个公理(也见 **Poincaré 空间**(Poincaré space)).

一个代数 Poincaré 复形(algebraic Poincaré complex)是一个具有形式 Poincaré 对偶的链复形——先前的类似物.

设 $C=\{C_i\}$ 是当 $i<0$ 时 $C_i=0$ 的链复形. 它的同调群是有限生成的. 另外, 设 C 是配备了(链)对角线映射 $\Delta: C\to C\otimes C$ 使得 $(\varepsilon\otimes 1)\Delta=(1\otimes\varepsilon)\Delta$, 其中 $\varepsilon: C\to \mathbf{Z}$ 是扩张(C 与 $C\otimes\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Z}\otimes C$ 是相叠合的). 对角线映射的存在使得可定义偶对.

$$H^k(C)\otimes H_n(C)\to H_{n-k}(C),\ x\otimes y\to x\cap y$$

复形 C 称作几何的(geometric), 如果在 Δ 和 $T\Delta$ 之间给出了一个链同伦, 其中 $T: C\otimes C\to C\otimes C$ 是函子的变换, $T(a\otimes b)=b\otimes a$.

一个几何的链复形称为形式维数 n 的代数 Poincaré 复形, 如果存在一个无限阶的元素 $\mu\in H_n(C)$ 使得对任何 k, 同态 $\cap\mu: H^k(C)\to H_{n-k}(C)$ 是同构.

代数 Poincaré 复形的例子是, 可定向闭流形的奇异链复形, 或更一般地, 具有适当有限性条件的 Poincaré 复形. 也可以定义 Poincaré 链对(Poincaré chain pairs)——Poincaré 偶对 (X, A) 的代数类似物. 也可以考虑模在适当环上的 Poincaré 复形(和 Poincaré 链对).

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wall, C. T. C., Surgery of non-simply-connected manifolds, *Ann. of Math.* (2), **84** (1966), 217 – 276.
[A2] Wall, C. T. C., Surgery on compact manifolds, Acad. Press, 1970.

薛春华 译

Poincaré 猜想 [Poincaré conjecture; Пуанкаре гипотеза]

归功于 H. Poincaré 的一个断言, 叙述如下: 任何闭单连通三维流形(three-dimensional manifold)同胚于三维球面. 一个自然的推广是下述断言(广义 Poincaré 猜想(generalized Poincaré conjecture)): 任何同伦等价于 n 维球面 S^n 的闭 n 维流形同胚于 S^n. 至今对所有 $n\geq 5$(也对 $n=4$ 时的光滑流形)已被证明.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Smale, S., Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math.* (2), 74 (1961), 199 – 206.
[A2] Smale, S., On the structure of manifolds, *Amer. J. Math.*, **84** (1962), 387 – 399.
[A3] Stallings, J. R., Polyhedral homotopy-spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 485 – 488.
[A4] Freedman, M. H., The topology of four-dimensional manifolds, *J. Diff. Geometry*, **17** (1982), 357 – 453.
[A5] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology, Birkhäuser, 1989.

薛春华 译

Poincaré 除子 [Poincaré divisor; Пуанкаре дивизор]

代数曲线的 **Jacobi 簇**(Jacobi variety)上的自然极化所给出的除子(divisor). 代数曲线 X 的同调群里的一维闭链的相交形式在周期格上诱导一个幺模斜对称型. 根据极化 Abel 簇的定义(见**极化代数簇**(polarized algebraic variety)), 这个型确定了曲线的

Jacobi 簇 $J(X)$ 上的主极化．所以由这个极化给出的有效除子 $\Theta \subset J(X)$ 可被唯一确定到相差元素 $x \in J(X)$ 的一个平移．Poincaré 除子 Θ 的几何反映了代数曲线 X 的几何．特别地，Poincaré 除子的奇点集的维数 $\dim_{\mathbf{C}} \sin \Theta \geqslant g-4$，这里 g 是曲线 X 的亏格（见[1]）.

参考文献

[1] Andreotti, A. and Mayer, A., On period relations for abelian integrals on algebraic curves. *Ann. Sci. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 21 (1967), 2, 189－238.

Вик С. Куликов 撰

【补注】 上述除子通常称为 Jacobi 簇的 θ 除子（theta divisor）．与此相关联的丰富的几何内容可见 [A1]，[A2]，[A3] 以及综述文章 [A4]，[A5]．

参考文献

[A1] Griffiths, P., Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley (Interscience), 1978

[A2] Mumford, D., Curves and their Jacobians, Univ. Michigan Press, 1975.

[A3] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths P., Harris, J., Geometry of algebraic curves, 1. Springer, 1985.

[A4] Arbarello, E., Fay's triscant formula and a characterisation of Jacobian varieties, in S. J. Bloch (ed.): Algebraic Geometry (Bowdoin, 1985), Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46, Amer. Math. Soc., 1987, 49－61.

[A5] Gunning, R. C., On theta functions for Jacobi varieties, in S. J. Bloch (ed.): Algebraic Geometry (Bowdoin, 1985), Proc. Symp. Pure Math., Vol. 46, Amer. Math. Soc., 1987, 89－98.

陈志杰 译

Poincaré 对偶性［Poincaré duality；Пуанкаре двойственность］

n 维流形（包括广义流形）M 的 p 维同调群（或模）与它的 $(n-p)$ 维上同调群之间的同构，这里同调的系数是一个局部常值的群（模）系 $\mathscr{G}$，该群系中的每个群都同构于某个固定的群 G，而上同调的系数则是 M 上的一个定向层 $\mathscr{H}_n(\mathscr{G})$（它在 $x \in M$ 处的茎是局部同调群 $H_n^x = H_n(M, M \setminus x; \mathscr{G})$）．更准确些说，通常的同调群 $H_p^c(M; \mathscr{G})$ 同构于具有紧支集的上同调群（第二类上同调群）$H_c^q(M; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}))$，$q=n-p$，而第二类同调群 $H_p(M; \mathscr{G})$（由无穷链复形决定）同构于通常的上同调群 $H^q(M; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}))$．更为一般的形式是，存在同构 $H_p^\Phi(M; \mathscr{G}) = H_\Phi^q(M; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}))$，此处 Φ 是一族支集．

在子空间 $A \subset X$ 的同调与空间偶 (X, A) 的上同调之间，存在类似的等同（Poincaré-Lefschetz 对偶性（Poincaré-Lefschetz duality））．即对于 M 中的一个开或闭的子空间 A，置 $B = M \setminus A$，令 $\Phi|B$ 为 Φ 中所有包含于 B 中的子集的族，并且设 $\varphi \cap A$ 为形如 $F \cap A$，$F \in \Phi$，的集合族．则空间偶 (M, B) 的同调正合序列

$$\cdots \to H_p^{\varphi|B}(B; \mathscr{G}) \to H_p^{\varphi}(M; \mathscr{G}) \to$$

$$\to H_p^{\Phi}(M, B; \mathscr{G}) \to H_{p-1}^{\Phi|B}(B; \mathscr{G}) \to \cdots \quad (*)$$

与空间偶 (M, A) 的上同调正合序列

$$\cdots \to H_\Phi^q(M, A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) \to H_\Phi^q(M; \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) \to$$

$$\to H_{\Phi\cap A}^q(A, \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) \to H_\Phi^{q+1}(M, A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) \to \cdots$$

相吻合．

群 $H_p^{\Phi|B}(B; \mathscr{G}) = H_p^{\Phi|B}(M; \mathscr{G})$ 在 $\Phi = c$ 时，等同于 $H_p^c(B; \mathscr{G})$，在 Φ 是 M 中所有闭集的族 Ψ 并且 B 闭的情形中，等同于 $H_p(B; \mathscr{G})$（在此情形中第一个序列中的符号 Φ 可以省略，此外还有同构 $H_p(M, B; \mathscr{G}) = H_p(A; \mathscr{G})$）．当 $\Phi = \Psi$ 并且 B 是开集时，只有在同调序列的第二、三项中，才可以去掉 Φ，因为同调群 $H_p^{\Phi|B}(B; \mathscr{G})$ 不但依赖于拓扑空间 B，也有赖于包含映射 $B \subset M$．

当 $\Phi = \Psi$ 时，在空间偶 (M, A) 的上同调序列中，这个符号（以及 $\Phi \cap A$）可以省略．如果 A 是闭集，则

$$H_\Phi^q(M, A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) =$$

$$= H_{\Phi|B}^q(M; \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) = H_{\Phi|B}^q(B; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}));$$

当 $\Phi = \Psi$ 时，所出现的 B 的上同调不但与 B 有关，而且有赖于包含映射 $B \subset M$．如果 $\Phi = c$ 并且 A 是闭集，则 $\Phi \cap A$ 可用 c 替换，同时 $H_c^q(M, A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G})) = H_c^q(B; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}))$ 是空间 B 的"第二种"上同调群．如果 $\Phi = c$ 但是 A 是开集，则上同调群 $H_{c\cap A}^q(A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}))$ 并不与 $H_c^q(A; \mathscr{H}_n(\mathscr{G}))$ 相同（而是有赖于包含映射 $A \subset M$）．

Poincaré-Lefschetz 对偶性可以简捷地应用于描述带边流形的同调与上同调之间的对偶性．牢记如下事实将十分有用，如果层 $\mathscr{H}_n(R)$ 的所有非零茎都同构于基环 R，则 $\mathscr{H}_n(\mathscr{G}) = \mathscr{H}_n(R) \otimes \mathscr{G}$．

如果层 $\mathscr{H}_n(R)$ 是局部常值的，则在同构的意义下，存在唯一的一个局部常值层 $\mathscr{L}(R)$ 满足 $\mathscr{L}(R) \otimes_R \mathscr{H}_n(R) = R$．从而，如果在同调序列 $(*)$ 中用系数层 $\mathscr{L}(R) \otimes_R \mathscr{G}$ 替代 $\mathscr{G}$，则层 $\mathscr{G}$（而不是 $\mathscr{H}_n(\mathscr{G})$）将出现于上同调序列中．因此无论对于同调还是上同调，预先给定的系数可以出现在对偶同构中．

利用层论，可以给出 Poincaré 对偶性的最为自然的证明．拓扑学中的 Poincaré 对偶性是同调代数中导出函子所满足的 Poincaré 型对偶性（Poincaré-type duality）关系的一个特殊情形（同调与上同调群的 Poin-

caré 型对偶性是另一种特殊情形).

参考文献

[1] Скляренко, Е. Г., 《Успехи матем. наук》, 34 (1979), 6, 90–118.

[2] Скляренко, Е. Г., 《Матем. Заметки》, 28 (1980), 5, 769–776.

[3] Massey, W., Homology and cohomology theory, M. Dekker, 1978.

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】 Poincaré 对偶性的简单形式之一可以表述如下. 设 M^n 是紧可定向流形(见定向(orientation)), $c_M \in H_n(M; \mathbf{Z})$ 是一个基本类. 则与 c_M 的卡积(cap product)诱导同构 $H^r(M; G) \to H_{n-r}(M; G)$, 参见[A1]. 在文献[A2]中, 利用与某个定向类的斜积(slant product)给出了另一种形式. (对于 de Rham 同调) Poincaré 对偶性也可以从两个微分形式的楔积的积分(相对于某个取定的体积形式)产生的自然配对 $H^q(M) \otimes H_C^{n-q}(M) \to \mathbf{R}$ 所决定的同构 $H^q(M) \simeq H_C^{n-q}(M)$ 中观察到, 参见[A3]. 在由某个谱 E 决定的广义上同调理论这一情形中的 Poincaré 对偶性, 见[A4].

参考文献

[A1] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1972, Sect. Ⅷ. 8.1.

[A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, Sect. 6.2 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

[A3] Bott, R. and Tu, L. W., Differential forms in algebraic topology, Springer, 1982, Chapt. 1, Sect. 5.

[A4] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975, p. 316.

段海豹 译 沈信耀 校

Poincaré-Dulac 定理 [Poincaré-Dulac theorem]

【补注】 考虑一个 n 未知函数的(形式)微分方程

$$\dot{x} = Ax + (\text{高次项}), \tag{A1}$$

一组本征值 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 称为共振的(resonant), 如果存在一个以下形式的关系式

$$\lambda_r = m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n$$

$r \in \{1, \cdots, n\}$, 其中 $m_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\sum_{i=1}^n m_i \geqslant 2$. 关于形式微分方程的典范形式的 Poincaré 定理(Poincaré theorem)提出: 若(A1)中的矩阵 A 之本征值是非共振的, 则有一形式的变量变换 $y = x + (\text{高次项})$, 使(A1)成为

$$\dot{y} = Ay. \tag{A2}$$

Poincaré-Dulac 定理(Poincaré-Dulac theorem)的一部分则认为, 对任一形如(A1)的方程都有一形式的变量变换 $y = x + (\text{高次项})$, 使(A1)成为

$$\dot{y} = Ay + w(y), \tag{A3}$$

$w(y)$ 是一个幂级数而其所有单项式均为共振的. 单项式 $y^m e_r$ (e_r 是标准基的第 r 个元素)称为共振的(resonant), 如果 $\lambda_r = m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n$, λ_i 是 A 的本征值.

一点 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ (即一本征值集)属于 Poincaré 区域(Poincaré domain), 如果 0 不在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 之凸包中; 所有使 0 在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 之凸包中的 λ 之集合的补集称为 Siegel 区域(Siegel domain). Poincaré-Dulac 定理的第二部分提出: 若(A1)右方为全纯的, 而 A 之本征值集 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 在 Poincaré 域中, 则有一全纯的变量变换 $y = x + (\text{高次项})$ 变(A1)为典范形式(A3), 其中 $w(y)$ 是由 y 的共振的单项式所成的多项式.

点 $\lambda \in \mathbf{C}^n$ 称为 (C, ν) 型的, 其中 C 是一常数, 如果对所有的 $r = 1, \cdots, n$ 均有

$$\left| \lambda_r - \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i \right| \geqslant C \left[\sum_{i=1}^n m_i \right]^{-\nu}.$$

Siegel 定理(Siegel theorem)提出, 若 A 之本征值成一 (C, ν) 型向量且(A1)是全纯的, 则(A1)在零的一个邻域中全纯等价于(A2), 即有一全纯的坐标变换把(A1)变成(A2).

在可微的(即 C^∞)情况下, 也有有关的结果([A3]). 考虑 C^∞ 向量场 $X = \sum a^i(x)(\partial/\partial x^i)$ (或考虑相应的自治微分方程组 $\dot{x}^i = a^i(x)$). X 的临界点, 即使一切 $a^i(p) = 0 (i = 1, \cdots, n)$ 的 p 点称为初等临界点(elementary critical point), 如果矩阵 $(\partial a^i/\partial x^j)(p)$ 的每个本征值之实部均非零. 令 X 为一 C^∞ 向量场, 而 0 是一个初等临界点, 则 X 在零的一个邻域中可以分解为 C^∞ 向量场 S 与 N 之和: $X = S + N$, 而 $[S, N] = 0$, 且在一适当的坐标系 y 中 S 形如 $S = \sum_{i,j} c_j^i y^j (\partial/\partial y^i)$, 而矩阵 (c_j^i) 相似于一对角矩阵, N 之线性部分可以用一幂零矩阵表示(陈(国才)分解定理(Chen decomposition theorem)). 这是矩阵之分解为可交换的半单部分与幂零部分的 **Jordan 分解**(Jordan decomposition)之非线性的 C^∞ 类比. 现令 $Y = \sum b^i(x)(\partial/\partial x^i)$ 为第二个向量场而以 0 为初等临界点, 令 $\hat{a}^i(x)$ 和 $\hat{b}^i(x)$ 为 $a^i(x)$ 和 $b^i(x)$ 在 0 的 **Taylor 级数**(Taylor series). 于是存在一个在 0 附近为 C^∞ 的变换, 把 X 变为 Y, 其必要充分条件是: 存在一个形式变换把形式向量场 $\sum \hat{a}^i(x)(\partial/\partial x^i)$ 变为形式向量场 $\sum \hat{b}^i(x)(\partial/\partial x^i)$.

S. Sternberg 的一个 C^∞ 线性化的结果表明([A4], [A5]): 若方程 $\dot{x}^i = \sum a^i(x)$, $a^i(0) = 0$ 的线性项的

矩阵是半单的，而且此矩阵的本征值集合是非共振的，则必有一个 $C^{\prime}$ 坐标变换线性化这个方程. C^{1} 与 C^{ω} 中的结果可见[A6]，[A7].

Poincaré-Dulac 定理可以看作是关于一维幂零 Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathbf{C}$ 的非线性表示的典范形式的一个结果. 在这样的形式下，它可以推广到任意的幂零 Lie 代数. 令 $\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathbf{C}$ 上的有限维幂零 **Lie 代数**（Lie algebra, nilpotent），令 V_n 为形式向量场 $\sum a^i(x)(\partial/\partial x^i)$, $a^i(0)=0$ 的 Lie 代数. $\mathfrak{g}$ 的一个形式非线性表示（formal non-linear representation）就是 $\mathfrak{g}$ 在 V_n 中的一个同态 $\rho=\sum_{n\geq 1}\rho^n$（$\rho^n$ 是 ρ 中的 n 次齐次部分）. 若对每一个 X，级数 $\sum\rho^n(X)$ 在 0 的某个邻域中收敛，这个表示就是全纯的（holomorphic）. 这时 ρ^1 是 $\mathfrak{g}$ 的一个**线性表示**（linear representation），称为 ρ 的线性部分. 一个形式向量场 $\xi\in V_n$ 称为关于 $\mathfrak{g}$ 的一个线性表示 σ^1 为共振的（resonant），如果对所有 $X\in\mathfrak{g}$ 有 $[\sigma^1(X),\xi]=0$. 若每个 $\rho(X)$ 都关于线性表示 ρ^1 的半单部分（见 **Jordan 分解**（Jordan decomposition））为共振的，就说 ρ 是正规的（normal）. 关于幂零 Lie 代数的 Poincaré-Dulac 定理（Poincaré-Dulac theorem for nilpotent Lie algebra）（[A8]）提出，ρ 是一个 $\mathbf{C}$ 上的幂零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的全纯非线性表示、而若 ρ 满足 Poincaré 条件（Poincaré condition），则 ρ 全纯等价于一多项式正规表示. 在这样的背景下，Poincaré 条件（即属于 Poincaré 域）的形式是：0 不属于 ρ 的线性部分 ρ^1 的权的凸包（见 **Lie 代数表示的权**（weight of a representation of a Lie algebra））.

[A9] 和 [A10] 是关于 Poincaré-Dulac 定理和 Siegel 定理的相当完全的论述.

在控制理论中讨论方程组 $\dot{x}=f(x,u)$，u 是控制参数；例如 $\dot{x}=f(x)+u_1g_1(x)+\cdots+u_mg_m(x)$. 这自然地引导到向量场族的线性化问题. 在这样的背景下，更广泛的等价性概念，特别涉及反馈定律 $u=h(x,v)$ 的，也是自然的（反馈线性化（linearization by feedback））. 见 [A11]－[A13].

参考文献

[A1] Poincaré, H., Oeuvres, Vol. 1, Gauthier-Villars, 1951, UL-CXXXII.

[A2] Dulac, H., Recherches sur les points singuliers des equations différentielles, *J. Ecole Polytechn. Ser. II*, 9 (1904), 1－25.

[A3] Chen, K.-T. Equivalence and decomposition of vectorfields about an elementary critical point, *Amer. J. Math.*, 85 (1963), 693－722.

[A4] Bruhat, F., Travaux de Sternberg, *Sém. Bourbaki*, 13 (1960－1961), Exp. 2187.

[A5] Sternberg, S. On the structure of a local homeomorphism, *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 623－631.

[A6] Nagumo, M. and Isé, K., On the normal forms of differential equations in the neighbourhood of an equilibrium point, *Osaka Math. J.*, 9 (1957), 221－234.

[A7] Hartman, P., On the local linearization of differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14 (1963), 568－573.

[A8] Arnal, D., Ben Ammar, M. and Pinczon, G., The Poincaré-Dulac theorem for nonlinear representations of nilpotent Lie algebras, *Lett. Math. Phys.*, 8 (1984), 467－476.

[A9] Арнольд, В. И., *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, M. 1978（中译本：В. И. 阿诺尔德，常微分方程续论－常微分方程的几何方法，科学出版社，1989）.

[A10] Брюно, А. Д., Аналитическая форма дифференциальных уравнений, 《Тр. ММО》, 25 (1971), 119－262.

[A11] Hunt, L. R. and Su, R., Linear equivalents of nonlinear time-varying systems, in Internat. Symp. Math. Th. Networks and Systems, Santa Monica, 1983, Vol. 4, Western Periodicals, 1981, 119－123.

[A12] Jakubczyk, B. and Respondek, W., On the linearization of control systems, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron Phys.*, 28 (1980), 517－522.

[A13] Livingston, E. S. and Elliott, D. L., Linearization of families of vectorfields, *J. Diff. Equations*, 55 (1984), 289－299.

齐民友 译

Poincaré 方程 [Poincaré equations; Пуанкаре уравнения]

借助于无穷小变换的某一 Lie 代数表示的完整系统（Holonomic system）力学的一般方程.

设有一个完整力学系统，其约束为明显地依赖于时间的理想约束，确定其位置的变量为 x_i, $i=1,\cdots,n$. 若该系统的自由度为 k，则存在一个无穷小变换的非传递代数

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\xi_0^j\frac{\partial}{\partial x_j},\quad X_\alpha=\sum_{j=1}^{n}\xi_\alpha^j\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\alpha=1,\cdots,k,$$

可使系统在时刻 t 分别通过该代数的无穷小变换（$X_0+\sum_{\alpha=1}^{k}\eta_\alpha X_\alpha$）$dt$ 和其子代数的无穷小变换（$\sum_{\alpha=1}^{k}\omega_\alpha X_\alpha$）由位置 x_i 移至与其无限靠近的实际位置 x_i+dx_i 和与其无限靠近的虚拟位置 $x_i+\delta x_i$. 这里 ω_α 和 η_α 分别是确定虚拟位移和实际位移的独立变量，它们满足下面的方程：

$$\delta\eta_i=\frac{d\omega_i}{dt}-\sum_{\alpha,\beta=1}^{k}c_{\alpha\beta i}\,\omega_\alpha\eta_\beta,\quad i=1,\cdots,k,$$

上面已假定虚拟位移的代数 X_α 是由其结构常数 $c_{\alpha\beta\gamma}$ 确定的，即

$$(X_\alpha X_\beta) = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{k} c_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma,$$

$$\alpha, \beta = 1, \cdots, k,$$

并且算子 X_0 与虚拟位移的代数是可以交换的，即

$$(X_0 X_\alpha) = 0, \alpha = 1, \cdots, k.$$

在下面的讨论中，假定这些条件都成立.

Poincaré 方程式是对于 η_j 的一阶常微分方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_j} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} c_{\alpha j\beta}\eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_\beta} + X_j L, \quad (1)$$

其中 $j = 1, \cdots, k$,

$$L(t, x_1, \cdots, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_k) = T + U$$

为 Lagrange 函数，$T(t, x, \eta)$ 为动能，$U(t, x)$ 为力函数.

式 (1) 是 H. Poincaré 首先得到的 (见 [1])，他假定虚位移代数是传递的，约束不明显依赖于时间. 他应用上面的式子研究了一个内含椭圆腔的固体的运动，在椭圆腔内充满了作均匀涡旋运动的理想流体 (见 [2]). Н. Г. Четаев (见 [3]) 将 Poincaré 方程的理论加以推广和发展，使之包括位移代数是非传递的和约束明显依赖于时间的情况 (见 [3] - [5])，并将其转化为更简单的正则形式 (见 **Четаев 方程** (Chetaev equations)). 特别是，他给出了在以微分形式给出完整约束的情况下构造虚位移和实际位移代数的方法 (见 [5])，他还引进了循环位移的重要概念.

位移 X_r, $r = s+1, \cdots, k$，当满足下述条件时称为循环 (cyclic) 位移: 1) $X_r L = 0$; 2) $(X_r X_\beta) = 0$, $r = s+1, \cdots, k$, $\beta = 1, \cdots, k$.

根据条件 2)，循环位移 X_r 成为一个虚位移代数的 Abelian 子代数，它与所有的算子 X_β 可交换. 对于循环位移来说，Poincaré 方程的第一个积分存在:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_r} = a_r = \text{常数}, \ r = s+1, \cdots, k.$$

从这些关系式可知，变量 η_r 可以用常数 a_r 和变量 t, x_i, $\eta_1, \cdots, \eta_s$, 来表示; 可以引进下面的 Routh 函数:

$$R(t, x_1, \cdots, x_n; \eta_1, \cdots, \eta_s; a_{s+1}, \cdots, a_k) =$$

$$= L - \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \eta_r}\eta_r.$$

于是对于非循环位移，Poincaré 方程可表示为:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \eta_i} = \sum c_{\alpha j\beta}\eta_\alpha \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} + \sum c_{\alpha j\gamma}\eta_\alpha a_\gamma + X_j R,$$

$$\alpha, j, \beta = 1, \cdots, s; \gamma = s+1, \cdots, k. \quad (2)$$

积分式 (2)，η_r 值可由下面的方程式来确定:

$$\eta_r = -\frac{\partial R}{\partial a_r}, \ r = s+1, \cdots, k.$$

如果除此之外还有 $c_{\alpha j\gamma} = 0$, $\alpha, j = 1, \cdots, s$, $\gamma = s+1, \cdots, k$. 也就是说，非循环位移 X_β, $\beta = 1, \cdots, k$, 形成虚位移代数的子代数，那么相应于该子代数的力学系统形成某种独立的，自由度为 s 的完整系统，当 $\alpha, j, \beta = 1, \cdots, s$ 时，它可由式 (1) 来描述，其中函数 L 的作用由函数 R 来代替.

Poincaré 方程的特例包括 **Lagrange 方程** (**力学中的**) (Lagrange equations (in mechanics))，即其变量之一的无限小增量的变换代数可以化为变换的交换代数; 以及固体旋转的 **Euler 方程** (Euler equation)，这时 η_i 为瞬时角速度的投影 p, q 和 r.

参考文献

[1] Poincaré, H., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **132** (1901), 369 - 371.

[2] Poincaré, H., *Bull. Astron.*, **27** (1910), 321 - 356.

[3] Четаев, Н. Г., 《Докл. АН СССР》, 7 (1928), 103 - 104.

[4] Chetaev, N. G., Sur les equations de Poincaré, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **185** (1927), 1577 - 1578.

[5] Четаев, Н. Г., 《Прикл. матем. и механ.》, 5 (1941), 2, 253 - 262.

В. В. Румянцев 撰 王克仁 译 诸德超 校

Poincaré 群 [Poincaré group; Пуанкаре группа]

Minkowski 空间 (Minkowski space) 的运动群. Poincaré 群是 Lorentz 变换群 (见 **Lorentz 变换** (Lorentz transformation)) 与四维位移 (平移) 群的半直积. H. Poincaré 于 1905 年首先证实了 Lorentz 变换构成一个群，随之以他的名字命名. А. Б. Иванов 撰

【补注】 关于 Poincaré 群的表示理论的一个完整的讨论见 [A2]. Poincaré 群也称为非齐次 Lorentz 群 (inhomogeneous Lorentz group).

参考文献

[A1] Rühl, W., The Lorentz group and harmonic analysis, Benjamin, 1970.

[A2] Barut, A. O. and Raczka, R., Theory of group representation and applications, PWN, 1977, Chapt. 17.

林向岩 译

Poincaré 最后定理 [Poincaré last theorem; Пуанкаре теорема последняя]

设 K 是一个平面上的圆环，它的边界是半径 $r =$

a 和 $r=b$ 的两个圆周．设由

$$\tilde{r}=\varphi(r,\theta),\ \tilde{\theta}=\psi(r,\theta)$$

（θ 是极角）给出的 K 到自身的映射满足条件：1）此映射是保持面积不变的；2）每个边界圆周映到自身，即

$$\varphi(a,\theta)=a,\ \varphi(b,\theta)=b;$$

3）满足 $r=a$ 的点反时针偏移，而满足 $r=b$ 的点则顺时针偏移，即 $\psi(a,\theta)>\theta$，$\psi(b,\theta)<\theta$．则此映射具有两个不动点．更一般地，代替面积保持不变，可以要求没有子区域映到它的真子集上．

此定理是 H．Poincaré 于 1912 年在涉及天体力学某些问题时给出的；他证明了此定理的一系列特殊情形，但没有得到一般情形的证明．在 Poincaré 去世前两周，他把论文寄给一家意大利刊物（见[1]），Poincaré 在附给编辑的信上表示，他坚信此定理在一般情形下是正确的．

参考文献

[1] Poincaré, H., Sur un théorème de géometrie, *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 33(1912), 375－407.

[2] Birkhoff, G., Proof of Poincaré's geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 14(1913), 14－22.

[3] Pars, L. A., A treatise on analytical dynamics, Heinemann, London, 1965.　　М. И. Войцеховский 撰

【补注】 Poincaré 最后定理的证明见[2]，它也称为 Poincaré-Birkhoff 不动点定理（Poincaré-Birkhoff fixed-point theorem）．

参考文献

[A1] Arnold, V. I. and Avez, A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, 1967.

[A2] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927.　　白苏华　胡师度　译

Poincaré 模型［Poincaré model；Пуанкаре интерпретация］，Poincaré 解释（Poincaré interpretation）

在复平面中实现 Лобачевский 平面的几何学（双曲几何学）的一个模型．在 Poincaré 模型中具有一个圆绝对形（absolute），复平面内单位圆盘 $E=\{z:|z|<1\}$ 的每一个点称为双曲点（hyperbolic point）并且圆盘本身称为双曲平面（hyperbolic plane）．在 E 中与边界圆 $\Omega=\{z:|z|=1\}$ 正交的圆弧（与直径）称为双曲直线（hyperbolic lines）．Ω 的每一点称为理想点（ideal point）．具有一个公共双曲点的双曲直线称为相交直线（intersecting lines）；那些具有一个公共理想点的双曲直线称为平行的（parallel）；那些既不相交也不平行的直线称为超平行的（ultra-parallel）（发散的（divergent））．因此，例如，在图 1 中描绘了通过 z_1 的二直线并且它们都平行于直线 z_2z_3．

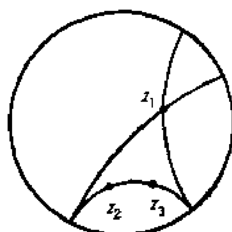


图 1

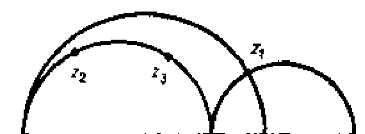


图 2

在半平面 $H=\{z=x+iy;\ y>0\}$ 中的 Poincaré 模型里，上半平面的每一个点称为一个双曲点（hyperbolic point），半平面本身称为双曲平面（hyperbolic plane），与实轴正交的半圆与半直线称为双曲直线（hyperbolic lines），理想点的集合（绝对形）是实轴连同 z 平面的无穷远点．平行，相交与发散直线如同在具有圆绝对形的 Poincaré 模型中的那样定义．因此，例如，图 2 中描绘了通过 z_1 并且平行于直线 z_2z_3 的两条直线．

运动能够描述为将绝对形变到自身上的共形变换．距离用四点的交比（cross ratio）定义：

$$\rho(z_1,z_2)=k\ln(z_1,z_2,z_1^*,z_2^*),$$

这里 z_1^* 是从 z_1 发出且通过 z_2 的半直线的理想点，z_2^* 是从 z_2 发出且通过 z_1 的半直线的理想点，k 是一个任意的正常数，且

$$(z_1,z_2,z_1^*,z_2^*)=\frac{z_1^*-z_1}{z_1^*-z_2}:\frac{z_2^*-z_1}{z_2^*-z_2}.$$

在 Poincaré 模型中角的测量与在双曲几何学中相同（见 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskiĭ geometry））．

这个模型是 H．Poincaré 在 1882 年提出的．

参考文献

[1] Klein, F., Elementary mathematics from a higher viewpoint, MacMillan, 1939（译自德文）．

[2] Каган, В. Ф., Лобачевский и его геометия, М., 1955.

[3] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952（中译本：D．希尔伯特，S．康福森，直观几何，上、下册，高等教育出版社，1964）．

[4] Poincaré, H., Oeuvres, Gauthier-Villars, 1916－1956.

[5] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1967.

[6] Sansone, G. and Gerretsen, J., Lectures on the theory of functions of a complex variable, 2. Geometric theory, Wolters-Noordhoff, 1969

А. Б. Иванов 撰

【补注】 可供选择地，$\rho(z_1,z_2)$ 等于正交于直线 z_1z_2 的通过 z^1 的双曲直线与通过 z^2 的双曲直线间的距

离，可定义为表示这两直线的圆之间的反距离（inverse distance）.（在 Euclid 平面内两不相交的圆间的反距离是 $|\ln r_1/r_2|$，这里 r_1 与 r_2 是到其中所给的圆得以反演的任两同心圆的半径.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M. Introduction to geometry, Wiley, 1969, 90, 303.

[A2] Coxeter, H. S. M. Parallel lines, *Canad. Math. Bull.*, 21 (1978), 385 - 397.

[A3] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L., Geometry revisited, Random House, 1967.

[A4] Coxeter, H. S. M., Non - Euclidean geometry, Univ Toronto Press, 1957

[A5] Greenberg, M. J., Euclidean and non - Euclidean geometries, Freeman, 1974

林向岩 译

Poincaré 问题（Poincaré problem; Пуанкаре задача]

求有界单连通区域 S^+ 里的一个**调和函数**（harmonic function）u，使得在区域的边界 L 上满足条件

$$A(s)\frac{du}{dn}+B(s)\frac{du}{ds}+c(s)u=f(s),$$

其中 $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$ 和 $f(s)$ 是在 L 上给定的实值函数，s 是弧长参数，n 是 L 的法线．H. Poincaré (1910) 在研究流体流动的数学理论时提出这个问题，同时在 $A(s)=1$, $c(s)=0$，围道 L 以及函数 $B(s)$ 与 $f(s)$ 为解析的情况下，给出了这个问题的一个（不完全的）解．

亦见**解析函数论的边值问题**（boundary value problems of analytic function theory）.

А. Б. Иванов 撰 吴炯圻 高琪仁 译

Poincaré 回归映射 [Poincaré return map; последования отображение]，后继映射（successor mapping）

一个光滑的或至少是连续的流（**连续时间动力系统**（flow (continuous time dynamical system)）$S=\{S_t\}$ 和一个横截于它的超曲面 V 的，即是一个将点 $v\in V$ 映到始于 v 的流之正半轨道首次再度与 V 相交之点的映射 T（它只对于那些有再度相交点存在的 v 点有定义）.（超曲面 V 称为截面（section），相交面（intersecting surface）或横截面（transversal））．若 $\dim V=1$（从而 $\{S_t\}$ 是平面或一个二维曲面上的流），V 就称为无切触弧（contactless arc），若 V 可以用数值参数 s 来参数化，则 V 上的点在 Poincaré 回归映射下的移动就可以用某个一元数值函数来描述（若 v 对应于参数值 s，则 TV 对应于参数值 $s+f(s)$），这个函数就称为后继函数（successor function）．这个映射是 Poincaré 首先使用的（[1]），故称为 Poincaré 回归映射（Poincaré return map）.

若所有半轨均与 V 相交，则 Poincaré 回归映射（这时它定义于整个 V 上）在相当程度上决定了流的一切轨道的性态．然而，这种"整体"截面远非常见（特别是在定能流形上的 Hamilton 系统，当此流形不经过 Hamilton 函数的临界点时，即不经过**平衡位置**（equilibrium position）时，就没有闭的——作为流形的——整体截面，见[3]，第 8 章，第 4.7 节）.

对于具有周期右方的非自治系统

$$\dot{x}=f(t,x),\quad f(t+\tau,x)=f(t,x),\quad (*)$$

也有 Poincaré 回归映射的类似物：点 x 被映为点 $Tx=\varphi(\tau,x)$，这里 $\varphi(t,x)$ 是 $(*)$ 的具有初值 $\varphi(0,x)=x$ 的解．这一个"移动一个周期的映射"，当把 $(*)$ 看成是"柱面"相空间上的自治系统时，甚至可以形式地看成一个 Poincaré 回归映射．若 $(*)$ 的解对一切 t 均有定义，则 T 处处有定义.

更常见的是考虑"局部"截面——它只被一部分轨道切割，往往只有一部分轨道在相交后又会回到 V. 作为一个例子，可以考虑与某周期轨道L横截相交的余维数为 1 的光滑的小"曲面元素"．这时 Poincaré 回归映射定义于 $V\cap L$ 附近而刻画 L 附近的轨道的性态.

在叶状结构理论中也可以引入 Poincaré 回归映射（见[2]），它是上例的推广（而且包含了复域中的常微分方程的 Poincaré 回归映射）.

参考文献

[1] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation différentielle, *J. de Math.*, 7 (1881), 375 - 422; 8 (1882), 251 - 296; 1 (1885), 167 - 244, 2 (1886), 151 - 217.

[2] Тамура, И., Топология слоений, М., 1979 (译自日文).

[3] Godbillion, C., Géometrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, 1969.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 回归映射 T 忠实地反映了流 S 的许多性质．例如 T 下的周期点 p 必为 S 的周期点，但周期可能不同．此外，p 之 T 轨道为渐近稳定，当且仅当其 S 轨道有相同性质．T 的离散时间动力学在许多方面比原来的流 S 的连续时间动力学更易于分析．Poincaré 在他对三体问题的同宿轨道的研究中发掘了这些思想（[A7]）.

光滑流形 M 的每个微分同胚 g 也都可以看作一个回归映射：M 可以由把 (x,s) 等同于 $(g(x),s-1)$ 即 $(x,s)=(g(x),s-1)$ 而从 $V\times\mathbf{R}$ 中得出；M 上的流 S则由 $V\times\mathbf{R}$ 上的流 $\widetilde{S}$（其定义为 $\widetilde{S}_t(x,s)=(x,s+t)$）诱导而来；于是 $V\times 0$ 即为一整体截面而 g 是回归映射．用这样的作法，对流证明了的许多结果都可以应用于微分同胚.

关于所有半轨都与 V 相交的情况可见[A8].

上面提到的"柱面"相空间("cylindrical" phase space)定义如下. 考虑与(*)相关联的自治系统

$$\dot{x}=f(y,x),\quad \dot{y}=1 \qquad (A1)$$

把 f 的定义域中每一点 (y,x) 均与 $(y+\tau,x)$ 视为相同, 注意到后者形如 $\mathbf{R}\times D$ 的一点, 这里 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集(当(*)定义于 $\mathbf{R}^n$ 上时). 这时(A1)定义"柱" $I_\tau\times D$ 上的一动力系统, I_τ 是闭区间 $[0,\tau]$ 并视其两个端点为同一点, 即为一圆. 上面考虑的映射 $T:x\mapsto\varphi(\tau,x)$ 就是 $I_\tau\times D$ 上的动力系统(A1)到超曲面 $\{0\}\times D$ 中的 Poincaré 映射.

关于整体截面的存在性, 例如可见[A2] Ⅳ. 2 节, 以及[A3]. 在更一般的变换群的框架中可以讨论"整体切片"(global slices), 例如见[A1]. 至于不可微动力系统局部截面的存在性, 可见[A4] Ⅵ. 2 节. 在叶状结构理论中可以找到 Poincaré 回归映射在(叶的)和乐群之生成元中的推广. 例如可见[A6].

关于 Poincaré 回归映射在微分方程理论中的应用(周期轨道附近的性态), 例如可见[A5](所谓"Floquet 理论"(Floquet theory)).

参考文献

[A1] Abels, H., Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups, *Math. Ann.*, **212** (1974), 1 – 19.

[A2] Bhatia, N. P. and Szegö, G. P., Stability of dynamical systems, Springer, 1970.

[A3] Hajek, O., Parallelizability revisited, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 77 – 84.

[A4] Hajek, O., Dynamical systems in the plane, Acad. Press, 1968.

[A5] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[A6] Hector, G., and Hirsch, U., Introduction to the geometry of foliations, Viehweg & Sons, 1981.

[A7] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, I, Gauthier-Villars, 1899.

[A8] Fried, D., The geometry of cross-sections to flows, *Topology*, **21** (1982), 353 – 371.

齐民友 译

Poincaré 返回定理[Poincaré return theorem; Пуанкаре теорема возвращения], Poincaré 回归定理(Poincaré recurrence theorem)

具有一个**不变测度**(invariant measure)的动力系统(亦见**遍历理论**(ergodic theory))一般理论中的基本定理之一.

设一个系统的运动由微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\cdots,x_n),\ i=1,\cdots,n \qquad (1)$$

描述, 这里单值函数 $X_i(x_1,\cdots,x_n)$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(MX_i)}{\partial x_i}=0,\ M>0,$$

从而方程组(1)有一正**积分不变量**(integral invariant)

$$\int M\,dx_1\cdots dx_n. \qquad (2)$$

还假定存在某个体积为有限的区域 V, 使得如果坐标为 $x_1,\cdots,x_n$ 的动点 P 在初始时刻 t_0 位于 V 内, 则在任意长时间内它保持位于该区域内, 且

$$\int M\,dx_1\cdots dx_n<\infty.$$

Poincaré 返回定理(Poincaré return theorem 或 Poincaré recurrence theorem): 如果考虑包含于 V 内的一个区域 U_0, 则对于点 P 的初始位置可有无穷多种选择, 使得 P 的轨道与区域 U_0 相交无穷多次. 如果在 U_0 内随机选取初始位置, 则点 P 不与区域 U_0 相交无穷多次的概率为无穷小.

换言之, 如果初始条件在前述意义下不属于例外情形, 则点 P 无穷多次经过初始位置任意近处.

H. Poincaré 称这样的运动为 Poisson 意义下稳定的(stable in the sense of Poisson)(见 **Poisson 稳定性**(Poisson stability)): 在运动中该系统无穷次地返回到初始状态的一个邻域中. Poincaré 返回定理最早为 Poincaré 建立(见[1]和[2]), 其证明由 C. Carathéodory 改进([3]).

Carathéodory 用四条公理对度量空间 R 的任一集合 $A\subset R$ 引进测度 μA 的抽象概念, 并考虑 R 中的动力系统 $f(p,t)$(当 $t=0$ 时, $p=P$); 他称所引进的测度关于系统 $f(p,t)$ 是不变的, 如果对任一 μ 可测集 A, 有

$$\mu f(A,t)=\mu A,\ -\infty<t<+\infty.$$

不变测度是关于微分方程组(1)的积分不变量(2)的自然推广. 假定整个空间 R 的测度为有限, Carathéodory 证明:

1) 如果 $\mu A=m>0$, 则可求得值 $t(|t|\geqslant 1)$, 使得 $\mu[A\cdot f(A,t)]>0$, 这里 $A\cdot f(A,t)$ 是同时属于集合 A 和 $f(A,t)$ 的点的集合;

2) 如果具有可数基的空间 R 对不变测度 μ 有 $\mu R=1$, 则(按测度 μ)几乎所有的点 $p\in R$ 是 Poisson 意义下稳定的.

A. Я. Хинчин([5])证明, 对每个可测集 E, $\mu E=m>0$ 和每个 $t(-\infty<t<+\infty)$, 不等式

$$\mu(t)=\mu(E\cdot f(E,t))>\lambda m^2$$

对轴 $-\infty<t<+\infty$ 上一个相对稠密集中的 t 值(对任一 $\lambda<1$)成立, 从而使上述定理中的第一部分

更加精确.

Н. Г. Четаев (见 [6], [7]) 对 (1) 中函数 X_i 还周期地依赖于时间 t 的情形推广了 Poincaré 定理, 即设: a) 只有变量的实值对应到系统的实态; b) 运动微分方程组 (1) 中诸函数 X_i 关于 t 是周期的且只有单个公共周期 τ; c) 如果点 P 的初始位置 P_0 在一个给定的区域 W_0 中, 则点 P 在整个运动过程中不离开某个闭域 R; d) $\text{mes}\, W_k \geqslant a\, \text{mes}\, W_0$, 其中 $\text{mes}\, W_k = \int_{W_k} dx_1 \cdots dx_n$ 表示集合 W_k 的测度 (Lebesgue 意义下的体积), W_k 由在时刻 t_0 从 W_0 出发的时刻 $t = t_0 + k\tau$ 时的动点所组成, k 是某个整数, 并假定常数 a 不是无穷小; 则在区域 W_0 内, 轨道几乎处处 (可能除去一个零测度集) 是 Poisson 意义下稳定的.

Н. М. Крылов 和 Н. Н. Боголюбов ([8]) 对非常广泛的一类动力系统描述了关于给定的动力系统的不变测度的结构 (亦见 [4]).

参考文献

[1] Poincaré, H., Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Math.*, **13** (1890), 1 – 270.

[2] Poincaré, H., Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, 载于其 Oeuvres, Vol. Ⅶ, Gauthier-Villars, 1952, 262 – 479 (特别是 314).

[3] Carathéordory, C., Ueber den Wiederkehrsatz von Poincaré, *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1919), 580 – 584.

[4] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956).

[5] Khinchin, A. Ya. (Хинчин, А. Я), Eine Verschärfung des Poincaréschen Wiederkehrsatzes, *Comp. Math.*, **1** (1934), 177 – 179.

[6] Chetaev, N. G., Sur la stabilité à la Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **187** (1928), 637 – 638.

[7] Четаев, Н. Г., 《Уч. зап. Казанск. ун-та》, **89** (1929), кн. 2, 199 – 201.

[8] Krylov, N. N., Bogolyubov, N. N., La théoriede de la mesure dans son application à l'etude des systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 1, 65 – 113.

В. В. Румянцев 撰

【补注】 所述定理中的集合 U_0 不必是开的: 只需假定 $\mu(U_0) > 0$ 此定理仍为真. 本返回定理对体积为有限的 Riemann 流形 V 上的保体积流成立. 本返回定理对离散时间动力系统, 例如对 Euclid 空间内一个有界域到它自身的保 Lebesgue 测度映射 f 也为真. 至于其他推广, 见 [A1].

看来在 Poincaré 返回定理的判断 (即一个系统几乎必然会任意近地再现其初始状态) 与热力学第二定律和 **Boltzmann** H 定理 (Boltzmann H-theorem) (递增熵) 的结论之间有不协调性. 在这方面下述关于期望返回时间 (expected recurrence time) 的估计是有意思的: 此时间为 $1/\mu(E)$, 这里 E 表示再现的"事件" ($\mu(E) > 0$); 对于实用情形此时间远远大于宇宙的生存时间 (其比率约为 2^{100}); 见 [A2].

角谷静夫应用 Poincaré 返回定理作为**保测度变换** (measure-preserving transformation) 的诱导变换 (induced transformation) 或导出变换 (derivative transformation) 这一重要构造 (连同本原变换 (primitive transformation) 的逆构造) 的基础. 见 [A3] 或 [A4], pp. 39, 40.

参考文献

[A1] Halmos, P. R., Invariant measures, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 735 – 754.

[A2] Kac, M., On the notion of recurrence in discrete stochastic processes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 1002 – 1010.

[A3] Kakutani, S., Induced measure preserving transformations, *Proc. Japan. Acad.*, **19** (1943), 635 – 641.

[A4] Petersen, K., Ergodic theory, Cambridge Univ. Press, 1983.

沈永欢 译

Poincaré 空间 [Poincaré space; Пуанкаре пространство]

1) 形式维数 n 的一个 Poincaré 空间是一个拓扑空间 X, 在该拓扑空间中, 给定一个元素 $\mu \in H_n(X) = \mathbf{Z}$ 使得由 $x \to x \cap \mu$ 给出的同态 $\cap \mu: H^k(X) \to H_{n-k}(X)$ 对每个 k 是一个同构 (这里 $\cap$ 是 Whitney 积运算, 卡积). 更进一步, $\cap \mu$ 称为 Poincaré 对偶同构 (Poincaré duality isomorphism) 和元素 μ 生成群 $H_n(X) = \mathbf{Z}$. 任何一个闭的可定向 n 维连通拓扑流形是一个形式维数 n 的 Poincaré 空间; μ 取流形的一个定向 (基本类).

设 X 是一个嵌入在大维数 N 的 Euclid 空间 $\mathbf{R}^N$ 中的有限胞腔空间, 设 U 是该嵌入的闭正则邻域, ∂U 是它的边界. 标准映射 $p: \partial U \to X$ 原来是 (Serre) 纤维化. 定理: X 是一个形式维数 n 的 Poincaré 空间, 当且仅当纤维化的纤维同伦等价于球面 S^{N-n-1}. 当 X 是 Poincaré 空间 (它的纤维是球面) 时出现所描述的纤维化在相差一个标准等价下是唯一的, 并称为 Poincaré 空间 X 的正规球面纤维化 (normal spherical fibration), 或者 Spivak 纤维化 (Spivak fibration). 更进一步, 投影 $p: \partial U \to X$ 的锥是 X 上的正规球面纤维化的 **Thom** 空间 (Thom space).

如果仅限于系数在某个域 F 中的同调群, 则得到通常所说的 F 上的 Poincaré 空间 (Poincaré space over

F).

也考虑 Poincaré 对(Poincaré pairs)(X, A)(带边流形概念的推广),其中对某个生成元 $\mu \in H_n(X, A) = \mathbf{Z}$ 和任何 k,存在 Poincaré 对偶同构:

$$\cap \mu: H^k(X) \to H_{n-k}(X, A).$$

Poincaré 空间自然地出现在流形上的结构的存在性和分类问题中. Poincaré 空间的光滑(三角剖分)问题、即找一个光滑(分片线性)的同伦等价于一给定的 Poincaré 空间的闭流形,也是有趣的.

2) 有时, n 维 Poincaré 空间(n-dimensional Poincaré space)指的是一个闭 n 维流形 M,它的**同调群**(homology group)$H_i(M)$ 同构于 n 维球面 S^n 的同调群 $H_i(S^n)$;也有称之为同调球面(homology spheres)的.

单连通 Poincaré 空间同伦等价于球面. 对于一个可实现为某个 Poincaré 空间的**基本群**(fundamental group)的一个群 π,有 $H_1(\pi) = H_2(\pi) = 0$,其中 $H_i(\pi)$ 是群 π 的同调群. 反之,对任何 $n \geq 5$ 和任何具有 $H_1(\pi) = H_2(\pi) = 0$ 的有限表示群 π,存在一个 n 维 Poincaré 空间 M 具有 $\pi_1(M) = \pi$.

对 $n = 3, 4$,这些条件在形式 $\pi = \pi_1(M)$ 中不足于实现群 π. 例如,任何三维 Poincaré 空间的基本群允许一个带相同数目的生成元和关系的表示. 只有可实现为三维 Poincaré 空间的基本群的有限群是二元二十面体群 $\langle x, y : x^2 = y^5 = 1 \rangle$,它是**十二面体空间**(dodecahedral space)(历史上第一个 Poincaré 空间的例子)的基本群.

参考文献

[1] Browder, W., Surgery on simply connected manifolds, Springer, 1972.

Ю. В. Рудяк 撰 薛春华 译

Poincaré 球面[Poincaré sphere; Пуанкаре сфера]

把 $\mathbf{R}^3$ 中的球面上之对径点视为同一点所得的球面. Poincaré 球面微分同胚于射影平面 $\mathbf{R}P^2$;它是由 Poincaré 引入(见[1])来研究一个 2 维自治方程组

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{1}$$

的相轨道在无穷远处的性态的,这里 P 和 Q 是多项式. 通常把 Poincaré 球面画得切于 (x, y) 平面;由 Poincaré 球面的球心作投影就给出了到 $\mathbf{R}P^2$ 上的一对一映射,此外,一个无穷远点对应于赤道上的一对对径点. 这样,方程组(1)的相轨道映为球面上的曲线.

研究方程组(1)的一个等价的方法是应用 Poincaré 变换(Poincaré transformation)

$$\text{a)} \quad x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{u}{z},$$

或者

$$\text{b)} \quad x = \frac{u}{z}, \qquad y = \frac{1}{z}.$$

其中第一个(第二个)适用于一个包含 y 轴(x 轴)的扇形之外. 例如,变换 a)把(1)化为

$$\frac{du}{d\tau} = P^*(u, z), \qquad \frac{dz}{d\tau} = Q^*(u, z), \tag{1'}$$

这里 $dt = z^n d\tau$, n 是 P 与 Q 的次数之较大者. 方程组(1')的奇点称为方程组(1)在无穷远处的奇点(singular points at infinity). 若多项式 P 与 Q 互素,则多项式 P^* 与 Q^* 亦然,而方程组(1)在无穷远处有有限多个奇点.

参考文献

[1A] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 7 (1881), 375 – 422.

[1B] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 8 (1882), 251 – 296.

[1C] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 1 (1885), 167 – 244.

[1D] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 2 (1886), 151 – 217.

[2] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973).

[3] Lefschetz, S., Differential equations; geometric theory, Interscience, 1957.

М. В. Федорюк 撰 齐民友 译

Poincaré 定理[Poincaré theorem; Пуанкаре теорема]

设向量场 X 定义在光滑闭的二维 Riemann 流形 V(见**流形上向量场**(vector field on a manifold))上,且设 X 只有有限个孤立奇点 $A_1, \cdots, A_k$. 那么

$$\sum j(X, A_i) = \chi(V);$$

这里 $j(X, A_i)$ 是 X 在点 A_i 的指标(见**奇点的指标**(singular point, index of a)),χ 是 V 的 **Euler 示性数**(Euler characteristic). 这是由 H. Poincaré(1881)建立的.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

后来对一切维数的流形都建立了这个定理([A1]). 一个直接结果是,在偶维数球面 S^n 上不存在无零点(奇点)的连续向量场,即 Poincaré-Brouwer 定

理(Poincaré-Brouwer theorem),也称为毛球定理(hairy ball theorem).对于 $n=2$,它由 Poincaré 建立;对于 $n>2$,它由 L.E.J. Brouwer 建立.另一方面,对于奇维数球面,$v_{2j-1}=-x_{2j}$,$v_{2j}=x_{2j-1}$,$j=1,\cdots,(n+1)/2$,给出了 $S^n=\{(x_1,\cdots,x_{n+1}):\sum x_i^2=1\}$ 上一个无零点的连续向量场.更一般地有,流形 M 上存在无零点的向量场,当且仅当 $\chi(M)=0$([A1]).

参考文献

[A1] Alexandroff, P. [P. S. Aleksandrov] and Hopf, H., Topologie, Chelsea, reprint, 1972, chapt. XIV, Sect. 4.3.

[A2] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976

沈一兵 译

Poincaré 定理(稳定性理论中的)[Poincaré theorem in stability theory; Пуанкаре теорема]

见 **Poisson 稳定性**(Poisson stability).

点[point; запятая],小数点(decimal point),浮点(floating point)

涉及用分数表示实数(real number)以及在数字电子计算机上表示实数的一个术语.

考虑以 q 为底的数系,在此数系中实数 x 表示为

$$x=\sum_{k=-r}^{n}\alpha_k q^k, \tag{1}$$

其中 α_k 是界于 0 与 $q-1$ 之间(包括 0 和 $q-1$)的整数.在 x 通过 q 进分数的表示式

$$x=(\alpha_n\cdots\alpha_1\alpha_0\cdot\alpha_{-1}\alpha_{-2}\cdots) \tag{2}$$

中,小数点(这种情况下有时也称为 q 进小数点)把(1)中的系数划分为 q 的非负幂的系数与 q 的负幂的系数.

数字电子计算机依照表示实数的方式可分为定点设计和浮点设计两种.

定点运算(fixed-point arithmetic)假定所有的数的模都小于 1.设置固定数目的数字来贮存系数 α_{-1},α_{-2},$\cdots$.如果涉及定点数的运算产生模大于 1 的数,则程序执行中断,并呈现溢出信号.为避免此种情形出现,程序员必须预先检查可能出现的溢出并通过适当的比例定标加以阻止.带定点运算的电子计算机的一个例子是"Setun",它以三位数系工作.对于定点运算编制程序的困难清楚说明了为什么绝大多数现代电子计算机使用浮点运算.在浮点记号(floating-point notation)中,一个数写成

$$x=\pm q^p\sum_{k=1}^{n}\alpha_k q^{-k},$$

其中 p 称为 x 的阶码(order 或 exponent),而 $(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 称为 x 的尾数(mantissa).为贮存浮点数的阶码和尾数,通常设定固定数目的数字(由机器字长确定),它是加于阶码上的限定.使 $\alpha_1\neq 0$ 的浮点数称为规范化数(normalized number).浮点运算计算机的算术运算结果通常由该计算机的运算器自动地规范化.

Х.Д.Икрамов 撰

【补注】关于其他表示,见**数的表示**(numbers, representations of).关于包括浮点运算中算术运算的广泛讨论,见[A1].

参考文献

[A1] Young, D. M., Gregory, R. T., A survey of numerical mathematics, Dover, reprint, 1988, 19-55.

沈永欢 译

点估计量[point estimator; точечная оценка]

一种统计估计量(statistical estimator),其值是被估计的量的值集中的点.

假设随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)^T$ 取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathscr{B},\mathrm{P}_\theta)$,$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)^T\in\Theta\subset\mathbf{R}^k$,拟根据 X 的实现 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 估计未知参数 θ(或某个函数 $g(\theta)$).那么,任意将集 $\mathfrak{X}$ 映入 Θ(或函数 $g(\theta)$ 的值集)的统计量 $T_n=T_n(X)$ 称做 θ(或函数 $g(\theta)$)的点估计量(point estimator).点估计量 T_n 的重要特征是其数学期望

$$\mathrm{E}_\theta\{T_n\}=\int_{\mathfrak{X}}T_n(x)d\mathrm{P}_\theta(x)$$

和协方差矩阵

$$\mathrm{E}_\theta\{(T_n-\mathrm{E}\{T_n\})(T_n-\mathrm{E}\{T_n\})^T\}.$$

向量 $d(X)=T_n(X)-g(\theta)$ 称为点估计量 T_n 的误差向量(error vector of the point estimator).如果对于一切 $\theta\in\Theta$,

$$b(\theta)=\mathrm{E}_\theta\{d(X)\}=\mathrm{E}_\theta\{T_n\}-g(\theta)$$

是零向量,则称 T_n 为函数 $g(\theta)$ 的无偏估计量(unbiased estimator)或称 T_n 不含系统误差;否则 T_n 称为有偏的(biased),而向量 $b(\theta)$ 称为点估计量偏倚(bias)或系统误差(systematic error).点估计量的质量,可以用风险函数来评价(见**统计程序的风险**(risk of a statistical procedure)).

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946(中译本:H.克拉美,统计学数学方法,上海科学技术出版社,1966).

[2] Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979(英译本:Ibragimov, I. A. and Has'minskii, R. Z. [Khas'minskii,

R. Z.], Statistical estimation: asymptotic theory, Springer, 1981). М. С. Никулин 撰

【补注】

[A1] Lehmann, E. L., Theory of point estimation, Wiley, 1983. 周概容、王健 译

一般位置点 [point in general position; общего положения точка]

代数簇上的点，它属于 Zariski 拓扑里的一个开稠密子集 S. 在代数几何里一个一般位置点常被称作一般点或泛点 (generic point). О. А. Иванова 撰

【补注】 更精确地说，一个点被称为位于一般位置 (general position) 是指它在某个 (给定的或被描述的) 闭集之外. 不可约集 X 的一个点被称为一般 (generic) 点是指它在每个异于 X 的闭集之外.

在微分拓扑里，"一般位置的点"常被用于一般点 (generic point) 的意义. 粗浅地说，一般点就是"与其他被考察的结构元素之间不存在会影响当前讨论的特殊关系的点." 其精确意义取决于上下文. 一个元素一般地 (generically) 具有某个性质是指此性质在开稠密子集 (的可数交) 里成立. 例如一个多项式一般地无二重根. 两个子流形 $A, B \subset N$ 在一般位置 (general position) 是指它们"相交得尽可能少". 当 $\dim A + \dim B < \dim N$ 时，这意味着 $A \cap B = \varnothing$; 当 $\dim A + \dim B \geqslant \dim N$ 时，则对每个 $x \in A \cap B$, $T_x A + T_x B = T_x N$. 任何非一般位置的情形可通过任意小的变动化为一般位置的情形. 而如果本身处于一般位置，那么充分小的变动不会改变这一状况. 一般位置的一个精确的版本是**横截性** (transversality), 亦见**横截性条件** (transversality condition).

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

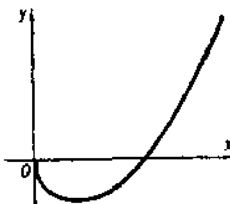
[A2] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976, p. 4, 78.

[A3] Chillingworth, D. R. J., Differential topology with a view to applications, Pitman, 1976, p. 221 ff.

陈志杰 译

终止点 [point of cessation; прекращения точка]

平面曲线上使曲线终止的**奇点** (singular point). 以终止点为中心，半径充分小的圆与曲线只相交一点. 例如，对于曲线 $y = \ln x$, 原点是终止点 (见图).



БСЭ-3 沈一兵 译

拐点 [point of inflection; перегиба точка]

平面曲线上具有下述性质的点 M: 曲线在 M 处有唯一切线，并且在 M 的一个小邻域内，曲线位于由切线和法线组成的一对直角区域内 (图 1).

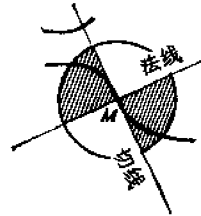


图 1

设函数 f 定义在一点 x_0 的某个邻域内，并设 f 在该点连续. 点 x_0 称为 f 的拐点，如果它既是严格凸向上区间的端点，同时又是严格凸向下区间的端点. 在这种情况下，点 $(x_0, f(x_0))$ 称为函数图形的拐点，即 f 的图形在 $(x_0, f(x_0))$ 处"拐"过它在该点的切线; 当 $x < x_0$ 时，切线位于 f 图形的下方，而当 $x > x_0$ 时，切线位于图形的上方 (或反之，图 2).

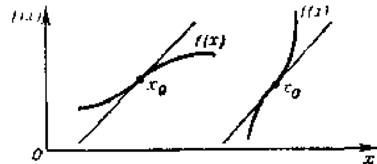


图 2

拐点存在的必要条件 (necessary existence condition) 是: 若 f 在点 x_0 的某个邻域内二次可微，且若 x_0 是拐点，则 $f''(x_0) = 0$. 拐点存在的充分条件 (sufficient existence condition) 是: 若 f 在点 x_0 的某个邻域内 $k(\geqslant 3)$ 次连续可微，k 为奇数，且对于 $n = 2, \cdots, k-1$, $f^{(n)}(x_0) = 0$, 而 $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, 则 f 在 x_0 处有一拐点.

参考文献

[1] Ильин, В. А. & Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980 (英译本: Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 2, Mir, 1982).

[2] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, М., 1981.

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M. & Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988 (译自法文).

[A2] Coolidge, J., Algebraic plane curves, Dover, reprint, 1959.

沈一兵 译

平直点 [**point of rectification**; **спрямления точка**]

曲线上曲率等于零的点．在平直点，曲线与其切线的离差至少是三阶．若在平直点，曲线从切线的一侧穿过其切线到另一侧，则平直点是**拐点**（point of inflection）．　　А. Б. Иванов 撰　沈一兵 译

带基点对象 [**pointed object**; **пунктированный объект**]，有终对象范畴 C 中的

一个对 (X, x_0)，此处 $X \in \mathrm{Ob}\, C$，x_0 是从终对象到 X 中的一个态射．例如带基点拓扑空间（见**带基点空间**（pointed space））．C 中的带基点对象构成一个范畴，其中的态射是将不同的点对应于不同点的映射．

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 C 的带基点对象范畴有零对象（见**范畴的零对象**（null object of a category）），即 C 的终对象，带有它的唯一的基点．反之，若一个范畴有零对象，则同构于它自身的带基点对象范畴．

张英伯 译

带基点的空间 [**pointed space**; **пунктированное пространство**]

具有特异点 x_0 的拓扑空间（topological space）X；在拓扑空间范畴中的**带基点的对象**（**pointed object**）．

М. И. Войцеховский 撰　白苏华　胡师度 译

点态收敛 [**pointwise convergence**; **поточечная сходимость**]

函数（映射）序列收敛的一种类型．设 $f_n: X \to Y (n = 1, 2, \cdots)$，其中 X 是某集合，Y 是拓扑空间（topological space）；那么点态收敛意指对任何元素 $x \in X$，点列 $y_n = f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在空间 Y 中收敛．对于度量空间（或者更为一般地，一致空间）之间的映射，点态收敛序列有一个重要的子类就是一致收敛序列（见**一致收敛**（uniform convergence））．

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 在从 X 到 Y 的连续映射空间 $C(X, Y)$ 上，点态收敛的拓扑基可如下得到．取定一个有限集 $K \subset X$，对每个 $x \in K$，都有 Y 中包含 $f(x)$ 的一个开子集；对于给定的 f，其开基邻域是：$\{g \in C(X, Y): g_x \in V_x$，对所有 $x \in K\}$．亦见**点态收敛的拓扑**（pointwise convergence, topology of）．

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984, 86 (译自俄文).　罗嵩龄 译

点态收敛拓扑 [**pointwise convergence, topology of**; **поточечной сходимости топология**]

把集合 X 映入拓扑空间 Y 的映射组成的空间 $F(X, Y)$ 上的拓扑结构之一．一个广义序列（generalized sequence）$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}} \subset F(X, Y)$ 点态收敛于 $f \in F(X, Y)$，如果对所有 $x \in X$，$\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ 按 Y 的拓扑收敛于 $f(x)$．点 $f_0 \in F(X, Y)$ 的邻域基由 $\{f: f(x_i) \subset v_{f_0(x_i)}, i = 1, \cdots, n\}$ 型的集合构成，这里，$x_1, \cdots, x_n$ 是 X 中的有限点集，$v_{f_0(x_i)} \in V_{f_0(x_i)}$ 是点 $f_0(x_i)$ 在 Y 中的一邻域基．

若 Y 是 Hausdorff 空间，则 $F(X, Y)$ 也是 Hausdorff 空间；$A \subset F(X, Y)$ 为紧集的充要条件是，A 为闭集，且对所有 $x \in X$，集合 $A_x = \{f(x): f \in A\}$ 是紧的．

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本 J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982).

В. И. Соболев 撰

【补注】 关于 Тихонов 空间（即完全正则空间）X 的拓扑性质与 $C_p(X)$ 的拓扑（或线性拓扑）性质之间的关系已有大量的研究，其中 $C_p(X)$ 是 X 上的连续实值函数空间，X 赋予点态收敛拓扑．见 [A1]．

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V., A survey of *Cp*-theory, *Questions & Answers in Gen. Topol.*, 5 (1987), 1 – 109.

[A2] Engelking, R. General topology, Heldermann, 1989.

白苏华　胡师度 译

点态剩余 [**pointwise remainder**; **пунктиформный нарост**]，点状剩余（punctiform remainder）

拓扑空间 X 在它的紧化 Y 中的剩余，使得在 $Y \setminus X$ 中的每个连通紧统都正好由一点组成（亦见**剩余（空间的）**（remainder of a space））．

М. И. Войцеховский 撰　白苏华　胡师度 译

Poiseuille 流 [**Poiseuille flow**]

【补注】 在圆形截面长管道中的均质粘性不可压缩流体的流动．对于在 x 方向上的定常流，流动方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\mu^{-1} G,$$

其中 G 是压力梯度，μ 是粘性系数．对 Poiseuille 流，假设流动具有与边界条件同样的轴对称性，于是 u 仅是到管轴距离的函数．在管边界上具有边界值 0 和在轴上没有奇异性时的解是

$$u(r) = \frac{G}{4\mu}(a^2 - r^2),$$

其中 a 是管的半径．这种流动是由 G. Hagen 于 1938 年和 J. L. M. Poiseuille 于 1940 年研究的．

Poiseuille 流在小 **Reynolds 数**（Reynolds number）时是稳定的，在较高 Reynolds 数时就变成不稳定的，这是由 O. Reynolds 于 1883 年用实验确立的．对于 Poiseuille 流临界 Reynolds 数为 $2\cdot 10^3$ 左右．为讨论 Poiseuille 流的流体动力学不稳定性（hydrodynamic instability）和分叉以及如 Couette 流（Couette flow）（在两个旋转的共轴圆柱之间液体的定常环流）那样的其他层流（laminar flows）见[A1]，[A2]，亦见 **Orr-Sommerfeld 方程**（Orr-Sommerfeld equation）．

参考文献

[A1] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Dover, reprint, 1981, chapt. VII.

[A2] Hughes, Th. J. R. and Marsden, J. E., A short course on fluid mechanics, Publish or Perish, 1976, §18.

[A3] Batchelor, G. K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge Univ. Press, 1967, p. 180 ff.

李维新 译

Poisson 括号 [Poisson brackets; Пуассона скобки]

含有 $2n$ 变元 $q=(q_1,\cdots,q_n)$，$p=(p_1,\cdots,p_n)$ 的两个函数 $u(q,p)$ 和 $v(q,p)$ 的微分表达式

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right]. \quad (1)$$

Poisson 括号是由 S. Poisson 在[1]中引入的，是 **Jacobi 括号**（Jacobi brackets）的特例．Poisson 括号是函数 u 和 v 的双线性型，使得

$$(u,v)=-(v,u),$$

且有 Jacobi 恒等式成立（见[2]）：

$$(u,(v,w))+(v,(w,u))+(w,(u,v))=0.$$

Poisson 括号应用于一阶偏微分方程理论中，而且是解析力学中有用的工具（见[3]－[5]）．例如，设 q 和 p 是典范变量且给定一个变换

$$Q=Q(q,p),\ P=P(q,p), \quad (2)$$

其中 $Q=(Q_1,\cdots,Q_n)$，$P=(P_1,\cdots,P_n)$，而 $(n\times n)$ 矩阵

$$(P,P),\quad (Q,Q),\quad (Q,P) \quad (3)$$

分别以 (P_i,P_j)，(Q_i,Q_j)，(Q_i,P_j) 为元素，则 (2) 为典范变换，当且仅当 (3) 中的前两个矩阵是零矩阵而第三个则是单位矩阵．

若将 (1) 中的 u，v 换成 q 与 p 的坐标函数对，这样算出来的 Poisson 括号也称基本括号（fundamental brackets）．

参考文献

[1] Poisson, S., *J. Ecole Polytechn.*, **8** (1809), 266－344.

[2] Jacobi, C. G. J., Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variablium quemcunque propositas integrandi, *J. Reine Angew. Math.*, **60** (1862), 1－181.

[3] Whittaker, E. T., Analytical dynamics of particles and rigid bodies, Dover, reprint, 1944.

[4] Лурье, А. И., Аналитическая механика, М., 1961.

[5] Goldstein, H., Classical mechanics, Addison-Wesley, 1957.

А. П. Солдатов 撰

【补注】 Poisson 括号的另一些基本性质是它在典范变换下的不变性、以及如果 H 是 **Hamilton 函数**（Hamilton function），(F,H) 等于 $F(q,p)$ 沿轨道的导数．于是相应的 Hamilton 方程组可写为 $\dot{q}_i=(q_i,H)$，$\dot{p}_i=(p_i,H)$．于是"标准的" Hamilton 函数 $H=(\sum p_i^2)/2+V(q)$，这个方程组就回到 Newton 的运动方程组 $\dot{q}_i=p_i$，$\dot{p}_i=-\partial H/\partial q_i$．所以 $(F,H)=0$ 就表示一个守恒律（conservation law），即 F 是一个保持不变的量．

对于依赖于函数 $q(x)$ 的泛函

$$F[q]=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{F}(q,q^{(1)},q^{(2)},\cdots)dx,$$

其中 $q^{(n)}=d^nq/dx^n$，也可以定义 Poisson 括号．

这时有

$$(F,G)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta\widetilde{F}}{\delta q}\frac{d}{dx}\frac{\delta\widetilde{G}}{\delta q}dx,$$

其中 $\delta\widetilde{F}/\delta q$，$\delta\widetilde{G}/\delta q$ 是变分导数（variational derivative），即

$$\frac{\delta\widetilde{F}}{\delta q}=\sum\left[-\frac{d}{dx}\right]^n\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial q^{(n)}}.$$

参考文献

[A1] Newell, A. C., Solitons in mathematical physics, SIAM, 1985.

[A2] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М., 1974（中译本：В. И. 阿诺尔德，经典力学的数学方法，高等教育出版社，1992）．

[A3] Abraham, R. and Marsden, J. E., Foundations of mechanics, Benjamin, 1978.

[A4] Gantmacher, F. R. [F. R. Gantmakher], Lectures in analytical mechanics, Mir, 1975（译自俄文）．

齐民友 译

Poisson 分布 [Poisson distribution; Пуассона распределение]

取非负整数值 $k=0,1,\cdots$ 的随机变量 X 的概率分布（probability distribution）：X 取 k 的概率为

$$\mathrm{P}\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

其中参数 $\lambda > 0$. Poisson 分布的**母函数** (generating function) 和**特征函数** (characteristic function) 相应为

$$\varphi(z) = e^{\lambda(z-1)} \text{ 和 } f(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

数学期望、方差和较高阶半不变量都等于 λ. Poisson 分布的分布函数

$$F(x) = \sum_{i=0}^{[x]} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} ,$$

对于 $k = 0, 1, \cdots$ 可以表示为

$$F(k) = \frac{1}{k!} \int_{\lambda}^{\infty} y^k e^{-y} dy = 1 - S_{k+1}(\lambda),$$

其中 $S_{k+1}(\lambda)$ 是参数为 $k+1$ 的 Γ **分布** (gamma-distribution) 函数在点 λ 处的值; 因此, 特别有

$$\mathrm{P}\{X = k\} = S_k(\lambda) - S_{k-1}(\lambda);$$

或者表示为

$$F(k) = 1 - H_{2k+2}(2\lambda),$$

其中 $H_{2k+2}(2\lambda)$ 是自由度为 $2k+2$ 的 χ^2 **分布** ('chi-squared' distribution) 函数在点 2λ 处的值. 分别服从参数为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的 Poisson 分布的独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 之和, 服从参数为 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ 的 Poisson 分布.

相反, 如果二独立随机变量 X_1 与 X_2 之和 $X_1 + X_2$ 服从 Poisson 分布, 则二随机变量 X_1 和 X_2 也都服从 Poisson 分布 (Райков 定理 (Raikov theorem)). 关于独立随机变量之和的分布收敛于 Poisson 分布, 存在的一般充分必要条件. 当 $\lambda \to \infty$ 时, 随机变量 $(X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ 的极限分布是**标准正态分布** (normal distribution).

Poisson 分布, 最初是由 S. Poisson (1837) 在 n (试验次数) 很大而 p (成功概率) 很小的情形下, 推导**二项分布** (binomial distribution) 的渐近公式时得到的. 见 **Poisson 定理** (Poisson theorem 2). Poisson 分布很好地近似描绘许多物理现象 (见 [2], 1, 第 6 章). Poisson 分布是许多离散型分布的极限分布, 例如, **超几何分布** (hypergeometric distribution), **负二项分布** (negative binomial distribution). **Pólya 分布** (Pólya distribution), 以及 "质点按盒分配" 问题中在其参数一定变化情形下产生的分布. 在概率模型中, Poisson 分布作为精确概率分布有很大作用. 在随机过程论 (见 **Poisson 过程** (Poisson process)) 中, Poisson 分布作为精确概率分布其本质表现得最充分: Poisson 分布是在固定时间段 t 内某些随机事件出现次数 $X(t)$ 的分布

$$\mathrm{P}\{X(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} , \quad k = 0, 1, \cdots$$

(参数 λ 是事件在单位时间内出现的平均次数); 或更一般地, Poisson 分布是 Euclid 空间中固定区域内随机质点个数的分布 (分布参数与区域的体积成正比).

除上面定义的 Poisson 分布外, 还研究所谓广义或复合 Poisson 分布 (generalized or compound Poisson distribution). 这是同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 中 ν 个之和 $X_1 + \cdots + X_\nu$ 的概率分布, 其中 ν 是随机变量, $\nu, X_1, X_2, \cdots$ 相互独立且 ν 服从参数为 λ 的 Poisson 分布. 复合 Poisson 分布的特征函数 $\varphi(t)$ 为

$$\varphi(t) = \exp\{\lambda(\psi(t) - 1)\},$$

其中 $\psi(t)$ 是 X_i 的特征函数. 例如, 参数为 n 和 p 的负二项分布是复合 Poisson 分布, 因为对此只需设

$$\psi(t) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1 - q e^{it}} , \quad \lambda = \log \frac{1}{p} , \quad q = 1 - p.$$

复合 Poisson 分布无穷可分, 而且每一个**无穷可分分布** (infinitely-divisible distribution) 都是复合 Poisson 分布的极限 (可能是 "移位" 的复合 Poisson 分布, 其特征函数为 $\exp\{\lambda_n(\psi(t) - 1 - it a_n)\}$). 此外, 无穷可分分布 (只有这类分布) 可由形如

$$h_{n1} X_{n1} + \cdots + h_{nk_n} X_{nk_n} - A_n$$

和的分布的极限得到, 其中 $(X_{n1}, \cdots, X_{nk_n})$ 形成具有 Poisson 分布的独立随机变量的系列概形, $h_{nk_n} > 0$, 而 A_n 是实数.

参考文献

[1] Poisson, S. D., Récherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, Paris, 1937.

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 科学出版社, 上册, 1964, 下册, 1979.).

[3] Большев Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М, 1968.

[4] Линник, Ю. В., Островский, И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972 (英译本: Linnik, Yu. V. and Ostrovskiĭ, I. V., Decomposition of random variables and vectors, Amer. Math. Soc., 1977).

А. В. Прохоров 撰

【补注】 在排队论 (queueing theory) 中常要用到 Poisson 分布.

参考文献

[A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Distributions in statistics: discrete distributions, Houghton Mifflin, 1970.

周概容 译

Poisson 方程 [Poisson equation; Пуассона уравнение]

由置于区域内部的一个质量分布产生的**位势** (po-

tential) 所满足的偏微分方程．关于空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 的 **Newton 位势** (Newton potential) 与 $\mathbf{R}^2$ 的**对数位势** (logarithmic potential), Poisson 方程具有如下形式

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=-\sigma(S^n)\rho(x_1,\cdots,x_n),$$

其中 $\rho=\rho(x_1,\cdots,x_n)$ 是这个质量分布的密度，$\sigma(S^n)=n\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面 S^n 的面积，而 $\Gamma(n/2+1)$ 是 Γ 函数的值．

Poisson 方程是非齐次椭圆型方程的一个基本例子．S. Poisson (1812) 首先研究这种方程．

参考文献

[1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, M., 1976 (英译本 Bitsadze, A. V., Equations of mathematical physics, Mir. 1980).

[2] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特．数学物理方法，II，科学出版社，1977).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 映射 $u\mapsto\Delta(u)$ 定义一个态射，它把上调和函数的局部差构成的层映入 $\mathbf{R}^n$ 上的测度层．由此引导出在**调和空间** (harmonic space) 框架中 Poisson 问题的处理方法，见 [A1].

参考文献

[A1] Maeda, F.-Y., Dirichlet integrals on harmonic space, Springer, 1980.

[A2] Poisson, S. D., Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes, *Nouveau Bull. Soc. Philomathique de Paris*, 3 (1813), 388 – 392.

[A3] Rudin, W., Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980.

[A4] Kellogg, O. D., Foundations of potential theory, F. Ungar, 1929. Re-issue: Springer, 1967.

吴炯圻 高琪仁 译

Poisson 方程，数值解法 [Poisson equation, numerical methods; Пуассона уравнение, численные методы решение]

将 **Poisson 方程** (Poisson equation)

$$\Delta u(x)\equiv\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}=f(x),\ x\equiv(x_1,\cdots,x_d)\quad(1)$$

原来的边值问题用 N 个线性代数方程的方程组

$$L_N(\mathbf{u}_N)=\mathbf{f}_N\quad(2)$$

来代替的方法，后者具有解 $\mathbf{u}_N\equiv(u_1,\cdots,u_N)$，它使得有可能去构造原问题的解当 $N\to\infty$ 时的某个逼近解 $p_N\mathbf{u}^N$．

人们定义这样特别重要的概念为数值方法的误差和误差估计 (精确度)，它依赖于原始问题 (1) 的解和离散问题 (2) 的解作比较的方式．和解的稳定性 (离散问题的适定性) 相关联的方程组 (2) (边值问题的离散类似) 的代数性质，以及当实现相应的计算和实现对计算机内存相应的要求 (见**计算量的极小化** (minimization of the labour of calculation)) 时，用某种直接法或迭代法求 (2) 的精确解或近似解的可能性，这些给出了数值方法的其他特征．

Poisson 方程边值问题的数值解是重要的，不仅因为这些问题经常在科学和技术的不同分支中出现，而且因为它们是经常用来解椭圆型方程和方程组以及各种非定常方程组的更加一般的边值问题的一种手段．求解所考虑的边值问题的基本数值方法是投影法和差分法 (见 [1] – [13])．

投影法．包括下列一些方法：变分法、最小二乘法、Галеркин 法，投影差分法，投影网格法和有限元法等．所有这些都可以利用下面对有限维子空间 H_N 和 $F_N(N\to\infty)$ 的选择，特征地将原来的边值问题化为一个算子方程

$$L(u)=f\quad(3)$$

(例如，算子 L 将一 Hilbert 空间 H 作用到 H 中)；在这些方法中问题 (3) 本身被换成求 $\hat{u}_N\in H_N$ 的问题，使得对任一 $v\in F_N$，有

$$(L\hat{u}_N-f,\ v)_H=0.$$

于是，在 H_N 和 F_N 中给出基，方程组 (2) 是对 $\hat{u}_N$ 关于 H_N 的基的展开式中系数的方程组，而 $p_N\mathbf{u}_N$ 则可以取为函数 $\hat{u}_N$ 本身；在此方法中自然定义 $\|u-\hat{u}_N\|_H$ 为误差．在最重要的情形中，H 是 Соболев 空间 $W_2^1(\Omega)$ 的某个子空间，$H_N=F_N$．且如果 $\psi_1(x),\cdots,\psi_N(x)$ 是 H_N 的一组基，那么方程组 (2) 取下面的形式：

$$\sum_{j=1}^{N}u_j\int_{\Omega}\operatorname{grad}\psi_j(x)\operatorname{grad}\psi_i(x)\,dx=$$

$$=\int_{\Omega}f(x)\psi_i(x)\,dx,\ i=1,\cdots,N.\quad(4)$$

此方法中的误差是用原来问题的解在 H 中到子空间 H_N 的距离来估计的 (见 [1], [5] – [11])．在投影法的近代变种中，子空间 H_N 可以这样来选择：使得函数 $\psi_i(x)$ 有局部支集，于是在 (4) 中每个方程都只有有限个系数不为零．这一类型的方法亦称为投影网格法 (projection-grid methods) (投影差分，变分差分，有限元法) (见 [1], [4], [7] – [11])．这些方法的最大优点是它们可以应用于当所考虑的边值问题的

区域 Ω 的几何形状十分复杂的情形．非常接近于投影法但相对地很少应用的是**配置法**（collocation method）、谱方法和边界元法（见[13]－[15]）．

差分（有限差分）法．利用包含有一个网格的 N 个节点的某个网格区域 Ω_N 去逼近原来的区域 Ω，逼近 Poisson 方程和相应的边界条件是用它们的差分（网格）相应物，这些差分只取函数在所选择的节点上的值，这样通常导致一个方程组（2）（见[1]）．此方法的误差通常是由比较矢量 $\mathbf{u}_N$ 和通过限制所求解在所考虑的节点集合上所得到的矢量而得到的．可以研究不同范数选择下的适定性和逼近性；特别地，有可能利用最大值原理；收敛性是作为适定性和逼近性的推论而得到的（见[1]－[4]）．

方程组（2）可以根据它们对应的变分问题的某些离散相应物而导出，也可以根据它们对某个积分关系式的近似而导出（见[1]，[2]，[4]，[11]）；这样的办法使得差分法的这些变种有些接近于投影差分法．

研究得最多的解网格方程组（2）的方法是平行六面体网格上的最简单的差分相应物（见[1]，[10]）．在两个变量情形且当区域 Ω 在平面上是长方形时，直接法常常对很多边界条件使用；这些直接法使得人们能以 $O(N\ln N)$ 个算术运算的代价去求出（2）的解．使用离散 Fourier 变换和归约法的方法属于**分离变量法**（separation of variables，method of）；此外还有具有 $O(N)$ 个运算的方法（见[11]－[13]）．当 $d\geqslant 2$ 和可以使用分离变量（在此情形下 Ω 是平行六面体）时，可以用交替方向迭代方法、以 $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$ 个运算及 $\varepsilon>0$ 的精确度求出（2）的解（见[1]，[11]）；具有可因式分解的算子的迭代方法（具有对称化的逐次超松弛法，不完全的矩阵因式分解，交替三角法）使人们能在相当一般的情况下用 $O(N^{1+1/2d}|\ln\varepsilon|)$ 个运算精确到 ε 求出（2）的解（见[11]，[12]）．

在平面上由有限个长方形组成的单连通域和多连通域 Ω 的情形，可以用将 Ω 分成长方形的办法，用 $O(N\ln N+N^{3/4}|\ln\varepsilon|\ln N)$ 个运算精确到 ε 求出方程组（2）的解（见[11]，[13]）．对于某些区域，可以用容量法和虚设未知量的方法得到 Dirichlet 问题的离散相应物的类似的渐近解（见[11]，[13]）．对原来问题的某些投影差分相应物的方程组（2），通过用算子的谱等价的迭代方法可以得到阶为 $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$ 的计算量，有时（当 ε 是 $N^{-\alpha}$ 阶时，$\alpha>0$）阶还可达到 $O(N\ln N)$（见[11]，[13]）．在一些情形中，网格序列的使用，使人们能得到给出（2）的解的方法，它具有 $N^{-\alpha}(\alpha>0)$ 阶的精确度，且具有渐近地最小的计算工作（运算量是 $O(N)$）（例如，见[1]，[10]，[11]）．

参考文献

[1] Годунов, С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977（英译本：Godunov, S. K. and Ryaben'kii, V. S., The theory of difference schemes, North-Holland, 1964）

[2] Ладыженская, О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973（英译本：Ladyzhenskaya, O. A., The boundary value problems of mathematical physics, Springer, 1986）.

[3] Марчук, Г. И., Шайдуров, В. В., Повышение точности решений разностных схем, М., 1979（英译本：Marchuk, G. I. and Shaidurov, V. V., Difference methods and their extrapolations, Springer 1983）

[4] Самарский, А. А., Андреев, В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976.

[5] Михлин, С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966（英译本：Mikhlin, S. G., The numerical performance of variational methods, Wolters-Noordhoff, 1971）.

[6] Красносельский, М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969（英译本：Krasnosel'skii, M. A., et al., Approximate solution of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1972）.

[7] Aubin, J. P., Approximation of elliptic boundary value problems, Wiley, 1972.

[8] Strang, G. and Fix, J., An analyse of the finite element method, Prentice-Hall, 1973.

[9] Ciarlet, Ph. G., The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1978.

[10] Hackbusch, W., Multigrid methods and applications, Springer, 1985.

[11] D'yakonov, E. G., Minimization of computational work. Asymptotically optimal algorithms for elliptic problems, Moscow, 1989（俄文）.

[12] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978（英译本：Samarskii, A. A. and Nikolaev, E. S., Numerical methods for grid equations, 1－2, Birkhäuser, 1989）.

[13] Glowinski, R., Golub, G. H., Meurant, G. A. and Periaux, J.（eds.）, First Internat. Symp. Domain Decomposition Methods For Partial Diff. Eqs., SIAM, 1988.

[14] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., Spectral methods in fluid dynamics, Springer, 1988.

[15] Banerjee, P. K. and Butterfield, R., Boundary element methods in engineering science, McGraw-Hill, 1981.

Е. Г. Дьяконов 撰

【补注】 最近几年一类新的且十分有力的方法被提出来了，它本质上有 $O(N)$ 的复杂性．这些所谓的**多重网格法**（multigrid methods）基于在粗网格（coarser grids）上增加使用较高频率的光滑效应和在细网格（finer grids）上减少使用较低频率．它们必须被认为

是当今最有力的使用工具，且可以用于有限差分和有限元的离散化.

参考文献

[A1] Hackbusch, W. and Trottenberg, U., Multigrid methods, Springer, 1982.

[A2] McCormick, S. F., Multigrid methods, SIAM, 1987.

[A3] Birkhoff, G. and Lynch, R. E., Numerical solution of elliptic problems, SIAM, 1984.

[A4] Johnson, C., Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Cambridge Univ. Press, 1987.

[A5] Smith, G. D., Numerical solution of partial differential equations: finite difference method, Clarendon Press, 1978.

[A6] Mitchell, A. R. and Griffiths, D. F., The finite difference method in partial differential equations, Wiley, 1980.

[A7] Mitchell, A. R. and Wait, R., Finite element analysis and applications, Wiley, 1985.

孙和生 译 陆柱家 校

Poisson 流 [Poisson flow; Пуассоновский поток]

同 **Poisson 过程** (Poisson process). 这一术语通常用于排队论 (queueing theory).

Poisson 公式 [Poisson formula; Пуассона формула]

1) 等同于 **Poisson 积分** (Poisson integral).

2) 一个积分表示式，它给出了 $\mathbf{R}^3$ 中关于下列波动方程 (wave equation) 的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 的解:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0,\ t > 0,\ M = (x, y, z),$$

$$-\infty < x, y, z < \infty,$$

$$u(M, 0) = \varphi(M),\ \frac{\partial u(M, 0)}{\partial t} = \psi(M).$$

这个解具有如下形式

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t}\{t\Gamma_{at}(\varphi)\} + t\Gamma_{at}(\psi), \quad (1)$$

其中

$$\Gamma_{at}(\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_{at}} \varphi(p)\, d\Omega$$

是函数 φ 在 (x, y, z) 空间里以 M 点为中心，at 为半径的球面 S_{at} 上的平均值，$d\Omega$ 是单位球面的面积元素. 对非齐次波动方程的情况，公式 (1) 右边还要加上第三项 (见[2]).

利用下降法 (descent, method of). 由公式 (1) 可得到二维及一维空间中 Cauchy 问题解的公式 (分别为 Poisson 公式 (Poisson formula) 和 d'Alembert 公式 (d'Alembert formula)). 亦见 **Kirchhoff 公式** (Kirchhoff formula).

3) 有时 "Poisson 公式" 这一术语指 $\mathbf{R}^3$ 空间热传导方程 (heat equation) Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0,\ t > 0,\ M = (x, y, z),$$

$$-\infty < x, y, z < \infty,$$

$$u(M, 0) = \varphi(M)$$

的解的积分表示，这个解形如

$$u(M, t) =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi a^2 t})^3}\int_{R^3} \varphi(p) e^{-MP^2/(4a^2 t)}\, d\sigma(p). \quad (2)$$

公式 (2) 可直接推广到 n 维空间 ($n \geqslant 1$).

参考文献

[1] Poisson, S. D., *Mém. Acad. Sci. Paris*, 3 (1818), 121 – 176.

[2] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977 (中译本: A. H. 吉洪诺夫, A. A. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上, 下册, 高等教育出版社, 1956).

[3] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984)

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whitham, G. B., Linear and nonlinear waves, Wiley-Interscience, 1974, p. 229ff.

[A2] Bitsadze, A. V., Equations of mathematical physics, Mir, 1980, p. 179 (译自俄文)

吴炯圻 高琪仁 译

Poisson 积分 [Poisson integral; Пуассона интеграл]

在单连通区域中关于 **Laplace 方程** (Laplace equation) 的 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 的解的积分表示. 具体地，在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) 中以 R 为半径，以坐标原点为中心的球体 $B_n(0, R)$ 上的 Poisson 积分具有形式

$$u(x) = \int_{S_n(0,R)} f(y) PB_n(x, y)\, dS_n(y), \quad (1)$$

其中 f 是在半径为 R 的球面 $S_n(0, R)$ 上给定的连续函数，

$$PB_n(x, y) = \frac{1}{\sigma_n}\frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)}{|x - y|^n}$$

是该球的 Poisson 核 (Poisson kernel for the ball)，$\sigma_n = n\pi^{n/2}R^{n-1}/\Gamma(1 + n/2)$ 是球面 $S_n(0, R)$ 的面积，而 dS_n 是 $S_n(0, R)$ 上的面积元.

在 $n = 2$ 的情形下，S. Poisson 在[1]中得到的

公式(1)是作为三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)r^k$$

之和的积分公式，这里 a_k，b_k 是函数 $f(y)=f(e^{i\varphi})$ 的 Fourier 系数，(r,θ) 与 $(1,\varphi)$ 分别是点 $x=re^{i\theta}$ 与 $y=e^{i\varphi}$ 的极坐标；这时，Poisson 核具有形式

$$PB_2(x,y)=PB_2(re^{i\theta},e^{i\varphi})=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}. \qquad (2)$$

(关于 Poisson 积分在三角级数理论中的应用见[3]. 亦见 **Abel-Poisson 求和法**(Abel-Poisson summation method).

在半空间

$$\mathbf{R}^n_+=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:x_n>0\}$$

上的 Poisson 积分具有形式

$$u(x)=\int_{\mathbf{R}^n_0}f(y)PR^n_+(x,y)dR^n_0(y), \qquad (3)$$

其中

$$\mathbf{R}^n_0=\{y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n:y_n=0\},$$

dR^n_0 是 $\mathbf{R}^n_0$ 的体积元，f 是 $\mathbf{R}^n_0$ 上的有界连续函数，而

$$PR^n_+(x,y)=\frac{2\Gamma(1+n/2)}{n\pi^{n/2}}\ \frac{x_n}{|x-y|^n}$$

是该半空间的 Poisson 核(Poisson kernel for the half-space). 公式(1)和(3)都是 Green 公式

$$u(x)=\int_\Gamma f(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}d\Gamma(y) \qquad (4)$$

的特殊情形. 对于具有光滑边界 Γ 的区域 $D\subset\mathbf{R}^n$，利用 Green 函数 $G(x,y)$ 沿 Γ 在点 $y\in\Gamma$ 的内法线方向的导数 $\partial G(x,y)/\partial n_y$，这个公式给出了 Dirichlet 问题的解. 公式(4)有时也称为 Poisson 积分.

Poisson 积分的基本性质是：1) $u(x)$ 是点 x 的坐标的**调和函数**(harmonic function)；2) Poisson 积分在(有界)调和函数类中给出了以 f 为边界数据的 Dirichlet 问题的解，即函数 $u(x)$ 用值 $f(y)$ 扩张到区域的边界后，在闭区域是连续的. Poisson 积分在经典的数学物理中的应用就是基于这些性质的(见[4]).

Poisson 积分在 Lebesgue 的意义下理解时，比如，当 f 为 $S_n(0,R)$ 上的可和函数时，称为 Poisson-Lebesgue 积分(Poisson-Lebesgue integral)；对集中在 $S_n(0,R)$ 上的任意有限的 **Borel 测度**(Borel measure) μ，积分

$$u(x)=\int_{S_n(0,R)}PB_n(x,y)d\mu(y) \qquad (5)$$

称为 Poisson-Stieltjes 积分(Poisson-Stieltjes integral). 用积分(5)来表示的调和函数全体所成的类 A 具有如下特征：任意 $u\in A$ 是 $B_n(0,R)$ 里两个非负调和函数之差. 可用 Poisson-Lebesgue 积分表示的函数类是类 A 的真子类，它包括了 $B_n(0,R)$ 里的所有有界调和函数. 相对于 $S_n(0,R)$ 上的 Lebesgue 测度，对几乎所有的点 $y\in S_n(0,R)$，Poisson-Stieltjes 积分(5)具有这样的角形边界值，它与测度 μ 关于 Lebesgue 测度的导数 $\mu'(y)$ 的值一致. 关于在半空间的 Poisson-Stieltjes 和 Poisson-Lebesgue 积分的理论也已建立(见[5]).

Poisson 的各种修改形式在多复变解析函数论和在量子场论的应用中起了很大的作用. 例如，在复空间 $\mathbf{C}^n$ 中，

$$U^n=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:|z_j|<1,\ j=1,\cdots,n\},$$

这个多圆盘的 Poisson 核(Poisson kernel for the polydisc)是由核(2)的乘积得到的：

$$PU^n(z,\zeta)=\prod_{j=1}^n PB_2(z_j,\zeta_j).$$

关于这个多圆盘的区分边界 $T^n=\{\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbf{C}^n:|\zeta_j|=1,\ j=1,\cdots,n\}$，相应的 Poisson 积分

$$u(z)=\int_{T^n}f(\zeta)PU^n(z,\zeta)dT^n(\zeta)$$

给出了多重调和函数 $u(z)$，$z\in U^n$，它在 T^n 上取连续值 $f(\zeta)$. Poisson-Lebesgue 和 Poisson-Stieltjes 积分形式的推广也已得到研究(见[6]).

在量子场论中，Poisson 积分也应用于复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的管形区域 T^C，它位于空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个开的尖凸锥(顶点在原点)之上，其形式为

$$T^C=\mathbf{R}^n+iC=$$

$$=\{z=x+iy\in\mathbf{C}^n:x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n;$$

$$y=(y_1,\cdots,y_n)\in C\}.$$

当 $n=2$ 时，半平面的形式(3)的 Poisson 积分是这种管形域的 Poisson 积分的特殊情形；空间 $\mathbf{C}^n$ 中有界对称域的 Poisson 积分与矩阵空间中管形域的 Poisson 积分相同. 若把 Poisson 积分的密度 f 取作广义函数，把 Poisson 积分取作 f 与 Poisson 核的卷积，就可以得到关于某些广义函数类的 Poisson 积分的这一重要概念(见[7]－[9]).

参考文献

[1A] Poisson, S. D., *J. Ecole R. Polytechn.*, 11(1820), 295－341.

[1B] Poisson, S. D., Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries, *J. Ecole R. Polytechn.*, 12(1823), 404－509.

[2] Schwarz, H. A., Ueber die Integration der partiellen

Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ für die Fläche eines Kreises. *Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zurich*, **15** (1870), 113 – 128

[3] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Бари], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[4] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977 (中译本: A. H. 吉洪诺夫, A. A. 萨马尔斯基, 数学物理方法, 上、下册, 高等教育出版社, 1956).

[5] Соломенцев, Е. Д., Итоги науки, Математический анализ, Теория вероятностей, Регулирование., 1962, М., 1964, 83 – 100.

[6] Rudin, W., Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969.

[7] Владимиров, В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976 (英译本: Vladimirov, V. S., Generalized functions in mathematical physics, Mir, 1979).

[8] 华罗庚, 多复变函数论中的典型域的调和分析, 科学出版社, 1958.

[9] Stein, E. M. and Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1975.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 球 $B_n(0,R)$ 的外部的 Poisson 核由下式给出.

$$PB_n^c(x,y) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n} R^{n-2}\left[\frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^n} + \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x|^{n-2}} \right].$$

在 C^n 的单位球 B 的情形下, 存在几种 Poisson 型的核, 例如, 解经典 Dirichlet 问题的经典核, 及不变 Poisson 核 (invariant Poisson kernel), 它在单位球的全纯自同构变换下是不变的. 令

$$P(z,\zeta) = \frac{(1-|z|^2)}{|1-<z,\zeta>|^{2n}}, \; z\in B, \; \zeta\in\partial B,$$

其中 $<z,\zeta> = \sum_1^n z_i\zeta_i$, $|z|^2 = <z,z>$, 这是在球上对应于上述在多圆盘关于区分边界的 Poisson 核的类似物. 不变 Poisson 核用于求关于所谓不变 Laplace 算子 (invariant Laplacian) 的 Dirichlet 问题的解, 见 [A1].

参考文献

[A1] Rudin, W., Function theory in the unit ball of C^n, Springer, 1980.

高琪仁 吴炯圻 译

Poisson 过程 [Poisson process; Пуассоновский процесс]

随机过程 (stochastic process) $X(t)$, 其独立增量 $X(t_2) - X(t_1)(t_2 > t_1)$ 具有 **Poisson 分布** (Poisson distribution). 在齐次 Poisson 过程中, 对任何 $t_2 > t_1$

$$\mathsf{P}\{X(t_2) - X(t_1) = k\} =$$

$$= \frac{\lambda^k (t_2 - t_1)^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}, \qquad (1)$$

$$k = 0, 1, \cdots,$$

系数 $\lambda > 0$ 称为 Poisson 过程 $X(t)$ 的强度 (intensity of the Poisson process). Poisson 过程 $X(t)$ 的轨道是具有跳跃高度为 1 的阶梯函数. 跳点 $0 < \tau_1 < \tau_2 \cdots$, 形成一个**基本流** (elementary flow), 在许多排队系统中描述需求流. 随机变量 $\tau_n - \tau_{n-1}$ 的分布对 $n = 1, 2, \cdots$ 是独立的并具有指数密度 $\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

Poisson 过程的性质之一是, 跳点 $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < t$ (在 $X(t) - X(0) = n$ 时) 的条件分布与 n 个在 $[0,t]$ 上均匀分布的独立样本的**顺序统计量序列** (variational series) 的分布相同. 另一方面, 如果 $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n$ 是上述顺序统计量序列, 则当 $n \to \infty$, $t \to \infty$ 且 $n/t \to \lambda$ 时, 就得到了 Poisson 过程的跳跃的极限分布.

在非齐次过程中强度 $\lambda(t)$ 依赖于时间 t 并且 $X(t_2) - X(t_1)$ 的分布由公式

$$\mathsf{P}\{X(t_2) - X(t_1) = k\} =$$

$$= \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\,du\right]^k}{k!} e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(u)\,du}$$

所确定.

在某些条件下, 可以证明 Poisson 过程是相当一般形式的一些独立"稀疏"流之和当个数增加到无限时的极限. 与 Poisson 过程有关的一些悖论见 [3].

参考文献

[1] Боровков, А. А., Теория вероятностей, М., 1976.

[2] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Ядренко, М. И., Теория вероятностей и математическая статистика, К., 1979.

[3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971, Chapt. 1.

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cohen, J. W., The single server queue, North-Holland, 1982.

[A2] Szekely, G. J., Paradoxes in probability theory and mathematical statistics, Reidel, 1986.

刘秀芳 译 陈培德 校

Poisson 稳定性 [Poisson stability; устойчивость по Пуассону]

给定在一拓扑空间 S 上的动力系统 (dynamical system) f^t (或 $f(t,\cdot)$, 见[2]) 之一点 x (一轨道 $f^t x$)

的如下性质：存在两个序列 $t_k \to +\infty$、$\tau_k \to -\infty$，使得

$$\lim_{k\to\infty} f^{t_k}x = \lim_{k\to\infty} f^{\tau_k}x = x.$$

换言之，即 x 同时是轨道 $f^t x$ 的 α 及 ω 极限点（见**轨道的极限点**（limit point of a trajectory））．Poisson 稳定性的概念是 H．Poincaré 在分析 Poisson 关于行星轨道的稳定性的结果的基础上引入的（[1]）．

每一个 Poisson 稳定点都是非游荡的；但其逆不真（见**游荡点**（wandering point）．每个不动点，每个周期点，以及更一般地说，每个**回复点**（recurrent point），均为 Poisson 稳定的．若 $S=\mathbf{R}^2$、且此动力系统又是光滑的（即由一 C^1 类向量场给出），则每一个 Poisson 稳定点或是不动点，或是周期点（见 **Poincaré-Bendixson 理论**（Poincaré-Bendixson theory））．

Poincaré 回复定理（Poincaré recurrence theorem）（见 **Poincaré 回归定理**（Poincaré return theorem））：若一动力系统给定在 $\mathbf{R}^n$ 的有界区域中且 Lebesgue 测度是此系统的**不变测度**（invariant measure），则所有的点，最多除一个零测度的第一范畴集之点例外，均为 Poisson 稳定的（见 [1]，[3]）．Hopf 回复定理（Hopf recurrence theorem）就是这个定理推广到给定在一无限测度空间上的动力系统（见 [2]）：若一动力系统给定在 $\mathbf{R}^n$ 的任一区域（例如即为 $\mathbf{R}^n$ 本身）上，且 Lebesgue 测度是此系统的不变测度，则所有的点，最多除去一个零测度集之点，均或为 Poisson 稳定的，或为发散的，即

$$|f^t x| \to \infty, \text{ 当 } |t| \to \infty \text{ 时}.$$

Poincaré 和 Hopf 的定理都还有更一般的陈述（见 [2]）．

参考文献

[1] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3, Gauthier-Villars, 1899, Chapt. 26.

[2] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-изд., М.-Л., 1949（中译本：В．В．涅梅茨基，В．В．斯捷巴诺夫，微分方程定性理论上、下，科学出版社，1956，1959）．

[3] Oxtoby, J., Measure and category, Springer, 1971.

В．М．Миллионщиков 撰

【补注】 在西方关于（抽象）拓扑动力学的文献中，（与在微分方程定性理论的文献中不同），常用"回复的"一词代替 Poisson 稳定性；见 [A1]．进一步的评论见**回复点**（recurrent point）．

参考文献

[A1] Gottschalk, W. H. and Hedlund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.

齐民友 译

Poisson 求和公式 [**Poisson summation formula, Пуассона формула суммирования**]

公式

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(2k\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ikx} dx.$$

例如，如果函数 g 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积，具有有界变差且 $2g(x)=g(x+0)+g(x-0)$，则 Poisson 求和公式成立．Poisson 求和公式还可以写成下面的形式：

$$\sqrt{a}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(ak) = \sqrt{b}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi(bk),$$

其中，a 和 b 是满足条件 $ab=2\pi$ 的任意两个正数，χ 是函数 g 的 **Fourier 变换**（Fourier transform）：

$$\chi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iux} dx.$$

参考文献

[1] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[2] Titchmarsh, E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1948.

И．И．Волков 撰　朱学贤 译

Poisson 求和法 [**Poisson summation method; Пуассона метод суммирования**]

同 **Abel-Poisson 求和法**（Abel-Poisson summation method）．

Poisson 定理 [**Poisson theorem; Пуассона теорема**]

1) Poisson 定理是概率论中的极限定理，它是**大数律**（law of large numbers）的特殊情形．Poisson 定理把 **Bernoulli 定理**（Bernoulli theorem）推广到某事件出现的概率依赖于试验数的独立试验情形（称为 Poisson 方案（Poisson scheme））．Poisson 定理陈述为：如果在独立试验序列中某事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k，$k=1,2,\cdots$，并且 μ_n/n 是事件 A 在前 n 次试验中的频率，则对任意 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时，不等式

$$\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right| < \varepsilon$$

成立的概率趋向于 1．当 $p_1=\cdots=p_n$ 时，Bernoulli 定理由 Poisson 定理推出．这一定理由 S．Poisson（[1]）建立．Poisson 定理的证明由 Poisson 从 **Laplace 定理**（Laplace theorem）的变形得到．П．Л．Чебышев（1846）给出了 Poisson 定理的一个简化证明，他也叙述了大数律的第一个一般形式，它包含 Poisson 定理作为特殊情形．

2）Poisson 定理是概率论中关于二项分布（binomial distribution）收敛到 **Poisson 分布**（Poisson distribution）的一个极限定理：如果 $P_n(m)$ 是在 n 次 Bernoulli 试验中某事件 A 恰出现 m 次的概率，而 A 在每次试验中的概率为 p，则对大的值 n 和 $1/p$，概率 $P_n(m)$ 接近于

$$e^{-np}\frac{(np)^m}{m!}.$$

数 $\lambda=np$ 是在 n 次试验中 A 出现的平均次数，而值 $e^{-\lambda}\lambda^m/m!$, $m=0,1,\cdots$, $\lambda>0$．形成一个 Poisson 分布．Poisson 定理是由 S．Poisson（[1]）对较 Bernoulli 方案更一般的试验方案建立的：即当事件 A 出现的概率从一次试验到另一次试验可以变化并使得当 $n\to\infty$ 时 $p_n\to 0$．这种情形 Poisson 定理的严格证明基于考虑随机变量的这样一个三角阵列，它第 n 行的随机变量是独立的，而且以概率 p_n 和 $1-p_n$ 分别取值 1 和 0．Poisson 定理更方便的形式是作为一个不等式：如果 $\lambda=p_1+\cdots+p_n$, $\delta=p_1^2+\cdots+p_n^2$，则当 $n\geqslant 2$ 时

$$\left|P_n(m)-e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\right|\leqslant 2\delta.$$

这个不等式给出了当 $P_n(m)$ 用 $e^{-\lambda}\lambda^m/m!$ 代替时的误差．如果 $p_1=\cdots=p_n=\lambda/n$，则 $\delta=\lambda^2/n$．Poisson 定理和 Laplace 定理给出二项分布渐近性态的完全描述．Poisson 定理后来的推广在两个基本方向上进行，一方面基于已经出现的渐近展开式进一步精确化 Poisson 定理，另一方面建立了独立随机变量和收敛到 Poisson 分布的一般条件．

参考文献

[1] Poisson, S., Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, Paris, 1837.

[2] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977（中译本：M．洛易甫，概率论，上册，科学出版社，1965）.

[3] Боровков, А. А. Теория вероятностей, М., 1976.

А．В．Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Laha, R. G. and Rohatje, V. K., Probability theory, Wiley, 1979.

刘秀芳 译 陈培德 校

Poisson 变换［**Poisson transform; Пуассона преобразование**］

积分变换（integral transform）

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(x-t)^2}\,d\alpha(t),\qquad (*)$$

其中 $\alpha(t)$ 是在每个有限区间上的**有界变差函数**（function of bounded variation），以及变换

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{1+(x-t)^2}\,dt.$$

这个变换是当 $\alpha(t)$ 为绝对连续函数（见**绝对连续性**（absolute continuity））时由（*）得出的．设

$$\hat g(x)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{g(x+u)-2g(x)+g(x-u)}{u^2}\,du$$

和

$$T_t g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\,g^{(2k)}(x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\hat g^{(2k)}(x).$$

对于 Poisso 变换，下列逆变换公式成立：对于一切 x，

$$\frac{\alpha(x+0)+\alpha(x-0)}{2}-\frac{\alpha(+0)+\alpha(-0)}{2}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\int_0^{x}T_t f(u)\,du,$$

且几乎处处有

$$\varphi(x)=\lim_{t\to 1}T_t f(x).$$

设 C 是 $\mathbf{R}^n$ 中的凸开尖锥，顶点在零点，而 C^* 是对偶锥，即

$$C^*=\{\xi:\ \xi_1x_1+\cdots+\xi_nx_n\geqslant 0,\ 对于一切\ x\in C\}.$$

函数

$$\mathscr{K}_C(z)=\int_C e^{i(z_1\xi_1+\cdots+z_n\xi_n)}\,d\xi$$

称为管状区域 $T^C=\{z=x+iy:\ x\in\mathbf{R}^n,\ y\in C\}$ 的 Cauchy 核（Cauchy kernel）．（广义）函数 f 的 Poisson 变换是**卷积**（convolution）

$$f*\mathscr{P}_C(x,y),\ (x,y)\in T^C,$$

其中

$$\mathscr{P}_C(x,y)=\frac{|\mathscr{K}_C(x+iy)|^2}{(2\pi)^n\mathscr{K}_C(iy)}$$

是管状区域 T^C 的 Poisson 核（见[2]）．

参考文献

[1] Pollard, H., The Poisson transform, *Trans. Amer Math. Soc.*, 78 (1955), 2, 541–550.

[2] Владимиров, В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976.

Ю．А．Брычков，А．П．Прудников 撰 杜小杨 译

极集［**polar; поляра**］

1）点 P 关于一条非退化圆锥曲线的极线（polar

of a point P with respect to a non-degenerate conic）是包含所有关于过 P 的割线与圆锥曲线的交点 M_1 和 M_2 与 P 调和共轭的点的直线（见交比（cross ratio））．点 P 称为**极点**（pole）．如果 P 位于圆锥曲线的外部，则极线通过过 P 所作的两条切线的切点（见图 1）．如果点 P 在曲线上，则极线是曲线在此点的切线．如果点 P 的极线通过一点 Q，则 Q 的极线通过 P（见图 2）．

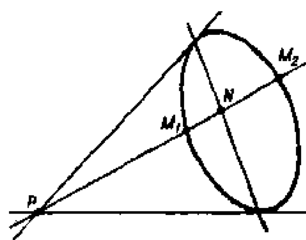


图 1

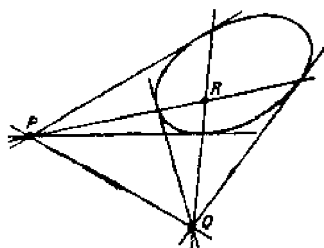


图 2

每一条非退化圆锥曲线决定射影平面的点集和直线集之间的一个一一映射，它是一个**配极**（polarity）（一个极变换）．在此变换下对应的图形称为互极的（mutually polar）．一个与其极图形重合的图形称为自配极的（autopolar），或自极的（self-polar）（例如见图 2 中的自极三角形 PQR）．

类似地可定义一点关于一个非退化二次曲面的极集（极平面（polar plane））．

关于圆锥曲线的极集的概念可以推广到 n 次曲线．这里，平面上一个给定的点对应于关于曲线的 $n-1$ 个极集．这些极集的第一个是一条 $n-1$ 次曲线，第二个是给定点关于第一个极集的极集，是 $n-2$ 次的，等等，最后，第（$n-1$）个极集是一条直线．

参考文献

[1] Ефимов，Н．В．，Высшая геометрия，6 изд．，М．，1978（中译本：Н．В．叶菲莫夫，高等几何学，上、下册，高等教育出版社，1956）．

[2] Постников，М．М．，Аналитическая геометрия，М．，1973．

А．Б．Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger，M．，Geometry，1－2，Springer，1987（中译本：M．贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991）．

[A2] Coxeter，H．S．M．，Introduction to geometry，Wiley，1963．

[A3] Busemann，H．and Kelly，P．，Projective geometry and projective metrics，Acad．Press，1953．

[A4] Coolidge，J．，Algebraic plane curves，Dover，reprint，1959．

2）局部凸拓扑向量空间 E 中的一个子集 A 的极集 A° 是对偶空间 E' 中对所有 $x\in A$ 满足 $|\langle x,f\rangle|\leq 1$ 的泛函 f 的集合（这里 $\langle x,f\rangle$ 是 f 在 x 的值）．双极集（bipolar）$A^{\circ\circ}$ 是空间 E 中对所有 $f\in A^{\circ}$ 满足 $|\langle x,f\rangle|\leq 1$ 的向量 x 的集合．

极集是凸的，平衡的和弱 * 拓扑 $\sigma(E',E)$ 下闭的．双极集 $A^{\circ\circ}$ 是集合 A 的凸平衡包的弱闭包．进一步，$(A^{\circ\circ})^{\circ}=A^{\circ}$．如果 A 是空间 E 中 0 的一个邻域，则它的极集 A° 是弱 * 拓扑下的一个紧统（Banach-Alaoglu 定理（Banach-Alaoglu theorem））．

E 中集合的任意族 $\{A_\alpha\}$ 的并 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 的极集是这些集合的极集的交．弱闭凸平衡集 A_α 的交的极集是它们极集的凸包的弱 * 拓扑下的闭包．若 A 是 E 的子空间，则它的极集就是与 A 正交的 E' 的子空间．

作为定义空间 E' 的弱 * 拓扑的 0的邻域的一个基本系，可以取形为 M° 的集合的系，其中 M 取遍 E 的所有有限子集．

空间 E' 中的泛函的一个子集是等度连续的，当且仅当它包含于 0 的某一邻域的极集中．

参考文献

[1] Edwards，R．，Funnctional analysis，Holt，Rinehart & Winston，1965．

В．И．Ломоносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Köthe，G．，Topological vector spaces，1，Springer，1979（译自德文）．

[A2] Schaeffer，H．H．，Topological vector spaces，Macmillan，1966．

[A3] Jarchow，H．，Locally convex spaces，Teubner，1981．

陆珊年 译

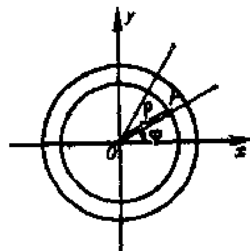
极坐标［polar coordinates；полярные координаты］

两个数 ρ 和 φ（见图 1），它们同 Descartes 直角坐标 x 和 y 由下列公式相联系：

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,$$

其中 $0\leq\rho<\infty$，$0\leq\varphi<2\pi$．坐标线是同心圆（$\rho=$ 常数）和射线（$\varphi=$ 常数）．

极坐标系是一种**正交坐标系**（orthogonal system）．（除了点 O 以外，在点 O 处 $\rho=0$，φ 不确定，即可以是任何数 $0\leq\varphi<\pi$）Oxy 平面上的每一点都对应于一对数（ρ，φ），反之亦然．点 P 和（0，0）



(极点)之间的距离 ρ 称为极半径(polar radius)而角 φ 称为极角(polar angle).

Lamé 系数(Lamé coefficients)(标度因子)是

$$L_\rho = 1,\ L_\varphi = \rho$$

面积元是

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi.$$

向量分析的基本运算是

$$\mathrm{grad}_\rho f = \frac{\partial f}{\partial \rho},\ \mathrm{grad}_\varphi f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi};$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}a_\rho + \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi},\ \mathbf{a} = (a_\rho, a_\varphi);$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

所谓广义极坐标(generalized polar coordinates)是两个数 r 和 ψ,它们同 Descartes 直角坐标 x 和 y 之间由下列公式相联系:

$$x = ar\cos\psi,\ y = br\sin\psi,$$

其中 $0 \leqslant r < \infty$,$0 \leqslant \psi < 2\pi$,a,$b > 0$,$a \neq b$. 坐标线是椭圆($r =$ 常数)和射线($\psi =$ 常数).

参考文献

[1] Korn, G. and Korn, T., Mathematical handbook for scientists and engineers, McGraw-Hill, 1961.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 极坐标向三维情况的推广是**球面坐标**(shperical coordinates).

如果把点 (x, y) 看成复数 $z = x + iy$,则极坐标 (ρ, φ) 对应于 z 的表示式:$z = \rho e^{i\varphi}$.

亦见**复数**(complex number).

参考文献

[A1] Triebel, H., Analysis and mathematical physics, Reidel, 1987.

[A2] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969.

杜小杨 译

极对应[polar correspondence; полярное соответствие]

两个曲面之间的一个对应,使得在对应点处一个曲面的径向量平行于另一个曲面的法向量,反过来也是这样. 对于 E^3 中每一个径向量为 x 的光滑曲面 F,(在某些条件下)存在一个与它极对应的曲面 F^*,其径向量为 $x^* = -n/(x,n)$,n 是法向量,(x,n) 是 F 的支撑函数,使得

$$(x^*, x) = 1,\ (x_i, x) = (x_i, x^*) = 0.$$

有时候这些条件也包含在极对应的定义里.

在中心仿射几何学中极对应的概念显示它自身特别清晰(在完全对偶性的意义上).

М. И. Войцеховский 撰 林向岩 译

极分解[polar decomposition; полярное разложение]

1) 有限维 Euclid(或酉)空间 L 上线性变换的极分解(polar decomposition of a linear transformation)是**线性变换**(linear transformation)分解成一个自伴变换和一个正交(分别地,酉)变换之积(见**正交变换**(orthogonal transformation);**自伴线性变换**(self-adjoint linear transformation);**酉变换**(unitary transformation)). L 上任何线性算子 A 有一个极分解

$$A = S \cdot U.$$

其中 S 是正半定自伴线性变换而 U 是正交(或酉)线性变换;此外,S 是唯一确定的. 如果 A 是非退化的,则 S 甚至是正定的且 U 也是唯一确定的. 一维酉空间上的极分解与复数 z 的三角表示式 $z = re^{i\varphi}$ 一致.

А. Л. Онищик 撰

2) 作用在 **Hilbert 空间**(Hilbert space)上的算子 A 的极分解(polar decomposition of an operator)是 A 按形式

$$A = UT$$

的表示式,其中 U 是部分**等距算子**(isometric operator)而 T 是**正算子**(positive operator). 任何闭算子 A 都有极分解,此外 $T = (A^*A)^{1/2}$(它常记为 $T = |A|$),且 U 把算子 A 的伴随算子的定义域的闭包 $\overline{R}_{A^*}$ 映射到 A 的值域的闭包 $\overline{R}_A$ 中(von Neumann 定理(von Neumann theorem),见[1]). 如果要求算子 A 的初始子空间与目标子空间分别与 $\overline{R}_{A^*}$ 和 $\overline{R}_A$ 一致,则极分解成为唯一的. 另一方面,U 总可以取成酉的、等距的或余等距的,依赖于子空间 $\overline{R}_{A^*}$ 和 $\overline{R}_A$ 的余维数之间的关系. 特别地,如果

$$\dim H \ominus \overline{R}_{A^*} = \dim H \ominus \overline{R}_A,$$

则 U 可选为酉算子且有 Hermite 算子 Φ 使得 $U = \exp(i\Phi)$. 那么 A 的极分解取完全类似于复数极分解的形式

$$A = \exp(i\Phi)|A|.$$

极分解的项的交换性成立,当且仅当该算子是正规的(见**正规算子**(normal operator)).

对**不定度规空间**(space with an indefinite metric)上的算子已经得到类似于极分解的表示式.

3) von Neumann 代数 A 上泛函的极分解(polar

decomposition of a functional on a von Neumann algebra)是 A 上一个正规泛函 f 按形式 $f=up$ 的表示式，其中 p 是 A 上正正规泛函，$u\in A$ 是部分等距(即 u^*u 和 uu^* 是投影算子)，而乘法理解为 A 中左乘 u 的伴随算子作用在泛函 p 上：$f(x)=p(ux)$ 对所有 $x\in A$. 一个极分解总可以实现为使得条件 $u^*f=p$ 满足. 在这条件下极分解是唯一的.

任一 C^* **代数**(C^*-algebra)A 上的任何有界线性泛函 f 可看成泛包络 **von Neumann 代数**(von Neumann algebra)A'' 上的正规泛函；对应的极分解 $f=up$ 称为泛函 f 的包络极分解(enveloping polar decomposition of the functional f). 泛函 p 到 A 上的限制称为 f 的绝对值且记为 $|f|$；以下的性质唯一地确定泛函 $|f|$：

$$\||f|\|=\|f\| \text{ 且 } |f(x)|^2\leqslant\|f\|\cdot|f|(x^*x).$$

当 $A=C(X)$ 是一个紧统上所有连续函数的代数的情形，一个泛函的绝对值对应于由它决定的测度的全变差(见**函数的全变差**(total variation of a function)).

在很多情形，泛函的极分解使得可以把 C^* 代数上泛函的研究化成正泛函的研究. 例如，它使得对每一 $f\in A'$ 可构造代数 A 上的一个表示 π，在 A 上 f 有一个向量实现(即有 H_π 中向量 ξ,η，使得 $f(x)=(\pi(x)\xi,\eta)$，$x\in A$). 从正泛函 $|f|$ 用 Гельфанд-Наймарк-Segel 的 GNS 构造(GNS-construction)所构造出来的表示 $\pi_{|f|}$ 有以上性质.

4) C^* 代数中元素 a 的极分解(polar decomposition of an element of a C^*-algebra)是把该元素表成一个正元素和一个部分等距元素之积的表示式. 极分解不是对所有元素成立：Hilbert 空间上一个算子的通常极分解中，其正项属于由 T 生成的 C^* 代数，但对部分等距项仅能说它属于由 T 生成的 von Neumann 代数. 这就是为什么定义并使用所谓的元素 $a\in A$ 的包络极分解(enveloping polar decomposition)的理由：$a=ut$，其中 $t=(a^*a)^{1/2}\in A$ 而 u 是泛包络 von Neumann 代数 A'' 中的一个部分等距元素(假定 A 是典范嵌入到 A'' 中).

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968(英译本：Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

[2] Bognár, J., *Stud. Scient. Math. Hung.*, 1(1966), 1-2, 97-102(俄文).

[3] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977(译自法文).

В. С. Шульман 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gohberg, I. C. and Krein, M. G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1969(译自俄文).

葛显良 译 鲁世杰 校

极集[**polar set**; **полярное множество**]

1) 复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)(n\geqslant1)$ 的解析函数 $f(z)$ 的极集(polar set of analytic function)是复空间 $\mathbf{C}^n$ 的区域 D 里的一个点集 P，满足：a) $f(z)$ 在 $D\setminus P$ 是处处全纯的；b) $f(z)$ 不能解析开拓到 P 的任意点；且 c) 对每一点 $a\in P$，存在一个邻域 U_a 及 U_a 里的一个全纯函数 $q_a(z)\not\equiv0$，使得在 $D\cap\{U_a\setminus P\}$ 里全纯的函数 $p_a(z)=q_a(z)f(z)$ 可以全纯开拓到 U_a. 在每一点 $a\in P$，有 $q_a(a)=0$. 极集 P 是由 $f(z)$ 的极点(见**极点(函数的)**(pole (of a function)))$a\in P$(在这种点 $p_a(a)\neq0$)和 $f(z)$ 的不定点 $a\in P$(在这种点 $p_a(a)=0$)所组成(这里假定 $p_a(z)$ 与 $q_a(z)$ 没有这样的公因子：它是全纯的且在 a 点取零值). 每个极集是复维数为 $n-1$ 的**解析集**(analytic set).

2) 位势论中的极集(polar set in potential theory)，是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant2)$ 的一个点集 E，使得存在一个 Borel 测度 μ 的位势 $U_\mu(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$，它在且仅在 E 上的点取 $+\infty$ 值.

对于 $n=2$ 的**对数位势**(logarithmic potential)和 $n\geqslant3$ 的 **Newton 位势**(Newton potential)，一个有界集 E 为极集的充分必要条件是，E 为 G_δ 型集且其外容量等于 0. 此时，在极集的定义中，可用"上调和函数"代替"位势". 在这种情况下，极集的主要性质是：a) 由单点 $a\in\mathbf{R}^n$ 组成的集 $\{a\}$ 是极集；b) 可数个极集的并集是极集；c) $\mathbf{R}^n$ 中任意极集的Lebesgue 测度等于 0，以及 d) 在保形映射下，极集映成极集.

关于极集的一个局部判别准则可见**集合的薄度**(thinness of a set).

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

[2] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966(英译本：Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[3] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1969.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 2) 中描述的集合 E 通常称为完全极集(complete polar set). 而(未必完全的)极集定义为一个完全极集的子集. 一个有界集为极集，当且仅当它的外容量等于 0.

1) 中描述的集合，为避免混淆，也称为极点集

(pole sets; sets of poles)，见[A4]和**亚纯函数**(meromorphic function).

在抛物型位势论中，一个集合 A 为极集，当且仅当存在 A 的一个开覆盖 $\mathscr{V}$，使得对任意 $V\in\mathscr{V}$，存在 V 上的一个正的上热函数(supercaloric function) u_V 使得在 $A\cap V$ 上 $u_V=\infty$ (见[A3])．此外，单点集是极集，可数个极集之并是极集．任意极集是完全薄集，但与经典位势论不同在于，并非每个完全薄集(totally thin set)都是极集．在调和空间(见[A2])或更一般的扫除空间(balayage spaces)(见[A1])，类似的极性理论也成立．在概率位势论中，一个 Borel 集为极集，如果它的首次击中时间 T_A 满足 $T_A=\infty$(a.s.).

参考文献

[A1] Bliedtner, J. and Hansen, W., Potential theory, An analytic and probabilistic approach to balayage, Springer, 1986(中译本：J. 波里特诺，W. 汉森，位势理论——扫除的分析与概率方法，厦门大学出版社，1994).

[A2] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

[A3] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterparts, Springer, 1983(中译本：J. L. 杜布，经典位势论与概率位势论，上、下两册，科学出版社，1993).

[A4] Grauert, H. and Fritzsche, K., Several complex variables, Springer, 1976(译自德文).

[A5] Whitney, H., Complex analytic varieties, Addison-Wesley, 1972.

高琪仁 吴炯圻 译

极空间[polar space; полярное пространство]

【补注】 设 P 是一个点集，具有基数 $\geqslant 2$ 的可区分子集(称为线)的非空集合．如果对于 P 的每一条线 l 与每个点 $A\in P\setminus l$，点 A 或恰与 l 的一点共线或与 l 的所有点共线，则这样的一个结构称为**极空间**(polar space)．一个**非退化极空间**(non-degenerate polar space)是没有点与其他点共线的极空间(即它不是一个"锥")．如果两条不同的线最多只有一个公共点，则极空间称为**线性的**(linear).

例如，取具有由非退化双线性型 Q 定义的**配极**(polarity)的射影空间 $\mathbf{P}^d$(为得到某些非平凡性质，设 $d\geqslant 3$)．又取绝对点(absolute points)(也称为迷向点(isotropic points))的子集 P，即 $P=\{x\in\mathbf{P}^d: Q(x,x)=0\}$，$P$ 中的线是 $\mathbf{P}^d$ 的完全在 P 内的射影直线．"极空间"从这类例子而得名．

一个极空间的子空间是 P 的一个子集 P'，使得如果 $A,B\in P'$ 且 A 与 B 是共线且不同的，则通过 A 与 B 的整个线在 P' 中．极空间的一个**奇异子空间**(singular subspace)是其每一对点均是共线的一个子空间．

一个秩为 n 的 **Tits 极空间**(Tits polar space of rank n)($n\geqslant 2$)是一个点集 P 连同称为子空间的一个子集族，使得：

i) 一个子空间连同包含于其中的子空间是一个 d 维射影空间；

ii) 两个子空间的交是一子空间；

iii) 给定一个 $n-1$ 维子空间 V 与一点 $A\in P\setminus V$，存在唯一一个子空间 W 包含 A，使得 $V\cap W$ 的维数为 $n-2$；空间 W 包含 V 的所有与 A 由一条线(维数为 1 的一个子空间)连接的点；

iv) 至少存在两个不相交的 $n-1$ 维子空间．

秩 $\geqslant 3$ 的 Tits 极空间见于[A1]，[A2]，并且是典型的；即它们是由($\sigma-\varepsilon$) Hermite 型(见**半双线性型**(sesquilinear form))或由除环上的向量空间的一个**伪二次型**(pseudo-quadratic form)产生的 Tits 极空间以该型(Witt 指数 $\geqslant 2$)的全迷向子空间作为子空间．特别地，秩 $\geqslant 3$ 的有限极空间的子空间是关于有限射影空间的一个**配极**(polarity)的全迷向子空间或是一个有限射影空间中的一个非奇异二次曲面中的射影空间．

每一个非退化极空间是线性的，并且如果对于一个有限秩的非退化极空间所有的线具有基数 $\geqslant 3$，那么那些奇异子空间定义一个典型极空间([A3]).

一个非退化极空间或是典型的或是一个**广义四边形**(quadrangle, generalized).

参考文献

[A1A] Veldkamp, F. D., Polar geometry, *Indag. Math.*, **21**(1959), 512－551.

[A1B] Veldkamp, F. D., Polar geometry, *Indag. Math.*, **22**(1960), 207－212.

[A2] Tits, J., Buildings and BN-pairs of spherical type, Springer, 1974.

[A3] Buekenhout, F. and Shult, E. E., On the foundations of polar geometry, *Geom. Dedicata*, **3**(1974), 155－170.

[A4] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.

林向岩 译

配极[polarity; поляритет]，**配极变换**(polar transformation)

一个**对射变换**(correlation) π，满足 $\pi^2=\mathrm{id}$，即 $\pi(Y)=X$，当且仅当 $\pi(X)=Y$．一个配极划分所有的子空间成为偶对；特别地，如果一偶对由子空间 S_0 与 S_{n-1} 所组成，这里 $S_0=\pi(S_{n-1})$ 是一点而 $S_{n-1}=\pi(S_0)$ 是一超平面，则 S_0 称为超平面 S_{n-1} 的**极点**(pole of the hyperplane)，而 S_{n-1} 称为点 S_0 的**极面**(polar of the point)．当且仅当 K 允许有一

个对合反自同构(involutory anti-automorphism)α(即 $\alpha^2=\mathrm{id}$)时,除环 K 上的射影空间 $\Pi_n(K)$ 有一个配极.假设 π 用一个半双线性型 $f_s(x,y)$ 表示,则当且仅当 $f_s(x,y)=0$ 蕴涵 $f_s(y,x)=0$ 时,π 是一个配极.

一个配极 π 或是一个辛对射变换(symplectic correlation),用对于每一个点 P,$P\in\pi(P)$ 的事实刻画(在这个情形下,$f(x,y)$ 是 A_{n+1} 上的一个反称型,而 K 是一个域),或者 π 能够表示为 A_{n+1} 上的一个 α 对称型:$\alpha(f_s(x,y))=f_s(y,x)$(对称配极(symmetric polarity)).在这个情形下,一个非严格的迷向零子空间的存在性等价于除环的特征等于 2(特别地,如果 $\mathrm{char}\,K\neq 2$,则任何零子空间是严格迷向的).

相应于一个配极 π 可定义将一个射影空间分解为子空间,这样就可能将表示 π 的半双线性型化为典范型.这些子空间中最重要的如下:

M——极大非迷向的零子空间;它的维数是 $n(\pi)-1$,这里 n 是偶数且称为 π 的亏量(deficiency),并且 f 是反称的;

U——极大严格迷向子空间;它的维数是 $i(\pi)-1$,i 称为指标(index),$f\equiv 0$;

J——连通分支,自由或零子空间,非迷向的,这里 f 是正定的或负定的,$M\cap J=\varnothing$.

$W=M+U$——极大零子空间;它的维数是 $i(\pi)+n(\pi)-1$.

如果 $\pi F=F\pi$,则射影变换 F 称为 π 容许的(π-admissible)(关于配极 π).当且仅当在 K 中存在 c,使得 $f(\overline{F}x,\overline{F}y)=c\varphi(f(x,y))$ 时,一个半线性变换 $(\overline{F},\varphi)$ 诱导一个 π 容许的射影变换.π 容许的变换构成一个群 G_π(称为配极群(polarity group)).如果群 G_π 是传递的,则或者空间 Π_n 的每一点是零的(G_π 称为辛的(symplectic))或是没有零点(在这种情形对于 $\alpha=\mathrm{id}$,G_π 称为正交的(orthogonal),对于 $\alpha\neq\mathrm{id}$ 称为酉的(unitary)).

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978(中译本:Н. В. 叶菲莫夫,高等几何学,上、下册,高等教育出版社,1956).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 设 $G=(P,E)$ 是一个二部图,$P=A\sqcup B$ 是 P 的对应的划分.一个 G 上的配极是图 G 的一个自同构 α,使得 $\alpha^2=\mathrm{id}$ 并且 $\alpha(A)=B$,$\alpha(B)=A$.

配极这个术语最常遇到是在几何背景中,诸如射影空间(projective space)或关联系统(incidence system)的配极.在这种情形下顶点的两个集合是关联结构的线与点,并且当且仅当点与线关联时,在一个"点顶点"与一个"线顶点"之间有一条边.

经典的背景是具有一个非退化双线性型 Q 的射影空间 $\mathbf{P}^n$ 的配极.d 维子空间与 $(n-d-1)$ 维子空间之间对应的配极用 $\alpha(V)=N^{\perp}=\{x\in\mathbf{P}^n$:对于所有的 $y\in V$,$Q(x,y)=0\}$ 定义.

在(Desargues 或非 Desargues)射影空间 P 的背景中,一个配极也视为一个对称关系 $\sigma\subset P\times P$,使得对于所有 $v\in P$,$v^{\perp}=\{w\in P:(v,w)\in\sigma\}$ 或是一个超平面或是 P 自身.如果 $P^{\perp}=\bigcap_{v\in P}v^{\perp}=\varnothing$,则配极非退化.如果 $V\subset V^{\perp}=\bigcap_{v\in V}v^{\perp}$,则子空间 V 是全迷向的(totally isotropic).

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1-2, Springer, 1987(译自法文)(中译本:M. 贝尔热,几何,第一—五卷,科学出版社,1987-1991).

[A2] Busemann, H. and Kelly, P., Projective geometry and projective metrics, Acad. Press, 1953(中译本:H. Busemann, P. Kelly,射影几何与射影度量,天津师范大学出版社,1985).

[A3] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Willy, 1963.

[A4] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.

[A5] Pedoe, D., Geometry. A comprehensive course, Dover, reprint, 1988, Sect. 85.5.

[A6] Dembowsky, P., Finite geometries, Springer, 1968.

林向岩 译

极化代数簇[polarized algebraic variety; поляризованное алгебраическое многообразие],亦称配极代数簇

二元组 (V,ξ),其中 V 是代数闭域 k 上的光滑完全簇(见**代数簇**(algebraic variety)),$\xi\in\mathrm{Pic}\,V/\mathrm{Pic}^0\,V$ 是某个丰富可逆层的类(见**丰富层**(ample sheaf),**可逆层**(invertible sheaf)),$\mathrm{Pic}^0\,V$ 是 Abel **Picard 概形**(Picard scheme)$\mathrm{Pic}\,V$ 的单位连通分支.当 V 是 Abel 簇时,可定义极化代数簇的极化次数(degree of polarization)的概念:它等于由层 $\mathscr{L}\in\xi$ 所确定的同源 $\varphi_{\mathscr{L}}:V\to\mathrm{Pic}^0\,V$ 的次数,这里

$$\varphi_{\mathscr{L}}(x)=T_x^*\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}^{-1}\in\mathrm{Pic}^0\,V,$$

其中 T_x 是由 $x(x\in V)$ 确定的平移态射.次数为 1 的极化称为主极化(principal polarization).

极化代数簇的概念是与代数簇的极化族的概念密切相关的.设 $f:X\to S$ 是一族以 S 为基的簇,也就是说,f 是从概形 X 到 Noether 概形 S 的光滑射影态射,其纤维是代数簇.称二元组 $(X/S,\xi/S)$ 为极化族(polarized family):这里 X/S 是以 S 为基的

族 $f: X \to S$, ξ/S 是相对丰富可逆层 $\mathscr{L}_{X,S}$ 在 $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Pic}\,X/S)/\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Pic}^0 X/S)$ 中的类，其中 $\mathrm{Pic}\,X/S$ 是相对 Picard 概形.

极化族和极化代数簇概念的引入是由于构造代数簇的模空间（见**模理论**（moduli theory））的需要. 例如，亏格 $g \geq 1$ 的所有光滑代数曲线的模空间不存在，而极化曲线的模空间则存在（[4]）. 与簇的极化概念有关的首要问题之一是具有取定的数值不变量的极化簇到射影空间内的同时浸入问题. 如果 (V, ξ) 可作为纤维含于极化族 $(X/S, \xi/S)$ 之内，这里基 S 是连通的，相对丰富层 $\mathscr{L}_{X,S} \in \xi/S$，则是否存在仅依赖于 **Hilbert 多项式**（Hilbert polynomial）$h(n) = \chi(V, \mathscr{L}^n)$ 的常数 c，使得当 $n > c$ 时，具有 Hilbert 多项式 $h(n)$ 以及使 $H^i(X_s, \mathscr{L}^n_s) = 0$ 对 $i > 0$ 成立的层 $\mathscr{L}^n_s$ 关于所有的极化代数簇 (X_s, ξ_s) $(s \in S)$ 都是极丰富的？对于特征数 0 的代数闭域上的光滑极化代数簇，这个问题的回答是肯定的（[3]），而且在具有典范极化的一般型曲面的情形下，常数 c 甚至不依赖于 Hilbert 多项式（见[1]，[2]）.

参考文献

[1] Bombieri, E., Canonical models of surfaces of general type, *Publ. Math. IHES*, **42** (1973), 171 – 220.

[2] Kodaira, K., Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, *J. Math. Soc. Japan*, **20** (1968), 1 – 2, 170 – 192.

[3] Matsusaka, T. and Mumford, D., Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 3, 668 – 684.

[4] Mumford, D., Geometric invariant theory, Springer, 1965.

В. С. Куликов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lieberman, D. and Mumford, D., Matsusaka's big theorem, in R. Hartshorne (ed.): Algebraic geometry (Arcata, 1974), Proc. Symp. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 513 – 530.

陈志杰 译

极点 [**pole**; **полюс**]

1）坐标的极点是指**极坐标**（polar coordinates）的原点.

2）**反演**（inversion）的中心也称为极点.

3）直线 p 关于一条**二次曲线**（conic）的极点是这样一点 P，使得直线 p 是点 P 关于这条二次曲线的**极线**（polar）.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 关于（解析）函数的极点，见**极点（函数的）**（pole (of a function)）. 有时"极点"一词也用来表示 $\mathbf{R}^3$ 中的、中心在原点的单位球上的点 $(0,0,1)$（北极（North pole））和 $(0,0,-1)$（南极（South pole））.

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1 – 2, Springer, 1987（中译本：M. 贝尔热，几何，第一–五卷，科学出版社，1987 – 1991）.

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

杜小杨 译

极点（函数的）[**pole (of a function)**; **полюс функции**]

复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 的一个单值特征孤立**奇点**（singular point）a，满足：当 z 趋于 a 时 $|f(z)|$ 无界增长，即 $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. 当点 $a \neq \infty$ 时在 a 的一个充分小去心邻域 $V = \{z \in \mathbf{C}: 0 < |z-a| < r\}$ 内或当 a 为无穷远点时在 $V' = \{z \in \mathbf{C}: r < |z| < \infty\}$ 内，函数 $f(z)$ 可分别写成特殊形式的 **Laurent 级数**（Laurent series）:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-a)^k,\ a \neq \infty,\ c_{-m} \neq 0,\ z \in V, \tag{1}$$

或

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},\ a = \infty,\ c_{-m} \neq 0,\ z \in V', \tag{2}$$

当 $a \neq \infty$ 时它具有有限个负幂项而当 $a = \infty$ 时则具有有限个正幂项. 这些表示式中的自然数 m 称为极点 a 的**阶**（order of the pole）或**重数**（multiplicity）；当 $m = 1$ 时该极点称为**单的**（simple）. 表示式（1）或（2）表明，当 $a \neq \infty$ 时 $p(z) = (z-a)^m f(z)$ 或当 $a = \infty$ 时 $p(z) = z^{-m} f(z)$ 可解析地延拓（见**解析延拓**（analytic continuation））到极点 a 的一个整个邻域并有 $p(a) \neq 0$. 换言之，m 阶极点 a 可由函数 $1/f(z)$ 在 a 处有 m 重零点这一事实所刻画.

复空间 $\mathbf{C}^n (n \geq 2)$ 的点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 称为多复变量 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 的解析函数 $f(z)$ 的极点，如果下列条件得到满足：1）$f(z)$ 在 a 的某个邻域内除一个集合 $P \subset U (a \in P)$ 外处处全纯；2）$f(z)$ 不能解析延拓到 P 的任何点；3）存在在 U 中全纯的函数 $q(z) \not\equiv 0$，使得在 $U \setminus P$ 内全纯的函数 $p(z) = q(z) f(z)$ 可全纯延拓到整个邻域 U 且有 $p(a) \neq 0$. 此时也有

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{p(z)}{q(z)} = \infty;$$

然而，对于 $n \geq 2$，如同一般的奇点一样，极点不可能是孤立的.

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976（第二卷英译本：Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992）.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 对 $n=1$，见[A1]；对 $n>1$，见[A2]，[A3].

关于极点在解析函数的表示中的应用，见解析函数的积分表示(integral representation of an analytic function)；Cauchy 积分(Cauchy integral).

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979(中译本 L. V. 阿尔福斯，复分析，第二版，上海科学技术出版社，1984)

[A2] Grauert, H., Fritzsche, K., Several complex variables, Springer, 1976(译自德文)(中译本：H. 格劳尔特，K. 弗里切，多复变数，科学出版社，1988).

[A3] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

沈永欢 译

多解析函数[poly-analytic function；полианалитическая функция]，m 阶的

实变量 x 与 y(或者等价地，复变量 $z=x+iy$ 与 $\bar{z}=x-iy$)的一个复函数 $w=u+iv$，在平面区域 D 中可表示成

$$w=f(z,\bar{z})=\sum_{k=0}^{m-1}\bar{z}^k f_k(z), \tag{1}$$

其中 $f_k(z)(k=0,\cdots,m-1)$ 是 D 里的复解析函数．换言之，一个 m 阶的多解析函数 w 可以定义为 D 中的一个函数，它关于 x 与 y，或者关于 z 与 $\bar{z}$，具有直到 m 阶的连续偏导数，且在 D 中处处满足广义的 Cauchy-Riemann 条件：

$$\frac{\partial^m w}{\partial \bar{z}^m}=0.$$

当 $m=1$，得到的是解析函数(analytic function).

一个函数 $u=u(x,y)$ 为区域 D 中某个多解析函数 $w=u+iv$ 的实(或虚)部的必要与充分条件是，u 为 D 中的多调和函数(poly-harmonic function)．解析函数的一些经典性质经适当的修改后，可适用于多解析函数(见[1]).

在复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 的区域 D 中，关于复变量 $z_1,\cdots,z_n$ 与 $\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n$ 的具多重阶 $m=(m_1,\cdots,m_n)$ 的多解析函数是形如下式的函数：

$$w=\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{m_1-1,\cdots,m_n-1}\bar{z}_1^{k_1}\cdots\bar{z}_n^{k_n}f_{k_1\cdots k_n}(z_1,\cdots,z_n),$$

其中 $f_{k_1\cdots k_n}$ 是 D 中变量 $z_1,\cdots,z_n$ 的解析函数．

参考文献

[1] Балк, М. Б., Зуев, М. Ф., 《Успехи матем. наук》, **25**(1970), 5, 203－226.

Е. Д. Соломенцев 撰 吴炯圻 高琪仁 译

多调和函数[poly-harmonic function；полигармоническая функция]，亦称多重调和函数、超调和函数(hyper-harmonic function)，亚调和函数(meta-harmonic function)，m 阶的

定义在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 的区域 D 中的实变量函数 $u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$，具有直到 $2m$ 阶连续偏导数，且在 D 中处处满足多调和方程(poly-harmonic equation)：

$$\Delta^m u\equiv\Delta(\Delta\cdots(\Delta u))=0,\ m\geqslant 1,$$

其中 Δ 是 Laplace 算子(Laplace operator)．当 $m=1$ 时，得到的是调和函数(harmonic function)；当 $m=2$ 时，得到的是双调和函数(biharmonic function)．每个多调和函数是坐标 x_j 的解析函数．调和函数的另外一些性质经相应的改变后也适用于多调和函数．利用调和函数来表示双调和函数这一熟知的结果，可以推广到任意 $m(>1)$ 阶的多调和函数([1]－[5])．例如，两个变量的多调和函数 u 可表示为

$$u(x_1,x_2)=\sum_{k=0}^{m-1}r^{2k}\omega_k(x_1,x_2),\ r^2=x_1^2+x_2^2,$$

其中 $\omega_k(k=0,\cdots,m-1)$ 是 D 中的调和函数．两个变量的函数 $u(x_1,x_2)$ 为多调和函数的必要与充分条件是：它是一个多解析函数(poly-analytic function)的实(或虚)部．

$m(>1)$ 阶多调和函数的基本边值问题如下：求区域 D 中的一个多调和函数 $u=u(x)$，使得在闭区域 $\bar{D}=D\cup C$ 上，它连同它的直到 $m-1$ 阶的各阶导数都是连续的，且在边界 C 上满足如下条件：

$$\left.\begin{array}{c} u|_C=f_0(y), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_C=f_1(y),\ \cdots,\ \left.\dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial n^{m-1}}\right|_C=f_{m-1}(y), \\ y\in C \end{array}\right\}(*),$$

其中 $\partial u/\partial n$ 是在 C 的法线方向导数，$f_0(y),\cdots,f_{m-1}(y)$ 是在充分光滑的边界 C 上给定的充分光滑的函数．有许多研究涉及在 $\mathbf{R}^n$ 的球中求解问题(*)．对任意区域上问题(*)的求解，可利用积分方程的方法，也可用变分法([1]，[6]).

参考文献

[1] Векуа, И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.-Л., 1948(英译本：Vekua, I. N., New methods for solving elliptic equations, North-Holland, 1967).

[2] Привалов, И. И., Пчелин, Б. М., 《Матем. сб.》, **2**(1937), 4, 745－758.

[3] Nicolesco, M., Les fonctions poly-harmoniques, Hermann, 1936.

[4] Nicolesco, M., Nouvelles recherches sur les fonctions

polyharmoniques. *Disq. Math. Phys.*, 1(1940), 43-56.
[5] Tolotti, C., Sulla struttura delle fonzioni iperarmoniche in pui variabili independenti. *Giorn. Math. Battaglini*. 1(1947), 61-117.
[6] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970(译自意大利文).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 近期书目及稍为一般的定义见[A1]: u 在区域 Ω 上是多调和的, 如果 $[|\Delta^n u|/(2n)!]^{n/2} \to 0$ 在 Ω 上局部一致成立.

参考文献

[A1] Aronszain, N., Creese, T. M. and Lipkin, L. J., polyharmonic functions, Clarendon Press, 1983.
[A2] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Chelsea, reprint, 1986

高琪仁 吴炯圻 译

多幂零群[poly-nilpotent group; полинильпотентная группа]

一个具有有限正规列(normal series)的群, 其中每个因子群均为幂零群; 这样的群列称为多幂零的(poly-nilpotent). 一多幂零群的最短多幂零群列的长度称为多幂零长度(poly-nilpotent length). 多幂零群的类与所有可解群的类重合(见可解群(solvable group)); 但是, 一般来说, 多幂零长小于可解长. 长为 2 的多幂零群称为亚幂零的(meta-nilpotent).

拥有一长为 l 的(上升的)多幂零群列, 并且其因子按上升的次序有不超过 $c_1, \cdots, c_l$ 的幂零类的所有群组成一个族 $\mathfrak{M}$, 它是幂零簇之积

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{c_1} \cdots \mathfrak{N}_{c_l}.$$

(见群簇(variety of groups)). 这个簇的自由群称为自由多幂零群(free poly-nilpotent group). 其中特别有趣的是簇 $\mathfrak{N}_c \mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A} \mathfrak{N}_c$. 这两簇的第一个包含全体连通可解 Lie 群; 在第二簇中, 所有有限生成群是可有限逼近的并且满足正规子群的极大条件.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967(中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 1982).
[2] Neumann, H., Varieties of groups, Springer, 1967.

А. Л. Шмелькин 撰 李慧陵 译

多向量[poly-vector; поливектор], p 向量(p-vector) 向量空间 V 上的

域 k 上向量空间 V 上 p 次外幂 $\wedge^p V$ 的一个元素(见外代数(exterior algebra)). 一个 p 向量可以理解为 V 上一个 p 次斜对称化的反变张量. V 中任意一个线性无关的向量组 $x_1, \cdots, x_p$ 定义一个非零 p 向量 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$; 这样一个多向量称为可因子化的(factorable), 可分解的(decomposable), 纯的(pure), 或素的(prime)(常简称为多向量). 两个线性无关组 $x_1, \cdots, x_p$ 和 $y_1, \cdots, y_p$ 在 V 中生成同一个子空间, 当且仅当 $y_1 \wedge \cdots \wedge y_p = c x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$, 这里 $c \in k$. 对于任意非零多向量 $t \in \wedge^p V$ 来说, 它的零化子(annihilator) $\mathrm{Ann}\, t = \{v \in V: t \wedge v = 0\}$ 是一个维数 $\leq p$ 的子空间, 而多向量 t 是纯的, 当且仅当 $\dim \mathrm{Ann}\, t = p$. 一个 n 维向量空间 V 的纯 p 向量在 $\wedge^p V$ 中构成一个代数簇; 相应的射影代数簇是一个 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold). n 维向量空间 V 内任意非零 n 向量或 $(n-1)$ 向量都是纯的, 然而一个二重向量 t 是纯的, 当且仅当 $t \wedge t = 0$.

如果 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的一个基而 $x_i = \sum_{j=1}^n x_i^j v_j$, 则多向量 $t = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ 在空间 $\wedge^p V$ 的基 $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}; i_1 < \cdots < i_p\}$ 内的坐标是矩阵 $\| x_i^j \|$ 的子式 $t^{i_1 \cdots i_p} = \det \| x_i^{i_k} \|$, $i_1 < \cdots < i_p$. 特别, 当 $p = n$ 时,

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \det \| x_i^j \| v_1 \wedge \cdots \wedge v_n.$$

如果指定一个非零 n 向量 $\omega \in \wedge^n V$, 就得到 p 向量与 $(n-p)$ 向量之间的一个对偶性, 即一个自然同构

$$\pi: \wedge^p(V) \to (\wedge^{n-p}(V))^* \cong \wedge^{n-p}(V^*),$$

使得对于一切 $t \in \wedge^p(V)$ 和 $u \in \wedge^{n-p}(V)$, $t \wedge u = \pi(t)(u)\omega$.

令 $k = \mathbf{R}$ 并且假设在 V 内已定义了一个内积, 那么在 $\wedge^p(V)$ 内诱导了一个具有以下性质的内积: 对于 V 内任意规范正交基 $v_1, \cdots, v_n$ 来说, $\wedge^p V$ 的基 $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p}: i_1 < \cdots < i_p\}$ 也是规范正交基. 一个纯多向量 $t = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ 的标量平方

$$(t, t) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} (t^{i_1 \cdots i_p})^2$$

与 V 中在向量 $x_1, \cdots, x_p$ 上所构造的超平行体的体积的平方相等. 如果在 n 维 Euclid 空间 V 内给出一个定向(这相当于选取一个 n 向量 ω, $(\omega, \omega) = 1$), 则上述对偶性导致一个自然同构 $\gamma: \wedge^p(V) \to \wedge^{n-p}(V)$. 特别, $(n-1)$ 向量 $t = x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}$ 对应于一个向量 $\gamma(t) \in V$, 称为向量 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 的向量积(vector product).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Eléments of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra, I, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2(译自法文).
[2] Кострикин, А. И., Манин, Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980(英译本: Kostrikin, A. I. and Manin, Yu. I., Linear algebra and geome-

try, Gordon & Breach, 1989).

[3] Постников, М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, М., 1979.

А. Л. Онищик 撰 郝钢新 译

Pólya 分布 [Pólya distribution; Поиа распределение]

取非负整数值 k, $0 \leqslant k \leqslant n$, 的随机变量 X_n 的概率分布，由公式

$$\mathrm{P}\{X_n = k\} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(b;c)_{k-1}(r;c)_{n-k-1}}{(b+r;c)_{n-1}} \quad (1)$$

给出，其中 $(b;c)_{k-1} = b(b+c)\cdots[b+(k-1)c]$，而整数值 $n>0$, $b>0$, $r>0$ 及 $c \geqslant -1$ 是参数；当 $c>0$ 时，由等价公式

$$\mathrm{P}\{X_n = k\} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{(p;\gamma)_{k-1}(q;\gamma)_{n-k-1}}{(1;\gamma)_{n-1}} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (p/\gamma)+k-1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (q/\gamma)+n-k-1 \\ n-k \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (1/\gamma)+n-1 \\ n \end{bmatrix}} \quad (2)$$

给出，其中整数 $n>0$，实数 $0<p<1$, $q=1-p$ 和 $\gamma>0$ 是参数．(1) 和 (2) 之间用关系式

$$p = \frac{b}{b+r}, \ q = \frac{r}{b+r}, \ \gamma = \frac{c}{b+r}$$

联结．

Pólya 分布的数学期望和方差分别是 $\mathrm{E}X_n = np$ 和 $\mathrm{D}X_n = npq(1+\gamma n)/(1+\gamma)$. Pólya 分布的特殊情形是：对 $c=0$, X_n 是具有参数为 n 和 p 的**二项分布** (binomial distribution)；对 $c=-1$, X_n 是具有参数为 $M=b$, $N=b+r$ 和 n 的**超几何分布** (hypergeometric distribution)．当 $b \to \infty$, $\gamma \to \infty$ 使得 $p=b/b+r$ 是常数且 $\gamma=c/b+r \to 0$ 时，分布趋向于具有参数 n 和 p 的二项分布．

这种分布是由 G. Pólya (1923) 联系着所谓 Pólya 瓮方案 (Pólya urn scheme) 加以研究：从一个装有 b 个黑球和 r 个红球的瓮中随机地选择一球，把选出的球连同额外的 c 个同色的球放回瓮中，如果 X_n 表示 n 次试验中抽出的黑球总数，则 X_n 的分布就由 (1) 或 (2) 给出．序列 X_n, $n=1,2,\cdots$，是离散 **Марков 过程** (Markov process)，其状态由 n 次抽样中的黑球数定义．从时刻 n 的状态 k 转移到时刻 $n+1$ 的状态 $k+1$ 的条件概率等于

$$\mathrm{P}\{X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k\} = \frac{b+kc}{b+r+nc} =$$

$$= \frac{p+k\gamma}{1+n\gamma}$$

(依赖于 n).

通过对 Pólya 瓮方案取极限就得到 Pólya 过程 (Pólya process)．它是一种非齐次连续时间 Марков 过程，属于“纯增”过程类．在无穷小时间间隔 Δt 内仅有一次抽取的条件下，得到在时间 Δt 内由状态 k 转到状态 $k+1$，对 $n \to \infty$，当 $np \to t$ 和 $n\gamma \to \alpha t$ 时的条件极限转移概率为

$$\mathrm{P}(X(t+\Delta t) = k+1 \mid X(t) = k) =$$

$$= \frac{1+\alpha k}{1+\alpha t}\Delta t + o(\Delta t).$$

按照由 Pólya 瓮方案到 Pólya 过程的转变，得到 Pólya 分布的一个重要的极限形式：即在时刻 t 保持在状态 k 的概率

$$\mathrm{P}_k(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} (1/\alpha)+k-1 \\ k \end{bmatrix} \left[\frac{\alpha t}{1+\alpha t}\right]^k \left[\frac{1}{1+\alpha t}\right]^{1/\alpha}$$

$$(\mathrm{P}_0(0) = 1).$$

这个极限分布是具有参数 $1/\alpha$ 和 $1/(1+\alpha t)$ 的**负二项分布** (negative binomial distribution) (相应的数学期望是 t，方差是 $t(1+\alpha t)$).

产生 Pólya 分布及其极限形式的瓮方案和 Pólya 过程是有后效模型 (models with an after effect) (从瓮中抽出一个特殊颜色的球增加了后面试验中抽出同种颜色球的概率)．

当 α 趋于零时，Pólya 过程转变成 **Poisson 过程** (Poisson process)，而 $\alpha \to 0$ 时的 Pólya 分布以具有参数 t 的 **Poisson 分布** (Poisson distribution) 为极限．

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957-1971 (中译本：W. 费勒，概率论及其应用，第一卷，上、下册，科学出版社，1964, 1979；第二卷，科学出版社，1994).

А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Johnson, N. L. and Kotz, S., Urn models and their application, Wiley, 1977.

刘秀芳 译 陈培德 校

Pólya 定理 [Pólya theorem; Пойа теорема]

设 R^D 是有限集 D 到 R 的映射之集合，而 G 是 D 上的**置换群** (permutation group)，其中 $|D|=n$. 这个群把 R^D 分解为等价类，使得 $f_1, f_2 \in R^D$ 属于同一个等价类，当且仅当存在 $g \in G$ 满足对所有 $d \in D$ 都有 $f_1(g(d)) = f_2(d)$. 给每个 $r \in R$ 指定一个权 $w(r)$, $w(r)$ 是一个交换环上的元素．f 的权取为

$w(f)=\prod_{d\in D}w(f(d))$，而类 $F\subset R^D$ 的权 $w(F)$ 定义为任意一个 $f\in F$ 的权．那么有

$$\sum_F w(F)=P\left(G;\ \sum_{r\in R}w(r),\ \cdots,\ \sum_{r\in R}w^n(r)\right).$$

其中左端的和取遍所有等价类，并且

$$P(G;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=|G|^{-1}\sum_{g\in G}\prod_{k=1}^{n}(x_k)^{j_k(g)}=P(G)$$

是 G 的**轮换指数**（cycle index），$j_k(g)$ 是置换 g 在分解为**独立循环**之积时长度为 k 的循环个数．

这个定理是 G. Pólya 在 1937 年发表的（[3]）．

如果对 R 中元素的权取为独立变量 x 的幂（或几个变量幂的积），那么对 $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$（所谓"枚举图形级数"，其中 a_k 是 R 中权为 x^k 的元素个数）和 $\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$（所谓"枚举组态级数"，其中 b_k 是 R^D 中权为 x^k 的类的个数），根据 Pólya 定理有

$$\Phi(x)=P(G:\varphi(x),\ \cdots,\ \varphi(x^n))$$

例：

（1）若 $|R|=m$，$w(r)\equiv 1$，则 $\varphi(x)=m$ 且 $P(G,m,\cdots,m)$ 是等价类的个数．

（2）若 $R=\{0,1\}$，$w(r)=x^r$，则 $\varphi(x)=1+x$，且 $f\in R^D$ 及 $w(f)=x^k$ 可以解释为 D 的一个基数为 k 的子集．群 G 定义了 D 的子集的轨道，而多项式 $P(G;1+x)$ 中 x^k 的系数是基数为 k 的子集构成的轨道数．

（3）令 $R=\{0,1\}$，设 $D=V^2$ 是集合 $V=\{1,\cdots,p\}$ 的所有 2 元子集 $\{i,j\}$；那么 $f\in R^D$ 是顶点集为 V 的一个标号图，其中两个顶点 i 和 j 邻接，若 $f(\{i,j\})=1$．设 $w(r)=x^r$，则当 $w(f)=x^k$ 时，k 就是对应于映射 f 的图的边数．如果对称群 S_p 作用在 V 上，那么对 $\sigma\in S_p$ 用关系 $g_\sigma\{i,j\}=\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ 定义 D 中的置换 g_σ，这样得到一个作用在 $D=V^{(2)}$ 上的二元群（binary group）$G=S^{(2)}=\{g_\sigma\}$．

对序列 g_{pk}（p 个顶点 k 条边的图的个数），$k=1,2,\cdots$，Pólya 定理给出其生成函数

$$g_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_{pk}x^k=P(S_p^{(2)};\ 1+x).$$

对恒等置换群 E_n，对称置换群 S_n 以及二元置换群 $S_n^{(2)}$，轮换指数的形式分别为

$$P(E_n;\ x_1)=x_1^n,$$

$$P(S_n;\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=\sum{}^{*}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i!}\left[\frac{x_i}{i}\right]^{k_i},$$

$$P(S_n^{(2)})=\sum{}^{*}\left[\prod_{i=1}^{n}k_i!\,i^{k_i}\right]^{-1}\prod_{i=1}^{[n/2]}(x_ix_{2i}^{i-1})^{k_{2i}}\times$$

$$\times x_i^{i\left[\frac{k_i}{2}\right]}\prod_{i=1}^{[(n-1)/2]}x_{2i+1}^{ik_{2i+1}}\prod_{r<s}x_{[r,s]}^{(r,s)k_rk_s},$$

其中 (r,s) 是 r 和 s 的最大公因子，而 $[r,s]$ 是它们的最小公倍数，和 $\sum^{*}$ 取遍满足 $k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n$ 的所有 $k_1,\cdots,k_n$．对于交错群、循环群和二面体群，轮换指数已知，同时对群的积，Descartes 积和环积[4]，也已知导出它们的轮换指数的公式．

Pólya 定理可推广到权函数和等价类的不同定义的情况[1]．

参考文献

[1] Bruijn, N. G. de: "Polya's theory of counting", in E. F. Beckenbach (ed): Applied combinatorial mathematics, Wiley, 1964, Chapt. 5.

[2] Сачков, В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977.

[3] Pólya, G., Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemiche verbindungen, *Acta Math.*, 68 (1937), 145－254.

[4] Harary, F. and Palmer, E.: Graphical enumeration, Acad. press, 1973.

В. М. Михеев 撰　刘振宏 译　李　乔 校

多循环群[polycyclic group; полициклическая группа]

一个具有多循环列（polycyclic series）的群，即具有因子群均为**循环群**的次正规列的群（见**子群列**（subgroup series））．多循环群类与满足子群的极大条件的可解群类一致，它对子群、商群和群扩张封闭．在任一多循环群列中无限因子群的个数是多循环群的一个不变量（**多循环维数**（polycyclic dimension））．多循环群的全形（见**群的全形**（holomorph of a group））同构于整数环上的一个矩阵群，这使我们可以把来自代数几何、数论和 p 进分析中的方法用到多循环群的理论中去．设 k 为有限域的一代数扩域而 G 为多循环群的一有限扩张，那么任一单 kG 模在 k 上是有限维的．在任意群中，两个局部多循环的正规子群的积还是局部多循环子群．

参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (英译本：Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

[2] Wehrfritz, B. A. F., Three lectures on polycyclic groups, Queen Mary College, London, 1973.

Ю. И. Мерзляков 撰

【补注】 整数环上的每个可解线性群都是多循环群（[A1]）．可解群是多循环群，当且仅当它的每个子群都是有限生成的（[A2]）．Milnor-Wolf **定理**（Milnor-Wolf theorem）提出，有限生成可解群或者是多项式增长或者是指数增长的（见**群和代数中的多项式增长**

和指数增长(polynomial and exponential growth in groups and algebras). 而若它是多项式增长的, 则它是多循环的并且是殆幂零的 (almost nilpotent)(即它包含一指数有限的幂零子群)([A2], [A3]). 若 M 是完全的、连通的、局部齐性的 Riemann 流形, 则它的同伦群 $\pi_1(M)$ 的每个可解子群是多循环群.

提出每个多循环群都同构于整数上的一个矩阵群的定理是在[A5]中首先证明的. 提出多循环群就是满足关于子群的极大条件(the maximum condition for subgroups)的可解群的定理见[A7].

参考文献

[A1] Mal'čev, A. I. [A. I. Mal'tsev], On certain classes of infinite soluble groups, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), **2** (1956), 1 – 21 (*Mat. Sb.*, **28** (1951), 567 – 588).

[A2] Wolf, J. A., Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, **2** (1968) 421 – 446.

[A3] Milnor, J., Growth in finitely generated solvable groups, *J. Diff. Geom.*, **2** (1968), 1 – 7.

[A4] Segal, D., Polycyclic groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[A5] Auslander, L., On a problem of phillip Hall. *Ann. of Math.*, **86** (1967), 112 – 116.

[A6] Segal, D., The general polycyclic group, *Bull. London Math. Soc.*, **19** (1987), 49 – 56.

[A7] Hirsch, K. A., On infinite soluble groups, *Proc. London Math. Soc.*, **44** (1938), 53 – 60.

李慧陵 译

多圆盘[polydisc; поликруг], 多圆柱(polycylinder)

复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 中的一区域

$$\Delta=\Delta(a=(a_1,\cdots,a_n),\ r=(r_1,\cdots,r_n))=$$
$$=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^n:|z_\nu-a_\nu|<r_\nu,$$
$$\nu=1,\cdots,n\},$$

它是 n 个圆盘的拓扑积

$$\Delta=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_n,$$
$$\Delta_\nu=\{z_\nu\in\mathbf{C}:|z_\nu-a_\nu|<r_\nu\},\ \nu=1,\cdots,n.$$

点 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^n$ 是多圆盘 Δ 的中心, $r=(r_1,\cdots,r_n)$, $r_\nu>0$, $\nu=1,\cdots,n$, 是它的多半径(polyradius). 当 $a=0$, $r=(1,\cdots,1)$ 时可得单位多圆盘(unit polydisc). Δ 的特异边界(distinguished boundary)是集合

$$T=T(a,r)=$$
$$=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_\nu-a_\nu|=r_\nu,\ \nu=1,\cdots,n\},$$

它是完全拓扑边界 $\partial\Delta$ 的一部分. 多圆盘是一完全 Reinhardt 区域(Reinhardt domain).

多圆盘概念的一个自然拓广是一多区域(polyregion)(多圆型区域(polycircular region), 广义多圆柱(generalized polycylinder)) $D=D_1\times\cdots\times D_n$, 它是(一般为多连通的)区域 $D_\nu\subset\mathbf{C}(\nu=1,\cdots,n)$ 的拓扑积. 多区域 D 的边界 $\Gamma=\partial D$ 由 n 个 $2n-1$ 维的集合组成:

$$\Gamma_\nu=\{z\in\mathbf{C}^n:z_\nu\in\partial D_\nu,\ z_\mu\in\overline{D}_\mu,\ \mu\neq\nu\},$$
$$\nu=1,\cdots,n.$$

它的公共部分是 D 的 n 维特异边界(distinguished boundary):

$$T=\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n=$$
$$=\{z\in\mathbf{C}^n:z_\nu\in\partial D_\nu,\ \nu=1,\cdots,n\}.$$

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rudin, W., Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969.

钟同德 译

多边形[polygon; многоугольник]

1) 一条闭折线, 即: 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 是不同的点, 无三点共线, 则线段的集合 $[A_1A_2],[A_2A_3],\cdots,[A_nA_1]$ 称为一个多边形(polygon)或多角曲线(polygonal curve)(见图1). 多边形可以是空间的(斜的(skew))或平面的(下面将讨论平面多边形).

2) 一个连通(多连通)域, 其边界是由有限条线段组成的一条闭多角曲线(或多条闭多角曲线, 这种情形有时称为多角形图(polygonal figure), 见图2). 在第一种定义的意义下多边形是一维的(one-dimensional), 在第二种定义的意义下则是二维的(two-dimensional).

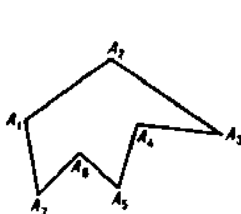


图 1

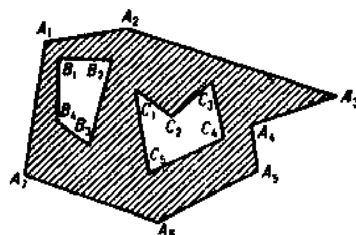


图 2

多角形曲线的顶点(点 A_i)称为多边形的顶点(vertices of the polygon), 线段 $[A_iA_{i+1}]$ 称为它的边(sides). 有公共顶点的两条边称为相邻的(adjacent), 作为多角形曲线的一条线段端点的两个顶点称

为相邻的顶点(adjacent vertices). 如果一个多边形的边界是一条简单多角曲线, 使得不相邻的边无公共点(内部或端点), 则该多边形称为简单的(simple). 如果一个二维多边形的边界不是简单的, 则该多边形称为自相交的(self-intersecting)(图 3)(第一种定义的意义下的自相交多边形(self-intersecting polygon)). 这时该多边形是简单多边形的并. 一条自相交的多角曲线把平面分为有限个区域, 其中之一是无限的. 如果射线也考虑成一个多边形的边界, 则可定义无限多边形(infinite polygon), 它由有限条线段和射线组成其边界.

每一个简单多边形(或简单多边形的边界)把平面分为内部(有限)和外部(无限)区域(Jordan 定理(Jordan theorem)). 一个简单多边形可有非常复杂的边界结构. 要确定一个点是属于内部区域还是外部区域, 只要过这一点画一条不通过顶点的射线: 如果射线与边界相交的次数是偶数, 那么这点就是在外部区域中, 如果是奇数, 则这点是在内部.

多边形的某一顶点出发的且包含该顶点处的两条相邻边的两条射线形成的角称为多边形的一个内角(interior angle), 如果这个角和内部区域有非空的、包含该顶点的交(见图 4). 一个简单 n 边形的内角和等于 $(n-2)180°$. 一个简单多边形至少有一个内角小于一个平角.

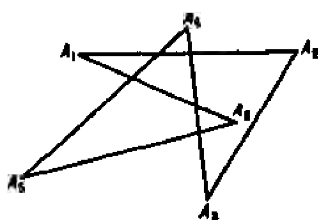


图 3

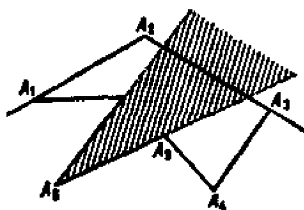


图 4

通过多边形的两个不相邻顶点的直线称为对角直线(diagonal line), 端点为两个不相邻顶点的线段称为多边形的对角线(diagonal of the polygon).

一个多边形称为可定向的(orientable), 如果可以给定一个环绕地通过各个顶点的次序, 使得一条边的终点是下一条边的起点. 这时, 多边形的边界称为平面上的一条多角(定向)闭道路(polygonal (oriented) closed path). 一个定向二维简单多边形是: 沿边界绕行一圈时, 或者总在边界的左侧, 或者总在右侧; 一个有自相交的多边形的区域可以位于边界的不同侧.

一个简单多边形称为正的(度量正的)(regular (metrically regular)), 如果它的所有角全等且所有边全等(有相等的长度). 正多边形有一个外接圆和一个内切圆. 内切圆半径是正多边形的内径(inradius). 边数相同的正多边形是相似的. 下表中给出了一些正多边形的外接圆半径、内切圆半径和面积(a 是正多边形的边长).

边数	外接圆半径	内切圆半径	面积
3	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
5	$\frac{a}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
6	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
8	$\frac{a}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$	$2a^2(1+\sqrt{2})$
10	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

一个多边形称为凸的(convex), 如果它位于每一条包含该多边形的某一条边的直线的一侧. 凸多边形(convex polygon)总是简单的. 正多边形是凸的. 在一个凸多边形中对角线的条数等于 $n(n-3)/2$ (n 是边数), 从每一个顶点可以引 $n-3$ 条对角线, 它们把多边形分为 $n-2$ 个三角形(图 5).

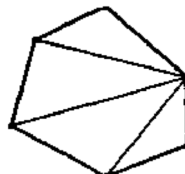


图 5

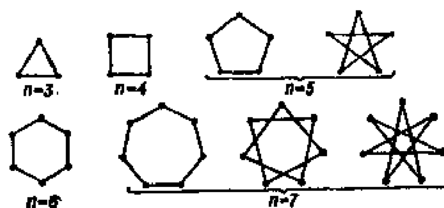


图 6

凸多边形的一个内角的补角称为外角(exterior angle). 每个顶点取一个外角, 一个凸多边形的外角和形成一个全角(360°). 外角是边界在顶点转过的角.

一个所有边全等且所有角全等的自相交多边形称为星形的(star-shaped)(或星形正的(star-shaped regular)). 边数从五开始, 存在星形多边形; 它们可被看成正 n 边形的对角线的特殊子集.

仅是所有的角或仅是所有的边全等的多边形称为半正的(semi-regular). 一个具有偶数个顶点的半正多边形称为等角半正的(equiangular semi-regular),

如果它的角全等并且边交替相等（最简单的例子是矩形）. 总存在一个圆通过等角半正多边形的所有顶点. 总存在两个圆, 每一个与等角半正多边形的隔边相切. 一个具有偶数个顶点的半正多边形称为等边半正的（equilateral semi-regular）, 如果它的边全等并且角交替相等（最简单的例子是菱形（rhombus））. 等边半正多边形存在一个内切圆与其各边相切; 存在两个圆, 每一个通过等边半正多边形的交替顶点. 等角半正多边形和等边半正多边形的作图可利用正多边形来实现.

边数为 $2^m p_1 \cdots p_k$ 的正多边形可由尺规作出, 其中 p_i 是 $p=2^{2^\sigma}+1$ 形的素数, σ 是一个正整数（Gauss 定理（Gauss theorem））. 五个已知的这种形式的素数是: 3, 5, 17, 257, 65537. 其他正多边形都不能用尺规作出. 所以, 当 $n=3$, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34, … 时, 正 n 边形可由尺规作出, 当 $n=7$, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, … 时则不能. 构作正 n 边形的问题等价于把圆 n 等分的问题.

根据另一个定义, 一个多边形是正的（regular）, 如果它的 n 个顶点位于一个圆上并且 n 条边与一个同心的圆相切. 如果正多边形的边绕中心 d 次（d 与 n 互素, $d<n/2$）, 则多边形称为密度 d 的 n 边形（n-gon of density d）, 用 Schläfli 符号（Schläfli symbol）记为 $\{n/d\}$. 所以, 一个凸的正 n 边形（$d=1$）是 $\{n\}$. $d>1$ 时, 该多边形为星多边形（star-polygon）. 星五边形（star-pentagon）$\{5/2\}$ 是五角星（pentagram）; 类似地, $\{8/3\}$, $\{10/3\}$, $\{12/5\}$ 是八角星（octagram）, 十角星（decagram）和十二角星（dodecagram）. 当 $n=7$ 或 9 时, 有两种星多边形. 图 6 给出了多边形 $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{5/2\}$, $\{6\}$, $\{7\}$, $\{7/2\}$, $\{7/3\}$. 在不伦瑞克 Gauss 塑像的基座上有一个小的 $\{17/8\}$, 以纪念 Gauss 的 $\{17\}$ 的作图.

在几何学的某些分支中多边形的边取成闭折线的线段所在的直线. 可以同时存在内接和外接多边形（一个的顶点位于另一个的边上）, 甚至可以有多边形互相外接和内接（如见构形（configuration））.

多边形的面积可分成三角形来计算. 沿边界前进内部区域保持在左侧时定向简单多边形的面积取正号, 在右侧时取负号.

当多边形的边界是一条把平面分成几个区域的自相交闭折线道路时, 这种多边形的面积可用所谓的区域系数来定义: 如果一条线段从外部区域某点到给定区域的内部的一点, 多边形的边界与该线段 p 次从左到右、q 次从右到左相交, 则 $p-q$ 称为该区域的系数. 系数不依赖于提到的两点的选择. 在这种情形, 定向多边形的面积是每一个区域的面积乘上其系数之和.

如果在平面上引入 Descartes 直角坐标系 x, y, 则定向多边形的面积由积分 $\int y\,dx$ 来计算, 其中 y 是多边形边界上（绕行一次）的点的纵坐标. 在极坐标系（ρ, φ）中, 定向多边形的面积由积分 $\oint \rho^2\,d\varphi$ 来计算, 其中 ρ 绕行多边形边界一次.

一个多边形称为曲线的（curvilinear）, 如果它的边界由有限段曲线组成. 这样的多边形存在于曲面上. 如果曲面上多边形的边界由该曲面上的测地弧段组成, 则多边形称为测地的（geodesic）. 当多边形以曲面的渐近曲线的线段为边界时, 多边形称为渐近的（asymptotic）, 等等. 曲线多边形在一个顶点的内角定义为边界在此顶点处转动角的补角（假设曲面是正则的）. 曲面上的简单多边形可以只有两条边和两个角, 称为二角形（digons）或弓形（lunes）.

多边形还可定义为一个向量的集合, 这些向量考虑为多边形（n 边形）顶点的径向量, 即点（顶点）由向量构成. n 边形的性质转换成向量代数的语言, 这提供了代数方法研究多边形的类的可能性. 特别地, 可以定义多边形的和, 一个多边形与交换域（特征与顶点个数互素）中一个数的乘积, n 边形的循环类, 循环映射和它们的代数, 等等.

用这种方式可以建立 n 边形的许多一般性质（如见[3]）.

多边形也可以用**凸包**（convex hull）的概念来定义, 凸包是一个凸多边形. 即, 一个图形 Φ 称为一个多边形, 如果它可以分解（decomposed）成凸多边形:

$$\Phi=\bigcup F_i,\ F_i\cap F_j=\phi,\ i\neq j,$$

其中 F_i 是凸多边形.

参考文献

[1] Перепелкин, Д. П., Курс элементарной геометрии, ч. 1, М.-Л., 1948.

[2] Адамар, Ж., Элементарная геометрия, 4 изд., ч. 1, М., 1957（译自法文）.

[3] Bachmann, F. and Schmidt, Z., n-gons, Univ. Toronto Press, 1975（译自德文）.

[4] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4- Геометрия, М., 1963.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.

陆珊年 译

多边形（幺半群上的）[polygon (over a monoid); полигон (над моноидом)], R 多边形（R-polygon）,

运算对象(operand).

具有算子幺半群(monoid)的非空集合. 确切地说, 一非空集合 A 称为幺半群 R 上的左多边形(left polygon), 如果对任意的 $\lambda\in R$ 和 $a\in A$ 定义了积 $\lambda a\in A$, 使得

$$(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$$

和

$$1a=a$$

对一切 $\lambda,\mu\in R$, $a\in A$ 成立. 右多边形(right polygon)可以类似地定义. 确定一个左 R 多边形 A 等价于确定一个从幺半群 R 到集合 A 到自身的映射的幺半群内的同态 φ 且 φ 把 1 映到 A 的恒等映射. 此处 $\lambda a=b$, 当且仅当

$$\varphi(\lambda)(a)=b.$$

特别地, 每个非空集合可视为它到自身的映射的幺半群上的多边形. 所以, 多边形与半群的变换的表示有密切的关系.

如果 A 是一个泛代数(universal algebra)而其算子系 Ω 中只包含一元运算, 那么对任意 $f_i\in\Omega$, $a\in A$, 令

$$(f_1\cdots f_n)(a)=f_1(\cdots(f_n(a))\cdots),$$

A 就成为了 Ω 生成的自由幺半群 F 上的多边形. 如果 Ω 为一个自动机的输入信号集而 A 为状态集, A 也可看成一 F 多边形(见自动机的代数理论(automata, (algebraic theory of)).

R 多边形 A 到 R 多边形 B 的映射 φ 称为同态(homomorphism), 如果 $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$ 对任意 $\lambda\in R$ 和 $a\in A$ 成立. 若 $A=B$ 这就得到自同态(endomorphism). 多边形 A 的全部自同态组成一幺半群, 而 A 可视为在它之上的多边形.

R 多边形 A 上的等价关系 θ 称为同余(congruence), 如果 $(a,b)\in\theta$ 推出 $(\lambda a,\lambda b)\in\theta$ 对一切 $\lambda\in R$ 成立. θ 的同余类集合自然地成为一个 R 多边形, 称为 A 的商多边形(quotient polygon), 记为 A/θ. 若 A 为 R 上的多边形, 则可定义 R 上的一个关系 $\mathrm{Ann}(A)$: $(\lambda,\mu)\in\mathrm{Ann}(A)$, 若对所有 $a\in A$, $\lambda a=\mu a$. 关系 $\mathrm{Ann}(A)$ 是幺半群 R 上的同余而 A 可自然地转化为商幺半群 $R/\mathrm{Ann}(A)$ 上的多边形. 若多边形 A 产生于某自动机, 那些这种转化相当于把等效的输入信号序列视为同一. 在泛代数理论中人们研究直接积和次直接积这两种通常的构造, 而在自动机的代数理论中, 圈积(wreath product)构造也很重要. 多边形的自由积(或余积)就是它们的无交并.

多边形可以看作环上的模的去掉加法的推广, 这一看法为多边形理论提出了许多研究课题. 特别地, 在多边形与半群的根(radical)(见半群类中的根(radical in a class of semi-groups))之间的一个联系已经建立, 关于幺半群的性质和它上的多边形的性质之间的关系也已进行了研究. 例如, 所有左 R 多边形都是投射的, 当且仅当 R 为单元素群, 而交换幺半群 R 上的所有多边形都是内射的则等价于在 R 中有零元且它的所有理想均由幂等元生成(见环的同调分类(homological classification of rings)).

若 R 为带零元 0 的幺半群, 则可以用带零的 R 多边形来称呼那种有一特别点 u 的 R 多边形 A, 其中对一切 $a\in A$ 有 $0a=u$. 带零的多边形理论有着一些自身的特色.

每个多边形都可看成由一个单对象范畴到集合范畴内的函子(functor).

参考文献

[1] Arbib, M. A. (ed.), Algebraic theory of machines, languages and semigroups, Acad. Press, 1968.

[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 2, Amer. Math. Soc., 1967.

[3] Скорняков, Л. А., в сб., Модули, в. 3, новосиб., 1973, 22–27

[4] Итоги науки и техники. Алгебра, Топология, геометрия, т. 14, М., 1976, 57–190.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 在西方, 幺半群 M 上的多边形通常称为 M 集. "运算域"这一术语也在使用. 所有 M 集(M 固定)的范畴组成拓扑斯(topos); 但此时不能(像上面那样)排除掉空 M 集.

不像上文那样假设幺半群的交换性, 但假设在它之上的非空左多边形都是内射的, 这类幺半群的某些刻画已经得到, 见[A3]中的有关介绍. 上文说到, 不存在非平凡幺半群, 在它之上的所有左多边形都是投射的, 但是所谓完满幺半群却是非平凡的, 这里完满幺半群(如同完满环(perfect ring))定义成其上每个左多边形都有投射覆盖的幺半群. 见[A1], [A2].

参考文献

[A1] Fountain, J., Perfect semigroups, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 20(1976), 87–93.

[A2] Isbell, J., Perfect monoids, *Semigroup Forum*, 2 (1971), 95–118.

[A3] Yoh, R. W., Congruence relations on left canonic Semigroups, Semigroup Forum (1977), 175–183.

[A4] Eilenberg, S., Automata, languages and machines, Acad. Press, 1974.

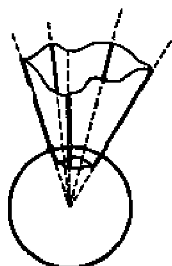
李慧陵 译

多角形数 [**polygonal number**; **многоугольное число**], k 角形数(k-gonal number), 形数(figurate number)

见等差数列(arithmetic series).

多面角 [**polyhedral angle**; **многогранный угол**]

由一些(从同一点，即顶点(vertex)出发的)射线以及每两条射线之间的平面角区域围成的空间中的无限凸区域；换句话说，它是一个无底棱锥(baseless pyramid)．这些平面角区域称为面(faces)．一个多面角称为正的(regular)，如果它的所有平面角都相等，所有二面角也都相等．多面角是用它的球面多边形(polygon)(见图)围成的面积来度量的，一个多面角的球面多边形是由该多面角的面与中心在其顶点，半径为1的球面相交而得到的．



杜小杨 译

多面体链[polyhedral chain; полиэдральная цепь]

在一个区域 $U \subset \mathbf{P}^n$ 中的线性表示 $\sum_{i=1}^{m} d_i t_i^r$，这里 t_i^r 是位于 U 中的 r 维单形．U 中的一个 r 维单形(见**单形(抽象的)**(simplex (abstract)))是指凸包位于 U 中的一个 $r+1$ 个点的有序集．一个多面体链的边界按照通常的方式定义．多面体链的概念所处的地位介于 U 的三角剖分的单纯链与 U 中的奇异链的概念之间，但与后者在单形的线性性质方面有所不同．

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую камбинаторную топологию, 1975.

C. B. Матвеев 撰

【补注】 $r+1$ 个点构成一个单形要求这些点处在一般位置(general position)，即它们不全部包含在 $\mathbf{R}^n$ 的某个 $(r-1)$ 维仿射子空间中．

参考文献

[A1] Glaser, L. C., Geometrical combinatorial topology, v. Nostrand, 1970.

[A2] Maunder, C. R. F., Algebraic topology, v. Nostrand, 1972.

林向岩 译

多面体复形[polyhedral complex; полиэдральный комплекс]

某个 $\mathbf{R}^n$ 里闭凸多胞形的一个有限集合，连同每个多胞形包含它所有的面，并使得多胞形之间的交或是空集或是它们每一个的一个面．多面体复形的一个例子是标准三维立方体的所有顶点，棱与二维面的集合．也可考虑由一个无限但局部有限的多胞形族所组成的复形．多面体复形的概念推广了几何**单纯复形**(simplicial complex)的概念．多面体复形 P 的基础空间 $|P|$ 是进入到它里面的所有多胞形的并集并且它本身是一个(抽象)多面体(见**抽象多面体**(polyhedron, abstract))．P 里面多胞形的个数通常少于三角剖分中单形的个数．一个多面体复形 P_1 称为复形 P 的一个**细分**(subdivision)，如果它们的基础空间重合并且 P_1 的每个多胞形位于 P 的某个多胞形中．中心在一点 $a \in |P|$ 的复形 P 的一个星形细分(star-like subdivision)通过把包含 a 的闭多胞形分解为不含 a 的面上的以 a 为顶点的锥而得到．任何多面体复形 P 有一个是几何单纯复形的细分 K．这样的一个细分能够不添加新顶点而得到．例如，依次以 P 的所有顶点为中心进行 P 的星形细分就足够了．

参考文献

[1] Александров, П. С. Комбинаторная топология, М.-Л, 1947(英译本: Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, 1956).

C. B. Матвеев 撰

【补注】 另外的参考文献亦见**多面体链**(polyhedral chain)与**单纯复形**(simplicial complex)条．

林向岩 译

多面体闭链[polyhedral cycle; полиэдральный цикл]

边缘为零的**多面体链**(polyhedral chain)．

多面体度量[polyhedral metric; многогранная метрика]

Euclid 单纯形的连通**单纯复形**(simplicial complex)的内蕴度量(见**内度量**(internal metric))，其中恒等的边界是等距的，且恒等由等距来实现(见**等距映射**(isometric mapping))．复形的两点间的距离是连接这两点的折线的长度的下确界，折线中的每条连线都应位于一个单纯形内．多面体度量的一个例子是 E^3 中凸多面体表面的内蕴度量．多面体度量也可在常曲率空间的单纯形的复形上考虑．

多面体度量允许用综合法研究．通常是对复形为流形或带边流形的情况考虑多面体度量．在凸曲面和二维有界曲率流形(见**有界曲率的二维流形**(two-dimensional manifold of bounded curvature))的理论中，利用多面体度量的逼近法可用作研究的通用工具(见[1]，[2])．在凸曲面的研究中，三维多面体度量也已被成功地应用了(见[3])．整体 Riemann 几何的某些结果已被推广到维数 $n>2$ 的多面体度量上(见[4]，[5])．

参考文献

[1] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948(中译本: А. Д. 亚历山大洛夫，凸曲面的内蕴几何学，科学出版社，

1962).

[2] Александров, А. Д., Залгаллер, В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М.-Л., 1962 (《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, т. 63).

[3] Волков, Ю. А., 《Вестн. Ленингр. ун-та》, 1960. № . 19, 75 – 86.

[4] Милка, А. Д., 《Укр. геометр. сб.》, 1968. № . 5 – 6, 103 – 114; 1970, № 7, 68 – 77.

[5] Stone, D. A., Geodesics in piecewise linear manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215**(1976), 1 – 44.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Busemann, H., Convex surfaces, Interscience, 1958. Chapt. Ⅳ.

沈一兵 译

多面体 [polyhedron; многогранник]

有限个平面多边形(在三维或高维空间中)的并,使得:1)任何多边形的每一条边同时是另一个(且仅一个)多边形的一条边,这两个多边形称为(沿这条边)相邻的;2)从构成多面体的任何一个多边形出发,经过一个相邻的多边形,再经过下一个相邻的多边形,…,可能达到任何其他多边形.这些多边形、它们的边和它们的顶点,分别称为多面体的面(faces)、棱(edges)和顶点(vertices).

依照**多边形**(polygon)的不同定义,上述多面体的定义具有不同的含义.如果多边形指的是平面闭折线(甚至是自相交的),则得到多面体的第一个定义.本文大部分是建立在多面体的第二个定义之上,其中作为多面体的面的多边形,被理解为由折线所围成的平面部分.从这种观点来看,一个多面体是由一些平面多角形块构成的曲面.如果这个曲面本身不相交,则它是某个几何体的整个表面,这个几何体也称为多面体;因此,从第三种观点来看,一个多面体就是一个几何体,并且其中允许存在由有限个平面界面围成的"孔".

多面体的两个最简单的例子是棱柱和棱锥.一个多面体称为 n 棱锥(pyramid),如果它的一个面(底(base)是 n 边形,而其他面都是三角形,并且具有一个不处于底平面上的公共顶点.三棱锥也称为四面体(tetrahedron).一个多面体称为 n 棱柱(prism),如果它的两个面(底(bases))是全等的 n 边形(不处于同一平面上),并且可以通过平行移动从一个得到另一个,而其余的面都是平行四边形,其中每个平行四边形都有一对对边是两底的一对对应边.对于每个亏格为零("无孔")的多面体,Euler 示性数(顶点数减棱数加面数)等于二;用符号来写,$V-E+F=2$ (Euler 定理(Euler theorem)).对于亏格为 p 的多面体,有 $V-E+F=2-2p$.**凸多面体**(convex polyhedron)是有限个点的凸包,即处于其任何面所在平面的一侧的多面体.其内部是一个**凸体**(convex body).如果凸体的表面是一个多面体,则相应的多面体是凸的.下述几种凸多面体是最重要的.

正多面体(regular polyhedra)(Plato 立体)是这样的凸多面体,它的所有面都是全等的正多边形,所有顶点上的多面角都是相等的正多面角(见图 1 – 5).

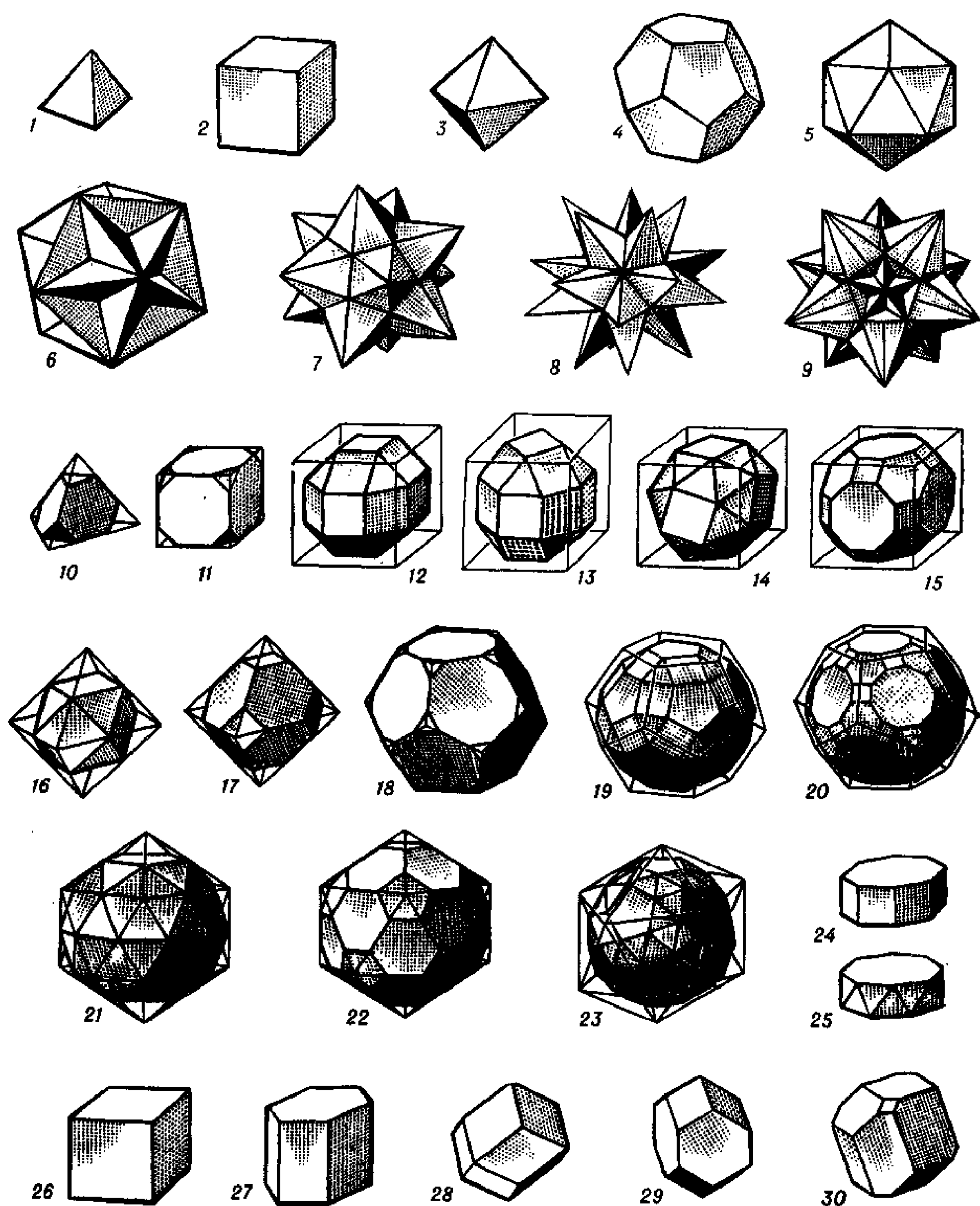
等角多面体和等面多面体(isogons and isohedra)是这样的凸多面体,它的所有多面角都相等(等角多面体),或者所有面都相等(等面多面体);一个等角多面体(等面多面体)绕其重心旋转(连同反射)的群把每个顶点(面)对应到另一个顶点(面).每个等面多面体都可这样来实现,即使得它的所有面都是正多边形.这样得到的多面体称为半正多面体(semi-regular polyhedra)(Archimedes 立体(Archimedean solids)及其对偶)(见图 10 – 25).

(凸)**平行多面体**(parallelohedron)是这样的多面体,当把它看成立体时,通过平行移动可以占满整个无限空间,彼此之间互不重叠,二者之间没有空隙,也就是说,形成一个空间的镶嵌(见图 26 – 30).

根据(本文前面提到的)多面体的第一个定义,还可给出四种正非凸多面体(Kepler-Poinsot 立体(Kepler-Poinsot bodies)).在这些多面体中,或者面彼此相交,或者面本身是自相交的多边形(见图 6 – 9).在研究与多面体的表面面积和体积有关的量时,采用多面体的第一种定义是方便的.

如果在一个多面体中,可以对其各面定向,使得每一条棱在沿这条棱相邻的两个面上具有相反的方向,则这个多面体称为可定向的(orientable),否则称为不可定向的(non-orientable)(亦见**定向**(orientation)).对于一个可定向多面体(甚至它是自相交的,以及它的面是自相交多边形),可以引入表面面积和体积的概念.一个可定向多面体的表面面积是它的各面的面积之和.为了定义体积,应注意到:多面体各面内部的并把空间分成有限个相联系的部分,其中一部分(外部分)是无限的,其余各部分(内部分)是有限的.如果从多面体的一个外点向多面体的一个内部分中的一个内点引一线段,则多面体与这一线段相交的各面内部的"系数"之和,称为多面体的这个内部分的系数(它与外点的选取无关);系数是正整数、负整数或者零.多面体的所有内部分的普通体积与其相应系数乘积之和,称为多面体的体积(volume of the polyhedron).

n 维多面体也已被考虑.这里给出的一些定义具有 n 维推广.特别是,已得到所有凸正多面体,对于



$n=4$，有 6 种；对于一切更大的 n，有 3种：**正四面体**（tetrahedron）的推广、**正方体**（cube）的推广和**正八面体**（octahedron）的推广．同时，例如，4 维等角多面体和等面多面体还不完全知道（1989）．

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн 4 — Геометрия, М., 1963

[2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952(译自德文).

[3] Александров, А. Д., Выпуклые многогранники, М.-Л., 1950.

[4] Люстерник, Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956

[5] Brückner, M., Vielecke und Vielflache: Theorie und Geschichte, Teubner, 1900.

材料取自 БСЭ-3 同名条目

【补注】 （高维）多面体也称为多胞形(polytope). 更确切地说，多胞形是 $\mathbf{R}^n$ 中由直线、平面和超平面围成的几何图形. 例如，在二维情况，它是多边形(polygon)；在三维情况，它是多面体(polyhedron).

关于凸多胞形可能具有的（各个维数的）面数的所谓上界猜想（upper bound conjecture）如下所述：具有 v 个顶点的 d 维多胞形 $P(v, d)$ 的可能的 j 维面数当 $P(v, d)$ 为循环多胞形时达到最大值. 对于 $j = 0, \cdots, d-1$，这个数是

$$f_j(v, 2n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{v}{v-k} \begin{bmatrix} v-k \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ j+1-k \end{bmatrix},$$

如果 $d = 2n$,

$$f_j(v, 2n+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{j+2}{v-k} \begin{bmatrix} v-k \\ k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 \\ j+1-k \end{bmatrix},$$

如果 $d = 2n+1$.

循环多胞形(cyclic polytope)定义如下. 设 C 是 $\mathbf{R}^d$ 中由 $C = \{t, t^2, \cdots, t^d : t \in \mathbf{R}\}$ 参数地定义的所谓矩曲线. 循环多胞形 $P(v, d)$ 是 C 上任何 $v \geq d+1$ 个不同点的凸包.（事实上，任何 d 次曲线均可.）上界猜想是由 P. McMullen 于 1970 年证明的，见 [A4].

参考文献

[A1] Grünbaum, B., Convex polytopes, Interscience, 1967.

[A2] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Dover, reprint, 1973.

[A3] Senechal, M. and Fleck, G. (eds.), Shaping space, Birkhäuser, 1988.

[A4] McMullen, P. and Shephard, G. C., Convex polytopes and the upper bound conjecture, Cambridge Univ. Press, 1971.

杜小杨　张鸿林 译

抽象多面体 [polyhedron, abstract; полиэдр]

某 $\mathbf{R}^n$ 中凸多胞形的一个局部有限族的并. 凸多胞形(convex polytope)是指有限个闭半空间的有界的交. 族的局部有限性(local finiteness)是指 $\mathbf{R}^n$ 中的每一点有一个仅与有限个多胞形相交的邻域. 紧多面体(compact polyhedron)是有限个凸多胞形的并. 多面体的维数(dimension of a polyhedron)是构成多面体的多胞形的最大维数.（抽象）多面体的任一开子集，特别地，Euclid 空间的开子集，是多面体. 其他的多面体是：紧多面体上的**锥**(cone)和**双角锥**(suspension). 简单的例子（开区间上的锥）表明紧多面体和非紧多面体的并不一定是多面体. 多面体 Q 的子多面体(subpolyhedron)是指位于多面体 Q 中的任一多面体 P. 有时限于考虑闭子多面体. 多面体 $P \subset \mathbf{R}^n$ 中的每一点 a 有一个在 P 中的邻域，它是以 a 为顶点且具有紧的底的 $\mathbf{R}^n$ 中的锥. 这一性质是一个特征：$\mathbf{R}^n$ 中的任意子集，其每一点有一个底为紧的锥形邻域，则该子集是一个多面体.

任意紧多面体 P 都可分解成有限个闭单形，使得其中任意两个单形或者不相交，或者相交于一个公共面. 在非紧多面体的情形要求单形族是局部有限的. 这一分解称为多面体的直线三角剖分(rectilinear triangulation). 一个给定的多面体的任意两个三角剖分有一个公共的重分. 如果 P 是多面体 Q 的一个闭子多面体，则 P 的任一三角剖分 K 可扩充成 Q 的一个三角剖分 L，这时，称所得到的几何单纯复形对 (L, K) 三角剖分对 (Q, P). 一个多面体 $P \subset \mathbf{R}^n$ 到多面体 $Q \subset \mathbf{R}^n$ 中的映射 f 称为分片线性映射(piecewise-linear mapping)（或 pl 映射(pl-mapping)），如果 f 对于 P 和 Q 的某些三角剖分是单纯的（见**单纯映射**(simplicial mapping)）. 一个等价定义是：f 为分片线性，如果 f 是局部锥形的，即，点 $a \in P$ 有一个锥形邻域 $N = a \star L$，使得 $f(\lambda a + \mu x) = \lambda f(a) + \mu f(x)$ 对任意 $x \in L$ 和 $\lambda, \mu \geq 0$，$\lambda + \mu = 1$ 成立. 映射 f 是分片线性的一个充分必要条件是它的图象 $\Gamma_f \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 是一个多面体.

分片线性映射的叠加是分片线性的. 可逆分片线性映射 f 的逆映射是分片线性的，这时称 f 是 pl 同胚(pl-homeomorphism).

对象为多面体（和多面体对），其态射为 pl 映射的范畴记为 PL 或 $\mathscr{P}$（亦见**分片线性拓扑**(piecewise-linear topology)）. 范畴 PL 是拓扑学研究的基本对象和工具之一. 多面体的类相当广泛，因此，范畴 PL 在**代数拓扑学**(algebraic topology)和**流形拓扑学**(topology of manifolds)中的作用特别重大.

例如，每一个**微分流形**(differentiable manifold)可以一种自然的方式表示成一个多面体. 一个多面体

到另一个多面体中的每个**连续映射**（continuous mapping）可被 pl 映射任意逼近．所以范畴 PL 是所有拓扑空间和连续映射的范畴的一个良好的逼近．另一方面，多面体的三角剖分使得可以运用组合拓扑学的方法．许多代数不变量（如**同调群**（homology group）或**上同调环**（cohomology ring））可通过分解成单形来构造和有效地计算．是否所有同胚的多面体是 pl 同胚的问题称为主猜想（Hauptvermutung），其答案是否定的：对 $n \geqslant 5$，存在同胚的 n 维多面体，它们不是 pl 同胚的（[3]）．某些闭的 4 维流形上也存在不同的 pl 结构．对 $n \leqslant 3$，同胚的 n 维多面体是 pl 同胚的．一个多面体 M 称为 n 维 pl 流形（pl-manifold），如果其上每一点有一个 pl 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{R}^n_+$ 的邻域．一个 pl 流形 M 的任意直线三角剖分 T 是组合的（combinatorial），即它的每一个顶点处的星形组合等价于一个单形．关于作为 n 维拓扑流形的多面体的主猜想自然地分为两个猜想：这样的多面体的任意三角剖分是组合的猜想和关于 pl 流形的主猜想．现代拓扑学的主要成就之一是对 $n \geqslant 5$ 得到了两个猜想的否定回答（[4]，[5]）．对 $n \leqslant 3$，这两个猜想都是对的．

设 P 是多面体 Q 的紧子多面体，又设几何单纯复形对 (L, K) 三角剖分对 (Q, P)，使得 K 是一个完全子复形（complete subcomplex），即顶点在 K 中的每一个 L 的单形也位于 K 中，这总可以通过一个导出**重分**（subdivision）来达到．由顶点在 K 中的导出重分 L' 的所有闭单形组成的多面体 N 称为 Q 中 P 的正则邻域（regular neighbourhood），同样可对于保持 P 不变的 Q 到自身中的任意 pl 同胚的象来定义．对 P 的任意两个正则邻域 N_1 和 N_2，存在一个保持 P 不变的 pl 同痕，即 $h_t: N_1 \times I \to Q$，形变 N_1 到 N_2，也就是 $h_0(N_1) = N_1$，$h_1(N_1) = N_2$．称多面体 P 是由多面体 $P_1 \supset P$ 的一个初等多面体坍缩（elementary polyhedral collapse）得到的，如果对某一 $n \geqslant 0$，对 $(\overline{P_1}, \overline{P_1} \cap P)$ pl 同胚于对 $(I^n \times I, I^n \times \{0\})$．称多面体 P_1 多面体坍缩到其子多面体 P（记为 $P_1 \downarrow P$），如果可通过一个初等多面体坍缩的有限序列从 P_1 到 P．如果 $P_1 \downarrow P$，则在对 (P_1, P) 的一个适当的三角剖分下，多面体 P 可由 P_1 经过一系列初等组合坍缩得到，每一次都是沿着其自由面删去一个主单形．如果 Q 是一个 n 维 pl 流形，则紧多面体 $P \subset Q$ 的任意正则邻域是一个 n 维 pl 流形且多面体坍缩到 P．这一性质是一个特征：如果 n 维 pl 流形 $N \subset Q$ 使得 $P \subset \operatorname{Int} N$ 且 $N \downarrow P$，则 N 是 P 的正则邻域．一个紧 pl 流形 M 的边界 ∂M 的正则邻域 pl 同胚于 $\partial M \times I$．

设 P 和 Q 是 n 维 pl 流形 M 的闭子多面体，$\dim P = p$，$\dim Q = q$．称 P 和 Q 处于一般位置（general position），如果 $\dim(P \cap Q) \leqslant p + q - n$．任意闭子多面体 $P, Q \subset \operatorname{Int} M$ 可通过 M 中的一个任意小同痕（见**同痕（拓扑学中的）**（isotopy (in topology)））移到一般位置，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 (ε-pl) 同痕 $h_t: M \to M$，使得多面体 P 和 $Q_1 = h_1(Q)$ 处于一般位置．有时在一般位置的定义中包含横截性型条件．例如，如果 $p + q = n$，则可以保证对每一点 $a \in P \cap Q_1$ 和点 a 在 M 中的某个邻域 U，三元组 $(U, U \cap P, U \cap Q_1)$ pl 同胚于三元组 $(\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q, \mathbf{R}^p \times \{0\}, \{0\} \times \mathbf{R}^q)$．

一个曲多面体（curved polyhedron）或拓扑多面体（topology polyhedron）是一个装备了同胚 $f: P \to X$ 的拓扑空间 X，其中 P 是一个多面体．P 的某一三角剖分 T 中的单形的象构成 X 的一个曲线三角剖分（curvilinear triangulation），也称同胚 f 定义 X 上的一个 pl 结构（pl-structure）．两个 pl 结构 $f_i: P_i \to X (i = 1, 2)$ 是重合的，如果同胚 $f_2^{-1} f_1$ 是分片线性的；它们是同痕的，如果同胚 $f_2^{-1} f_1$ 同痕于一个分片线性映射；它们是等价的，如果 P_1 和 P_2 是 pl 同胚．对任意微分流形 M，存在一个与 M 的微分结构相容的 pl 结构 $f: P \to M$．这意味着对多面体 P 的某一三角剖分的每一个闭单形 σ，映射 $f|_\sigma: \sigma \to M$ 是可微的且无奇点．M 上的任意两个这样的 pl 结构是同痕的．所有对多面体定义的概念（三角剖分，子多面体，正则邻域，和一般位置）都可通过同胚 $f: P \to X$ 搬到曲线多面体 X 上．

参考文献

[1] Александров, П. С., Комбинаторная топология, М.-Л., 1947（英译本：Aleksandrov, P. S., Combinatorial topology, Graylock, 1956）.

[2] Rourke, K. and Sanderson, B., Introduction to piecewise-linear topology, Springer, 1972.

[3] Milnor, J., Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, *Ann. of Math.*, 74 (1961), 3, 575–590.

[4] Kirby, R. C. and Siebenmann, L. C., Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations, Princeton Univ. Press, 1977.

[5] Edwards, R. D., The double suspension of a certain homology 3-sphere is S^5, *Notices Amer. Math. Soc.*, 22 (1975), 2, A-334.

С. В. Матвеев 撰

【补注】 新近的进展包括：像具有凸（或非凸）面的多面体这样的拓扑流形在 Euclid 空间 E^n 中，特别是在 E^3 中的嵌入（如：正则映射的多面体实现（即正多面体的类似））；具有最小顶点数或边数或面数的给定亏格的多面体；着色问题；以及几何学和拓扑学中著名构形的多面体实现．

参考文献

[A1] Brehm, U. and Kühnel, W., A polyhedral model for Cartan's hypersurfaces in S^4. *Mathematika*, 33 (1986), 55－61.

[A2] Grünbaum, B., Regular polyhedra — old and new, *Aequat. Math.*, 16 (1977), 1－20.

[A3] McMullen, P., Schulz, Ch. and Wills, J. M., Polyhedral 2-manifolds in E^3 with unusually large genus, *Israel J. of Math.*, 46 (1983), 127－144.

[A4] Schulte, E. and Wills, J. M., A polyhedral realizations of Felix Klein's map $\{3,7\}_8$ on a Riemann surface of genus 3, *J. London Math. Soc.*, 32 (1985), 539－547.

[A5] Brehm, U., Maximally symmetric polyhedral realizations of Dyck's regular map, *Mathematika*, 34 (1987), 229－236.

[A6] Munkres, J. R., Elementary differential topology, Princeton Univ. Press, 1963.

[A7] Glaser, L. C., Geometrical combinatorial topology. v. Nostrand, 1970. 陆珊年 译

多面体群 [polyhedron group; многогранника группа]

n 维 Euclid 空间 E^n 中一个多胞形(见**多面体**(polyhedron)) P 的对称群 Sym P, 即 E^n 的将 P 变到自身的所有运动的群. 多胞形 P 称为**正的**(regular), 如果 Sym P 传递地作用在它的"旗"的集合即集合

$$F=\{\Gamma_0,\cdots,\Gamma_{n-1}\}$$

上, 这里 Γ_k 是一个 k 维闭面并且 $\Gamma_{k-1}\subset\Gamma_k$. 一个正多胞形的对称群由反射(见**反射群**(reflection group))生成. 它的基本域是一个单纯锥 K, 其顶点是多胞形 P 的中心, 其棱通过构成某一旗 F 的诸面的中心. 同理群 Sym P 的生成反射 $r_1,\cdots,r_n$ 有一个自然的枚举: r_k 是关于不通过面 Γ_{k-1} 的中心的 K 的边界超平面的反射. $|k-l|\geqslant 2$ 时生成元 r_k 与 r_l 是交换的, 并且 r_kr_{k+1} 的阶等于 p_k —— 包含面 Γ_{k-2} 的多胞形 Γ_{k+1} 的 k 维(或 $k-1$ 维)面的个数(如果假定 $\Gamma_n=P$ 与 $\Gamma_{-1}=\varnothing$). 序列 $\{p_1,\cdots,p_{n-1}\}$ 称为多胞形的**Schläfli 符号**(Schläfli symbol). 三维正多胞形(Platonic 体)有如下的 Schläfli 符号: **四面体**(tetrahedron)——$\{3,3\}$, **立方体**(cube)——$\{4,3\}$, **八面体**(octahedron)——$\{3,4\}$, **十二面体**(dodecahedron)——$\{5,3\}$ 与**二十面体**(icosahedron)——$\{3,5\}$.

Schläfli 符号决定一个正多胞形到相差一个相似. 颠倒 Schläfli 符号对应于转移到**反多胞形**(reciprocal polytope), 它的顶点位于 P 的 $n-1$ 维面的中心. 反多胞形有相同的对称群.

正多胞形的所有可能的 Schläfli 符号能够通过选取具有线性 Coxeter 图(Coxeter graph)的那些群, 由有限反射群的分类得到. 对于 $n\geqslant 5$, E^n 只有三个正多胞形: 单形, 立方体与反立方体多胞形(八面体的类似物). 它们的 Schläfli 符号是 $\{3,\cdots,3\}$, $\{4,3,\cdots,3\}$ 与 $\{3,\cdots,3,4\}$. 在 4 维空间有六个正多胞形: $\{3,3,3\}$, $\{4,3,3\}$, $\{3,3,4\}$, $\{3,4,3\}$, $\{5,3,3\}$ 与 $\{3,3,5\}$.

正多胞形的每个面也是一个正多胞形, 它的 Schläfli 符号是 P 的 Schläfli 符号开始的一段. 例如, 多胞形 $\{5,3,3\}$ 的一个 3 维面具有 Schläfli 符号 $\{5,3\}$, 它是一个十二面体(dodecahedron).

参考文献

[1] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Dover, reprint, 1973.

[2] Розенфельд, Б. А., Многомерные пространства, М., 1966. Э. Б. Винберг 撰

【补注】 多面体群的一个表示可由

$$\langle r_1,\cdots,r_n\,|\,(r_kr_l)^2=1,\ |k-l|\geqslant 2;$$
$$(r_kr_{k+1})^2=p_k,\ k=1,\cdots,n-1\rangle$$

给出. 这显示该群是一个 **Coxeter 群**(Coxeter group).

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Regular complex polytopes, Cambridge Univ. Press, 1990. 林向岩 译

多项式 [polynomial; многочлен]

形如

$$f(x,y,\cdots,w)=$$
$$=Ax^ky^l\cdots w^m+Bx^ny^p\cdots w^q+\cdots+Dx^ry^s\cdots w^t$$

的表达式, 其中 $x,y,\cdots,w$ 是变元, $A,B,\cdots,D$ (多项式的**系数**(coefficient))和 $k,l,\cdots,t$ (**幂指数**(exponent of the power), 它们是非负整数)是常数. 单个表达式

$$Ax^ky^l\cdots w^m$$

称作此多项式的**项**(term of the polymonial). 这些项的顺序以及每项中的因子的顺序可以任意改变; 可以任意地引入或删除系数为零的项, 也可以在每个项中引入或删除零次幂. 当多项式有一、二或三项时, 称之为单项式、二项式或三项式.

对于多项式的系数, 常常假定它们属于一个域(field), 例如有理数域, 实数域或复数域.

多项式的两个项称作**同类的**(similar), 如果它们中相同变元的幂都相同. 彼此同类的项

$$A'x^ky^l\cdots w^m,\ B'x^ky^l\cdots w^m,\cdots,D'x^ky^l\cdots w^m$$

可以被一项

$$(A'+B'+\cdots+D')x^k y^l \cdots w^m$$

所取代（同类项的约化（reduction of similar terms））两个多项式称作相等，如果经过约化之后所有非零系数的项都两两相同（但是书写的顺序可以不同）；或者这两个多项式的系数都变成了零．在后一种情形下，多项式称为恒为零的（identically zero），并且用符号 0 表示．

多项式中任一项中的方幂数的和称作该项的次数（degree）．如果一个多项式不是恒为零的，则在具有非零系数的项（假定同类项已被约化）中至少有一个具有最高次数．这个次数称作此多项式的次数（degree of the polynomial）．零多项式没有次数．零次多项式约化为单一的项 A（常数，不等于零）．

一个变元为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式称作**对称多项式**（symmetric polynomial），如果在变元的任一置换下它都不改变．所有项都具有相同次数的多项式称作齐次多项式（homogeneous polynomial）或型（form）．一次、二次或三次的型称作线性型、二次型或三次型，并且依据变元的个数（二或三），它们分别被称作二进的（二元的）或三进的（三元的）（例如 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ 是一个三元二次型）．

多项式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 关于它的变元之一 $x_i (i = 1, \cdots, n)$ 的次数（degree），是指此多项式的项中 x_i 出现的最高次数（此次数可能是零）．一个多项式的两项中的较高者（对于给定的变元的编号）是指 x_1 的方幂较高者；如果 x_1 的方幂相等，则指 x_2 的方幂较高者，依此类推．如果一个多项式的所有项都排列得使得每一项都比它前边的项低，则称这些项是字典排列的（lexicograghically ordered）．此时排在第一个位置的项称作最高项（highest term）（或首项（leading term））．字典排列的一元多项式形如

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

其中 $a_0, \cdots, a_n$ 是系数．

域 k 上的一元多项式的根（roots of a polynomial）是下述**代数方程**（algebraic equation）的解：

$$f(x) = 0.$$

Viète 定理（Viète theorem）给出了多项式的根与它的系数的关系．

所有可能的系数在给定的域中的 n 元多项式的集合对于自然定义的加法和乘法运算构成一个**环**（ring）．同样可以考虑变元集合为无限集的多项式环．多项式环（ring of polynomials）是无零因子的（即非零多项式的乘积不可能是 0）结合交换环．

如果对于给定的多项式 P 和 Q，存在多项式 R，使得 $P = QR$，则称 P 可被 Q 整除，Q 称作除子，R 称作商．如果 P 不能被 Q 整除，但它们含有某个相同的变元，例如 x，并且 P 关于 x 的次数为 n，Q 关于 x 的次数为 m，$n \geqslant m \geqslant 1$，则存在多项式 p，R 和 S，使得 $pP = QR + S$，其中 p 完全不含有 x，并且 x 在 S 中的次数小于 m．当 x 是仅有的变元时，则 p 可取为 1．在这种情形下，由 P 和 Q 去求 R 和 S 的运算称作带余除法．带余除法可以用 **Horner 格式**（Horner scheme）完成．

反复运用这个运算可以得到 P 和 Q 的最大公因子，即能被 P 和 Q 任一公因子整除的因子（见 **Euclid 算法**（Euclidean algorithm））．最大公因子为 1 的两个多项式称作互素的（coprime）．

可以表示成系数在给定域中的次数较小的多项式的乘积的多项式称作可约的（reducible）（在给定的域上），否则称为不可约的（irreducible）．不可约多项式在多项式环中起着素数在整数环中类似的作用．例如，有下述定理：如果乘积 PQ 被一个不可约多项式 R 整除，并且 P 不被 R 整除，则 Q 一定被 R 整除．每个次数大于零的多项式在给定的域上以唯一的方式（不计零次因子）分裂为不可约因子的乘积．例如多项式 $x^4 + 1$ 在有理数域上是不可约的，在实数域上分裂为两个因子，在复数域上分解为四个因子．一般而言，每个实系数的一个变元 x 的多项式在实数域上分裂为一次和二次因子的乘积，在复数域上分裂为一次因子的乘积（见**代数学基本定理**（algebra, fundamental theorem））．对于两个或更多个变元的情形此结果不再成立．对于任一域 k 及 $n \geqslant 2$，存在 n 元多项式，它在 k 的任一扩张上都是不可约的．这样的多项式称为绝对不可约的（absolutely irreducible）．例如多项式 $x^3 + yz^2 + z^3$ 在任一数域上不可约．

如果给定变元 $x, y, \cdots, w$ 的数值（例如，实数或复数），则多项式得到一个确定的数值．于是，一个多项式可以视为相应的变元的函数．这个函数对于变元的任何值都是连续的、可微的．它可被刻画为整有理函数（entire rational function），即由变元和常数（系数）按特定顺序进行加法、减法和乘法得到的函数．整有理函数属于更广泛的有理函数（rational function）类，在后者的运算表中添加了除法．任一有理函数可被表示为两个多项式的商．最后，有理函数含于**代数函数**（algebraic function）类中．

多项式的最重要的性质之一是复平面的任一紧子集上的连续函数可以用多项式逼近，其误差可以任意小（见 **Weierstrass 定理**（Weierstrass theorem））．

特殊的多项式系，**正交多项式**（orthogonal polynomials），作为用级数表示函数的手段用于逼近论中．

参考文献

[1] Мишина, А. П., Проскуряков, И. В., Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра, 2 изд., М., 1965 (英译本: Mishina, A. P. and Proskuryakov, I. V., Higher algebra. Linear algebra, polynomials, general algebra, Pergamon, 1965).

[2] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд, М., 1975 (英译本 Kurosh, A. G., Higher algebra, Mir, 1972).

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Modules. Rings. Forms, 2, Springer, 1988, Chapt. 4–7 (译自法文).

А. И. Маркушевич 撰

【补注】 任意环 R 上的多项式可类似定义. 此时须附加一个要求: 系数 (取自环 R) 与变元 $x, y, \cdots, w$ 可交换.

参考文献

[A1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

赵春来 译

群和代数中的多项式与指数增长 [polynomial and exponential growth in groups and algebras]

【补注】 设 $S' = \{g_1, \cdots, g_n\}$ 是有限生成群 G 的一组生成元. 考虑集合 $S = \{g_1, \cdots, g_n, g_1^{-1}, \cdots, g_n^{-1}\}$. 设 $S^{(n)}$ 是 G 中所有可以用 S 写成长度 $\leqslant n$ 的字的元素的集合. 令 $f_G(n) = \# S^{(n)}$, 即 $S^{(n)}$ 中元素的个数. 函数 $f_G(n)$ 称为 G (关于给定生成元) 的增长函数 (growth function). 对于代数, 也可给出类似的定义, 见下文. 代数和群的增长函数 (growth functions for algebras and groups) 的主旨在于研究如 $f_G(n)$ 这样函数的增长阶数及将此阶数与 G 的群论性质联系起来.

考虑一个非负函数 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, 对一切 n 有 $f(n) \geqslant 0$. 设 f, g 是上述的"增长函数". 如果存在 $c > 0$, $m \in \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$, 使得对一切 $n \in N$ 有 $f(n) \leqslant cg(nm)$, 则称 f 比 g 增长小, 记成 $f < g$. 两个增长函数 f, g 满足 $f < g$ 及 $g < f$, 则称两个增长函数 f 和 g 具有相同的增长的阶 (order of growth). 在这种关系下, f 的等价类记成 $[f]$, 称为 f 的增长 (growth). 与在解析数论中一样, 我们考虑

$$\rho(f) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{\log \log f(n)}{\log n},$$

即 f 的增长的阶 (order of growth), 它仅依赖于 $[f]$. 函数 $n \to 2^n$ 的增长阶为 1, 或称为指数增长 (exponential growth). 这是本文所感兴趣的 (也是可能出现的) 最高的阶. 若 $f \in [n^r]$, 则函数 f 具有多项式增长 (polynomial growth) r, 或幂增长 (power growth) r. 假定 $\rho(f) = 0$, 则多项式增长幂 r 可由下式确定:

$$r(f) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{\log f(n)}{\log n}.$$

如果对所有的 $r > 0$, f 的增长满足不等式 $[2^n] > [f] > [n^r]$, 则称函数 f 具有中间增长 (intermediate growth).

有限生成群的增长函数如上文所定义. $[f_G]$ 的增长不依赖于生成元的选取, 因此是群 G 的不变量. 生成元个数 $\geqslant 2$ 的有限生成自由群是指数增长的. 一个有限生成幂零群具有多项式增长.

对于域 k 上的代数 A (结合的, Lie 等等), 增长的定义如下.

设 $a_1, \cdots, a_r$ 是域 k 上 A 的一组生成元, 使得每一个 $a \in A$ 都是 a_i 的一些单项式的 k 线性组合. 设 V 是由 a_i 张成的向量空间. 令 V^i 是所有形如 $v_1 v_2 \cdots v_i$, $v_i \in V$ 的积的 k 线性组合形成的 A 的向量子空间. 则函数

$$f_A(n) = \sum_{i=1}^{n} \dim V^i$$

是 A (关于生成子空间 V) 的增长函数. f_A 的增长并不依赖于 V 的选取. 群代数 $k[G]$ 的增长就是 G 的增长.

设 $W = \oplus_{n=0}^{\infty} W^n$ 是一个分次向量空间, 定义级数

$$h_W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(W^n) z^n.$$

这个级数在不同的文献中分别被称为 Hilbert 级数 (Hilbert series), 或 Poincaré 级数 (Poincaré series), 或 Hilbert-Poincaré 级数 (Hilbert-Poincaré series), 或 Poincaré-Betti 级数 (Poincaré-Betti series). 与此相伴有一个增长函数

$$g_W(n) = \sum_{i=0}^{n} \dim(W^i).$$

如果 $A = \oplus_{n=0}^{\infty} A^{(n)}$ 是一个有限生成的分次代数, 那么从它的分次得到的增长函数, 及它的任何有限维生成向量空间所定义的增长函数, 都具有相同的增长.

对图也可以定义增长函数. 设 $G = (V, E)$ 是一个有限定向图, 可以有圈和重边. 设 $c_G(m)$ 是长为 m 的道路的个数, 则图 G 的 Poincaré 级数 (Poincaré series) 为

$$P_G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_G(m) z^m,$$

G 的增长函数是 $f_G(m) = \sum_{i=0}^{m} c_G(i)$. 这里长为 m 的道路是指顶点和边的序列 $v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots e_{m-1} v_m$, 使得 e_i 是由 v_i 到 v_{i+1} 的边.

关于 Poincaré 级数和增长函数有两个中心问题.

i) 在分次情形下: Poincaré 级数是否有理?

ii) 在一般情形下: 是不是对适当的一类代数或群, 其所有的成员都具有多项式或指数增长.

对 i) 的肯定回答 (在分次情形下) 意味着对 ii)

的肯定回答.

图的 Poincaré 级数为形如 $P_G(z)=q(z)p(z)^{-1}$ 的有理函数，其中 $p(z)=1-a_1z-\cdots-a_nz^n$ 是 G 的关联矩阵 $B=(b_{ij})$ 的极小多项式 $m(z)=z^n-a_1z^{n-1}-\cdots-a_n$ 的互反多项式 (reciprocal polynomial), b_{ij} 是由顶点 i 到顶点 j 的边的个数. 特别地，图的增长或是多项式的、或是指数的 ([A13]).

有很多代数的增长函数和 Poincaré 级数已经被研究过. 例如，对一个**局部环** (local ring) $(A,\mathfrak{m})\oplus\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ 的 Poincaré 级数. 对 k 上的结合幂零环 N 考虑分次代数 $\mathrm{Ext}^*_{\tilde N}(k,k)$，即米田 Ext 代数 (Yoneda Ext-algebra)，这里 $\tilde N=N\oplus k$ 是给 N 添加单位元得到的 k 上的代数. 对一个局部环 R，也可以考虑 $\mathrm{Ext}^*_R(k,k)$，这里 k 是 R 的剩余域. 在拓扑中，考虑空间 X 的闭路空间 ΩX 的同调 (或上同调) 的分次代数. 在所有这些情形下，存在着 (已证明的或猜测的) Poincaré 级数的性质 (如有理性，收敛速度，等等) 与所涉及的代数或拓扑空间性质之间的关系.

从图到代数，空间到代数，代数到空间，代数到图的构造有多种，相应的增长函数与 Poincaré 级数也有多种联系，见 [A1], [A13] – [A15].

以下的结果解决了交换局部环的增长问题. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个局部环，考虑它的 Betti 数 (Betti number) $b_i(R)=\dim(\mathrm{Ext}^i_R(k,k))=\dim_k\mathrm{Tor}^R_i(k,k)$，即它的 Poincaré 级数的系数. 于是存在两种可能性 ([A16]): 或者 b_i 是 i 的多项式，这种情况当且仅当 R 是完全交时出现，或者存在整数 N, $d>c>1$，使得对所有 $i\geqslant N$ 都有 $c^i<b_i<d^i$. 由此立即得出 Golod-Gulliksen 猜想 (Golod-Gulliksen conjecture) 的一个肯定回答. 该猜想指出，一个局部环是一个完全交，当且仅当它的 Poincaré 级数的收敛半径 $\geqslant 1$. 事实上，收敛半径是 ∞，当且仅当 R 为正则环 ([A16], [A17]) (见**局部环** (local ring)); 收敛半径是 1 的充分必要条件是 R 为一个非正则的完全交; 其他情形，收敛半径严格在 0 与 1 之间.

完全交局部环 (complete intersection local ring) 的概念对应于代数几何中的完全交 (complete intersection)，即 $\mathbf{P}^N$ 中余维数为 i 的簇由 i 个方程决定，用代数术语可以描述如下.

设 $(R,\mathfrak{m})$ 是交换 Noether 局部环，$n=\dim_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (有时称为 R 的嵌入维数 (embedding dimension)). 选取 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的一组基，并考虑相应的 **Koszul 复形** (Koszul complex) E_*. 令 $e_j=\dim_kH_j(E_*)$. 如果 $e_1=n-\dim R$，则局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个完全交 (complete intersection). 一个 Noether 局部环是一个完全交，当且仅当它的完全化 $(\hat R,\hat{\mathfrak{m}})$ 是一个完全交，而 $(\hat R,\hat{\mathfrak{m}})$ 是一个完全交，当且仅当 $\hat R$ 是一个完全正则局部环 $\tilde R$ 关于一个由正则 $\tilde R$ 序列生成的理想的商 (见 **Koszul 复形** (Koszul complex)). 对交换 Noether 局部环有如下的蕴含链: 正则 $\Rightarrow$ 完全交 $\Rightarrow$ Gorenstein $\Rightarrow$ Cohen-Macaulay. 亦见 **Gorenstein 环** (Gorenstein ring) 和 **Cohen-Macaulay 环** (Cohen-Macaulay ring).

关于代数和空间的增长与有理性的结果，见最近综述 ([A1]).

在群的各种结果中，有下述一些定理.

Milnor-Wolf 定理 (Milnor-Wolf theorem): 一个有限生成可解群，或是多项式增长，或是指数增长. 在前一情况，它是多循环的且几乎幂零 (即有一个有限指数的幂零子群) ([A8], [A9]).

Gromov-Milnor 定理 (Gromov-Milnor theorem): 有限生成群是多项式增长，当且仅当它是几乎幂零 ([A9], [A6]).

存在具有中间增长的群 ([A2]).

Tits 定理 (Tits theorem): 连通 Lie 群的有限生成子群，或具有指数增长，或是几乎幂零的 (因而具有多项式增长) ([A7]).

流形的几何与其基本群的增长相关. 最早可能是由 A. S. Shvarts 发现的 ([A5]). 设 M 是连通紧流形，基本群为 $G=\pi_1(M)$. 假设 $\tilde M$ 是 M 的万有覆叠空间. 赋给 M 一个 Riemann 度量 g，并考虑其在 $\tilde M$ 上诱导的度量 $\tilde g$. (M 和 $\tilde M$ 在局部处相同). 在 $\tilde M$ 上任取一点 $\tilde p$，设 $v(s)$ 是 $\tilde M$ 上以 $\tilde p$ 为中心 s 为半径的球的体积. v 的增长不依赖于 g 和 $\tilde p$，因而是 M 的体积不变量 (volume invariant) ([A4]). Shvarts 定理 (Shvarts theorem) 提出，M 的这个体积不变量是 $\pi_1(M)$ 的增长.

如果对所有的 $x\neq y\in M$，从度量空间 (M,d) 到度量空间 (M',d') 的映射 φ 满足 $d'(\varphi(x),\varphi(y))>d(x,y)$，那么 φ 称为整体扩张 (globally expanding). 如果每一个点都有一个开邻域，使得在其上是整体扩张，则 φ 称为局部扩张 (locally expanding)，或就称为扩张 (expanding). 从圆到自身的映射 $z\to z^2$ 是局部扩张 (但不是整体的). Franks 多项式增长定理 (Franks polynomial growth theorem) 提出，如果一个紧流形有一个到它自身的扩张，那么它的基本群是多项式增长的，见 [A6].

Milnor 基本群增长定理 (Milnor fundamental group growth theorem) 如下 ([A3]). 如果 M 是一个具有处处半正定的平均曲率张量 R_{ij} 的完全的 n 维 Riemann 流形，那么 $\pi_1(M)$ 的每一个有限生成子群的增长是多项式的. 另一方面，如果 M 是一个所有截面曲率小于零的紧 Riemann 流形，则其基本群是指数增长的.

增长理论的一个应用是关于类域塔问题(class field tower problem),见类域论(class field theory)和域塔(tower of field).设 G 是一个群,$\mathbf{F}_p$ 是 p 元域,p 是一个素数.令 $A=\mathbf{F}_p[G]$ 是 G 在 $\mathbf{F}_p$ 上的群代数,且 $\mathfrak{a}$ 是 A 的增广理想(augmentation ideal),即由元素 $g-1\in A$,$g\in G$ 生成的理想.Zassenhaus 滤过(Zassenhaus filtration)是特征子群 $G_n=\{g\in G: g-1\in\mathfrak{a}^n\}$ 序列.序列 $\{G_n\}$ 也称为 G 的下 p 中心序列(lower p-central series).设 $\hat{A}$ 是由 $\mathfrak{a}$ 定义的分次环,即

$$\hat{A}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\hat{A}_n,\ \hat{A}_n=\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}.$$

令 $f_G(z)$ 为相应的 Hilbert 级数

$$f_G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dim(\hat{A}_n)z^n,$$

这里 $\dim=\dim_{F_p}$,且假设 $\dim\hat{A}_n<\infty$,此假设可由 $\dim\hat{A}_1<\infty$ 保证.设 $G=F/R$,F 是一个生成元个数 ≥ 2 的自由群,令 S 是 G 的定义字的集合.对每一个 $s\in S$,令 $d(s)=\sup\{n:s\in F_n\}$,这里 F_n 是 F 的 Zassenhaus 滤过.令 $I_n=\#\{s\in S:d(s)=n\}$,$I_0=1$.Golod-Shafarevich 定理(Golod-Shafarevich theorem)指出:1)$\dim\hat{A}_n\geq d(\dim(\hat{A}_{n-1}))-\sum_{k=0}^{n-1}I_{n-k}$;2)如果对所有的 n,$I_n\leq(d-1)^2/4$,那么代数 A 是无限维的([A11],[A12]).这个定理是类域塔问题的否定解答,即构造无限类域塔的主要组成部分.

还有一个应用是 Lazard 定理(Lazard theorem)([A10]).这个定理提供了利用相应代数的 Hilbert 级数来判断投射 p 群的解析性的准则.

参考文献

[A1] Babenko, I. K., Problems of growth and rationality in algebra and topology, *Russian Math. Surv.*, 41 (1986), 2, 117-175. (Uspekhi Mat. Nauk 41 (1986), 2, 95-142).

[A2] Grigorchuk, R. I., On Milnor's problem of group growth, *Soviet Math. Dokl.*, 28 (1983), 23-26 (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 271 (1983), 30-33).

[A3] Milnor, J., A note on curvature and fundamental group, *J. Diff. Geom.*, 2 (1968), 1-7.

[A4] Efremovich, V., On proximity geometry of Riemannian manifolds, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), 39 (1964), 167-170 (*Uspekhi Mat. Nauk*, 8 (1953), 189-191).

[A5] Shvarts, A., A volume invariant of coverings, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 105 (1955), 32-34 (俄文).

[A6] Gromov, M., Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publ. Math. IHES*, 53 (1981), 53-73.

[A7] Tits, J., Free subgroups in linear groups, *J. of Algebra*, 20 (1972), 250-270.

[A8] Wolf, J. A., Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, 2 (1968), 421-446.

[A9] Milnor, J. W., Growth of finitely generated solvable groups *J. Diff. Geom.*, 2 (1968), 447-449.

[A10] Lazard, M., Groupes analytiques p-adiques, *Publ Math. IHES*, 26 (1965), 389-603.

[A11] Golod, E. S. and Shafarevich, I. R., On class field towers, *Transl. Amer. Math. Soc.* (2), 48 (1965), 91-102 (*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 28 (1964), 261-272).

[A12] Koch, H., Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, Deutsch. Verlag Wissenschaft, 1970.

[A13] Ufnarovskii, V. A., A criterion for the growth of graphs and algebras defined by words, *Math. Notes*, 31 (1982), 238-241 (*Mat. Zametki*, 31 (1982), 465-472).

[A14] Roos, J. E., Relations between the Poincaré-Betti series of loop spaces and of local rings, in M. P. Malliavin (ed.), Sem. Alg. P. Dubreil, Lecture notes in math., Vol. 740, Springer, 1979, pp. 285-322.

[A15] Löfwall, C., On the subalgebra generated by one dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra, Preprint Dept. Math. Univ. of Stockholm, 1976.

[A16] Avramov, L., Local algebra and rational homotopy, *Astérisque*, 113-114 (1984), 15-43.

[A17] Avramov, L., Local rings of finite simplicial dimension, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 10 (1984), 289-291.

裴定一 译　赵春来 校

多项式函数[polynomial function; полиномиальная функция]

整有理函数(见**多项式**(polynomial))概念的一种推广.设 V 是在一有单位元的结合环 C 上的**幺模**(unitary module).映射 $\varphi:V\to C$ 称为多项式函数,如果 $\varphi=\varphi_0+\cdots+\varphi_m$,其中 φ_i 是 V 上 i 次型(见**多重线性型**(multilinear form)),$i=0,\cdots,m$.最常见的是当 V 是一自由 C 模(例如是域 C 上的向量空间),且有有限基 $v_1,\cdots,v_n$ 的情况下考虑多项式函数.这样映射 $\varphi:V\to C$ 是多项式函数,当且仅当 $\varphi(x)=F(x_1,\cdots,x_n)$,这里 $F\in C[x_1,\cdots,x_n]$ 是 C 上的多项式,$x_1,\cdots,x_n$ 是元素 $x\in V$ 用基 $v_1,\cdots,v_n$ 表示时的坐标.如果 C 是无限整环,多项式 F 是唯一确定的.

模 V 上的多项式函数形成一个结合交换的 C 代数 $P(V)$,相对于自然运算有单位元.如果 V 是在无限整环 C 上的具有有限基的自由模,代数 $P(V)$ 典范地同构于对称代数 $S(V^*)$,V^* 是伴随(或对偶)模.当 V 是特征为零的域上有限维向量空间时,$P(V)$ 是 V 上的对称多重线性型代数.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 例如，当考虑在一 Banach 空间中用 Taylor 展开逼近一可微函数时就自然产生了多项式函数．

冯绪宁 译

最小零偏差多项式[**polynomial least deviating from zero**; ***наименее уклоняющийся от нуля многочлен***]

在空间 $C[a,b]$ 或 $L_p[a,b]$ 中具有最小范数的首项系数为 1 的 n 次代数多项式．

П. Л. Чебышев 在[1]中证明：在形如

$$Q_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (1)$$

的所有多项式中，多项式

$$T_n(x)=2\left[\frac{b-a}{4}\right]^n\cos n\arccos\left[\frac{2x-a-b}{b-a}\right]$$

是空间 $C[a,b]$ 中具有最小范数的唯一多项式，且其范数为

$$\|T_n\|_{C[a,b]}=2\left[\frac{b-a}{4}\right]^n.$$

多项式

$$U_n(x)=$$

$$=2\left[\frac{b-a}{4}\right]^{n+1}\frac{\sin((n+1)\arccos(2x-a-b)/(b-a))}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

是 $L_1[a,b]$ 上(在所有形式(1)的多项式中)唯一与零偏差最小的多项式，其范数为

$$\|U_n\|_{L_1[a,b]}=4\left[\frac{b-a}{4}\right]^{n+1}.$$

在 $L_p[a,b]$ 中，$1<p<\infty$，也存在唯一的与零偏差最小的多项式；这种多项式的各种性质是已知的(见[2]，[5])．

在形式(1)的多项式中，积分

$$\int_a^b Q_n^2(x)\rho(x)dx,\ \rho(x)>0 \qquad (2)$$

最小，当且仅当 $Q_n(x)$ 关于权函数 $\rho(x)$ 在区间 (a,b) 上与所有 $n-1$ 次的多项式正交．若

$$a=-1,\ b=1,\ \rho(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,$$

其中 $\alpha,\beta>-1$，则首项系数为 1 的 n 次 **Jacobi 多项式**(Jacobi polynomial)使积分(2)达到极小(若 $\alpha=\beta=0$，则首项系数为 1 的 n 次 **Legendre 多项式**(Legendre polynomials)使(2)达到极小)．

在形如

$$a\cos nx+b\sin nx+\sum_{k=0}^{n-1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的所有三角多项式中，其中 a 与 b 固定，空间 $C[0,2\pi]$ 和 $L_p[0,2\pi]$(对任意的 $p\geqslant 1$)中的最小范数多项式均为

$$a\cos nx+b\sin nx.$$

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.-Л., 1947.

[2] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[3] Тиман, А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960(英译本：Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963).

[4] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[5] Никольский, С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979(英译本：Nikol'skiĭ, S. M., Quadrature formulas, Hindustan Publ. Comp., 1964).

[6] Суетин, П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1976.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】 多项式 T_n 和 U_n 分别称为第一类和第二类(规范)**Чебышев 多项式**(Chebyshev polynomial)．

参考文献

[A1] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949(中译本：И. П. 纳汤松，函数构造论，科学出版社，1958).

[A2] Rivlin, T. J., The Chebyshev polynomials, Wiley, 1974.

[A3] Powell, M. J. D., Approximation theory and methods, Cambridge Univ. Press, 1981.

王仁宏 檀结庆 译

最佳逼近多项式[**polynomial of best approximation**; **наилучшего приближения многочлен**]

在由某个(有限的)函数系构成的全体多项式中于某种度量意义下实现一个函数 $x(t)$ 的最佳逼近的多项式．如果 X 是一个赋范线性函数空间(例如，$C[a,b]$ 或 $L_p[a,b]$，$p\geqslant 1$)，且

$$U_n=\{u_1(t),\cdots,u_n(t)\}$$

是 X 中一个线性无关的函数系，则对任何 $x\in X$，由关系式

$$\|x-\tilde{u}\|=\min_{\{c_k\}}\left\|x-\sum_{k=1}^n c_ku_k\right\|$$

定义的最佳逼近(广义)多项式

$$\tilde{u}(t)=\tilde{u}(x,t)=\sum_{k=1}^n\tilde{c}_ku_k(t) \qquad (*)$$

均存在．对所有 $x\in X$，最佳逼近多项式是唯一的，如

果 X 是一个具有严格凸范数(strictly convex norm)的空间(亦即,若 $\|x\|=\|y\|$ 且 $x\neq y$,则有 $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$). 当 $1<p<\infty$ 时,$L_p(a,b)$ 就是这种空间. 在有非严格凸范数的空间 $C[a,b]$ 中,最佳逼近多项式对任何 $x\in C[a,b]$ 是唯一的,如果 U_n 是 $[a,b]$ 上的一个 **Чебышев 系**(Chebyshev system),即如果每个多项式

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k u_k(t)\neq 0$$

在 $[a,b]$ 上至多有 $n-1$ 个零点. 特别在一致度量意义下对 $C[a,b]$ 中(通常的)代数多项式以及实轴上周期为 2π 的连续函数空间 $C_{2\pi}$ 中的三角多项式可以得到唯一性. 如果最佳逼近多项式对任意 $x\in X$ 存在且唯一,则它是关于 x 的连续函数.

空间 $C[a,b]$ 和 $L_p[a,b]$ 中,一个多项式是最佳逼近多项式的充分必要条件是已知的. 例如,有 Чебышев 定理(Chebyshev theorem):如果 U_n 是一个 Чебышев 系,那么,多项式(*)是函数 $x\in C[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 度量意义下的最佳逼近多项式,当且仅当存在 $n+1$ 个点 t_i, $a\leqslant t_1<\cdots<t_{n+1}\leqslant b$,在这些点处,差式

$$\Delta(t)=x(t)-\widetilde{u}(t)$$

取值

$$\pm\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\Delta(t)|,$$

此外还有

$$\Delta(t_{i+1})=-\Delta(t_i),\ i=1,\cdots,n.$$

多项式(*)是函数 $x(t)\in L_p[a,b]$, $p>1$,的最佳逼近多项式(在该空间度量意义下),当且仅当对 $k=1,\cdots,n$,有

$$\int_a^b u_k(t)|x(t)-\widetilde{u}(t)|^{p-1}\operatorname{sign}[x(t)-\widetilde{u}(t)]dt=0.$$

在 $L_1[a,b]$ 中,条件

$$\int_a^b u_k(t)\operatorname{sign}[x(t)-\widetilde{u}(t)]dt=0,\ k=1,\cdots,n$$

对于 $\widetilde{u}(t)$ 成为 $x\in L_1[a,b]$ 的最佳逼近多项式是充分的,而当由所有满足 $x(t)=\widetilde{u}(t)$ 的点 $t\in(a,b)$ 组成的集测度为零时,上述条件也是必要的;亦见 **Марков 准则**(Markov criterion).

在最佳一致逼近多项式的近似构造方面已有一些算法(例如,见[3],[5]).

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965(中译本:Н. И. 阿赫叶惹尔,逼近论讲义,科学出版社,1957).

[2] Корнейчук, Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976(中译本,Н. П. 考涅楚克,逼近论的极值问题,上海科学技术出版社,1982).

[3] Дзядык, В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977

[4] Тихомиров, В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

[5] Laurent, P. J., Approximation et optimisation, Hermann, 1972.

[6] Ремез, Е. Я., Основы численных методов чебышевского приближения, К., 1969.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pinkus, A. M., On L^1-approximation, Cambridge Univ. Press, 1989.

[A2] Schönhage, A., Approximationstheorie, de Gruyter, 1971.

[A3] Watson, G. A., Approximation theory and numerical methods, Wiley, 1980.

[A4] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, McGraw-Hill, 1966.

[A5] Powell, M. J. D., Approximation theory and methods, Cambridge Univ. Press, 1981.

[A6] Rice, J. R., The approximation of functions, 1, Linear theory, Addison-Wesley, 1964.

[A7] Rivlin, T. J., An introduction to the approximation of functions, Blaisdell, 1969.

王仁宏 檀结庆 译

Понтрягин 特征标[Pontryagin character; Понтрягина характер],ph

由等式 $\mathrm{ph}(\xi)=\mathrm{ch}(\xi\otimes\mathbf{C})$ 定义的**示性类**(characteristic class),其中 $\xi\otimes\mathbf{C}$ 为纤维丛 ξ 的复化丛,ch 为**陈(省身)特征标**(Chern character). 作为环 $H^{**}(BO_n,\mathbf{Q})$ 中的元素,Понтрягин 特征标由偶级数 $\sum_{i=1}^{[n/2]}(e^{x_i}+e^{-x_i})$ 决定并有以下性质

$$\mathrm{ph}(\xi\otimes\eta)=\mathrm{ph}(\xi)\cdot\mathrm{ph}(\eta),$$
$$\mathrm{ph}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{ph}(\xi)+\mathrm{ph}(\eta).$$

指标类 $I(\xi)$ 定义为 $T(\xi\otimes\mathbf{C})$,其中 $T\in H^{**}(BU_n,\mathbf{Q})$ 是 **Todd 类**(Todd class). 指标类 $I\in H^{**}(BO_n,\mathbf{Q})$ 可利用吴(文俊)生成元(见**示性类**(characteristic class))表示成

$$I=\prod\frac{x_i}{1-e^{-x_i}}\prod\frac{-x_i}{1-e^{x_i}}.$$

关于 Понтрягин 类和 $\hat{A}$ 类间的关系,有下述定理(见 **Понтрягин 类**(Pontryagin class)). 设 ξ 为底空间 B 上的具有一个 Spin_n 结构的实向量丛,$n=$

$\dim\xi = 8k$. 对于这类丛, 存在实 K 理论 (K-theory) 的 Thom 同构:

$$\Phi: \mathrm{KO}^*(B) \to \widetilde{\mathrm{KO}}^*(B^\xi).$$

设

$$\Phi_H: H^*(B; \mathbf{Q}) \to \widetilde{H}^*(B^\xi; \mathbf{Q})$$

为由丛 ξ 的定向唯一确定的 Thom 同构. 则

$$\Phi_H^{-1}\mathrm{ph}(\Phi(1)) = \hat{A}(-\xi).$$

这一公式完全类似于关于陈(省身)特征标与 Todd 类之间的关系的相应命题.

若 ξ 为复向量丛, 则 $T(\xi) = \hat{A}((\xi)_R)e^{c_1(\xi)/2}$. 其中 $(\xi)_R$ 为丛的实部, T 为 Todd 类.

参考文献见 **Понтрягин 类** (Pontryagin class).

А. Ф. Харшиладзе 撰 李贵松 译 潘建中 校

Понтрягин 类 [Pontryagin class; Понтрягина класс]

对实向量丛 (vector bundle) 定义的一种示性类 (characteristic class). 由 Л. С. Понтрягин ([1]) 于 1947 年引进. 给定底空间 B 上的一个向量丛 ξ, 相应的 Понтрягин 类用符号 $p_i(\xi)\in H^{4i}(B)$ 表示且定义为 $p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi\otimes\mathbf{C})$, 其中 $\xi\otimes\mathbf{C}$ 为 ξ 的复化丛, c_k 为**陈(省身)类** (Chern class). 非齐次示性类 $p = 1 + p_1 + p_2 + \cdots$ 称为全 Понтрягин 类 (total Pontryagin class). 换言之, Понтрягин 类定义为同调类 $p_i\in H^{4i}(BO_n)$, 由等式 $p_i = f^*((-1)^i c_{2i})$ 确定, 其中映射 $f: BO_n \to BU_n$ 是相应于对万有向量丛进行复化的映射, 且 $c_n\in H^{2k}(BU_n)$ 为陈(省身)类.

设 $(\kappa_n)_R$ 为 BU_n 上的万有向量丛 κ_n 对应的实丛. 向量丛 $(\kappa_n)_R$ 的全 Понтрягин 类 $P((K_n)_R)$ 等于 $\prod_{i=1}^n(1+x_i^2)\in H^*(BU_n)$, 其中 $x_1, \cdots, x_n$ 为吴(文俊)生成元(见**示性类** (characteristic class)).

利用吴(文俊)生成元, 可如下给出上同调环 $H^*(BO_n)$ 的部分描述. 相应于向量丛 $(\kappa_{[n/2]})\mathbf{R}\otimes\theta_1$ 的映射 $g: BU_{[n/2]}\to BO_n$, 其中 θ_1 为 L 维平凡向量丛, 诱导出环同态 $g^*: H^*(BO_n)\to H^*(BU_{[n/2]})$. 后者将 $H^*(BO_n)$ 中由 Понтрягин 类 $p_1, \cdots, p_{[n/2]}$ 生成的子环单态射地映满 $H^*(BU_{[n/2]})$ 中由吴(文俊)生成元的所有偶对称多项式组成的子环. 这里的偶性是指多项式中的所有变元 x_i 的幂次均为偶数. 于是对环 $\mathbf{Z}(p_1, \cdots, p_{[n/2]})\subset H^*(BO_n)$ 中的每个元素均得到一个由吴(文俊)生成元给出的表达式. 这对于具体计算 Понтрягин 类而言是至关重要的. 所有由吴(文俊)生成元的偶对称多项式决定的示性类均可以如下方式由 Понтрягин 类表示. 首先, 将多项式写成变元 $x_1^2, \cdots, x_n^2$ 的初等对称函数, 然后将初等对称函数由 Понтрягин 类替换.

若 ξ, η 为同一底空间上的两个实向量丛, 则上同调类 $p(\xi\oplus\eta) - p(\xi)p(\eta)$ 的阶至多为 2. 这是因为第一陈(省身)类满足 $c_1(\lambda) = -c_1(\bar\lambda)$.

视含 1/2 的环 Λ 为系数环, 并设 p_i 为取值于 $H^*(\cdot, \Lambda)$ 的 Понтрягин 类. 此时有公式

$$p(\xi\oplus\eta) = p(\xi)p(\eta).$$

或

$$p_k(\xi\oplus\eta) = \sum_i p_{k-i}(\xi)p_i(\eta),\quad p_0 = 1.$$

环 $H^{**}(BO_n;\Lambda)$ 单态射地映入 $H^{**}(BU_{[n/2]};\Lambda)$ 中, 其象恰为以吴(文俊)生成元为变元的所有偶对称级数组成的子环. 全 Понтрягин 类映为多项式 $\prod_{i=1}^{[n/2]}(1+x_i^2)$. 而 Понтрягин 类则映为 $x_1^2, \cdots, x_n^2$ 的初等对称函数. 定理:

$$H^{**}(BO_n,\Lambda) = \Lambda[[p_1, \cdots, p_{[n/2]}]].$$

上同调环 $H^{**}(BSO_n)$ 除 Понтрягин 类外, 还包含 **Euler 类** (Euler class) $e\in H^n(BSO_n)$. 定理:

$$H^{**}(BSO_{2k+1};\Lambda) = \Lambda[[p_1, \cdots, p_k, e]],$$

$$H^{**}(BSO_{2k};\Lambda) = \Lambda[[p_1, \cdots, p_{k-1}, e]],$$

对于空间 BSO_{2k}, 有等式 $p_k = e^2$.

映射 $g: BU_{[n/2]}\to BO_n$ 可扩展为映射 $BU_{[n/2]}\to BSO_n$. 相应的诱导映射 $H^{**}(BSO_n)\to H^{**}(BU_{[n/2]})$, 视 n 为奇数或偶数, 分别将 e 映为零或 $\prod_{i=1}^{[n/2]}x_i$.

设 $f(t)\in\mathbf{Q}[[t]]$ 为域 $\mathbf{Q}$ 上的**形式幂级数** (formal power series), 则级数 $\prod_{i=1}^{[n/2]}f(x_i)$ 决定了环 $H^{**}(BO_n;\mathbf{Q})$ 中的某个非齐次元, 亦即一个示性类. 不妨记

$$x = \prod_{i=1}^{[n/2]} f(x_i)\in H^{**}(BO_n;\mathbf{Q}).$$

则示性类 x 是稳定的(即满足 $x(\xi\oplus\theta) = x(\xi)$, 其中 θ 为平凡向量丛), 当且仅当 $f(t)$ 的常数项为 1. 若假定 $f(t) = t/\tanh t$, 则以如上方式得到的示性类

$$L = \prod_{i=1}^{[n/2]}\frac{x_i}{\tanh x_i}\in H^{**}(BO_n;\mathbf{Q})$$

称为 Hirzebruch L 类 (Hirzebruch L-class).

通过将级数 $\prod f(x_i)$ 表为 $x_1^2, \cdots, x_n^2$ 的初等对称函数(的级数)的标准程序, 可将 L 表成 Понтрягин 类的级数形式. 另一在应用中至关重要的示性类可由

$$f(t) = \frac{t/2}{\sinh(t/2)} = \frac{1}{e^{t/2}-e^{-t/2}}$$

得到. 由偶对称级数

$$\prod_{i=1}^{[n/2]} f(x_i) = \prod_{i=1}^{[n/2]}\frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)}$$

决定的类称为 $\hat{A}$ 类（$\hat{A}$-class）．类似地，当 $f(t)=2t/\sinh(2t)$ 时，由级数 $\prod f(x_i)$ 决定的示性类称为 A 类．这两个类以及 L 均可由 Понтрягин 类表示．

拓扑不变性．1965年，С．П．Новиков（[2]）证明了两个同胚流形具有相同的有理系数 Понтрягин 类．在此之前，已知有理 Понтрягин 类为分段线性不变量，即两个分段线性同胚的流形具有相同的有理 Понтрягин 类．此外，有理 Понтрягин 类对（可能带边的）分段线性流形亦可定义（见[4]）．有例子表明，整数 Понтрягин 类不是拓扑不变量（见[5]）．

在 1969 年，证明了从 BPL → BTop 的纤维 Top/PL 与 **Eilenberg-MacLane 空间**（Eilenberg-MacLane space）$K(\mathbf{Z}_2, 3)$ 具有相同的同伦型（见[7]）．由此可以得到有理 Понтрягин 类的拓扑不变性的证明以及组合拓扑学的基本假设（fundametal hypothesis of combinatorial topology）（主猜想（hauptvermutung））的否定证明．

广义 Понтрягин 类．设 h^* 为广义上同调论（generalized cohomology theories），在其中可定义陈（省身）类 σ_i．如果对某个一维复向量丛 λ 有等式 $\sigma_1(\lambda)=-\sigma_1(\bar{\lambda})$，则可以前述方式定义取值于理论 h^* 中的 Понтрягин 类 $P_i(\xi)=(-1)^i\sigma_{2i}(\xi\otimes\mathbf{C})$．如此定义的类将满足性质：$P(\xi\otimes\eta)=P(\xi)P(\eta)$，其中 $P=1+P_1+P_2+\cdots$ 为全 Понтрягин 类，取值于理论 $h^*\otimes\mathbf{Z}[1/2]$．

然而，对经常用到的许多广义理论（例如在 K 理论（K-theory）中而言，上述关于 σ_1 的等式并不成立．在这些理论中，不可能以上述方式定义 Понтрягин 类，因为这种定义即使在系数中包括了 1/2 也不能保证关于两个向量丛的和的全类的公式成立．此时将以下述方式定义广义 Понтрягин 类．设 h^* 为乘法上同调理论，在该理论中向量丛 $\xi\otimes\mathbf{C}$ 的万有定向 $u(\xi\otimes\mathbf{C})\in h^{2n}(B^{\xi\otimes\mathbf{C}})$ 可定义，其中 ξ 为 B 上的任意 n 维实向量丛．设 $e(\xi\otimes\mathbf{C})$ 为 $\xi\otimes\mathbf{C}$ 的 Euler 类，$e(\xi\otimes\mathbf{C})=i^*u(\xi\otimes\mathbf{C})$，其中 $i: B\to B^{\xi\otimes\mathbf{C}}$ 为由零截面给出的包含映射．理论 h^* 中的 Понтрягин 类为定义于实向量丛并满足如下条件的示性类 P_i：

1）$P_i(\xi)=0$，若 $i>2\dim\xi$；

2）$P_i(\xi\oplus\theta)=P_i(\xi)$，其中 θ 为平凡丛；

3）$P_k(\xi\oplus\eta)-\sum_i P_i(\xi)P_{k-i}(\eta)$ 是阶为 2 的幂的一个元素；

4）$P_n(\xi)=(-1)^n e(\xi\otimes\mathbf{C})$，其中 $n=\dim\xi$．

满足上述性质的示性类的唯一性和存在性已被证明．由此观点，Понтрягин 类导致相应于理论 h^* 的环 $h^*(\mathrm{pt})$ 上的双值形式群（formal group）的概念．

K 理论中的示性类 π_i 由如下公式定义：

$$\sum_i \pi_i(\xi)s^i=\sum_i(-1)^i t^i\gamma_i(\xi\otimes\mathbf{C})=\gamma_{-t}(\xi\otimes\mathbf{C})=$$
$$=\lambda_{t/(1-t)}((\xi\oplus(-\dim\xi))\otimes\mathbf{C}),$$

其中 $s=t-t^2$，γ_i 为 $\mathbf{Z}_2$ 分次 K 理论中的陈（省身）类．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., 《Матем. сб.》, **21** (1947), 233 – 284.

[2] Новиков, С. П., 《Докл. АН СССР》, **163** (1965), 298 – 300

[3] Бухштабер, В. М., 《Матем. сб.》 **83** (1970), 575 – 595.

[4] Рохлин, В. А., Шварц А. С., 《Докл. АН СССР》, **114** (1957), 490 – 493.

[5A] Milnor, J., *Mathematika*, **3** (1959), 4, 3 – 53

[5B] Milnor, J., *Mathematika*, **9** (1965), 4, 3 – 40.

[6] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[7] Kirby, R. C. and Siebenmann, L. C., Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations, Princeton Univ. Press, 1977.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】

参考文献

[A1] Milnor, J. W. and Stasheff, J. O., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

[A2] Anderson, D. W., Brown, E. H. and Peterson, F. P., Spin cobordism, *Ann. of Math.* (To appear).

[A3] Dieudonne, J., A history of algebraic and differential topology 1900 – 1960, Birkhäuser, 1989.

李贵松 译 潘建中 校

Понтрягин 对偶性［Pontryagin duality; Понтрягина двойственность］

1）拓扑群与其特征标群（character group）之间的一种对偶性．对偶定理（duality theorem）为，如果 G 是一个局部紧 Abel 群而 $X(G)$ 是它的特征标群，则将 $a\in G$ 映到特征标 $\omega_a: X(G)\to T$ 的自然同态 $G\to X(X(G))$ 是拓扑群同构，这里 ω_a 由公式

$$\omega_a(\alpha)=\alpha(a),\ \alpha\in X(G)$$

给出．由以上定理得出下列论断．

Ⅰ）如果 H 是 G 的一个闭子群，而

$$H^*=\{\alpha\in X(G):\alpha(H)=0\}$$

是它在 $X(G)$ 内的零化子，则 H 与子群 H^* 的零化子

$$\{a\in G:\alpha(a)=0 \text{ 对一切 } \alpha\in H^*\}$$

重合；群 $X(H)$ 自然同构于 $X(G)/H^*$，并且 $X(G/H)$

同构于 H^*.

ii)如果 $\varphi: G \to H$ 是局部紧 Abel 群的一个连续同态，而在自然同构之下，G 等同于 $X(X(G))$，H 等同于 $X(X(H))$，则同态 φ 可以等同于 $(\varphi^*)^*$.

iii)群 $X(G)$ 的权（作为一个拓扑空间，见**拓扑空间的权**(weight of a topological space)）与群 G 的权重合.

Понтрягин 对偶性在紧群 G 与离散群 $X(G)$ 之间建立了一个对应，反过来也是这样. 再者，一个紧群 G 是连通的，当且仅当 $X(G)$ 是无挠的. 一个紧群 G 的维数 $n<\infty$，当且仅当 $X(G)$ 具有有限秩 n（见**群的秩**(rank of a group)）. 一个紧群 G 是局部连通的，当且仅当 $X(G)$ 的每一个有限秩纯子群都是自由的. 对于有限群 G 来说，Понтрягин 对偶性与在复数域 **C** 上考虑的有限 Abel 群之间的**对偶性**(duality)一致.

对偶定理成立的拓扑群称为自反的(reflexive). 局部紧群并不是仅有的自反群，因为任意自反 Banach 空间，作为一个拓扑群，是自反的([8]). 关于自反群的分类见[9].

Понтрягин 对偶性对于非交换群来说也有一个类比（**田中-Крейн 对偶定理**(Tannaka-Krein duality theorem)）（见[4], [6], [7]）. 令 G 是一个紧拓扑群，令 R 是 G 上复值函数代数，它的平移张成一个有限维向量空间，又令 $S(R)$ 是一切满足条件 $\omega(\bar{f})=\overline{\omega(f)}$ $(f\in R)$ 的非零代数同态 $\omega: R\to \mathbf{C}$ 的集合. 可以在 $S(R)$ 上定义一个乘法，使得 $S(R)$ 对于点态收敛拓扑来说做成一个拓扑群. 对于每一个 $g\in G$，令由公式

$$\alpha_g(f)=f(g),\ f\in R$$

所给出的同态 $\alpha_g\in S(R)$ 与之对应，则对应 $g\to\alpha_g$ 是拓扑群 G 到拓扑群 $S(R)$ 上的同态. 也有一个对代数 R 的范畴的代数描述，这样就表示出它与紧拓扑群范畴是对偶的. 这个理论可以推广到紧拓扑群的齐性空间的情形（见[4]）.

参考文献

[1] Pontryagin, L. S., The theory of topological commutative groups, *Ann. of Math.*, **35** (1934), 2, 361 – 388.

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群（上、下册），科学出版社，1978）.

[3] Kampen, E. van, Locally bicompact Abelian groups and their character groups, *Ann. of Math.*, **36** (1935), 448 – 463.

[4A] Крейн, М. Г., 《Укр. матем. ж.》, **1** (1949), 4, 64 – 98.

[4B] Крейн, М. Г., 《Укр. матем. ж.》, **2** (1950), 1, 10 – 59.

[5] Morris, S., Pontryagin duality and the structure of locally compact Abelian groups, Cambridge Univ. Press, 1977.

[6] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968（英译本：Naimark, M. A., Normed rings, Noordhoff, 1959）.

[7] Hewitt, E. and Ross, K., Abstract harmonic analysis, 2, Springer, 1970.

[8] Smith, M. F., The Pontryagin duality theorem in linear spaces, *Ann. of Math.*, **56** (1952), 2, 248 – 253.

[9] Venkataraman, R., A characterization of Pontryagin duality, *Math. Z.*, **149** (1976), 2, 109 – 119.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 一个紧群 G 是弧连通的，当且仅当 $\mathrm{Ext}(X(G),\mathbf{Z})=0$. 一个紧群 G 是可度量化的，当且仅当 $X(G)$ 是可数的.

参考文献

[A1] Armacost, D. L., The structure of locally compact abelian groups, M. Decker, 1981.

[A2] Hochschild, G., The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

2) **拓扑学中的 Понтрягин 对偶性**(Pontryagin duality in topology) 是系数在一个群 G 内，位于一个 n 维紧可定向流形 M^n 内一个紧集 A 的 p 维 Александров-Čech 上同调群 $H^p(A;G)$ 与余集 $B=M^n\setminus A$ 的 $(n-p-1)$ 维上同调群 $H^c_{n-p-1}(B;G)$ 之间的一个同构，并且要求 $H^p(M^n;G)=H^{p+1}(M^n;G)=0$（零维同调群和上同调群是约化的；记号 c 表示紧支集）. 在 A 或 B 是一个有限多面体的情形下，J. W. Alexander 证明了这个同构的存在. N. Steenrod 对于任意开子集 $A\subset M^n$ 建立了这样的同构，而 К. А. Ситников 对于任意子集 A 建立了这样的同构.

Понтрягин 对偶律在上面所引用的形式是由 П. С. Александров 陈述的. 对偶性的原始表述是建立在群 $H_p(A;G^*)$ 与 $H^c_{n-p-1}(B;G)$ 之间的特征标理论意义上的，这里 G^* 是离散群 G 的紧特征标群. 对偶律的两种表述形式的等价性是由于群 $H_p(A;G^*)$ 乃是群 $H^p(A;G)$ 的特征标群这一事实而得出的. 在这个假定下，流形是 p 维和 $p+1$ 维非循环的，因为对 (M^n,A) 的同调列是正合的，从而有 $H^p(A;G)=H^{p+1}(M^n,A;G)$，因此 Понтрягин 对偶性是 Poincaré-Lefshetz 对偶性（见 **Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)）的一个简单推论.

所考虑的对偶性关系的最一般形式如下. 令 M^n 是一个任意流形（它可以是一般的而不一定是紧的或可定向的），令 $\mathscr{G}$ 是一个具有纤维 G 的系数的局部常值系统，令 A 是 M^n 的任意子集，Φ 是 M^n 的包

含在 $B = M^n \setminus A$ 的闭子集族，则 $H_p(M^n;\mathscr{G}) = H_{p-1}(M^n;\mathscr{G}) = 0$ 蕴含 $H^p(A;\mathscr{H}_n(\mathscr{G})) = H^{\Phi}_{n-p-1}(B;\mathscr{G})$．这里 H^{Φ}_q 是具有属于 Φ 的闭支集的同调函子（即群 $H_q(F;\mathscr{G})$，$F \in \Phi$，的方向极限），而 $\mathscr{H}_n(\mathscr{G})$ 是由群 $H_n(M^n, M^n \setminus x;\mathscr{G})$ $(x \in M^n)$ 所生成的系数的局部常值系统．在上面的等式中，如果考虑系数在某个特殊定义的系统内的同调，则上同调系数 $\mathscr{H}_n(\mathscr{G})$ 可以用 $\mathscr{G}$ 来代替．

参考文献

[1] Александров, П. С., Топологические теоремы двойственность, ч. I —— замкнутые множества, М., 1955 (Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 48).

[2] Massey, W., Homology and cohomology theory, M. Decker, 1978.

[3] Скляренко, Э. Г., 《Итоги Наук и Техн. соврем. пробл. матем.》, **50** (1989), 129 – 266

Э. Г. Скляренко 撰 郝钢新 译

Понтрягин 不变量 [Pontryagin invariant; Понтрягина инвариант]

具有给定标架的曲面的标架构造的一个不变量．设 (M^2, U) 是 S^{n+2} 中具有 n 维标架 U 的闭可定向曲面，即 S^{n+2} 中的曲面 M^2 的 n 维法向量丛（vector bundle）的平凡化．任何元素 $z \in H_1(M^2, \mathbf{Z})$ 可以由一个具有只在二重点是自交和横截的光滑浸入圆周来实现．设圆周 S^1 的某个定向被选定；设 $u_1(y), \cdots, u_n(y)$ 是从 U 限制到点 $f(y)$ $(y \in C)$ 的正交向量；设 $u_{n+2}(y)$ 是曲线 $C = f(S^1)$ 在点 $f(y)$ 处关于 S^1 的选定的定向的切向量；又设 $u_{n+1}(y)$ 是 M^2 在 $f(y)$ 处正交于 $u_{n+2}(y)$ 且选定向使得向量序列 $u_1(y), \cdots, u_n(y), u_{n+1}(y), u_{n+2}(y)$ 给出了球面 S^{n+2} 的标准定向的一个切向量．为此产生的映射 $h: S^1 \to SO_{n+2}$ 定义了群 $\pi_1(SO_{n+2})$ 的一个元素（对 $n \geqslant 1$，群 $\pi_1(SO_{n+2})$ 同构于 $\mathbf{Z}_2$）．如果 h 同伦于零则令 $\beta = 0$，如果 h 不同伦于零，就令 $\beta = 1$．设函数 $\Phi_0: H_1(M^2, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}_2$ 的值等于曲线 C 实现元素 z 和由 C 定义的数 β 的二重点的数目的模 2 和．因此，$\Phi_0(z)$ 给定的值只依赖于 z 的同调类，且函数 $\Phi_0(z)$ 满足下列条件：

$$\Phi_0(z_1 + z_2) = \Phi_0(z_1) + \Phi_0(z_2) + \Phi(z_1, z_2) \bmod 2,$$

其中 $\Phi: H_1(M^2, \mathbf{Z}) \times H_1(M^2, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ 是曲面 M^2 的一维同调的相交形式．Φ_0 的 **Arf** 不变量（Arf-invariant）称为对子 (M^2, U) 的 Понтрягин 不变量（Pontryagin invariant）．对子 (M^2, U) 允许一个对子 (S^2, U) 的标架割补，当且仅当对子 (M^2, U) 的 Понтрягин 不变量为零（Понтрягин 定理（Pontryagin theorem））．Понтрягин 不变量可由环面的 $(n+2)(n \geqslant 2)$ 维标架来实现，且是二维标架配边（cobordism）的唯一不变量．Понтрягин 不变量定义了一个同构 $\pi_{n+2}(S^n) \approx \mathbf{Z}_2$，$n \geqslant 2$．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теория гомотопий, 2 изд, М., 1976.

М. А. Штанько 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[A2] Milnor, J., Topology from the differentiable viewpoint, Virginia Press, 1966 (中译本：J. W. 米尔诺，从微分观点看拓扑，上海科学技术出版社，1983).

徐森林 译

Понтрягин 最大值原理 [Pontryagin maximum principle; Понтрягина принцип максимума]

描述**最优控制的数学理论**（optimal control, mathematical theory of）中一个非经典变分问题的强极大值的必要条件的关系式．它首先由 Л. С. Понтрягин 于 1956 年系统地表述（见[1]）．

Понтрягин 最大值原理提出的公式化的表述是关于以下的最优控制问题（problem of optimal control）．给定一个常微分方程组

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是相向量，$u \in \mathbf{R}^p$ 是控制参数（control parameter），而 f 是变量 x, u 的连续向量函数，且关于 x 连续可微．在空间 $\mathbf{R}^p$ 中控制参数 u 的容许值的某一集合 U 已给定；相空间 $\mathbf{R}^n$ 中给定了两个点 x^0 和 x^1；初始时间 t_0 是固定的．在 U 中取值的任意分段光滑函数 $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ 称为容许控制（admissible control）．称一个容许控制 $u = u(t)$ 把相点从位置 x^0 转移到位置 $x^1 (x^0 \to x^1)$，如果方程组 (1) 满足初始条件 $x(t_0) = x^0$ 的相应解 $x(t)$ 对所有 $t \in [t_0, t_1]$ 定义且 $x(t_1) = x^1$．在把相点从位置 x^0 转移到位置 x^1 的所有容许控制中，需要找一个最优控制（optimal control），即找函数 $u^*(t)$，它使得泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\,dt \tag{2}$$

取最小的可能的值．这里 $f^0(x, u)$ 是由与 $f(x, u)$ 同样的函数类中给定的一个函数，$x(t)$ 是对应于控制 $u(t)$ 的方程组 (1) 的带有初始条件 $x(t_0) = x^0$ 的解，而 t_1 是此解通过 x^1 时的时间．该问题包括寻求 (1) 的最优控制 $u^*(t)$ 和对应的最优轨道 $x^*(t)$ 这

件的一对.

设

$$H(\psi, x, u)=(\psi, \mathbf{f}(x, u))$$

是变量 ψ, x, u 的一个标量函数（Hamilton 函数），其中 $\psi=(\psi_0, \psi^1)\in\mathbf{R}^{n+1}$, $\psi_0\in\mathbf{R}^1$, $\psi^1\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{f}=(f^0, f)$. 对函数 $H(\psi, x, u)$ 对应一个典范（Hamilton）组（关于 ψ, x）

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\psi},\quad \frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3}$$

（(3) 中第一个方程是方程组 (1)）. 令

$$M(\psi, x)=\sup\{H(\psi, x, u): u\in U\}.$$

Понтрягин 最大值原理表述如下：如果 $u^*(t)$, $x^*(t)$ $(t\in[t_0, t_1])$ 是最优控制问题 (1)，(2) $(x^0\to x^1, u\in U)$ 的解，则存在一个非零的绝对连续函数 $\psi(t)$，使得 $\psi(t)$, $x^*(t)$, $u^*(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上满足方程组 (3)，且对几乎所有的 $t\in[t_0, t_1]$，函数 $H(\psi(t), x^*(t), u^*(t))$ 达到其最大值：

$$H(\psi(t), x^*(t), u^*(t))=M(\psi(t), x^*(t)), \tag{4}$$

且在终止时间 t_1 满足条件

$$M(\psi(t_1), x(t_1))=0,\ \psi_0(t_1)\leqslant 0. \tag{5}$$

如果函数 $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ 满足关系式 (3)，(4)（即 $x(t)$, $u(t)$ 是 **Понтрягин 极值曲线**（Pontryagin extremal）），则条件

$$\mathscr{H}(t)=M(\psi(t), x(t))\equiv\text{常数},\ \psi_0(t)\equiv\text{常数}$$

成立.

从上面的陈述推出对时间最优问题 ($f^0=1$, $J=t_1-t_0$) 的最大值原理. 这个陈述可自然推广到非自治系统，具有可变端点的问题和具有限制相坐标的问题 ($x(t)\in X$, 其中 X 是相空间 $\mathbf{R}^n$ 中满足某些附加限制的闭集（见 [1]））.

容许闭集 U, X（特别是这些区域可被非严格不等式组所确定）使得所考虑问题不是经典的. 具通常导数的经典变分法中的基本必要条件可从 Понтрягин 最大值原理推出（见 [1] 和 **Weierstrass 条件（对变分极值的）**（Weierstrass conditions (for a variational extremum)））.

Понтрягин 最大值原理的以上表述的广泛使用的证明是基于针变分（needle variations）（即考虑任意地但仅在有限多个小时间区间上偏离最优控制的容许控制），包括在最优解的邻域中问题的线性化，最优轨道的变分凸锥的构造，然后应用关于分离凸锥的定理（见 [1]）. 然后借助于相变量 x，控制 u 和伴随变量（adjoint variable）ψ 的 Hamilton 函数 $H(\psi, x, u)$ 的最大值，把对应的条件写成解析式 (3)，(4)，其中 ψ 所起作用相当于经典变分法中的 **Lagrange 乘子**（Lagrange multipliers）. 有效的应用 Понтрягин 最大值原理常常需要解对 (3) 的一个两点边值问题.

最优控制问题的最完全的解是在某些线性系统的情形下得到的. 这时 Понтрягин 最大值原理中的关系式不但是最优性的必要条件而且是充分条件.

有 Понтрягин 最大值原理的许多推广；例如，在更复杂的非经典约束的方向（包括加在控制和相坐标上的混合约束，泛函的的和不同的积分约束），在对应的约束的充分性的研究中，在考虑广义解时，所谓滑动体系，具有非光滑右端的微分方程组，微分包含，对离散系统和具有无穷多个自由度的系统中的最优控制问题，特别是用偏微分方程，带后效的方程（包括带延滞的方程），Banach 空间中的演化方程描述的系统等等. 后者导致相应泛函变分的一些新的类，导出所谓积分最大值原理，线性化最大值原理等等. 更一般几类具有非经典约束（包括非严格不等式）或具有非光滑泛函的变分问题通常称为 Понтрягин 型问题（problems of pontryagin type）. Понтрягин 最大值原理的发现引起了数学最优控制理论的发展. 它促进了在微分方程、泛函分析和极值问题、计算数学及其他相关领域中的新的研究工作.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., Мищенко, Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976（英译本：Pontryagin, L. S., Boltyanskiĭ, V. G., Gamkrelidze, R. V. and Mishchenko, E. F., The mathematical theory of optimal processes, Wiley, 1962）.

А. Б. Куржанский 撰

【补注】 在西方文献中 Понтрягин 最大值原理也简单地称为最小值原理（minimum principle）.

参考文献

[A1] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and stochastic optimal control, Springer, 1975.

[A2] Lee, E. B. and Markus, L., Foundations of optimal control theory, Wiley, 1967.

[A3] Berkovitz, L. D., Optimal control theory, Springer, 1974.

[A4] Cesari, L., Optimization-theory and applications, problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

[A5] Clarke, F., Optimization and nonsmooth analysis, Wiley, 1983

葛显良 译 吴绍平 校

Понтрягин 数 [Pontryagin number; Понтрягина чис-

ль]

闭定向流形的一种示性数(characteristic number). 取值为有理数. 设 $x \in H^{**}(\mathrm{BO};\mathbf{Q})$ 为任意(不必齐次)稳定示性类(characteristic class). 给定一个闭定向流形 M. 有理数 $x[M]=\langle x(\tau M),[M]\rangle$ 称为 M 的相应于 x 的 Понтрягин 数(Pontryagin number); 其中 τM 为切丛, $[M]$ 为 M 的基本类(fundamental class). Понтрягин 数 $x[M]$ 仅依赖于类 x 的次数为 $\dim M$ 的齐次分量. 设 $\omega=\{i_1,\cdots,i_k\}$ 为 n 的一个划分, 即满足 $i_1+\cdots+i_k=n$ 的一组非负整数 $i_1,\cdots,i_k$, 并设 $p_\omega=p_{i_1}\cdots p_{i_k}\in H^{4n}(\mathrm{BO})$. 有理数 $p_\omega[M]$ 对任意 $4n$ 维闭流形 M 和数 n 的任意划分 ω 均可定义.

两个下配边的(在定向意义下, 见下配边(bordism))流形 M, N 的 Понтрягин 数 $x[M]$, $x[N]$ 相等: $x[M]=x[N]$ (Понтрягин 定理(Pontryagin theorem)).

依据这一定理, 每个示性类 $x\in H^{**}(\mathrm{BO};\mathbf{Q})$ 均诱导出一个同态 $x[\ ]:\Omega_*^{SO}\to\mathbf{Q}$; 每个元 $[M]\in\Omega_*^{SO}$ 均诱导出一个同态 $H^{**}(\mathrm{BO};\mathbf{Q})\to\mathbf{Q}$, $x\mapsto x[M]$. 换言之, 存在同态

$$\varphi:\Omega_*^{SO}\to\mathrm{Hom}(H^{**}(\mathrm{BO};\mathbf{Q});\mathbf{Q}).$$

若两个定向闭流形的所有 Понтрягин 数和 **Stiefel 数**(Stiefel number)均相同, 则它们是下配边的(在定向意义下).

与关于拟复流形的 Milnor-Hirzebruch 问题类似的问题是要描述映射 φ 的象. 解决这一问题需要考虑与 K 理论(K-theory)中的 **Понтрягин 类**(Pontryagin class) π, 相对应的 Понтрягин 数. 设 $\omega=\{i_1,\cdots,i_n\}$ 为非负整数的集合, $S_\omega(p)$ 和 $S_\omega(e_p)$ 为分别由对称级数

$$S^\omega(x_1^2,\cdots,x_n^2)\text{ 和}$$

$$S^\omega(e^{x_1}+e^{-x_1}-2,\cdots,e^{x_n}+e^{-x_n}-2)$$

定义的示性类, 其中 $S^\omega(t_1,\cdots,t_n)$ 为含有单项式 $t_1^{i_1}\cdots t_k^{i_k}$, $n\geqslant i_1+\cdots+i_k$, 的最小对称多项式. 设 $B_*\subset\mathrm{Hom}(H^{**}(\mathrm{BO};\mathbf{Q});\mathbf{Q})$ 为使得对所有 ω 均有 $b(S_\omega(p))\in\mathbf{Z}$, $b(S_\omega(e_p)L)\in\mathbf{Z}[1/2]$ 的同态 $b:H^{**}(\mathrm{BO};\mathbf{Q})\to\mathbf{Q}$ 的集合. 则同态

$$\varphi:\Omega_*^{SO}\to\mathrm{Hom}(H^{**}(\mathrm{BO};\mathbf{Q});\mathbf{Q})$$

的象恰为 B_*(Stong-Hattori 定理(Stong-Hattori theorem)).

相应于类 L, $\hat{A}\in H^{**}(\mathrm{BO};\mathbf{Q})$ 的示性数 $L[M]$ 和 $\hat{A}[M]$ 分别称为 M 的 L 亏格(L-genus)和 $\hat{A}$ 亏格($\hat{A}$-genus).

对于维数能被 4 整除的闭流形 M, 存在等式 $L[M]=I[M]$, 其中 $I[M]$ 为流形的符号差(signature), 即定义于 $H_{n/2}(M)$, $n=\dim M$, 上的二次相交型的符号差(Hirzebruch 定理(Hirzebruch theorem)). 对于闭的偶数维旋流形 M, M 的旋指标, 即 M 上的 Dirac 算子的指标, 与 $\hat{A}[M]$ 相等.

参考文献见 **Понтрягин 类**(Pontryagin class).

А. Ф. Харшиладзе 撰 李贵松 译 潘建中 校

Понтрягин 空间[Pontryagin space; понтрягина пространство]

有有限的不定性秩 κ 的一种**带不定度规的 Hilbert 空间**(Hilbert space with an indefinite metric) Π_κ. 关于这些空间的几何学的基本事实是由 Л. С. Понтрягин 建立的([1]). 除了对带不定度规空间的普通事实外, 以下的诸性质成立.

如果 $\mathscr{L}$ 是 Π_κ 中一个任意的非负线性流形, 则 $\dim\mathscr{L}\leqslant\kappa$; 如果 $\mathscr{L}$ 是一个正线性流形且 $\dim\mathscr{L}=\kappa$, 则它的 J 正交补 N 是一负线性流形且 $\Pi_\kappa=\mathscr{L}\oplus N$. 此外, N 是关于范数 $|x|=\sqrt{-J(x,x)}$ 的完全空间. 如果线性流形 $L\subset\Pi_\kappa$ 是非退化的, 则它的 J 正交补 M 也是非退化的且 $\Pi_\kappa=M\oplus L$.

一个 J 酉(J 自伴)算子的谱(特别是离散谱)是关于单位圆周(实直线)对称的, 且对应于本征值 λ, $|\lambda|>1$, 的所有初等因子有有限阶数 ρ_λ, $\rho_\lambda\leqslant\kappa$, $\rho_\lambda=-\rho_{\bar\lambda^{-1}}$. 对应于本征值 λ, $|\lambda|>1$ ($\mathrm{Im}\,\lambda>0$) 的 J 酉(J 自伴)算子的根子空间维数的和不超过 κ.

以下的定理([1])在 Понтрягин 空间 Π_κ 上的 J 自伴算子理论中是基本的: 对每个 J 自伴算子 $A(\overline{D(A)}=\Pi_\kappa)$, 存在一个 κ 维(极大)非负不变子空间 $\mathscr{L}$, 其中 A 的所有本征值有非负虚部, 且存在一个 κ 维非负不变子空间, 其中所有本征值有非正的虚部. 对 J 酉算子有类似的论断, 其中上(下)半平面换成单位圆盘的外部(内部), 且在某些附加条件下, 即使对空间 Π_∞ 上的算子, 类似论断成立.

如果 U 是 J 酉算子, 则它的极大不变子空间 $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ 可这样选取, 使得算子 $U_{\mathscr{L}}=U|_{\mathscr{L}}$, $U_{\mathscr{L}'}=U|_{\mathscr{L}'}$ 的初等因子有最小的阶. 为了在单位圆盘内无根的多项式 $P(\lambda)$ 具有性质: $(P(U)x,P(U)x)\leqslant0$, $x\in\Pi_\kappa$, 必要充分条件是它能被算子 $U_{\mathscr{L}}$ 的极小零化多项式整除. 如果 U 是一个循环算子, 则它的 κ 维非负不变子空间是被唯一地确定的. 在这种情况下, 根 $\{\lambda_i\}$ 在单位圆盘外($|\lambda_i|>1$)的多项式 $P(\lambda)$ 的上述性质等价于 $P(\lambda)$ 被 $U_{\mathscr{L}}$ 的特征多项式整除.

在 Понтрягин 空间 Π_κ 上零不属于其连续谱的每个全连续 J 自伴算子 A 没有剩余谱. 这样一个算子的根向量在 Π_κ 中关于(定)范数 $(|J|x,x)$ 构成一个

Riesz 基(Riesz basis).

涉及不变子空间和谱的许多事实可推广到 J 等距和 J 非扩张算子的情形. 举例说, 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 J 等距算子的本征值的一个任意的集合, $\lambda_i\bar{\lambda}_k \neq 1$, $i, k = 1, \cdots, n$, 又如果 ρ_i 是在点 λ_i 初等因子的阶数, 则 $\sum_1^n \rho_i \leqslant \kappa$. 任何 J 非扩张有有界逆的算子 T 有一个 κ 维不变非负子空间 $\mathscr{L}$, 使得限制 $T|_{\mathscr{L}}$ 的所有本征值位于单位圆盘中([2]). 类似的事实对极大 J 耗散算子成立. 一般地, 一个 $D(A) \subset D(A^*)$ 的 J 耗散算子在上半平面至多有 κ 个本征值. J 等距和 J 对称(更一般地, J 非扩张和 J 耗散)算子由 **Cayley 变换式**(见 **Cayley 变换**(Cayley transform))建立联系, 而 Cayley 变换式在 Π_κ 上有所有的自然性质([2]). 这个事实使得可同时对 J 等距和 J 对称算子发展扩张理论. 特别地, 每一 J 等距(J 对称)算子可扩张成极大的. 如果它的亏指数是不同的, 则它没有 J 酉(J 自伴)扩张. 如果这些亏指数相等且是有限的, 则任何极大扩张是 J 酉(J 自伴)的.

对 Π_κ 上完全连续算子, 关于根向量系的完全性的许多论断, 类似于带有确定度量的空间上的耗散算子理论的相应事实, 也是成立的.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **8** (1944), 243 – 280.

[2] Иохвидов, И. С., Крейн, М. Г., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 5 (1956), 367 – 432.

[3] Иохвидов, И. С., Крейн, М. Г., 《Успехи матем. наук》, **8** (1959), 413 – 496.

[4] Азизов, Т. Я., Иохвидов, И. С., 《Успехи матем. наук》, **26** (1971), 4, 43 – 92.

[5] Крейн, М. Г., в кн., Вторая летняя математическая школа, [т.] 1, К., 1965, 15 – 92.

[6] Наймарк, М. А., Исмагилов, Р. С., в кн., Итоги науки. Математический анализ, 1968, в. 17, М., 1969, 73 – 105.

[7] Nagy, L., State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory, Noordhoff, 1966.

Н. К. Никольский Б. С. Павлов 撰

【补注】 Понтрякин 空间构成 **Крейн 空间**(Kreĭn space)类的一个子类(亦见**带不定度规的 Hilbert 空间**). 出现于上面的正文开端中的算子 J 是基本对称性(fundamental symmetry)(见 **Крейн 空间**). 通过公式 $[x, y] = (Jx, y)$ 定义该不定内积.

参考文献

[A1] Azizov, T. Ya. and Iohidov, I. S., Linear operators in spaces with an indefinite metric, Wiley, 1989 (译自俄文).

[A2] Iohidov, I. S., Kreĭn, M. G. and Langer, H., Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric, Akad. Verlag, 1982.

葛显良 译 吴绍平 校

Понтрягин 平方 [Pontryagin square; Понтрягина квадрат]

$(\mathbf{Z}_{2^k}, 2n; \mathbf{Z}_{2^{k+1}}, 4n)$ 型的**上同调运算**(cohomology operation) $\mathscr{P}_2$, 即, 对任何拓扑空间偶 (X, Y) 定义的自然映射

$$\mathscr{P}_2: H^{2n}(X, Y; \mathbf{Z}_{2^k}) \to H^{4n}(X, Y; \mathbf{Z}_{2^{k+1}}),$$

并且满足: 对任何连续映射 $f: (X, Y) \to (X', Y')$, 等式 $f^*\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_2 f^*$(自然性)成立.

Понтрягин 平方具有以下性质:

1) $\mathscr{P}_2(u+v) = \mathscr{P}_2(u) + \mathscr{P}_2 v + i(uv)$, 其中 $i: \mathbf{Z}_{2^k} \to \mathbf{Z}_{2^{k+1}}$ 是自然的嵌入.

2) $\rho\mathscr{P}_2 u = u^2$ 以及 $\mathscr{P}_2\rho u = u^2$, 其中 $\rho: H^*(X, Y; \mathbf{Z}_{2^{k+1}}) \to H^*(X, Y; \mathbf{Z}_{2^k})$ 是取模 2^k 的商同态.

3) $\mathscr{P}_2\sum = \sum\mathscr{P}$, 其中 $\sum: H^{2n-1}(X; G) \to H^{2n}(\sum X, G)$ 是纬垂(suspension)映射而 $\mathscr{P}$ 是 **Постников 平方**(Postnikob square)(或者说, $\mathscr{P}_2$ 的上同调纬垂是 $\mathscr{P}$). 若设

$$\mathscr{P}_2: K(\mathbf{Z}_{2^k}, 2n) \to K(\mathbf{Z}_{2^{k+1}}, 4n)$$

和

$$\mathscr{P}: K(\mathbf{Z}_{2^k}, 2n-1) \to K(\mathbf{Z}_{2^{k+1}}, 4n-1)$$

是相应的上同调运算的代表映射, 则 $\Omega\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}$.

性质 1), 2) 唯一确定了 Понтрягин 平方, 因而可以作为定义它的公理. 构造性地, Понтрягин 平方可由下式来定义

$$\mathscr{P}_2\{u\} = \{u \cup_0 u + u \cup_1 \delta u\} \bmod 2^{k+1},$$

其中 $u \in C^{2n}(X; \mathbf{Z})$ 模 2^k 为上闭链(要知道 $\cup_i$ 乘积, 见 **Steenrod 平方**(Steenrod square)).

Понтрягин 平方可推广到奇素数 p 的情形(见 [5], [6]). 这时所得的上同调运算是 $(\mathbf{Z}_{p^k}, 2n; \mathbf{Z}_{p^{k+1}}, 2pn)$ 型的, 称为第 p 个 **Понтрягин 幂**(Pontryagin power) $\mathscr{P}_p$. 运算 $\mathscr{P}_p$ 由下列公式唯一决定:

$$\mathscr{P}_p(u+v) = $$

$$= \mathscr{P}_p(u) + \mathscr{P}_p(v) + i\left[\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} u^i v^{p-i}\right],$$

其中 $i: \mathbf{Z}_{p^k} \to \mathbf{Z}_{p^{k+1}}$ 是自然嵌入; 以及

$$\rho\mathscr{P}_p u = u^p \text{ 和 } \mathscr{P}_p \rho u = u^p,$$

其中 $\rho = H^*(X; Y; \mathbf{Z}_{p^{k+1}}) \to H^*(X, Y; \mathbf{Z}_{p^k})$ 是模 p^k 商同态, 以上公式是 $\mathscr{P}_2$ 所对应的公式的推

广. 此时类似于 3) 的公式是 $\mathcal{P}_p\sum=0$, 意思是说, 当 $p>2$ 时, $\mathcal{P}_p$ 的上同调纬垂为零. 当 $p>2$ 时, 等式 $\mathcal{P}_p(uv)=\mathcal{P}_p(u)\mathcal{P}_p(v)$ 成立, 这里乘法可以是外积 (即 × 乘法), 或内积 (⌣ 乘法). 当 $p=2$ 时, 相应等式仅当求和的项阶为 2 时成立.

最一般而言, Понтрягин 平方对系数在任意有限生成交换群 π 中的上同调有定义 (见 [2], [3]). 这种推广的最终形式是这样的 (见 [6]). Понтрягин 平方是一个环同态:

$$\mathcal{P}:\Gamma(H^{2n}(X;\pi))\to H^{*}(X,\Gamma(\pi)),$$

其中 Γ 是一个函子, Γ 在交换群上取的值为具有除幂的环. 当 $\pi=\mathbf{Z}_p$ 时, 这个同态的第 p 个分量就是第 p 个 Понтрягин 幂 $\mathcal{P}_p$ (当 $p=2$ 时, 得到的是 Понтрягин 平方).

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., 《Докл. АН СССР》, **34** (1942), 39–41.

[2] Болтянский, В. Г., Гомотодическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М., 1955 (中译本: В. Г. 巴尔佳斯基, 连续映射和矢量场的同伦理论, 科学出版社, 1958).

[3] Постников, М. М., 《Докл. АН СССР》, **64** (1949), 4, 461–462.

[4] Browder, W. and Thomas, E., Axioms for the generalized Pontryagin cohomology operations, *Quart. J. Math.*, 13 (1962), 55–60.

[5] Thomas, E., A generalization of the Pontryagin square cohomology operation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 266–269.

[6] Thomas, E., The generalized Pontryagin cohomology operations and rings with divided powers, Amer. Math. Soc., 1957.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников 撰

【补注】 要了解 $\Gamma(\pi)$ 的定义, 见**均幂环** (ring with divided powers).

潘建中 译 沈信耀 校

Понтрягин 曲面 [Pontryagin surface; Понтрягина поверхности]

四维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^4$ 中的二维连续统 C_m, 其模 m 系数**同调维数** (homological dimension) 为 1, 其中 $m=2,3,\cdots$ 为给定正整数. 在这种意义下, 这些连续统是"维数亏空的". Л. С. Понтрягин ([1]) 曾构造出曲面 C_2, C_3 使其拓扑乘积 $C=C_2\times C_3$ 是维数为 3 的连续统, 从而给出在两个 (度量) 紧统的拓扑相乘下其维数是因子维数之和这一猜想的反证. 在另一方面, 他对模 p 整数域, p 为素数, 以及更一般地, 系数群为域的同调维数证明了这一猜想. 在 [2] 中, 他还构造出 $\mathbf{R}^4$ 中的二维连续统 C, 使其拓扑平方 $C^2=C\times C$ 的维数为 3.

参考文献

[1] Pontryagin, L. S., Sur une hypothèse fundamentale de la théorie de la dimension, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **190** (1930), 1105–1107.

[2] Болтянский, В. Г., 《Успехи матем. наук.》, **6** (1951), 3, 99–128.

[3] Александров, П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975.

П. С. Александров 撰

【补注】 事实上, Понтрягин 构造了一列 2 维曲面 P_n, 使得 $P_n\times P_n$ 的维数为 4, 而当 $m\neq n$ 时 $P_m\times P_n$ 的维数为 3. 这些曲面在以下意义下代表了所有可能的情形, 因为若一个度量连续统 X 对任意 n 均满足 $\dim(X\times P_n)=\dim X+2$, 则 $\dim(X\times Y)=\dim X+\dim Y$ 对任意度量连续统 Y 均成立. В. Г. Болтянский 构造了具有相反性质的 2 维连续统 B_n, 它们满足 $\dim(B_n\times B_n)=3$, 而当 $m\neq n$ 时, $\dim(B_m\times B_n)=4$. 这些曲面在同样的意义下代表了所有的可能性.

最近, А. Н. Дранишников 指出甚至存在维数亏空的绝对邻域收缩核 (参见例如**正规空间的绝对收缩核** (absolute retract for normal spaces); **拓扑空间的收缩核** (retract of a topological space)). 他所提供的例子 D_n 的维数为 4 并满足 $\dim(D_m\times D_n)=7$, 其中 $m\neq n$ ([A1]).

参考文献

[A1] Дранишников, А. Н., 《Успехи матем. наук》, **43** (1988), 4, 11–55.

李贵松 译 潘建中 校

多孔点 [porosity point; пористости точка], 度量空间 X 中集合 E 的

一个点 $x_0\in X$, 存在以 x_0 为共同中心且半径 $r_k\to 0$ 的开球列 B_k, 使得对任一 $k=1,2,\cdots$, 有一个半径 $\rho_k\geqslant Cr_k$ 的开球 $G_k\subset B_k\setminus E$, 其中 C 是与 k 无关 (但一般说来依赖于 x_0 和 E) 的正数. 集合 E 称为多孔的 (porous), 如果 E 中任一点皆为 E 的多孔点. 集合 E 称为 σ 多孔的 (σ-porous), 如果它可表示为有限或可数个多孔集的并 (见 [1]). E 的多孔点是其闭包 $\overline{E}$ 的多孔点. 如果 $X=\mathbf{R}^n$, 那么集合 $E\subset X$ 的多孔点既非 E 也非 $\overline{E}$ 的 Lebesgue 稠密点. 任一多孔集或 σ 多孔集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Baire 第一范畴集 (见 **Baire 类** (Baire classes)) 和 Lebesgue 零测度集. 这一命题的逆一般地说是不真的: 甚至存在零测度的无处稠密完满集合 $E\subset\mathbf{R}^1$, 但不是 σ 多孔的 (见 [2]).

有时, 在无穷维空间 X 的情形, 多孔集和 σ 多孔集起着零测度集的作用. 当 $X=\mathbf{R}^n$, $h:[0,\infty)\to$

R 是递增连续函数且 $h(0)=0$ 时，如果在前面的陈述中，$h(\rho_k)\geqslant Cr_k$（C 与 k 无关），那么称 $x_0\in X$ 为集合 $E\subset X$ 的 h 多孔点（h-porous point）. 随之还可定义 h 多孔集（h-porous sets）和 σh 多孔集（σ-h-porous sets）. 在 $h(t)/t\to\infty$ $(t\to 0)$ 情形，一个 h 多孔集 $E\subset X=\mathbf{R}^n$ 可以是 Lebesgue 正测度集.

参考文献

[1] Долженко, Е. П., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, 31 (1967), 1, 3 - 14.

[2] Zajicek, L. Sets of σ-porosity and sets of σ-porosity (q), *Casopis. Pěst. Mat.*, 101 (1976), 350 - 359.

[3] Foran, J. and Humke, P. D., Some set-theoretic properties of σ-porous sets. *Real Anal. Exch.* 6 (1980 - 1981), 1, 114 - 119.

[4] Tkadlec, J., Constructions of some non-σ-h-porous sets on the real line, *Real Anal. Exch.*, 9 (1983 - 1984), 2, 473 - 482.

[5] Agronsky, S. J. and Bruckner, A. M., Local compactness and porosity in metric spaces, *Real Anal. Exch.*, 11 (1985 - 1986), 2, 365 - 379.

[6] Shevchenko, Yu. A., On Vitali's converting theorem, *Vestnik Moskow. Univ. Ser.* I, *Mat. Mech.*, No.3, 1989, 11 - 14.

Е. П. Долженко 撰 周民强 译

部分 [portion; порция]，集合的

对于直线上的集合，是指集合与区间的交集；对于 n 维空间（$n\geqslant 2$）中的集合，是指集合与开球、开长方体、开超平行体的交集. 这个概念的重要性基于下述事实：集合 A 在集合 B 中处处稠密，如果 B 的任何非空部分含有 A 的点，换言之，闭包 $\overline{A}\supset B$. 集合 A 在 B 中无处稠密，如果 A 在 B 的任何部分中无处稠密，即 B 的任何部分均不含于 $\overline{A}$.

А. А. Конюшков 撰 胡师度 白苏华 译

位置对策 [positional game; позиционная игра]

一种对策，其特征在于随着离散时间的推移，过程处于一个树序集（也称树（tree））上. 有限位置对策（finite positional game）是指下列系统：

$$\Gamma=\langle I,\ X,\ \mathfrak{R},\{P_x\}_{x\in X_0},\{\mathfrak{R}_i\}_i\in I,\{h_i\}_{i\in I}\rangle,$$

其中

1) I 是局中人集（$|I|=n$）；

2) X 是有限树，其顶点称为位置（position），其根称为初始位置（initial position）. 一个序列关系自然是对于位置来定义的；紧跟给定的 $x\in X$ 的位置称为 x 的交替（alternative），没有交替的位置称为最终位置（terminal position）. 导致最终位置的路径称为轨线（trajectory）；最终位置的集合表示为 X^*；

3) $\mathfrak{R}$ 是把集合 $X\backslash X^*$ 分成 $n+1$ 个序列集（sequence sets）$X_0,\cdots,X_n$ 的一种划分. 在包含在 X_i（$i>0$）的位置中，由局中人 i 执行一步，而在 X_0 中的位置中，步是随机执行的；

4) P_x 是对于每个位置 $x\in X_0$ 的交替集合上的概率分布；

5) $\mathfrak{R}_i=\{U_1^i,\cdots,U_{m_i}^i\}$ 是每个 X_i（$i>0$）的一种划分. 它假定所有包含在给定的 U_k^i 中的位置 x 有同样的交替数，并且 U_k^i 中没有紧跟 U_k^i 中的位置的位置；集合 U_k^i 称为信息集（information sets）. 在单个信息集中的所有的位置的交替所形成的类与信息集之间存在一一对应，而其每个类称为信息集自身的交替（alternative）；

6) h_i 是使每个最终位置对应局中人 i 的增益的函数.

在位置对策中，局中人 i 的纯策略（pure strategy）是对每一信息集 U_k^i 指派一个交替的函数. 对于所有局中人的 n 个纯策略的集合构成一个局势（situation）. 在一个给定的局势下的对策过程可以看作由初始位置到最终位置的位置集合上的一个**随机游动**（random walk），在每个位置上，该位置属于其序列集的局中人只知道包含它的信息集，并且根据其策略来选择一个交替. 在来自 X_0 的位置中，交替的选择是随机的. 这一随机游动定义了最终位置集合上的概率分布. 如果取局中人的在最终位置的增益的数学期望为局中人的增益，那么就得到正规型的**非合作对策**（non-cooperative game）.

如果局中人的每个信息集仅有一个位置，那么这种位置对策称为完全信息对策（game with complete information）. 在一个完全信息对策中，存在一个纯策略中的均衡局势（Zermelo-von Neumann 定理（Zermelo-von Neumann theorem））.

位置对策中的一个重要概念是混合策略. 局中人的两个混合策略称为等价的（equivalent），如果仅在这两个策略有所不同的局势中，每一最终位置的概率相等. 局中人有完全记忆（complete recall）是指其信息集中的每一个作为唯一的交替跟随局中人前面所有的信息集. 对于局中人来说，完全记忆的出现意味着，在作出移动的瞬间，他(她)能记起他(她)曾经所处和作出选择的所有信息集. 一个行为策略（behaviour strategy）是指这样的混合策略：其中信息集的交替的随机选择是随机独立的. 每个随机策略等价于某个行为策略，当且仅当局中人有完全记忆（Kuhn 定理（Kuhn theorem））.

更一般的位置对策是在每一位置具有无限多个交替和具有无限延续轨线的对策，以及**图上的对策**

(game on a graph)

参考文献

[1] Позиционные игры, М., 1967.

[2] Berge, C., Théorie générale des jeux à n personnes, Gauthier-Villars, 1957.

[3] Kuhn, H. W., Extensive games and the problem of information, in H. W. Kuhn, et al. (ed.), Contributions to the theory of games, Annals of Math. Stud., Vol. 28, Princeton Univ. Press, 1953, 193－216.

[4] Thompson, G. L., Signalling strategies in n-person games, in H. W. Kuhn, et al. (ed.), Contributions to the theory of games, Annals of Math. Stud., Vol. 28, Princeton Univ. Press, 1953, 267－277.

[5] Воробьев, Н. Н., 《Проблемы кибернетики》, 7 (1962), 5－20.

[6] Буй Конг Кыонг, 《Вестник ЛГУ》, 1 (1969), 49－59.

Н. Н. Воробьев, А. Н. Ляпунов 撰

【补注】 在西方，位置对策以扩充形式的对策(game in extensive form)的名称更为人知.

局中人的增益(player's gain)可以定义为他在最终位置的增益的期望. 然而，这并不意味着只能论述所提到的非合作对策. 均衡的定义(例如，非合作均衡)和增益的定义是互相独立的.

参考文献

[A1] Basar, T. and Olsder, G. J., Dynamic noncooperative game theory, Acad. Press, 1989.

[A2] Luce, R. D. and Raiffa, H., Games and decisions, Wiley, 1957.

史树中 译

正锥[positive cone; положительный конус]

实向量空间(vector space) E 的满足以下条件的一个子集 K:

1) 如果 $x, y\in K$ 且 $\alpha, \beta\geqslant 0$，则 $\alpha x+\beta y\in K$;

2) $K\cap(-K)=\{0\}$.

一个正锥 K 在 E 上定义一个偏序: 按定义, $x\prec y$ 如果 $y-x\in K$. (这个偏序与向量空间的运算是相容的.)

设 E 是 **Banach 空间**(Banach space). 锥 K 是闭再生正锥(reproducing positive cone)，如果对所有的 $z\in E$ 存在 $x, y\in K$ 使得 $z=x-y$. 这时有不依赖于 z 的常数 M，使得总存在 $x, y\in K$ 使得 $z=x-y$ 且同时有 $\|x\|+\|y\|\leqslant M\|z\|$. 一个立体正锥(solid positive cone)，即有内点的正锥，是再生的.

设 E^* 是 Banach 空间 E 的对偶. 如果 $K\subset E$ 是一个闭再生正锥，则正泛函(关于该正锥，即对 $x\in K$, $f(x)\geqslant 0$ 的那些 $f\in E^*$)的集合 $K^*\subset E^*$ 也是一个正锥(这就是所谓共轭锥(conjugate cone)). 正锥 K 可从 K^* 恢复，即

$$K=\{x\in E: f(x)\geqslant 0 \text{ 对 } f\in K^*\}.$$

如果 K 是一个立体正锥，则它的内部与集合

$$\{x\in E: f(x)>0 \text{ 对 } f\in K^*, f\neq 0\}$$

一致.

Banach 空间中的锥称为正规的(normal)，如果能找到 $\delta>0$，使得对 $x, y\in K$, $\|x+y\|\geqslant\delta(\|x\|+\|y\|)$. 一个正锥是正规的，当且仅当其共轭锥 K^* 是再生的. 如果 K 是再生锥，则其共轭锥 K^* 是正规的.

一个锥 K 称为格锥(lattice cone)，如果每一对元素 $x, y\in E$ 有最小上界 $z=\sup(x, y)$，即 $z\geqslant x, y$ 且对任意的 $z_1\in E$ 由 $z_1\geqslant x, y$ 可推出 $z_1\geqslant z$. 如果一个正锥是正则的且是格锥，则任何可数的有界子集有最小上界.

参考文献

[1] Красносельский, М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962 (英译本: Krasnosel'skii, M. A., Positive solutions of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1964).

В. И. Ломоносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schaefer, H. H., Banach lattices and positive operators, Springer, 1974.

[A2] Zaanen, A. C. and Luxemburg, W., Riesz spaces, I, North-Holland, 1983.

葛显良 译 吴绍平 校

正相关[positive correlation; положительная корреляция]

方差有限的二随机变量 X 和 Y 称为正相关的(positively correlated)，如果 $\mathrm{E}XY>\mathrm{E}X\mathrm{E}Y$，其中 $\mathrm{E}X$ 表示 X 的**数学期望**(mathematical expectation). 在 X 关于给定 Y 的条件均值对 Y 的依赖为线性时，由正相关可见该条件均值关于 Y 是递增的.

见**相关(统计学中的)**(correlation (in statistics)).

А. В. Прохоров 撰 周概容 译

正定型[positive-definite form; положительно определенная форма]

表示式

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k,$$

这里 $a_{ik}=a_{ki}$，对于任意实值 $x_1, \cdots, x_n$ 来说都取非负值并且仅当 $x_1=\cdots=x_n=0$ 时才等于零. 所以，正定型是一个特殊类型的**二次型**(quadratic form). 任意正定型可以被一个线性变换化为表示式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

一个型

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

是正定的，必要且只要 $\Delta_1 > 0, \cdots, \Delta_n > 0$，这里

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

在任意仿射坐标系内，由原点到一点的距离由这个点的坐标的一个正定型表示.

型

$$f = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k,$$

这里 $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$，且对 $x_1, \cdots, x_n$ 的一切值来说 $f \geqslant 0$，并且仅当 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 时才有 $f = 0$，称为一个 Hermite 正定型 (Hermitian positive-definite form).

以下的概念与正定型的概念有关联：1) 正定矩阵 (positive-definite matrix) $\| a_{ik} \|_1^n$ 是这样一个矩阵，使得 $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i \bar{x}_k$ 是一个 Hermite 正定型；2) **正定核** (positive-definite kernel) 是这样一个函数 $K(x, y) = K(y, x)$，使得对于每一平方可积函数 $\varphi(x)$ 来说

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \varphi(x) \overline{\varphi(y)} \, dx dy \geqslant 0;$$

3) **正定函数** (positive-definite function) 是这样一个函数 $f(x)$，使得核 $K(x, y) = f(x - y)$ 是正定的. 根据 Bochner 定理，连续正定函数 $f(x)$ 且 $f(0) = 1$ 的类与随机变量分布的**特征函数** (characteristic function) 的类重合. БСЭ-3

【补注】 一个核是半正定的 (semi-positive definite) (非负定的 (non-negative definite))，指的是满足对一切 $\varphi \in L_2$ 都有 $\int K(x, y) \varphi(x) \overline{\varphi(y)} \, dx dy \geqslant 0$ 的核. 这样的核有时也简称为正的. 然而，"正核"这个词也用于更弱一些的概念 $K(x, y) \geqslant 0$ (几乎处处) 在后一意义下，一个正核 $\neq 0$ 至少有一个本征值 > 0，而一个半正定核的所有本征值 $\geqslant 0$.

参考文献

[A1] Lukacs, E., Characteristic functions, Griffin, 1970

[A2] Zabreyko, P. P. et al., Integral equations-a reference text, Noordhoff, 1975, Chapt. Ⅲ, § 3 (译自俄文).

[A3] Hochstadt, H., Integral equations, Wiley-Interscience, 1973, p. 255 ff.

[A4] Gantmacher, F. R., The theory of matrices, Ⅰ-Ⅱ, Chelsea, reprint, Chapt. Ⅹ (译自俄文) (中译本：甘特马赫尔，矩阵论，上、下卷，高等教育出版社，1955).

郝钢新 译

正定函数 [positive-definite function; положительно определенная функция]

群 G 上的对任意 $x_1, \cdots, x_m \in G$ 及任意 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{C}$ 满足条件

$$\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(x_j^{-1} x_i) \geqslant 0$$

的复值函数 φ. G 上所有正定函数的集合构成了 G 上所有有界函数的空间 $M(G)$ 中的一个锥，这个锥关于乘法运算及复共轭运算是封闭的.

区分这一函数类的原因在于：正定函数定义了群代数 $\mathbf{C}G$ 上的**正泛函** (positive functional) 以及群 G 的**酉表示** (unitary representation). 更准确的叙述如下：设 $\varphi: G \to \mathbf{C}$ 是任意一个函数，$l_\varphi: \mathbf{C}G \to \mathbf{C}$ 是由

$$l_\varphi\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g \in G} \varphi(g) \alpha_g$$

定义的一个泛函，则 l_φ 是正泛函的充分必要条件是：φ 是正定函数. 另外，l_φ 定义了代数 $\mathbf{C}G$ 在 Hilbert 空间 H_φ 上的一个 * 表示，从而定义了群 G 的一个酉表示 π_φ，其中 $\varphi(g) = (\pi_\varphi(g)\xi, \xi)$，$\xi \in H_\varphi$ 是某个向量. 反过来，对任意表示 π 及任意向量 $\xi \in H_\varphi$，函数 $g \to (\pi(g)\xi, \xi)$ 是正定函数.

在 G 是拓扑群的情形，表示 π_φ 弱连续，当且仅当正定函数连续. 如果 G 是局部紧的，则连续正定函数与 $L_1(G)$ 上的正泛函一一对应.

在局部紧的交换群的情形，连续正定函数类与对偶群上的正的有限正则 Borel 测度的 Fourier 变换的集合相重合. 这一结论对于紧群有如下的类似：紧群 G 上的连续函数 φ 是正定函数，当且仅当它的 Fourier 变换 $\hat{\varphi}(b)$ 在对偶对象的每个元素上取正 (算子) 值，即，

$$\int_G \varphi(g)(\sigma(g)\xi, \xi) dg \geqslant 0.$$

对任意表示 σ 及任意向量 $\xi \in H_\sigma$ 成立，这里的 H_σ 是 σ 的空间.

参考文献

[1] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 2, Springer, 1979.

[2] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2, изд., М., 1968 (英译本：Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

В. С. Шульман 撰

【补注】 前面提到的与正泛函 l 联系在一起的 $\mathbf{C}G$ 的表示是循环表示 (cyclic representation). C^* 代数 $\mathscr{A}$ 的循环表示是这样一个表示 $\rho: \mathscr{A} \to B(H)$ (Hilbert 空间上的有界算子的 C^* 代数)，对于它存在向量 $\xi \in H$

使得集合 $\{A\xi : A\in \mathscr{A}\}$ 的闭包是 H 本身．它们是任意表示的基本成分．实际上，如果 ρ 是非退化的(non-degenerate)即 $\{\xi\in H:\rho(A)(\xi)=0, A\in\mathscr{A}\}=0$，则 ρ 是循环表示的直和．关于环论和模理论中的类似概念，也见**循环模**(cyclic module)．

与 $\mathscr{A}$ 上的正泛函 I 相联系的循环表示是正则表示的一个合适的全商．更确切些，具体构造如下．定义 $\mathscr{A}$ 上的内积

$$<A, B> = I(A^* B),$$

并定义 $\mathscr{A}$ 的左理想

$$\mathscr{I} = \{A\in\mathscr{A}: I(A^* A)=0\}.$$

利用 $\mathscr{A}$ 上的内积定义商空间 $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ 上的内积．完备化这一空间得到 Hilbert 空间 H_I 并定义表示 π_I：

$$\pi_I(A)([B]) \simeq [AB],$$

其中 $[B]$ 表示在 $\mathscr{A}/\mathscr{I}\subset H_I$ 中的 $B\in\mathscr{A}$ 的类．将算子 $\pi_I(A)$ 扩张为 H_I 上的有界算子．

如果 $\mathscr{A}$ 中包含单位元，则单位元类是 π_I 的循环向量．如果 $\mathscr{A}$ 中不包含单位元，则首先附加单位元得到一个 C^* 代数 $\tilde{\mathscr{A}}$，而后对 $\tilde{\mathscr{A}}$ 重复构造．为了证明此时 1 的类对于 $\mathscr{A}$(而不是 $\tilde{\mathscr{A}}$)是循环的，要用到 $\mathscr{I}$ 的近似单位元(approximate identity)，即正元 $E_\alpha\in\mathscr{I}$ 的**网**(net)(**有向集**(directed set)) $\{E_\alpha\}$，其中的 E_α 满足条件：$\|E_\alpha\|\leqslant 1$，$E_\alpha\leqslant E_\beta$ 如果 $\alpha\leqslant\beta$，以及 $\lim_\alpha\|AE_\alpha - A\|=0$ 对所有 $A\in\mathscr{I}$ 成立．这样的近似单位元总是存在的．所有这些的有关细节，例如见[1]的第 321 页和[A5]的 2.2.3 节、2.3.1 节以及 2.3.3 节．

C^* 代数上的模为 1 的正泛函经常称为状态(state)，特别是在理论物理文献中．

参考文献

[A1] Bochner, S., Lectures on Fourier integrals, Princeton Univ. Press, 1959(译自德文).

[A2] Rudin, W., Fourier analysis on groups, Wiley, 1962.

[A3] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, 1968.

[A4] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977(译自法文).

[A5] Bratteli, O. and Robinson, D. W., Operator algebras and quantum statistical mechanics, 1, Springer, 1979.

朱学贤 译　刘和平 校

正定核 [positive-definite kernel; положительно определенное ядро]

在 $X\times X$(X 是任意集合)上定义的复值函数 K，对任意 $n\in\mathbf{N}$, $\lambda_i\in\mathbf{C}$ 及 $x_i\in X(i=1,\cdots,n)$，K 满足条件

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(x_i, x_j)\lambda_i\bar{\lambda}_j \geqslant 0.$$

测度空间 (X,μ) 上的可测正定核对应空间 $L_2(X,\mu)$ 上的**正积分算子**(integral operator)，为了能将任意正算子都包括在这一对应中，必须引进广义正定核，后者与 Hilbert 空间有关([1])．

正定核理论推广了群上的**正定函数**(positive-definite function)理论：群 G 上的函数 f 是正定函数的充分必要条件是，$G\times G$ 上的函数 $K(x,y)=f(xy^{-1})$ 是正定核．特别地，正定函数理论的某些结果能被推广到正定核．例如，Bochner 定理(Bochner theorem)称，每一个正定函数都是一个有界正测度的 Fourier 变换(即特征标的积分线性组合)．它的推广如下：每一个(广义)正定核，借助于所谓的基本正定核，关于给定的微分表达式有一个积分表示([1])．

参考文献

[1] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskiy, Yu, M. [Yu. M. Berezanskiĭ], Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

[2A] Крейн, М. Г., 《Укр. матем. ж.》, 1 (1949), 64－98

[2B] Крейн, М. Г., 《Укр. матем. ж.》, 2 (1950), 10－59.

В. С. Шульман 撰

【补注】

参考文献

[A1] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups, Oxford Univ. Press, 1968.

朱学贤 译　刘和平 校

正定算子 [positive-definite operator; положительно определенный оператор]

Hilbert 空间(Hilbert space) H 上对任何 $x\in H$, $x\neq 0$ 满足

$$\inf\frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} > 0$$

的一种对**称算子**(symmetric operator) A．任何正定算子都是**正算子**(positive operator)．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 更一般地，正定算子定义为使得对所有 $x\neq 0$，$\langle Ax, x\rangle > 0$ 的有界对称(即自伴)算子．这包括这样的对角算子，它作用在 Hilbert 空间的一组基 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 上使得 $Ae_n = n^{-1}e_n$．非负定算子是使得对所有 $x\in H$, $\langle Ax, x\rangle\geqslant 0$ 的算子，见[A2]．有时非负定算子称为正算子．

参考文献

[A1] Hille, E., Methods in classical and functional analysis, Addison-Wesley, 1972

[A2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, 1-3, Interscience, 1958-1971, p. 906.

葛显良 译 鲁世杰 校

正元 [**positive element**; **положительный элемент**], 具有对合 * 的代数中 A 的

A 中具有形式 $x=y^*y$ 的一个元素 x，其中 $y\in A$. Banach * 代数 A 中正元的集合 $P(A)$ 包含 Hermite 元的平方的集合 $Q(A)$，后者又包含所有有正谱的 Hermite 元的集合 $P_0(A)^+$ (见**元素的谱** (spectrum of an element)), 但是一般地 $P(A)$ 不包含所有有非负谱的 Hermite 元的集合 A^+. 条件 $P(A)\subset A^-$ 定义完全对称 (或 Hermite 的) Banach * 代数的类. 为了一个 * 代数是完全对称的，必要充分条件是其中的所有 Hermite 元有实谱. 等式 $P(A)=A^+$ 成立，当且仅当 A 是 C^*代数. 这时 $P(A)$ 是该代数 A 的所有 Hermite 元的空间中的一个再生锥.

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naĭmark, M. A, Normed rings, Reidel, 1984).

[2] Dixmier, J., C^*-algebras, North-Holland, 1977 (译自法文).

[3] Райков, Д. А., 《Докл. АН СССР》, 54 (1946), 5, 391-394.

[4] Pták, V., On the spectral radius in Banach algebras with involution, *Bull. London Math. Soc.*, 2 (1970), 327-334.

[5] Palmer, T. W., Hermitian Banach *-algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78 (1972), 522-524.

В. С. Шульман 撰 葛显良 译 吴绍平 校

正泛函 [**positive functional**; **положительный функционал**], 具有对合 * 的代数 A 上的

* 代数 A 上对所有 $x\in A$ 满足条件 $f(x^*x)\geqslant 0$ 的一个**线性泛函** (linear functional) f. 正线性泛函是重要的，特别由于它们被用于 GNS 构造 (GNS-construction) 而被引人，而 GNS 构造是考察 Banach * 代数的基本方法之一. 这种构造及它的推广，例如推广到 C^* 代数中的权，为证明关于 Hilbert 空间上算子的一致闭 * 代数的抽象特征的定理和关于局部紧群的不可约酉表示系统的完全性定理提供了基础.

GNS 构造是这样一种方法，对具有单位的 * 代数 A 上的任意正泛函 f，构造 Hilbert 空间 H_f 中 * 代数 A 的 * 表示 π_f，使得对所有的 $x\in A$, $f(x)=\langle\pi_f(x)\xi,\xi\rangle$，其中 $\xi\in H_f$ 是某个循环向量 (cyclic vector). 构造法如下: 半内积 $\langle x,y\rangle=f(y^*x)$ 是定义在 A 上; 相应的中性子空间是一个左理想 $N_f=\{x\in A: f(x^*x)=0\}$，因而在准 Hilbert 空间 A/N_f 中用元素 $a\in A$ 左乘的左乘算子 $L_a(L_a(x+N_f)=ax+N_f)$ 是有确切定义的; 算子 L_a 是连续的因而能扩张成 A/N_f 的完全化 H_f 上的连续算子 $\overline{L}_a$. 将 $a\in A$ 映到 $\overline{L}_a$ 的映射 π_f 是所需要的表示，这里 ξ 可取典型映射的复合映射 $A\to A/N_f\to H_f$ 之下单位元的象.

参考文献

[1] Гельфанд, И. М., Наймарк, М. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 12 (1948), 445-480.

[2] Segal, I., Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), 73-88.

[3] Наймарк, М. А., Нормированые кольца, 2 изд, М., 1968 (英译本: Naĭmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984)

В. С. Шульман 撰 葛显良 译 吴绍平 校

正算子 [**positive operator**; **положительный оператор**], 正映射 (positive mapping)

1) Hilbert 空间上的正算子是其对应的二次型 (Ax,x) 为非负的**线性算子** (linear operator) A. 复 (complex) Hilbert 空间上一个正算子必须是对称的且有一个也是正算子的自伴扩张. 一个**自伴算子** (self-adjoint operator) A 是正的，当且仅当以下任一条件成立: a) $A=B^*B$，其中 B 是一个**闭算子** (closed operator); b) $A=B^2$，其中 B 是一个自伴算子; 或 c) A 的谱 (见**算子的谱** (spectrum of an operator)) 包含于 $[0,\infty)$ 中. 一个 Hilbert 空间上正有界算子的集合构成所有有界算子的代数中的一个锥.

2) 包含锥 K 的向量空间 X 上的正算子是从 X 到自身中的且保持 X 中给定锥 K 的一个映射. 带有给定的正函数的锥的各种函数空间上具有正核的积分算子是正线性算子. 在锥 K 的几何上和正算子 A 的作用上加上一定的附加条件，可以确立 A 在 X 中的本征向量的存在性 (对应的本征值称为正的 (positive) 或首 (leading) 本征值，当它们超过所有其余本征值的绝对值). 例如，已经证明 ([3])，如果 A 是具有非零谱的正**完全连续算子** (completely-continuous operator)，则其**谱半径** (spectral radius) 是一正本征值. 紧性条件可以换成关于**预解式** (resolvent) 性态的条件 ([4]).

在正非线性算子的情形，考察不动点 (即方程 $Ax=x$ 的解) 的存在性和寻找作为某种递推序列极限的不动点的可能性.

正算子理论中的某些结果可以移植到这样一些算子，它们使得比锥更一般的一类给定子集保持不变 ([5]).

3) 对合代数 A(* 代数)上的正算子是从 A 到对合代数 B 中的一个线性映射，它把正元素变成正元素．研究得最多的是 C^* 代数(C^*-algebra)上的正算子(这些是带有锥的空间上的正算子的特殊情形，因为 C^* 代数中的正元素构成一个锥)．Schwartz 不等式对 C^* 代数上正算子成立：$\varphi(a^2) \geqslant (\varphi(a))^2$ 如果 $a=a^*$．酉正算子(unitary positive operators)(即保持单位元素的正算子)集合的端点已被找到．已经研究了正完全连续算子(positive completely-continuous operators)，即线性映射 $\varphi: A \to B$，使得矩阵 C^* 代数 $M(A)$ 到 $M(B)$ 中的所有映射

$$(a_{ij})_{i,j=1}^n \to (\varphi(a_{ij}))_{i,j=1}^n$$

都是正的．关于正泛函扩张定理的一个类似适用于正完全连续算子：C^* 代数 A 上到某一 **von Neumann 代数**(von Neumann algebra)中的一个正完全连续算子可以扩张成包含 A 的任何 C^* 代数上的正完全连续算子．如果 C^* 代数 A 和 B 之一是交换的(且只有在这种情形)，则任何正算子是完全连续的．

4) Banach 空间 E 上的正算子是使得 $AK \subset K$ 的一个线性算子 A，其中 K 是 E 中一个正锥(positive cone)．A 在 K 中的一个本征向量称为正的，且对应的本征值是正的．如果 K 是一个再生锥而 A 是正完全连续算子且对某个不属于 K 的向量 u，$A^p u \geqslant \alpha u$，其中 p 是一个自然数且 $\alpha > 0$，则 A 的谱半径 r_A 是 A 的一个正本征值；此外 $r_A \geqslant \alpha^{1/p}$ (Крейн-Рутман 定理(Kreĭn-Rutman theorem))．

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966(英译本：Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, 1-2, Pitman, 1981).

[2] Sherman, S., Order in operator algebras, *Amer. J. Math.*, 73(1951), 1, 227-232.

[3] Крейн, М. Г., Рутман, М. А., 《Успехи матем. наук》, 3(1948), 1, 3-95.

[4] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

[5] Красносельский, М. А., Соболев, А. В., 《Докл. АН СССР》, 225(1975), 6, 1256-1259.

[6] Красносельский, М. А., [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966(英译本：Krasnosel'skiĭ, M. A. et al., Integral operators in spaces of summable functions, Noodhoff, 1967).

[7] Dixmier, J., C^* algebras, North-Holland, 1977(译自法文).

[8] Красносельский, М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962(英译本：Krasnosel'skiĭ, M. A., Positive solutions of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1964).

В. С. Шульман, В. И. Ломоносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, II, Wiley-Interscience, 1988, 906ff.

[A2] Reed, M. and Simon, B., Methods of modern mathematical physics, 1: Functional analysis, Acad. Press, 1972, 195ff.

[A3] Vulikh, B. Z., Functional analysis for scientists and technologists, Pergamon, 1963, Sect. 13.6(译自俄文).

葛显良 译 鲁世杰 校

正命题演算 [**positive propositional calculus; позитивное пропозициональное исчисление**]

在语言{&, ∨, ⊃}中的一种**命题演算**(propositional caculus)，由八条公理：

$$A \supset (B \supset A),$$

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)),$$

$$A \& B \supset A,\ A \& B \supset B,\ A \supset (B \supset A \& B),$$

$$A \supset A \vee B,\ B \supset A \vee B,$$

$$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B) \supset C),$$

和**分离法则**(modus ponens)来描述．这种演算包含直觉主义演算 I(见**直觉主义**(intuitionism))中不依赖于否定的部分：任何不含¬(否定)的命题公式在正命题演算中是可推出的，当且仅当它在 I 中可推出．在正命题演算中加入以下两条公理模式便得到演算 I：

1) $\neg A \supset (A \supset B)$(前项否定律)(antecedent negation law),

2) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$(归谬律(reductio ad absurdum law))．

为导出 I，代替 2) 可以采用较弱的模式：

2′) $(A \supset \neg A) \supset \neg A$(部分归谬律)(law of partial reductio ad absurdum)．

亦见**蕴涵命题演算**(implicative propositional calculus)．

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1-2, Springer, 1968-1970.

С. К. Соболев 撰 渊荣芳 译 罗里波 校

正序列 [positive sequence, позитивная последовательность]

区间 $[a,b]$ 中满足如下条件的实数列 $\mu_0, \mu_1, \cdots$：对于在 $[a,b]$ 上不恒为 0 且非负的任意多项式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

恒有

$$\Phi(P) = a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \cdots + a_n \mu_n \geqslant 0.$$

若对上述任意多项式 P，均有 $\Phi(P) > 0$，则称数列是严格正的（strictly positive）. 区间 $[a,b]$ 中的数列 $\mu_0, \mu_1, \cdots$ 成为正序列的充分和必要的条件是，在 $[a,b]$ 上，存在增函数 g，使得

$$\int_a^b x^n \, dg(x) = \mu_n, \; n = 0, 1, \cdots. \qquad (1)$$

М. И. Войтеховский 撰

【补注】（严格）负序列（negative sequence）可类似定义，且有相似的性质. 对于给定的实数列 $\{\mu_n\}$，要判断是否在 $\mathbf{R}$ 上存在一个正的 Borel 测度 μ，使得 $\mu_n = \int_{\mathbf{R}} x^n d\mu(x)$ 的问题，如所周知称为 Hamburger 矩量问题（Hamburger moment problem）. 条件（1）是矩量条件（moment condition），见**矩量问题**（moment problem）.

参考文献

[A1] Landau, H. J. (ed.), Moments in mathematics, Amer. Math. Soc. 1987, p. 56ff.

王斯雷 译

函数的正变差 [positive variation of a function; положительная вариация функции]

其和为给定区间上函数全变差（见**函数的变差**（variation of a function））的两个被加项中的一项. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上给定的实变量的实值函数，$\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ 为 $[a,b]$ 的任一分划，记

$$P_\Pi(f) = \sum_i^{+} [f(x_i) - f(x_{i-1})],$$

其中求和是对那些使差 $f(x_i) - f(x_{i-1})$ 非负的 i 作的. 量

$$P(f) \equiv P(f; [a,b]) = \sup_\Pi P_\Pi(f)$$

称为函数 f 在 $[a,b]$ 上的正变差. 当然，$0 \leqslant P(f) \leqslant \infty$. C. Jordan ([1]) 首先引入函数的正变差这一概念. 亦见**函数的负变差**（negative variation of a function）.

参考文献

[1] Jordan, C., Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **92** (1881), 228 – 230.

[2] Lebesgue, H., Leçons sur l' integration et la récherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.

Б. И. Голубов 撰　王斯雷 译

正向量丛 [positive vector bundle; положительное расслоение]

Riemann 曲面（Riemann surface）上正次数除子（divisor）概念的推广. **复空间**（complex space）X 上的全纯向量丛（vector bundle）E 称为正的（positive）（记为 $E > 0$），如果 E 上存在一个 **Hermite 度量**（Hermitian metric）h 使得 E 上的函数

$$v \mapsto -h(v, v)$$

在零截面以外是严格伪凸的. 当 X 是流形时，正性条件可用度量 h 的曲率表出. 也就是说，从 E 内度量 h 的**曲率形式**（curvature form）对应于 X 上的一个 Hermite 二次型 Ω，它在丛 E 的 Hermite 自同态丛 $\mathrm{Herm}(E)$ 内取值. 正性条件等价于 $\Omega_x(u)$ 是 E_x 上的正定算子，对所有的 $x \in X$ 以及所有非零的 $u \in T_{X,x}$.

当 E 是流形 X 上的复线丛时，正性条件等价于以下矩阵的正定性：

$$\left\| - \frac{\partial^2 \log h}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \right\|,$$

这里 $z_1, \cdots, z_n$ 是 X 里的局部坐标，$h > 0$ 是在丛的局部平凡化之下定义 Hermite 度量的函数. 当 X 紧时，X 上复线丛 E 为正当且仅当**陈（省身）类**（Chern class）$c_1(E)$ 包含型为

$$i \sum_{\alpha, \beta} \varphi_{\alpha,\beta} dz_\alpha d\bar{z}_\beta$$

的闭形式，这里 $\|\varphi_{\alpha\beta}\|$ 是正定 Hermite 矩阵. 特别地，当 X 是 Riemann 曲面时，由 X 上 d 次除子定义的丛是正的，当且仅当 $d > 0$. 当 E 是在维数 > 1 的流形 X 上的秩 > 1 的丛时，也可以考虑正丛的较狭义的类：丛 $E \to X$ 称为在中野意义下正的（positive in the sense of Nakano），如果在 E 上存在 Hermite 度量 h 使得从 $E \otimes T_X$ 上由下式定义的 Hermite 二次型 H 为正定：

$$H_x(v \otimes u) = h_x(v, \Omega_x(u) v),$$

这里 $x \in X$, $v \in E_x$, $u \in T_{X,x}$. 例：射影空间 P^n 的切丛 TP_n 是正的，但对 $n > 1$ 不是在中野意义下正的；由超平面定义的 P^n 上复线丛是正的.

正向量丛的商丛是正的. 如果 E' 和 E'' 是（中野意义下）正丛，则 $E' \oplus E''$ 和 $E' \otimes E''$ 是（中野意义下）正的.

正丛的概念是由于复向量丛的小平消失定理（见**小平定理**（Kodaira theorem））的关系而引入的，然后被推广到任意的丛. 稍后，与到射影空间内的嵌入相联系，又引入了弱正和弱负丛的概念.

紧复空间 X 上的全纯向量从 E 称为弱负的(weakly negative),如果它的零截面在 E 内有严格伪凸邻域,即它是一个**例外解析集**(exceptional analytic set).从 E 称为弱正的(weakly positive),如果它的对偶从 E^* 是弱负的.当 X 是 Riemann 曲面时弱正从的概念和正从的概念是一致的([5]).在一般的情形下正性蕴含弱正性,迄今还没有弱正而不是正丛的例子.

从 $E \to X$ 的弱正性等价于以下性质之一:对 X 上任意的**凝聚解析层**(coherent analytic sheaf) $\mathscr{F}$,存在 $m_0 > 0$ 使得当 $m \geq m_0$ 时 $\mathscr{F} \otimes S^m \mathscr{E}$ 由整体截面生成;对 X 上任意的解析层 $\mathscr{F}$ 存在 $m \geq 0$,使得

$$H^q(X, \mathscr{F} \otimes S^m \mathscr{E}) = 0$$

对所有的 $q \geq 1$([3],[4]).这里的 $\mathscr{E}$ 是指从 E 的全纯截面的芽层.所以弱正层类似于代数几何中的**丰富层**(ample sheaf),有时被称为丰富解析丛(ample analytic bundle).空间 X 上的弱正丛可自然地定义 X 到一个 Grassmann 流形里的嵌入,从而得出到射影空间里的嵌入.

正、负、弱正、弱负丛的概念被自然地推广到复空间 X 上的线性空间的情形(见**解析向量丛**(vector bundle, analytic)).

亦见**负向量丛**(negative vector bundle).

参考文献

[1] Wells, R. O., jr., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980.

[2] Chern, S. S., Complex manifolds without potential theory, Springer, 1979.

[3] Итоги, науки и техники, Алгебра, Топология, Геометрия, т. 15, М., 1977, 93 – 171.

[4] Schneider, M., Familien negativer vektorraumbündel und 1-konvexe Abbildungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **47** (1978), 150 – 170.

[5] Umemura, H., Some results in the theory of vector bundles, *Nagoya Math. J.*, **52** (1973), 97 – 128.

А. Л. Онищик 撰 陈志杰 译

Post 代数[Post algebra; Поста алгебра]

一种代数(P, Ω),其中 P 是一个函数集合,Ω 是等价于具有不同类型限制的复合运算的集合.有限值逻辑,可数值逻辑,非齐次函数逻辑等等都是 Post 代数的实例.事实上 Post 代数理论中遇到的问题与多值逻辑理论中遇到的问题本质上是相同的.

参考文献见**多值逻辑**(many-valued logic).

В. Б. Кудрявцев 撰 卢景波 译 罗里波 校

Post 典范系统[Post canonical system; Поста каноническая система],Post 演算(Post calculus)

字的可数集的一种定义方法(见**可枚举集**(enumerable set)).Post 典范系统概念是 E. Post 于 1943 年引进的,是适用于定义任意可枚举集和不依附于生成对象的逻辑结构及其语义或**推导法则**(derivation rule)的**演算**(calculus)的第一个一般概念.一个 Post 典范系统由一个四元组 A、P、$\mathscr{A}$、π 给出;其中 A 是演算的字母表,P(与 A 无公共元素)是变元字母表,$\mathscr{A}$ 是由 A 中的字构成的表(演算公理),而 π 是形如

$$\frac{\begin{matrix} G_{1,1}p_1 \cdots G_{1,n_1}p_{1,n_1}G_{1,n_1+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ G_{m,1}p_{m,1}\cdots G_{m,n_m}p_{m,n_m}G_{m,n_m+1} \end{matrix}}{G\ p_1 \cdots G_n p_n G_{n+1}} \qquad (*)$$

的推导法则的表($G_{i,j}$ 是 A 中指定的字;p_{ij} 是 P 中指定的字母).一个字 Q 可由字 $Q_1, \cdots, Q_m$ 利用法则(*)得到,如果对于(*)中 P 的任何字母都能在 A 中找到相应的字(称为该字母的值),当把它代入(*)中所有的变元之后,则(*)中线上边的字变为 $Q_1, \cdots, Q_m$,而线下边的字变为 Q.根据对推导法则的如此理解,在 Post 典范系统中定义推演.在演算理论中,A 中可枚举字的集合(enumerable set of word)采用下面与通常定义等价的定义:M 称为可枚举的(enumerable),如果它与某一 Post 典范系统中导出的 A 中的字的集合相同,这个 Post 典范系统的字母表应包含 A(用至少增加一个字母 ξ 来扩充 A 的必要性是不可避免的,然而可以要求,除 M 之外只有形如 ξQ 的字可以导出,其中 Q 是 A 中的字).

可以考虑 Post 典范系统概念的各种特殊形态:1)Post 正规系统(Post normal system)(所有法则形如

$$\left.\frac{Gp}{pG'}\right);$$

2)局部演算(local calculi)(法则形如

$$\left.\frac{p_1 G p_2}{p_1 G' p_2}\right];$$

3)约束演算(restricted calculi)(一个字母的字母表,法则具有一个前提);等.

上面提到的几种特殊形态是假定有一个公理,以及一个任意的 Post 典范系统可以导出它们中的任意一个(Post 典范系统和 **Post 正规系统**(Post normal system)之间的等价是 Post 证明的,对寻找不可解系统有重要意义).

参考文献见**演算**(calculus).

С. Ю. Маслов 撰

【补注】 正则典范系统（regular canonical system）的出现是特别重要的．在一个正则典范系统中每一个推导法则形如"Gp产生$G'p$"，其中 G 和 G' 皆是演算的字母表上的字，p 是一个变元．更详细的内容在[A1]中可以找到．

参考文献

[A1] Salomaa, A. Computation and automata, Cambridge Univ. Press, 1985 卢景波 译 罗里波 校

Post 类[Post class; Поста класс]

逻辑代数（algebra of logic）中一类对复合运算封闭的函数（**Boole 函数**（Boolean function））．E. Post 证明了这种类的集合是可数的并且给出了它们明显的描述．他也指出了它们都是有限生成的，并且他构造了这些类对包含关系所形成的格．上面所说的类的集合全部列出为 $C_i, A_i, D_j, L_k, O_l, S_r, P_r, F_i^{\mu}, F_i^{\infty}$，其中 $i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3$; $k=1, \cdots, 5$, $l=1, \cdots, 9$; $r=1, 3, 5, 6$; $s=1, \cdots, 8$; $\mu=2, 3, \cdots$.

类 C_1 含有逻辑代数的所有函数；C_2 由逻辑代数的所有满足 $f(0, \cdots, 0)=0$ 的函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 组成；C_3 由逻辑代数的所有满足 $f(1, \cdots, 1)=1$ 的函数组成；$C_4=C_2\cap C_3$．类 A_1 由逻辑代数的所有单调函数（见**单调 Boole 函数**（monotone Boolean function））组成；$A_2=C_2\cap A_1$; $A_3=C_3\cap A_1$; $A_4=A_2\cap A_3$．类 D_3 由逻辑代数的所有满足 $f(x_1, \cdots, x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n)$ 的函数组成；$D_1=C_4\cap D_3$; $D_2=A_1\cap D_3$．类 L_1 由逻辑代数的所有满足 $f(x_1, \cdots, x_n)=x_1+\cdots+x_n+d \pmod 2$ ($d\in\{0, 1\}$) 的函数组成；$L_2=C_2\cap L_1$; $L_3=C_3\cap L_1$; $L_4=L_2\cap L_3$; $L_5=D_3\cap L_1$.

类 O_9 由逻辑代数的所有实质上依赖于不超过一个变数的函数所组成；$O_8=A_1\cap O_9$; $O_4=D_3\cap O_9$; $O_5=C_2\cap O_9$; $O_6=C_3\cap O_9$; $O_1=O_5\cap O_6$; O_7 由所有常数函数组成；$O_2=O_5\cap O_7$; $O_3=O_6\cap O_7$.

类 S_6 由逻辑代数的所有满足 $f(x_1, \cdots, x_n)=x_1\vee\cdots\vee x_n$ 以及所有常数函数组成；$S_3=C_2\cap S_6$; $S_5=C_3\cap S_6$; $S_1=S_3\cap S_5$.

类 P_6 由逻辑代数的所有满足 $f(x_1, \cdots, x_n)=x_1\&\cdots\&x_n$ 以及所有常数函数组成；$P_5=C_2\cap P_6$; $P_3=C_3\cap P_6$; $P_1=P_5\cap P_3$.

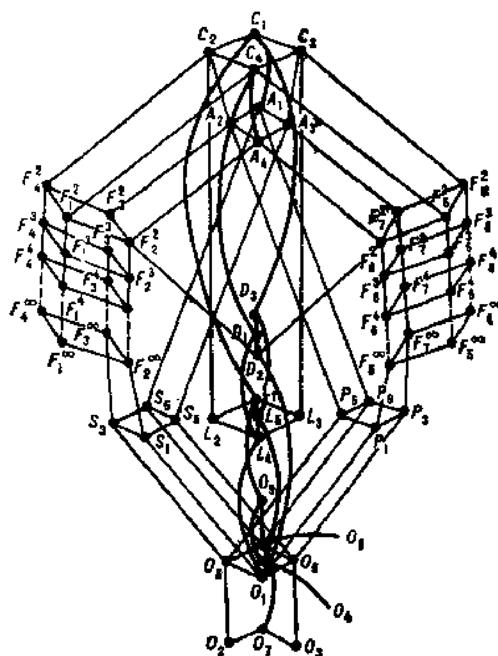
逻辑代数的一个函数满足条件 a^{μ}，如果使该函数值为 0 的 μ 元组中有一个共同的坐标为 0．类似地将 0 换为 1，可以定义条件 A^{μ}.

类 F_4^{μ} 由逻辑代数的所有带有 a^{μ} 性质的函数组成；$F_1^{\mu}=C_4\cap F_4^{\mu}$; $F_3^{\mu}=A_1\cap F_4^{\mu}$; $F_2^{\mu}=F_1^{\mu}\cap F_3^{\mu}$; F_8^{μ} 由逻辑代数的所有带有性质 A^{μ} 的函数组成；$F_5^{\mu}=C_4\cap F_8^{\mu}$; $F_7^{\mu}=A_1\cap F_8^{\mu}$; $F_6^{\mu}=F_5^{\mu}\cap F_7^{\mu}$.

逻辑代数的一个函数满足条件 a^{∞}，如果所有使该函数之值为 0 的元组有一个共同的坐标为 0．类似地将 0 换为 1，可以定义性质 A^{∞}.

类 F_4^{∞} 由逻辑代数的所有带有性质 a^{∞} 的函数组成，$F_1^{\infty}=C_4\cap F_4^{\infty}$, $F_3^{\infty}=A_1\cap F_4^{\infty}$; $F_2^{\infty}=F_1^{\infty}\cap F_3^{\infty}$; F_8^{∞} 由逻辑代数的所有带有性质 A^{∞} 的函数组成；$F_5^{\infty}=C_4\cap F_8^{\infty}$; $F_7^{\infty}=A_1\cap F_8^{\infty}$; $F_6^{\infty}=F_5^{\infty}\cap F_7^{\infty}$.

由这些类对于包含关系所组成的格如图所示．类由点表示．两个点由一个弧线相连，如果在下面的点所代表的类直接包含于在上面的点所代表的类（也就是说，在它们之间再无其他类）．



参考文献

[1] Яблонский, С. В., Гаврилов, Г. П., Кудрявцев, В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966.

В. Б. Кудрявцев 撰 罗里波 译 王世强 校

Post 对应问题[Post correspondence problem; Поста соответствия задача]

【补注】 这是三个基本的不可判定问题之一，另外两个是停机问题和 Hilbert 第十问题．在许多情况下，为证实一个特殊问题的算法不可解性，将该问题归约成 Post 对应问题（[A3]）是最自然的方法．

不可判定性（undecidability）的证明或者是直接的，或者是间接的．间接的证明需要某些参照点：已知的不可判定问题．对于语言理论在这些参照点中最

有用的是 Post 对应问题．例如，当处理上下文无关语言时，用停机问题作为参照点是相当困难的，然而 Post 对应问题却是非常合适的．

Post 对应问题是这样的：对两个均由 n 个字组成的列作出判定，是否在一个列中的某些字的毗联等于另一列中字的对应毗联（corresponding catenation）．此处"对应"是指所用的字在两个列中的位置必须完全相同．例如，如果两个列是

$$(a^2, b^2, ab^2) \text{ 和 } (a^2b, ba, b), \qquad (A1)$$

将这两列中的第 1，2，1，3 个字（依次）毗联起来，则在两列中均得到字 $a^2b^2a^3b^2$．这件事被说成"指标序列 1，2，1，3 是 Post 对应问题的特例（A1）的一个解（solution）"．另一方面，由两列

$$(a^2b, a) \text{ 和 } (a^2, ba^2) \qquad (A2)$$

组成的特例没有解，这能用下面的方法证明．（A2）的一个可能的解必须由指标 1 开始．因为第二列中的字必须"补上"缺少的 b，所以指标 2 必须紧接着．这样就得到字 a^2ba 和 a^2ba^2．因为这两个字中的一个必须是另一个的前缀，所以断定此解中的下一个指标必定是 2，结果得到字 a^2ba^2 和 $a^2ba^2ba^2$．但是因为在第一列中没有哪个字以 b 为开头，所以断定不可能再继续下去了．

态射的概念提供了一个给出 Post 对应问题的形式定义的合适的方法．设 g 和 h 是以字母表 Σ 为定义域和以字母表 Δ 为值域的两个态射．对偶（g，h）被称为是 Post 对应问题的特例（instance of the Post correspondence problem）．使得 $g(w)=h(w)$ 的 Σ 上的字 w 被称为这个特例的解（solution）．

对于有些 Post 对应问题的特例，很容易看出它们是否有解．在上面可看出（A1）有解，而（A2）无解．还有一些特例的类，它们有容易的判定步骤．其中一个是其字母表 Δ 由单个字母组成的特例的类．此时两个列的形式为

$$(a^{i_1}, \cdots, a^{i_n}) \text{ 和 } (a^{j_1}, \cdots, a^{j_n}). \qquad (A3)$$

容易证明（A3）有解，当且仅当存在一个 t 使得 $i_t=j_t$，或者存在 t 和 u 使得 $i_t>j_t$ 和 $i_u<j_u$．

Post 对应问题的可判定性（decidability of the Post correspondence problem）是指一个解决所有特例的算法的存在性．为证明 Post 对应问题的不可判定性，可将它归约到停机问题、或等价的递归可枚举语言的成员问题（见**形式语言和自动机**（formal languages and automata））．

设 Post 对应问题是可判定的并考虑一个任意的具有分别是非终节点和终节点的字母表 Σ_N 和 Σ_T 的，开始字母为 S 的，以及产生式集为 P 的文法 G．进而考虑 Σ_T 上的一个任意的字 w．下面将构造一个 Post 对应问题的特例 PCP 使得 PCP 有解，当且仅当 w 属于 $L(G)$．因为 PCP 的构造是能行的，它给出了一个判定 w 是否属于 $L(G)$ 的方法．

以 a_1、…、a_r 记 $\Sigma_N \cup \Sigma_T = \Sigma_1$ 中的字母，这里 a_1 是开始字母．设

$$\{\alpha_i \to \beta_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

是 G 的产生式集．可以假设字 α_i 和 β_i 皆不为空字．设

$$\Sigma_1' = \{a' : a \in \Sigma_1\},$$

$$\Delta = \Sigma_1 \cup \Sigma_1' \cup \{B, E, \#, \#'\}.$$

（假设字母 B，E，$\#$ 和 $\#'$ 不在被考虑的其他字母表中．直观地，B 标志推导的开始，E 标志推导的结束，而 $\#$ 和 $\#'$ 在推导中是两个相连的字之间的标志．）对任何 Σ_1 上的字 x，设 x' 是用 a_i' 代替在 x 中所有 a_i 所得的 Σ_1' 上的字．

考虑 Post 对应问题的特例 $PCP=(g, h)$．态射 g 和 h 的定义域字母表是

$$\Sigma = \{1, \cdots, 2r+2n+4\},$$

而值域字母表是上面所定义的字母表 Δ．态射本身由下表定义，此处 i 在 1，…，r 上变化而 j 在 1，…，n 上变化．

	1	2	3	4	$4+i$	$4+r+i$	$4+2r+j$	$4+2r+n+j$
g	$Ba_1\#$	$\#'$	$\#$	E	a_i	a_i	β_i	β_j
h	B	$\#$	$\#'$	$\#'wE$	a_i	a_i'	α_j	α_j

因为 PCP 有解，当且仅当 $w \in L(G)$．因此，如果 Post 问题是可判定的，则递归可枚举语言的成员问题也是可判定的．

构造 PCP 的内在思想是模仿根据 G 的推导．此外，g 的推导比 h 的快，因为它由 $Ba_1\#$ 开始，而 h 由 B 开始．w 是推导的最后一个字，当且仅当态射 h 能（由指标 4）到达推导的结束．

例如，设 G 的头三个产生式（依次）是

$$S \to aCD,\ CD \to D,\ D \to d.$$

进一步设 a 和 D 分别是 Σ_1 的第二和第三个字母（注意 $S=a_1$）．考虑字 $w=ad$．显然 w 有下列推导：

$$S \Rightarrow aCD \Rightarrow aD \Rightarrow ad. \qquad (A4)$$

于是，由下面的表构造出 PCP 的一个解

	1	4 + 2r + 1	2	4 + r + 2	4 + 2r + n + 2
g	BS#	a'C'D'	#'	a	D
h	B	S	#	a'	C'D'

	3	4 + 2	4 + 3	2	4 + r + 2	4 + 2r + n + 3	4
g	#	a'	D'	#'	a	d	E
h	#'	a	D	#	a'	D'	#'adE

因此，字

$$1(4+2r+1)2(4+r+2)(4+2r+n+2)$$

$$3(4+2)(4+3)2(4+r+2)(4+2r+n+3)4$$

（为清楚起见，这里已经加了括号）是 *PCP* 的一个解，对于这个字态射 g 和 h 的共同值是：

$$BS\#a'C'D'\#'aD\#a'D'\#'adE \quad (A5)$$

显然，通过下面简单的修改，由（A4）推出（A5）．把 B 和 E 的边界标志加在开头和末尾；符号 ⇒ 由 # 代替；与每第二个 # 一样，第二步都加撇；最后为达到那个对应于（A4）的最后指标的非撇字 ad 加一个（从 aD 到 $a'D'$）"空档"步．

容易看出，类似的论证在一般情况下是有效的：每当 w 属于 $L(G)$，则 *PCP* 有一解（见[4]，那里用详细的归纳方法证明了这个事实）．其反面——即如果 *PCP* 有解，则 w 属于 $L(G)$——的证明则多少有点困难（见[4]）．

如果态射 g 和 h 的值域字母表 Δ 仅由两个字母组成，用简单的编码方法能证明 Post 对应问题仍然是不可判定的．其定义域字母表 Σ 仅由两个字母组成的情况下的可判定性已在[A1]中证明．若 g 或 h 是**周期的**（periodic），也就是说，它的所有值是某单个字母的幂，则特例 (g, h) 组成了另一个非平凡的可判定的子类[A4]．如果 Σ 由 9 个字母组成，则 Post 对应问题仍然是不可判定的．如果 Σ 的基数是在 3 和 8（包括 3 和 8）之间的一个固定的数，其可判定性仍未解决．

Post 对应问题是与在形式语言的表示理论中十分重要的等式集（equality sets）密切相关的．根据定义，g 和 h 的**等式集**由所有使得 $g(w)=h(w)$ 的字 w 组成．显然，一个特例 (g, h) 有一个解，当且仅当这等式集包含一个非空字．

参考文献

[A1] Ehrenfeucht, A., Karhumaki, J., Rozenberg, G., The (generalized) Post corresponding problem with lists consisting of two words is decidable, *Theor. Comp. Sc.*, **21** (1982), 119 – 144.

[A2] Karhumaki, J. and Simon, I., A note on elementary homorphisms and the regularity of equality sets, *EATCS Bull.*, **9** (1979), 16 – 24.

[A3] Post, E., A variant of a recursively unsolvable problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 264 – 268.

[A4] Salomaa, A., Formal languages, Acad. Press, 1987.

G. Rozenberg, A. Salomaa 撰　丁德成 译

Post 格 [Post lattice; Поста решетка]

Post 代数（Post algebra）关于包含的格．

Post 机 [Post machine; Поста машина]

Turing 机（Turing machine）的一种变型．

Post 正规系统 [Post normal system; Поста нормальная система]，正规演算（normal calculus）

Post 典范系统（Post canonical system）的一种重要特殊情况．　С. Ю. Маслов 撰　杜小杨 译

Post 生成系统 [Post production system; Поста система продукций]，Post 正规系统（Post normal system），**Post 正规演算**（Post normal calculus）

Post 典范系统（Post canonical system）的一种特殊情况，其中所有的推演法则都具有形式

$$\frac{Gp}{pG},$$

并且只有一个初始字（所考虑的演算的一个公理）．E. Post（[1]）建立了 Post 生成系统和 Post 典范系统之间的广义的等价性．Post 和 А. А. Марков（1947）用 Post 生成系统构造了一种具有不可解字问题（Thue 问题（Thue problem））的**结合演算**（associative calculus）的最早的一些例子．

参考文献

[1] Post, E. L., Formal reductions of the general combinatorial decision problem, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 2, 197 – 215.

[2] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М., 1954（中译本：А. А. 马尔科夫，算法论，科学出版社，1959 – 1960）.

С. И. Адян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Curry, H. B., Foundations of Mathematical logic, McGraw-Hill, 1963.

沈复兴 译　罗里波 校

Постников 平方 [Postnikov square; Постникова квадрат]

类型为 $0(1, A, 3, B)$ 的上同调运算（cohomology operation），其中 A 和 B 是交换群，A 和 B 之间有一固定的异态射（heteromorphism）$\eta: A \to B$，即，η 满足

$$h(g_1, g_2) = \eta(g_1 + g_2) - \eta(g_1) - \eta(g_2)$$

为双线性且 $\eta(g) = \eta(-g)$．设 $\xi: F \to A$ 为满态射并令 $F = \bigoplus \mathbf{Z}$ 为自由交换群．定义在 1 维上闭链上的 Постников 平方由下式给出：

$$e^1 \to \tilde{\eta}\xi(e_0^1 \cup \delta e_0^1),$$

其中 e_0^1 是系数在 F 中的上链且满足 $\xi e_0^1 = e^1$．Постников 平方的纬垂（suspension）是 **Понтрягин 平方**（Pontryagin square）．当 X 为单连通空间，$A = \pi_2(X)$，$B = \pi_3(X)$，η 是由与 Hopf 映射 $S^3 \to S^2$ 作复合定义时，Постников 平方可用来分类 3 维多面体到 X 中的映射．Постников 平方是由 M．M．Постников（[1]）引进的．

参考文献

[1] Постников，M．M．，《Докл．AH CCCP》，64 (1949)，4，461－462．

А．Ф．Харшиладзе 撰　潘建中 译　沈信耀 校

Постников 系统［**Postnikov system**；**Постникова система**］，自然系统（natural system），同伦分解（homotopic resolution），一般型的 P 分解（P-decomposition of general type）．

一列纤维化

$$\cdots \xrightarrow{p_{n+1}} X_n \xrightarrow{p_n} X_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \xrightarrow{p_1} X_0 = \mathrm{pt},$$

其纤维是 **Eilenberg-MacLane 空间**（Eilenberg-MacLane space）$K(\pi_n, n)$，π_n 是某个群（当 $n > 1$ 时，π_n 是交换群）．它是由 M．M．Постников（[1]）引进的．空间 X_n 称为 Постников 系统$\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$ 的第 n 项（n-th term）或第 n 层（n-th layer）．Постников 系统$\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$称为收敛的（converge）到空间 X，若反向极限 $\lim_{\leftarrow}\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$ 弱同伦等价于 X．此时 X 称为 Постников 系统的极限（limit）．

Постников 系统$\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$到另一个 Постников 系统$\{q_n: Y_n \to Y_{n-1}\}$的态射（morphism）是一连续映射序列 $f_n: X_n \to Y_n$ 使得下图是同伦交换．态射$\{f_n\}$导出映射 $\lim_{\leftarrow} f_n: \lim_{\leftarrow} X_n \to \lim_{\leftarrow} Y_n$，称为它的极限．

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \to & X_n & \xrightarrow{p_n} & X_{n-1} & \to \cdots \to & X_1 \\ & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_1 \\ \cdots \to & Y_n & \xrightarrow[q_n]{} & Y_{n-1} & \to \cdots \to & Y_1 \end{array}$$

Постников 系统的定义蕴涵：对任何 $n \geq 1$，映射 p_n 是 $(n-1)$ 等价（见**同伦型**（homotopy type））．特别，当 $i < n$ 时，$\pi_i(X_{n-1}) \cong \pi_i(X_n)$，$\pi_n(X_n) = \pi_n$，而当 $i > n$ 时，$\pi_i(X_n) = 0$．空间 X 和 X_n 有相同的 $(n+1)$ 型．特别，若 Постников 系统是有限的，即存在某个整数 N 使得对所有 $n > N$，群 π_n 为平凡群，则 X_n 和 X 为同伦等价．在一般情形，当 $i \leq n$ 时，有同构 $H_i(X_n) \cong H_i(X)$ 且 $\pi_i(X_n) \cong \pi_i(X)$，即，当 n 趋向无穷时，同调群和同伦群稳定．当 CW 复形 K 的维数 $\leq n$ 时，集合$[K, X]$ 和 $[K, X_n]$ 一致．纤维化 $p_n: X_n \to X_{n-1}$ 的示性类 $k_n = c(p_n) \in H^{n+1}(X_{n-1}, \{\pi_n\})$，即**基本类**（fundamental class）$l_n \in H^n(K(\pi, n); \pi)$ 在**超渡**（transgression）

$$\tau: H^n(K(\pi, n); \pi) \to H^{n+1}(B; \{\pi\})$$

下的象，称为 Постников 系统或它的极限 X 的第 n 个 k 不变量（n-th k-invariant）或第 n 个 Постников 因子（n-th Postnikov factor）．对任何 $n \geq 1$，Постников 系统的第 n 项，因此 X 的 $(n+1)$ 型，由群 $\pi_1, \cdots, \pi_n$ 以及 k 不变量 $k_1, \cdots, k_{n-1}$ 完全决定．以下的双重序列常常称为 Постников 系统：

$$\{\pi_1, k_1, \cdots, \pi_n, k_n, \cdots\}.$$

空间 X 是一个 Постников 系统$\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$的极限，当且仅当存在 $(n-1)$ 等价 $\rho_n: X \to X_n$ 使得 $\rho_{n-1} \sim p_n \circ \rho_n$，对任何 $n \geq 1$．Постников 系统之间态射的极限可类似地刻画．

还有另一种 Постников 系统，它可能更有用．此时空间 X_n 假设是 CW 复形，并且 $X_{n-1} \subset X_n^n$，$X_{n-1}^{n-1} = X_n^{n-1}$，而映射 $p_n: X_n \to X_{n-1}$ 是胞腔映射（不再是纤维化），使得首先，$p_n|_{X_n^{n-1}} = \mathrm{id}$，其次映射 p_n 的同伦纤维（即将 p_n 变成纤维化后，所得纤维化的纤维）是空间 $K(\pi_n, n)$．这种 Постников 系统称为胞腔式的（cellular）．胞腔式 Постников 系统的极限是 CW 复形，并且对任何 $n \geq 1$，$X^n = X_n^n$．任意 Постников 系统同伦等价于一个胞腔式 Постников 系统．

Постников 系统理论中的基本定理说的是（见[1]，[6]）每个空间 X 是某个唯一（在同构意义下）Постников 系统$\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$的极限．这个 Постников 系统称为空间 X 的 Постников 系统（Postnikov system of the space）．对映射也有相应的基本定理：任何映射 $f: X \to Y$ 是 X 的 Постников 系统$\{p_n: X_n \to X_{n-1}\}$到 Y 的 Постников 系统$\{q_n: Y_n \to Y_{n-1}\}$的某个态射$\{f_n: X_n \to Y_n\}$的极限．这个态射称为映射 f 的 **Постников 系统**（Postnikov system of

the mapping)，也称为映射的同伦分解，一般形式的 P 系统或 Moore-Постников 系统(homotopic resolution，P-system of general type, or the Moore-Postnikov system of the mapping)．当 X 是道路连通时，常值映射 $c: X \to \mathrm{pt}$ 的 Постников 系统与空间 X 的 Постников 系统相同．

应用中广泛使用的是所谓标准 Постников 系统(standard Postnikov system)，常常就称为 Постников 系统．这些系统中的纤维化 $p_n: X_n \to X_{n-1}$ 是主纤维化．并且 p_n 是从标准的 Serre 纤维化 $K(\pi_n, n) \to EK(\pi_n, n+1) \to K(\pi_n, n+1)$ 用 Постников 因子 $k_n \in H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n)$ 对应的映射 $k_n: X_{n-1} \to K(\pi_n, n+1)$ 诱导出的(由于上同调群的表示为 $H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n) \cong [X_{n-1}, K(\pi_n, n+1)]$，$H^{n+1}(X_{n-1}; \pi_n)$ 中的 k_n 唯一地对应于一个映射 $X_{n-1} \to K(\pi_n, n+1)$)．所有在每个维数均为同伦简单的空间(用[2]中的术语是 Abel 空间)而且只有这些有标准 Постников 系统(见[3]，[4])．

标准 Постников 系统用来解决扩张和提升问题，代数拓扑学中大量问题可以归结为同伦扩张和提升问题．这些问题可统一表述为：设给了空间和映射的(同伦)交换图表，

$$\begin{array}{ccc} A & \to & Y \\ i\downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ X & \to & B \end{array}$$

其中 i 是闭余纤维化，其余纤维为 X/A，p 是纤维化，其纤维为 F．问题为：是否存在映射 $X \to Y$ 使得所得的两个三角形是(同伦)交换的．

更进一步，若这样一个映射确实存在，那么还要确定映射 $X \to Y$"在 A 下"(即，相对于 A)及"在 B 上"的同伦类的集合 $[X, Y]_B^A$．设对纤维化 $p: Y \to B$，存在标准 Постников 系统 $\{p_n: Y_n \to Y_{n-1}, Y_n = B\}$(为此，只需 Y 和 B 都是单连通的)．相对提升问题可以一步一步地解决．

考虑映射 $f_{n-1}: X \to Y_{n-1}$ 从 Постников 系统的第 $(n-1)$ 项到第 n 项的相对提升这样一个"初等"问题：

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{g_{n-1}} & Y_n & \to & EK[\pi_n(F), n+1] \\ i\downarrow & & \downarrow p_n & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f_{n-1}]{} & Y_{n-1} & \xrightarrow[k_n]{} & K[\pi_n(F), n+1] \end{array}$$

映射 f_{n-1} 和 g_{n-1} 定义一个映射 $X/A \to K(\pi_n(F), n+1)$，即，一个上同调类 $c^{n+1} \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(F))$，称为阻碍(obstruction)．映射 f_{n-1} 可提升到 Y_n，当且仅当 $c^{n+1} = 0$．两个提升 f_n 和 f_n' 决定了一个元素 $d^n \in H^n(X, A; \pi_n(F))$，称为差异(difference)，它为零，当且仅当提升 f_n' 和 f_n 同伦．

因此，若所有相继地发生的阻碍 c^{n+1} 皆为零，则相对提升问题就解决了(比如，$H^{n+1}(X, A; \pi_n(F)) = 0$)．提升唯一，若所有相继地发生的差异 d^n 皆为零(比如，若 $H^n(X, A; \pi_n(F)) = 0$)．在余纤维化是 CW 复形的嵌入时，阻碍 c^{n+1} 和差异 d^n 与通常的"胞腔式"的**阻碍**(obstruction)和差异相同(见**差异上链**(difference cochain)和**链**(chain))．

当 X 是同调群为有限生成的单连通空间时，可以有效地算出 Постников 系统([5])，因此也可以有效地计算出 X 的同伦型．然而，实际上，对大多数空间，只能成功地计算出 Постников 系统的最初几项，因为再往下作计算的复杂性迅速增加．计算时使用的工具为**上同调运算**(cohomology operation)．

Постников 系统的对偶是空间 X 的 Cartan-Serre 系统(Cartan-Serre system)

$$\cdots \to X_n^{CS} \to X_{n-1}^{CS} \to \cdots \to X_{k-1}^{CS} = X,$$

其中的映射是纤维为 Eilenberg-MacLane 空间 $K(\pi_n(X), n-1)$ 的纤维化．空间 X_n^{CS} 是 X 的第 $(n+1)$ 个消灭空间(killing space)．Cartan-Serre 系统中的 X_n^{CS} 是 X 的 Постников 系统的 $(n-1)$ 等价 $\rho_n: X \to X_n$ 的同伦纤维．Постников 系统中的 X_n 是 $X_n^{CS} \to X$ 的纤维上的闭路空间．

分裂 Постников 系统(split Postnikov system)是一列主纤维化

$$\cdots \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 \rightleftarrows \mathrm{pt},$$

其纤维是 Eilenberg-MacLane 空间 $K(\pi_n, s_n)$，$s_n \leqslant s_{n+1}$．分裂 Постников 系统是研究所谓幂零空间，特别是它们的局部化(见**范畴中的局部化**(localization in categories)，[2]，[6]，[7])问题的主要工具．也还有其他类型的 Постников 系统存在(见[6])．

参考文献

[1] Постников, М. М., Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений, ч. 1－2, М., 1955(中译本：M. M. 扑斯尼可夫，连续映射的同伦理论，科学出版社，1958)．

[2] Постников, М. М., 《Успехи матем. наук》, **32** (1977), 6, 117－181．

[3] Mosher, R. and Tengora, M., Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968, Chapt. 13．

[4] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966(中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987)．

[5] Brown, E. H., Finite computability of Postnikov complexes, *Ann. of Math.* (2), 65 (1957), 1–20.

[6] Baues, H. J., Obstruction theory of homotopy classification of maps, Springer, 1977

[7] Hilton, P., Mislin, G. and Roitberg, J., Localization of nilpotent groups and spaces, North-Holland, 1975.

С. Н. Малыгин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Whitehead, G. W., Elements of homotopy theory, Springer, 1978, Chapt. Ⅸ.

[A2] Gray, B., Homotopy theory, Acad. Press, 1975, Chapt. 17.

潘建中 译 沈信耀 校

位势 [**potential**; **потенциал**]，位势函数 (potential function)

向量场 (vector field) 的一种特征.

标量位势 (scalar potential) 是一标量函数 $v(M)$，使得在向量场 $\mathbf{a}$ 的定义域的每点有 $\mathbf{a}(M)=\operatorname{grad} v(M)$ (有时，如在物理中，它的负值称为位势). 若这样的函数存在，则向量场称为**位势场** (potential field).

向量位势 (vector potential) 是一向量函数 $\mathbf{A}(M)$，使得在向量场 $\mathbf{a}$ 的定义域的每点有 $\mathbf{a}(M)=\operatorname{curl}\mathbf{A}(M)$ (见**旋度** (curl)). 若这样的向量函数存在，则向量场 $\mathbf{a}$ 称为**螺线场** (solenoidal field).

根据生成位势的质量或电荷的分布，可以把位势称为点电荷的位势、曲面位势 (单层或双层)、体积位势，等等 (见**位势论** (potential theory)).

А. Б. Иванов 撰

【补注】

也见**双层位势** (double-layer potential); **对数位势** (logarithmic potential); **多极位势** (multi-pole potential); **Newton 位势** (Newton potential); **非线性位势** (non-linear potential); **Riesz 位势** (Riesz potential).

使用向量位势只限于三维向量场. 在这种情况下，可证明所谓的 Clebsch 引理 (Clebsch lemma)，根据这个引理，任何向量场可表达为位势场与螺线场之和，$\mathbf{a}=\operatorname{grad} v+\operatorname{curl}\mathbf{A}$.

沈一兵 译

位势场 [**potential field**; **потенциальное поле**]，梯度场 (gradient field)

由多变量 $t=(t^1,\cdots,t^n)$ 的标量函数 f 的梯度所生成的向量场. 这里 t 属于 n 维空间的某个区域 T. 函数 f 称为这个场的标量位势 (scalar potential) (位势函数 (potential function)). 位势场在 T 上是完全可积的: **Pfaff 方程** (Pfaffian equation) $(\operatorname{grad} f(t), dt)=0$ 具有位势 f 的等高线 ($n=2$) 或等高面 ($n\geqslant 3$) 作为其 $(n-1)$ 维积分流形. 任何在 T 上完全可积的正则共变场 $v=(v_1,\cdots,v_n)$ 可由位势场乘以一标量而得:

$$v_\alpha(t)=c(t)\frac{\partial f}{\partial t^\alpha},\quad 1\leqslant\alpha\leqslant n.$$

标量 $1/c(t)$ 称为 Pfaff 方程 $(v(t),dt)=0$ 的积分因子. 下列方程可用来检测其变场 $v_\alpha(t)$ 是否为一位势 ($c(t)=1$) 的梯度:

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t^\beta}=\frac{\partial v_\beta}{\partial t^\alpha},\quad 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n,$$

它们表明场 $v(t)$ 是无旋的 (见**旋度** (curl)).

位势场的概念被广泛应用于力学和物理学. 大多数力场和电场都能考虑作位势场. 例如，若 $f(t)$ 是充满区域 T 的理想流体在点 t 的压力，则向量场 $F=-\operatorname{grad} f\cdot d\omega$ 就等于作用在体积元 $d\omega$ 上的平衡压力. 若 $f(t)$ 是受热物体 T 在点 t 的温度，则向量场 $F=-k\cdot\operatorname{grad} f$，其中 k 是热传导系数，等于在物体较少受热部分的方向 (与等温曲面 $f=$ 常数. 正交的方向) 的热流密度.

Л. П. Купцов 撰

【补注】

在以上论述中，向量场 $(v_1,\cdots,v_n)$ 的完全可积性意味着 Pfaff 方程 $v_1dt^1+\cdots+v_ndt^n=0$ 定义了一个**对合分布** (involutive distribution)，即一个可积的分布. 对于某个位势 f 使 $v_i=\partial f/\partial t^i$ 的微分 $v_1dt^1+\cdots+v_ndt^n$ 称为全微分 (total differential)，而对应的函数 f 有时称为完全积分 (complete integral). 特别是，对于 $n=2$，$v_1dt^1+v_2dt^2=0$ 称为恰当微分方程 (exact differential equation).

参考文献

[A1] Triebel, H., Analysis and mathematical physics, Reidel, 1986, Sect. 10.1.4.

[A2] Zauderer, E., Partial differential equations, Wiley-Interscience, 1989, p. 92.

[A3] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969, Sects. 12.3, 14.7.

沈一兵 译

位势网 [**potential net**; **потенциальная сеть**]，Егоров 网 (Egorov net)

Euclid 空间中二维曲面上的**正交网** (orthogonal net)，它被该曲面上一流体的位势运动映到自身. 在位势网的参数下，该曲面的线素具有如下形状:

$$d\sigma^2=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,du^2+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\,dv^2,$$

其中 $\Phi=\Phi(u,v)$ 是流体速率场的位势. 每个正交半测地网是位势网. 位势网的一个特例是 **Liouville 网** (Liouville net). Д. Ф. Егоров 最先 (1901) 考虑了位势网.

参考文献

[1] Егоров, Д. Ф., Работы по дифференциальной гео-

метрии, М., 1970.

[2] Шуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев 撰 沈一兵 译

质量分布的位势 [**potential of a mass distribution**; **объемный потенциал**]

形如

$$u(x) = \int_D h(|x-y|)f(y)dv(y), \qquad (*)$$

的表达式, 其中 D 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^N (N \geqslant 2)$ 的有界区域, 其边界是闭 Ляпунов 曲面 S (曲线, 当 $N = 2$ 时, 见 **Ляпунов 曲面和曲线** (Lyapunov surfaces and curves)), $h(|x-y|)$ 是 Laplace 算子的基本解 (fundamental solution of the Laplace operator):

$$h(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{(N-2)\omega_N |x-y|^{N-2}}, & N \geqslant 3; \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & N = 2; \end{cases}$$

其中 $\omega_N = 2\pi^{N/2} / \Gamma(N/2)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 单位球面的面积, $|x-y|$ 是点 x 和 y 之间的距离, 而 $dv(y)$ 是 D 的体积元.

如果 $f \in C^{(1)}(\bar{D})$, 那么对所有 $x \in \mathbf{R}^N$, 位势有定义且 $u \in C^{(1)}(\mathbf{R}^N)$. 在余区域 $\bar{D}^c$, 函数 u 具有各阶导数, 且满足 **Laplace 方程** (Laplace equation): $\Delta u = 0$, 即 u 是一个**调和函数** (harmonic function); 当 $N \geqslant 3$ 时, 这个函数在无穷远点是正则的, $u(\infty) = 0$. 在 D 中, 位势 u 属于 $C^{(2)}(D)$ 类且满足 **Poisson 方程** (Poisson equation): $\Delta u = -f$.

这些性质可用各种方式推广. 例如, 若 $f \in L_\infty(D)$, 则 $u \in C(\mathbf{R}^N)$, $u \in C^\infty(\bar{D}^c)$, 在 $\bar{D}^c$ 中 $\Delta u = 0$, 在 D 中 u 有广义二阶导数且几乎处处满足 Poisson 方程 $\Delta u = -f$. 对于集中在 N 维区域 D 上的任意 **Radon 测度** (Radon measure) μ 的位势:

$$u(x) = \int h(|x-y|)d\mu(y),$$

其性质也已得到研究. 这时也有 $u \in C^\infty(\bar{D}^c)$, 在 $\bar{D}^c$ 中 $\Delta u = 0$, 在 D 中几乎处处有 $\Delta u = -\mu'$, 这里 μ' 是 μ 关于 $\mathbf{R}^N$ 的 Lebesgue 测度的导数. 在定义 (*) 中的 Laplace 算子的基本解可以用具有 $C^{(0,\lambda)}(\bar{D})$ 类变系数的一般二阶椭圆算子 L 的任意 Levi 函数 (见[2]) 来代替, 那么用 Lu 代替 Δu 后, 上述所列的性质仍成立 (见[2]-[4]).

质量分布的位势可应用于解椭圆型偏微分方程的边值问题 (见[2]-[5]).

在解抛物型偏微分方程的边值问题时, 形如下式的热位势 (heat potential) 概念被采用:

$$v(x,t) = \int_0^t d\tau \int_D G(x,t;y,\tau)f(y,\tau)dv(y),$$

其中 $G(x,t;y,\tau)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中热 (传导) 方程的基本解:

$$G(x,t;y,\tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N (t-\tau)^{N/2}} \exp^{-|x-y|^2/4(t-\tau)},$$

而 $f(y,\tau)$ 是密度. 函数 $v(x,t)$ 及其在任意二阶抛物型偏微分方程的推广具有类似于上述对 u 所罗列的性质 (见[3]-[6]).

参考文献

[1] Günter, N. M., Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics, F. Ungar, 1967 (译自法文).

[2] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文).

[3] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977 (中译本: A. H. 吉洪诺夫, A. A. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1956).

[4] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 5 изд, т. 4, М., 1958 (中译本: B. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 人民教育出版社, 1958).

[5] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本: A. 弗里德曼, 抛物型偏微分方程, 科学出版社, 1984)

[6] Бицадзе, А. В., Краевые задача для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966 (英译本: Bitsadze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968)

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 线性偏微分方程的 Levi 函数 (Levi function) 也称为方程的**基本解** (fundamental solution) 或者方程的拟基本解 (parametrix). 这个函数用 Levi 的名字命名, 因为它最早是由 E. E. Levi 在[A1]、[A2] 开始研究的, 现已成了通称的**拟基本解方法** (parametrix method).

亦见**位势论** (potential theory); **对数位势** (logarithmic potential); **Newton 位势** (Newton potential); **非线性位势** (non-linear potential); **Riesz 位势** (Riesz potential); **Bessel 位势** (Bessel potential).

参考文献

[A1] Levi, E. E., Sulle equazioni lineari alle derivate parziali totalmente ellittiche, *Rend. R. Acc. Lincei, Classe Sci.* (V), **16** (1907), 932-938.

[A2] Levi, E. E., Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **24** (1907), 275-317.

[A3] Kellogg, O. D., Foundations of potential theory,

F. Ungar, 1929. Re-issue Springer, 1967.

高琪仁 吴驯圻 译

位势算子 [potential operator; потенциальный оператор]

Banach 空间(Banach space) X 到其对偶空间 X^* 中的一个映射 A，且是某个泛函 $f \in X^*$ 的梯度，即使得

$$\langle Ax, h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

例如，定义在 Hilbert 空间 H 上的任一有界**自伴算子**(self-adjoint operator) A 是位势算子：

$$Ax = \text{grad}\left\{\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle\right\}, \quad x \in H.$$

参考文献

[1] Вайнберг, М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972 (英译本: Vainberg, M. M., Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, Wiley, 1973).

[2] Gajewski, H., Gröger, K. and Zacharias, K., Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Akad. Verlag, 1974.

В. И. Соболев 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

位势论 [potential theory; потенциала теория]

最初研究的是与遵从万有引力定律的力有关的性质. I. Newton(1687)(见 **Newton 力学定律**(Newton laws of mechanics))只对两个很小的物质微粒或者两个质点的相互吸引力阐述这个定律. 这种力与两个微粒的质量的乘积成正比，与它们之间的距离的平方成反比. 这样，依天体力学与测地学的观点，首要的问题是研究一个质点受到一个有限的、光滑的物体——一个球体，特别是椭球体(因许多天体具这种形状)——作用的吸引力. 在 Newton 和其他人取得先期的部分成果之后，J. L. Lagrange(1773)，A. Legendre(1784－1794)及 P. Laplace(1782－1799)所做的研究尤其重要. Lagrange 创立引力场，现在称为**位势场**(potential field)并引进一个后来被 G. Green(1828)称为位势函数的函数，而后 C. F. Gauss(1840)直接称之为**位势**(potential). 目前这些最初时期的成果被编在经典天体力学课程中(亦见[2]).

Gauss 与他的同代人发现，位势的方法(见**位势方法**(potentials, method of))不仅可以用来解引力理论的问题，而且，一般地可用以解很广泛的一类数学物理问题，特别是静电学与磁学中的问题. 就这点而论，不但对物理中真实的与正质量之间的相互吸引力有关的问题，而且对具有任意符号的"质量"或者电荷都可以考虑位势. 主要的边值问题得到了定义，例如，**Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)，**Neumann 问题**(Neumann problem)、导体上静电荷分布的静电问题或者 **Robin 问题**(Robin problem)与扫除质量的问题(见**扫除法**(balayage method)). 为解上述问题，在区域具有充分光滑的边界的情况下，某些类型的位势是很有用的. 这就是特殊类型的含参积分，如质量分布的体位势，单层与双层位势，对数位势，Green 位势等等. А. М. Ляпунов 与 В. А. Стеклов 于19世纪末获得的成果对于创立解主要边值问题的强有力的方法起根本性作用. 在位势论中，研究涉及各种位势的性质已具有独立的意义.

在 20 世纪的前半世纪，**Radon 测度**(Radon measure)、**容量**(capacity)以及广义函数等一般概念作为基础，极大地推动了位势论的各主要问题的推广以及此前已有的阐述形式的完善化. 现代位势论的发展是与解析函数、调和函数与次调和函数理论以及概率论密切关联的.

在更深入地开展经典的边界问题以及逆问题(见**位势论中的反问题**(potential theory, inverse problems in))的研究同时，现阶段位势论发展的特征是：应用拓扑学与泛函分析的方法与概念，以及利用抽象的公理方法(见**抽象位势论**(potential theory, abstract)).

位势的主要种类及其性质. 设 S 是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n > 2)$ 中的光滑闭曲面，即没有边界的 $n-1$ 维光滑流形，它界定一个有界区域 $G = G^+$，$\partial G = S$. 令 $G^- = \mathbf{R}^n \setminus (G^+ \cup S)$ 为外部的无界区域. 设

$$E(x, y) = E(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n(n-2)} \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & n = 2, \end{cases}$$

是 $\mathbf{R}^n$ 中 **Laplace 方程**(Laplace equation) $\Delta u \equiv \sum_{k=1}^n \partial^2 u / \partial x_k^2 = 0$ 的主要**基本解**(fundamental solution)，其中

$$|x - y| = \left[\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2\right]^{1/2}$$

是 $\mathbf{R}^n$ 中两点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 与 $y = (y_1, \cdots, y_n)$ 之间的距离，$\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面的面积，Γ 为 Γ 函数. 以下三个以 x 为参数的积分

$$\left.\begin{aligned} Z(x) &= \int_G \rho(y) E(x, y) dy, \\ V(x) &= \int_S \mu(y) E(x, y) dS(y), \\ W(x) &= \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x, y) dS(y), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(其中 n_y 是 S 在点 $y\in S$（关于 G^+）的外法线方向）分别称为体积位势（volume potential），单层位势（single-layer potential）与双层位势（double-layer potential）. 函数 $\rho(y)$, $\mu(y)$ 与 $\nu(y)$ 分别称为相应位势的密度（densities）；下面假定它们分别在 G 或 S 上是绝对可积的. 对于 $n=3$（有时对 $n\geqslant 3$），(1) 中的三个积分分别称为 Newton 体积位势（Newton volume potential），Newton 单层位势（Newton single-layer potential）与 Newton 双层位势（Newton double-layer potential）；当 $n=2$ 时，它们分别称为对数质量位势（logarithmic mass potential），单层位势（single-layer potential）与双层位势（double-layer potentials）. 设 ρ 是 $C^1(G\cup S)$ 类的. 则体积位势（见 **Newton 位势**（Newton potential））和它的一阶导数在 $\mathbf{R}^n$ 是处处连续的；而且，可以用积分号下求微分来计算之，即 $Z\in C^1(\mathbf{R}^n)$. 进一步，

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{Z(x)}{E(x,0)}=M,\ M=\int_G\rho(y)dy.$$

其二阶导数在 S 的外部是处处连续的，但是当穿过曲面 S 时有间断性；而且，Z 在 G^+ 里满足 **Poisson 方程**（Poisson equation）$-\Delta Z=\rho(x)$, $x\in G^+$，而在 G^- 里满足 Laplace 方程 $\Delta Z=0$, $x\in G^-$. 上述性质刻画了体位势的特征.

如果 G_1 是 $\mathbf{R}^n$ 的有界区域且具有 C^1 类边界 $S_1=\partial G_1$，则体积位势的 Gauss 公式（Gauss formula for a volume potential）成立：

$$\int_{S_1}\frac{\partial Z}{\partial n_x}dS_1(x)=-\int_{G\cap G_1}\rho(y)dy.$$

设 $\mu\in C^1(S)$. **单层位势**（simple-layer potential）$V(x)$ 当 $x\notin S$ 时是调和函数；而且

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{V(x)}{E(x,0)}=M,\ M=\int_S\mu(y)dS(y);$$

特别，当 $n\geqslant 3$ 时，$\lim_{|x|\to\infty}V(x)=0$；但当 $n=2$ 时，$\lim_{|x|\to\infty}V(x)=0$，当且仅当 $\int_S\mu(y)dS(y)=0$. 单层位势在 $\mathbf{R}^n$ 上处处连续，即 $V\in C(\mathbf{R}^n)$，而且 $V(x)$ 与它的切向导数在通过 S 时是连续的. 单层位势的法向导数在通过曲面 S 时有间断性：

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n_x}\right]^+=\frac{1}{2}\mu(x)+\frac{\partial V(x)}{\partial n_x},$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n_x}\right]^-=-\frac{1}{2}\mu(x)+\frac{\partial V(x)}{\partial n_x},\ x\in S,$$

其中 $(\partial V/\partial n_x)^+$ 与 $(\partial V/\partial n_x)^-$ 分别是法向导数从 G^+ 与 G^- 取的极限值，即

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n_x}\right]^+=\lim_{\substack{x'\to x\\ x\in G^+}}\frac{\partial V(x')}{\partial n_x},$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n_x}\right]^-=\lim_{\substack{x'\to x\\ x\in G^-}}\frac{\partial V(x')}{\partial n_x},$$

$\partial V(x)/\partial n_x$ 表示在曲面 S 上计算的所谓单层位势法向导数的直接值（direct value of the normal derivative of a single-layer potential），即

$$\frac{\partial V(x)}{\partial n_x}=\int_S\mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)dS(y),\ x\in S.$$

它是点 $x\in S$ 的连续函数，而核 $\partial E(x,y)/\partial n_x$ 在 S 上具有弱奇性，

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_x}E(x,y)\right|\leqslant\frac{\text{常数}}{|x-y|^{n-2}},\ x,y\in S.$$

这些性质刻画了单层位势的特征.

设 $\nu\in C^1(S)$. **双层位势**（double-layer potential）$W(x)$ 在 $x\notin S$ 是调和函数；而且

$$\lim_{|x|\to\infty}\omega_n|x|^{n-1}W(x)=M,\ M=\int_S\nu(y)dS(y).$$

当通过曲面 S 时，双层位势有间断性（这正是它的名称的由来）：

$$W^+(x)=-\frac{1}{2}\nu(x)+W(x),$$

$$W^-(x)=\frac{1}{2}\nu(x)+W(x),\ x\in S.$$

其中 $W^+(x)$ 与 $W^-(x)$ 分别是双层位势从 G^+ 与 G^- 取的极限值，即

$$W^+(x)=\lim_{\substack{x'\to x\\ x'\in G^+}}W(x'),\ W^-(x)=\lim_{\substack{x'\to x\\ x'\in G^-}}W(x').$$

当 $x\in S$ 时 $W(x)$ 表示所谓在曲面 S 上计算的双层位势的直接值（direct value of the double-layer potential），即

$$W(x)=\int_S\nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)dS(y),\ x\in S.$$

它是点 $x\in S$ 的连续函数，而核 $\partial E(x,y)/\partial n_y$ 在 S 上具有弱奇性，

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)\right|\leqslant\frac{\text{常数}}{|x-y|^{n-2}},\ x,y\in S.$$

双层位势的切向导数当通过曲面 S 时也有间断性，但是法向导数 $\partial W(x)/\partial n_x$ 在通过 S 时保持它的值：

$$\left[\frac{\partial W}{\partial n_x}\right]^+=\left[\frac{\partial W}{\partial n_x}\right]^-,\ x\in S.$$

这些性质刻画双层位势的特征.

在常数密度 $\nu=1$ 的情况下，关于双层位势的

Gauss 公式 (Gauss formula for a double-layer potential) 成立:

$$-\int_S \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,y)dS(y) = q(x) = \begin{cases} 1, & x \in G^-, \\ \frac{1}{2}, & x \in S, \\ 0, & x \in G^- \end{cases}$$

该等式左边的积分(当除以 $\omega_n(n-2)$ 时)可理解为从点 x 看曲面 S 的立体角.

下面在对密度及曲面 S 作较弱的限制的情况下给出位势的性质.

如果 $\rho \in L_1(G)$, 则 $Z(x)$ 关于 $x \in G$ 是调和函数而 $Z(x)$ 在 G^+ 是可和的. 如果 $\rho \in L_p$, $1 \leqslant p \leqslant n/2$, 则 $Z \in L_q(\mathbf{R}^n)$,其中 $1/p + 1/q = 1$, $1 < q < np/(n-2p)$; 如果 $\rho \in L_p(G)$, $p > n/2$, 则 $Z \in C(\mathbf{R}^n)$. 如果 $\rho \in L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant n$, 则 $Z \in W_q^1(\mathbf{R}^n)$, $1 < q < np/(n-p)$; 如果 $\rho \in L_p(G)$, $p > n$, 则 $Z \in C^1(\mathbf{R}^n)$. 如果 $\rho \in L_2(G)$, 则 $Z(x)$ 的广义二阶导数存在, 它们也是 $L_2(G)$ 类且可用奇异积分表示:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{n}\delta_{ij}\rho(x) + \int_G \rho(y)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}E(x,y)dy,$$

$$i,j = 1,\cdots,n,$$

其中, 当 $i = j$ 时 $\delta_{ij} = 1$, 当 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$; 如果 $\rho \in L_p(G)$, $1 < p < \infty$, 则所有广义导数 $\partial^2 Z/\partial x_i \partial x_j$ 也存在且属于 $L_p(\mathbf{R}^n)$. 如果 $\rho \in L_p(G)$, $1 \leqslant p < +\infty$, 则 $Z(x)$ 是 Poisson 方程 $-\Delta Z = \rho(x)$ $(x \in G)$ 的广义解. 如果 $\rho \in C^{(0,\alpha)}(G)$ 且 $S \in C^{(1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, 则在 G^+ 或 G^- 里有 $Z \in C^{(2,\alpha)}$. 如果 $\rho \in C^{(l,\alpha)}(G)$ 且 $S \in C^{(k+1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k 为整数, $0 \leqslant l \leqslant k$, 则 $Z \in C^{(l+2,\alpha)}(G^+)$.

设 $S \in C^{(1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, 又设 $\bar{D}$ 是有界闭区域使得 $G^+ \cup S \subset D \subset \bar{D} \subset \mathbf{R}^n$. 如果 $\mu \in L_p(S)$, $p = 1,2$, 则 $V \in L_p(\bar{D})$, $V \in L_p(S)$, $\partial V/\partial x_i \in L_p(\bar{D})$, $p = 1,2$; $i = 1,\cdots,n$. 如果该密度是有界且可和的,则

$$V \in C^{(0,\lambda)}, \text{ 对所有 } \lambda \in (0,1).$$

如果 $\mu \in C^{(0,\alpha)}(S)$, $0 < \alpha < 1$, 则在 G^+ 或 G^- 里有 $V \in C^{(1,\alpha)}$. 如果 $\nu \in C^{(0,\alpha)}(S)$, 则在 G^+ 或 G^- 里有 $W \in C^{(0,\alpha)}$.

如果 $\mu \in C^{(l,\alpha)}(S)$ 且 $S \in C^{(k+1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k 是整数, $0 \leqslant l \leqslant k$, 则在 G^+ 或 G^- 里, $V \in C^{(l+1,\alpha)}$. 如果 $\nu \in C^{(l,\alpha)}(S)$ 且 $S \in C^{(k+1,\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, l, k 是整数, $0 \leqslant l \leqslant k+1$, 则 $W \in C^{(l,\alpha)}$ 在 G^+ 或 G^- 里成立.

对于位势及其导数在 S 上的连续延拓, 上面所描述的光滑性的性质在密度与曲面 S 具备相应的光滑性条件时也成立.

利用位势表示函数与位势论中主要边值问题的解. 设 $\Phi(x)$ 是 $C^2(G \cup S)$ 类函数而 S 为 C^2 类光滑曲面. 则下面积分恒等式 (Green 公式 (Green formula)) 成立:

$$-\int_G \Delta\Phi(y)E(x,y)dy + \int_S \left[\frac{\partial\Phi(y)}{\partial n_y}E(x,y) - \Phi(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\right]dS(y) = q(x)\Phi(x). \tag{2}$$

特别, 函数 $\Phi(x)$ 在 G 里可以表示成体位势以及单及双层位势之和, 其密度分别为

$$\rho(y) = -\Delta\Phi(y),\ \mu(y) = \frac{\partial\Phi(y)}{\partial n_y},$$

$$\nu(y) = -\Phi(y).$$

对于一个在 G 内调和的、$C^1(G \cup S)$ 类函数 $u(x)$, 下面恒等式成立:

$$\int_S \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}E(x,y) - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_y}\right]dS(y) = q(x)u(x). \tag{3}$$

因此, 这种函数 $u(x)$ 在 G 里可以表示成分别以 $\mu(y) = \partial u(y)/\partial n_y$ 与 $\nu(y) = -u(y)$ 为密度的单层位势与双层位势之和. 然而, 式 (3) 中的密度不能在 S 上任意给出, 它们与由 (3) 式关于 $x \in G^-$ 得到的积分关系相关联.

区域 G^+ (内部问题) 与 G^- (外部问题) 的 Dirichlet 和 Neumann 边值问题 (也称为第一与第二边值问题 (亦见 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem); **Neumann 问题** (Neumann problem)) 是位势论的中心内容, 在充分光滑性的假定下, 它们可以归结成位势论的积分方程 (integral equations of potential theory) 加以彻底研究.

内部 Dirichlet 问题 (interior Dirichlet problem): 对 $S \in C^{(1,\alpha)}$ $(0 < \alpha < 1)$ 求一个 $C(G^+ \cup S)$ 类的函数 $u(x)$, 使它在 G^+ 调和且满足边界条件 $u(x) = \varphi^+(x)$, $x \in S$, 这里 $\varphi^+(x)$ 是一在 S 上给定的连续函数. 这个问题的解总存在且唯一, 并可以表成双层位势的形式:

$$u(x) = \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)dS(y),$$

其中密度 ν 为第二类 Fredholm 积分方程

$$-\frac{1}{2}\nu(x) + \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)dS(y) =$$

$$= \varphi^{+}(x),\ x \in S.$$

的唯一解．

内部 Neumann 问题（interior Neumann problem）：求一个 $C^1(G^+ \cup S)$ 类函数 $u(x)$（其中 $S \in C^{(1,\alpha)}$、$0 < \alpha < 1$），使得 u 在 G^+ 调和且满足边界条件 $\partial u(x)/\partial n_x = \psi^+(x),\ x \in S$．这里 $\psi^+(x)$ 是在 S 上给定的一个连续函数．这个问题的解存在的充要条件是，函数 $\psi^+(x)$ 满足正交性条件：

$$\int_S \psi^+(x) dS(x) = 0. \tag{4}$$

所得到的解形如 $u(x) = V(x) + C$，带有一个附加的任意常数 C，这里

$$V(x) = \int_S \mu(y) E(x,y) dS(y)$$

是单层位势，其密度 μ 可从下面的第二类 Fredholm 积分方程求得：

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} E(x,y) dS(y) =$$

$$= \psi^+(x),\ x \in S. \tag{5}$$

其对应的连续的齐次方程有一个非平凡解 $\mu_0(x)$，而非齐次的方程（5）在条件（4）之下是可解的，而且其通解形如 $\mu(x) + c\mu_0(x)$，其中 c 是任意常数．

外部 Dirichlet 问题（exterior Dirichlet problem）：求一个 $C(G^- \cup S)$ 类的函数 $u(x)$（其中 $S \in C^{(1,\alpha)}$、$0 < \alpha < 1$），使得 u 在 G^- 中调和，$0 \in G^+$，且满足边界条件 $u(x) = \varphi^-(x),\ x \in S$，其中 $\varphi^-(x)$ 是在 S 上给定的连续函数．这里还假定 $u(x)$ 在无穷远点是正则的，即

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^{n-2} u(x) = \text{常数}.$$

这个问题的解总存在、唯一且可表成如下形式：

$$u(x) = W(x) + \frac{A}{|x|^{n-2}},$$

其中 A 为常数且

$$W(x) = \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,y) dS(y)$$

是一个双层位势，其密度 ν 是如下第二类 Fredholm 积分方程的解：

$$\frac{1}{2}\nu(x) + \int_S \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x,y) dS(y) =$$

$$= \varphi^-(x) - \frac{A}{|x|^{n-2}},\ x \in S. \tag{6}$$

其对应的齐次方程有非平凡解 $\widetilde{\nu}_0 = 1$．适当选取常数 A，非齐次方程（6）的解具有形式

$$\nu(y) = \nu^-(y) + C,$$

其中 C 是任意常数，$\nu^-(y)$ 为（6）的一个特解．常数 A 取如下形式：

$$A = -\int_S \varphi^-(x) \nu_0(x) dS(x),$$

其中密度 ν_0 必须满足条件

$$\int_S \nu_0(y) \frac{1}{|y|^{n-2}} dS(y) = 1. \tag{7}$$

密度 ν_0 是以 $\psi^+(x) = 0,\ x \in S$ 为边界条件、对应于内部 Neumann 问题的方程（5）的一个非平凡解，且满足规范化条件：

$$V_0(x) \equiv \int_S \nu_0(y) E(x,y) dS(y) = 1,$$

$$x \in G^+ \cup S,$$

当 $n \geqslant 3$ 时，它等价于（7）式．具有密度 $\nu_0(x)$ 的单层位势称为平衡位势（equilibrium potential）或者 Robin 位势（Robin potential）．密度 $\nu_0(x)$ 给出 **Robin** 问题（Robin problem）的解，即分布在导体 S 上的电荷在 G^+ 里产生一个具有常数值的平衡位势这一静电问题的解．解外部的 Dirichlet 问题有一定的复杂性是由于如下事实，一般说来，在无穷远点正则的调和函数 $u(x)$，当 $|x| \to \infty$ 时，其减少趋势比双层位势来得慢，在一般情况下，$u(x)$ 不可能只用一个双层位势来表示．

外部 Neumann 问题（exterior Neumann problem）：求一个 $C^1(G^- \cup S)$ 类函数 $u(x)$（其中 $S \in C^{(1,\alpha)}$，$0 < \alpha < 1$），使其在 G^- 调和（$0 \in G^+$），且满足边界条件 $\partial u(x)/\partial n_x = \psi^-(x),\ x \in S$，这里 $\psi^-(x)$ 是在 S 上给定的连续函数；另外还假定 $u(x)$ 在无穷远点是正则的．当 $n \geqslant 3$ 时，这个问题的解总存在且唯一；当 $n = 2$ 时，解存在的充要条件是下面条件成立：

$$\int_S \psi^-(x) dS(x) = 0. \tag{8}$$

而且，这个解除了至多相差一个附加的任意常数外是确定的．外部 Neumann 问题的解能够以单层位势的形式表示成

$$u(x) = \int_S \mu(y) E(x,y) dS(y),$$

其密度 μ 是如下第二类 Fredholm 积分方程的解：

$$-\frac{1}{2}\mu(x) + \int_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} E(x,y) dS(y) =$$

$$= \psi^-(x),\ x \in S. \tag{9}$$

当 $n \geqslant 3$ 时，这个方程的解总存在且唯一；当 $n = 2$ 时，对应的齐次方程有一个非平凡解 $\mu_0(x)$．这样，非齐次方程（9）在可解性条件（8）之下有唯一的解

$\widetilde{\mu}(x)$，使得

$$\int_S \widetilde{\mu}(x)dS(x)=0,$$

而且，它的一般解的形式是 $\mu(x)=\widetilde{\mu}(x)+c\mu_0$，这里 c 是任意常数．

位势论的边值问题也可以利用 **Green 函数** (Green function) 来解．例如，对于 (内部) Dirichlet 问题，Green 函数具有形式

$$G(x,y)=E(x,y)+g(x,y),\ x\in G^+\cup S,\ y\in G^+.$$

其中 $g(x,y)$ 是 G^+ 里的调和函数，在 $G^+\cup S$ 上关于 x 是连续的，且对于每一个 $y\in G^+$，边界条件 $g(x,y)=0$ $(x\in S)$ 成立．对于具有边界条件 $u(x)=\varphi^+(x)$ $(x\in S)$ 的 Poisson 方程 $-\Delta u(x)=f(x)$，$x\in G^+$，其 (内部) Dirichlet 问题的 $C^2(G^+)\cap C(G^+\cup S)$ 类的解 $u(x)$ 可以表示成如下形式：

$$u(x)=\int_{G^+} f(y)G(x,y)dy+$$

$$+\int_S \varphi^+(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)dS(y),\ x\in G^+.$$

含参数 x 的积分

$$\int_G \rho(y)G(x,y)dy,\ \int_S \nu(y)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y)dS(y),$$

分别称为 (Dirichlet 问题的) Green体积位势 (Green volume potential) 与 Green 双层位势 (Green double-layer potential)，它们的性质类似于位势 (1) 的性质．

利用 Green 函数可以把特征值问题归结成积分方程，例如，具有边界条件 $u(x)=0(x\in S)$ 的 Dirichlet 问题 $-\Delta u=\lambda u(x)$，$x\in G^+$ 可归结成如下具自伴核的第二类 Fredholm 积分方程：

$$u(x)-\lambda\int_{G^+} u(y)G(x,y)dy=0,\ x\in G^+.$$

位势论的一些基本概念的进一步推广．在深入研究那种用或多或少较为一般的密度定义的位势 (1) 的性质及其应用的同时，通过 **Radon 测度** (Radon measure) 及 Radon 积分等概念，位势的概念得到了深刻的推广．这个历程始于 20 年代．

设 $\lambda\geqslant 0$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集 $\operatorname{supp}\lambda$ 的正 **Borel 测度** (Borel measure)，测度的位势 (potential of the measure)

$$E\lambda(x)=\int E(x,y)d\lambda(y), \tag{10}$$

依下述映射的意义在 $\mathbf{R}^n$ 处处存在．对于 $n\geqslant 3$，$E\lambda:\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$ 与对于 $n=2$，$E\lambda:R^2\to(-\infty,\infty]$ (即，这里允许取 $+\infty$ 值)，它是 $\mathbf{R}^n$ 里的**上调和函数** (superharmonic function) 且在支集 $\operatorname{supp}\lambda$ 的外部调和．对于具紧支集的任意带号测度 λ，根据典型分解 $\lambda=\lambda^+-\lambda^-$，$\lambda^+\geqslant 0$，$\lambda^-\geqslant 0$，定义位势 $E\lambda$ 为 $E\lambda=E\lambda^+-E\lambda^-$．这个位势在使得两个位势 $E\lambda^+(x)$ 与 $E\lambda^-(x)$ 同时取 $+\infty$ 值的那些点 $x\in\mathbf{R}^n$ 上没有定义．如果测度 $\lambda\geqslant 0$ 集中在一个光滑的曲面 S 上，那么类似于 (10) 式，测度 λ 的双层位势定义为

$$\frac{\partial E}{\partial n_y}\lambda(x)=\int\frac{\partial}{\partial n_y}E(x,y)d\lambda(y).$$

位势 (10) 在 $\mathbf{R}^n$ 除了在一个**极集** (polar set) 上的点外处处有限，$E\lambda<+\infty$，这种集合的**外容量** (capacity) 等于零．如果 $E\lambda(x)=0$ 除了一个外容量为零的集合外处处成立，则 $\lambda=0$．如果测度 $\lambda\geqslant 0$ $(\lambda\neq 0)$ 集中在一个零容集上，则 $\sup E\lambda=+\infty$．下述最大值原理成立：

$$E\lambda(x)\leqslant\sup\{E\lambda(y):y\in\operatorname{supp}\lambda\},$$

即 $E\lambda(x)$ 的最小上界等于 $E\lambda$ 在 $\operatorname{supp}\lambda$ 的限制的最小上界．如果这个限制在点 $x_0\in\operatorname{supp}\lambda$ 连续 (在一般情况下，允许取 $+\infty$ 值)，则位势 $E\lambda(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的点 x_0 是连续的．测度的位势 $E\lambda$ 可以化成密度的位势 (1) 的充分必要条件是，测度 λ 分别关于 G 里或 S 上的 Lebesgue 测度为绝对连续的 (见 [3] – [6])．

如果 T 是 $\mathbf{R}^n$ 上的**广义函数** (generalized function) 或称分布，那么它的位势 (potential) 定义为卷积 $E*T$．它也是广义函数．例如，如果 T 是具有紧支集的广义函数，则依广义函数论的意义，Poisson 方程 $\Delta(ET)=-T$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上成立．测度的位势可以看成是分布的位势之特殊情形．关于分布的位势见 [3]，[4]，[9]．

对于具有足够光滑边界 S 的区域 $G=G^+$，位势法是 Dirichlet 问题的一种有效的解法．位势论的一个主要发展方向是寻找较广的一类区域的 Dirichlet 问题的解之存在性与唯一性的证明方法 (见**扫除法** (balayage method)；**Dirichlet 原理** (Dirichlet principle)；**Perron 法** (Perron method)；**Schwarz 交替法** (Schwarz alternating method))．然而，1910 年 S．Zaremba 注意到，当一个平面区域 G 的边界 $\partial G=S$ 有孤立点时，上述古典形式的 Dirichlet 问题并非总是可解的；此外，1912 年 H．Lebesgue 证明了，对于同胚于闭球且在边界有足够尖的角插入其内部的空间区域 (即所谓 Lebesgue 脊 (Lebesgue spine)，见**非正则边界点** (irregular boundary point)) 也并非总是可解的，即存在连续函数 $\varphi^+(x)$，$x\in\partial G$，其 Dirichlet 问题无解．

于是，关于 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的广义 Perron - Wiener 解 (generalized Perron-Wiener solution to the Dirichlet problem) 是很重要的．它是在 Perron

法发展的过程中得到的．正如 N．Wiener 所证明(1924)，在任意有界区域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 的边界 $S=\partial G$ 上给定的任意有限连续函数 $\varphi=\varphi^{\cdot}$ 是可解的（resolutive），即对这种函数，广义 Perron-Wiener 解 $H_\varphi(x)$ 存在且唯一．一般地，1939 年 M．Brelot 证明了，S 上有限可测函数 φ 是可解的，当且仅当 φ 关于 S 上的**调和测度**（harmonic measure）是可积的．

广义解 H_φ 并非在所有边界点取事先给定的值 φ．一个点 $x_0\in S$ 称为正则点（regular point），如果对于 S 上任意有限连续函数 φ，广义解 $H_\varphi(x)$ 在该点取值 $\varphi(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0}H_\varphi(x)=\varphi(x_0),\ x\in G.$$

其余所有点 $x_0\in S$ 称为非正则点（irregular points）；它们当 $n\geqslant 2$ 时，包括了孤立边界点，当 $n\geqslant 3$ 时，包括了 Lebesgue 脊．已证明（**Kellogg-Evans 定理**（Kellogg-Evans theorem），1933），非正则点组成的集合其外容量为零，即这种集合在某种意义下是薄的．正则点组成的集合在 S 里稠密．

借助于 Dirichlet 问题可以构造广义 Green 函数（generalized Green function）G，例如，对任意取定的点 $y\in G$，可按下述方法定义：

$$G(x,y)=E(x,y)-H_{E(\cdot,y)}(x),\ x\in G.$$

广义 Green 函数保留经典 Green 函数的一些性质，例如，对称性 $G(x,y)=G(y,x)$，但是 $\lim_{x\to x_0}G(x,y)=0$（$x\in G$），当且仅当 x_0 是边界 S 的正则点（见[4]，[6]）．

研究异于 $E(x,y)$ 的其他核的位势，以及研究紧统的 Dirichlet 问题和 Dirichlet 问题的稳定性，都具有重要的意义（见[6]，[4]）．利用它们来解边值问题已有深入的发展（见 **Bessel 位势**（Bessel potential）；**非线性位势**（non-linear potential）；**Riesz 位势**（Riesz potential）；亦见[3]，[11]）．

参考文献

[1] Гюнтер, Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953（英译本：Günter, N. M. [N. M. Gyunter], Potential theory and its application to basic problem of mathematical physics, F. Ungar, 1967).

[2] Сретенский, Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.-Л., 1946.

[3] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966（英译本：Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[4] Brélot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1959.

[5] Kellogg, O. D., Foundations of potential theory, F. Ungar, 1929, Re-issue: Springer, 1967.

[6] Келдыш, М. В., 《Успехи матем. наук》, 8 (1941), 171－231.

[7] Бицадзе, А. В., Уравнения математической физики, М., 1976（英译本：Bitsadze, A. V., Equation of mathematical physics, Mir, 1980)

[8] Бицадзе, А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966（英译本：Bitsadze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968).

[9] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981（英译本：Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, M. Dekker, 1971).

[10] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations. 2, Interscience, 1965（译自德文）（中译本：R．柯朗，D．希尔伯特，数学物理方法，II，科学出版社，1977）.

[11] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970（译自意大利文）.

[12] Михлин, С. Г., Линейные уравнения в частных производных, М., 1977

[13] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977（中译本：А．Н．吉洪诺夫，А．А．萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1956）.

А. И. Приленко, Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 亦见**位势论的混合边值问题**（potential theory, mixed boundary value problems of）；**位势论中的反问题**（potential theory, inverse problems in）；**抽象位势论**（potential theory, abstract）.

参考文献

[A1] Helms, L. L., Introduction to potential theory, Wiley-Interscience, 1969.

[A2] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A3] Wermer, J., Potential theory, Lecture Notes in Math., 408, Springer, 1974.

[A4] Doob, J. L., Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer, 1984（中译本：J．L．杜布，经典位势论与概率位势论，科学出版社，上、下册，1993）.

[A5] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential, A-B, North-Holland, 1978－1982（译自法文）.

[A6] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

[A7] Fabrikant, V. I., Applications of potential theory in mechanics, Kluwer, 1989.

高琪仁 吴炯圻 译

抽象位势论 [**potential theory, abstract; потенциала**

теория абстрактная]

抽象拓扑空间的位势论．抽象位势论产生于20世纪中期，旨在创造统一的公理方法以便处理各种不同位势在性质上的巨大差异，而这些位势又都用于解偏微分方程理论中的问题．M. Brelot 给出了"调和"函数（即偏微分方程的一个容许类的解）的公理及其相应的位势的第一个足够完整的描述（1957－1958，见[1]），但只涉及椭圆型方程．H. Bauer 把这个理论推广到一大类的抛物型方程（1960－1963，见[3]）．P. Lévy，J. Doob，G. Hunt 等人对位势论的概率方法做了非常出色的工作．

为了阐述抽象位势论，**调和空间**（harmonic space）的概念是很有用的．设 X 为局部紧拓扑空间，X 上的一个函数层（sheaf of functions）是定义在 X 的所有开集构成的族上的映射 $\mathfrak{F}$，使得

1）对于任意开集 $U \in X$，$\mathfrak{F}(U)$ 是一些函数 $u: U \to \overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ 所构成的一个族．

2）如果两个开集 U, V 满足 $U \subset V \subset X$，则 $\mathfrak{F}(V)$ 中任意函数在 U 的限制属于 $\mathfrak{F}(U)$；

3）对任意开集族 $\{U_i\}$，$i \in I$，$U_i \subset X$ 及任意定义在 $\bigcup_{i \in I} U$ 上的函数 u，若对任意 $i \in I$，它在 U_i 的限制属于 $\mathfrak{F}(U_i)$，则 $u \in \mathfrak{F}(\bigcup_{i \in I} U_i)$．

X 上的函数层 $\mathfrak{H}$ 称为调和层（harmonic sheaf），如果对于任意开集 $U \subset X$，族 $\mathfrak{H}(U)$ 是 U 上的某些连续函数组成的一个实向量空间．设 u 为定义在某个集合 $S \subset X$ 上的函数且 S 包含开集 U，称 u 为 $\mathfrak{H}$ 函数（$\mathfrak{H}$-function），如果其限制 $u|_U$ 属于 $\mathfrak{H}(U)$．调和层在点 $x \in X$ 为非退化的（non-degenerate），如果在 x 的一个邻域里存在一个 $\mathfrak{H}$ 函数 u，使得 $u(x) \neq 0$．

Bauer，Brelot 与 Doob 公理之间的真正差别可以用 $\mathfrak{H}$ 函数的收敛性来刻画．

a）Bauer 收敛性（Bauer convergence property）指出，一个 $\mathfrak{H}$ 函数的增加列如果在某一个开集 $U \subset X$ 上局部有界，则极限函数 v 是 $\mathfrak{H}$ 函数．

b）Doob 收敛性（Doob convergence property）称，如果极限函数 v 在某个稠密集 $U \subset X$ 上有限，则 v 是 $\mathfrak{H}$ 函数．

c）Brelot 收敛性（Brelot convergence property）指出，如果在某一个区域 $U \subset X$ 上，$\mathfrak{H}$ 函数的增加列的极限 v 在某一点 $x \in U$ 取有限值，则 v 是 $\mathfrak{H}$ 函数．

如果空间 X 是局部连通的，则蕴涵关系 c）⇒b）⇒a）成立．

X 上的一个函数层 $\mathfrak{U}$ 称为超调和层（hyperharmonic sheaf），如果对于任意开集 $U \subset X$，族 $\mathfrak{U}(U)$ 是由这种下半连续函数 $u: U \to (-\infty, \infty]$ 组成的一个凸锥；$\mathfrak{U}$ 函数（$\mathfrak{U}$-function）按 $\mathfrak{H}$ 函数的类似方法定义．映射 $U \to \mathfrak{U}(U) \cap (-\mathfrak{U}(U))$ 是调和层，用 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{U}}$ 表示，它由层 $\mathfrak{U}$ 生成；下面只用到这个调和簇．

设在开集 $U \subset X$ 的边界 ∂U 上给定一个具紧支集的连续函数 $\varphi: \partial U \to (-\infty, \infty)$．超调和层 $\mathfrak{U}$ 使得可能用 **Perron 法**（Perron method）对某些开集构造在相应的 $\mathfrak{H}$ 函数类中的 **Dirichlet 问题**（Dirichlet problem）的广义解．用 $\overline{\mathfrak{U}}_{\varphi}$ 表示满足下面条件的下半连续 $\mathfrak{U}$ 函数 u 所构成的族：u 在 U 上有界，在某个紧集的外部取正值且满足：

$$\varliminf_{x \to y} \inf u(x) \geqslant \varphi(y), \; y \in \partial U;$$

定义 $\underline{\mathfrak{U}}_{\varphi}$ 为 $\underline{\mathfrak{U}}_{\varphi} = -\overline{\mathfrak{U}}_{-\varphi}$．再令

$$\overline{H}_{\varphi}(x) = \inf\{u(x): u \in \overline{\mathfrak{U}}_{\varphi}\}, \; x \in U,$$

且当 $\overline{\mathfrak{U}}_{\varphi} = \varnothing$ 时令 $H_{\varphi} = \infty$．类似地，

$$\underline{H}_{\varphi}(x) = \sup\{u(x): u \in \underline{\mathfrak{U}}_{\varphi}\}, \; x \in U,$$

或者 $\underline{H}_{\varphi} = -\infty$．函数 φ 称为可解的，如果对于这个函数，$\overline{H}_{\varphi}$ 与 $\underline{H}_{\varphi}$ 相同，即 $\overline{H}_{\varphi} = \underline{H}_{\varphi} = H_{\varphi}$ 且 H_{φ} 是 $\mathfrak{H}$ 函数；函数 H_{φ} 是在 $\mathfrak{H}$ 函数类中 Dirichlet 问题的广义解．一个开集 $U \subset X$ 称为关于 $\mathfrak{U}$ 是可解的，如果每一个在 ∂U 上具有紧支集的有限连续函数为可解的．对于可解集 U，映射 $H_{\varphi}: C_c(\partial U) \to \mathbf{R}$ 是正线性泛函，由此确定了一个正测度 μ_x（$x \in U$）称为 ∂U 上（或者 U 上）关于点 x（相对于 $\mathfrak{U}$）的调和测度（harmonic measure）．

赋予超调和层的局部紧空间 X 称为调和空间（harmonic space），如果四个相应的公理（见**调和空间**（harmonic space））成立，而且收敛公理理解为 Bauer 收敛性．

通常（经典例子也一样）取调和层 $\mathfrak{H}$ 作为基础，然后由完全性公理定义超调和层．例如，Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 赋予关于 **Laplace 方程**（Laplace equation）或**热传导方程**（heat equation）的经典解层 $\mathfrak{H}$ 后成为一个调和空间．调和空间是局部连通的，不包含孤立点，且有由连通的可解集（可解域）所组成的（拓扑）基．

调和空间 X 的开集 U 以限制 $\mathfrak{U}|_U$ 为超调和层成为 X 的一个调和子空间（harmonic subspace）．$U \subset X$ 上的超调和函数 u 称为上调和函数（superharmonic function），如果对于任意相对紧的可解集 V（$\overline{V} \subset U$）最大弱函数 $\mu^V u$ 是调和的，即 $\mu^V u \in \mathfrak{H}(V)$．经典的上调和函数（见**下调和函数**（subharmonic function））的许多性质在这种情况下也成立．位势（potential）是这样一个正的上调和函数 u，它在 X 上的最

大调和弱函数恒等于 0. 一个调和空间 X 称为 $\mathfrak{C}$ 调和($\mathfrak{C}$-harmonic)(或者 $\mathfrak{P}$ 调和($\mathfrak{P}$-harmonic))空间,如果对于任意点 $x\in X$,存在 X 上的一个正上调和函数 u(相应地,位势 u)使得 $u>0$. $\mathfrak{P}$ 调和空间里的任意开集是可解的.

取一个调和层 $\mathfrak{H}$ 为基础,并用完全性公理定义相应的超调和层 $\mathfrak{H}^*$,得到的是 Bauer 空间(Bauer space),它与关于 $\mathfrak{H}^*$ 的调和空间相同. 如果对于任意开集 $U\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$,调和层 $\mathfrak{H}$ 由热传导方程 $\Delta h-\partial h/\partial t=0$ 的解 h 组成,则 $\mathfrak{H}$ 具有 Doob 收敛性,且 $\mathbf{R}^n\times R$ 赋予簇 $\mathfrak{H}$ 成为一个(Bauer)$\mathfrak{P}$ 空间. 这时,C^2 类的函数 v 为上调和函数,当且仅当 $\Delta v-\partial v/\partial t\leqslant 0$.

Brelot 空间(Brelot space)用如下条件刻画:X 没有孤立点且是局部连通的;关于 $\mathfrak{H}$ 的正则集组成 X 的基(正则性意指经典 Dirichlet 问题在 $\mathfrak{H}$ 类中的可解性;以及 $\mathfrak{H}$ 具有 Brelot 收敛性. Brelot 空间构成所谓椭圆调和空间(见[4]),即椭圆 Bauer 空间的真子类. 如果对于任意开集 $U\subset\mathbf{R}^n$,$n\geqslant 2$,调和簇 $\mathfrak{H}$ 由 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的解 u 组成,则 $\mathbf{R}^2$ 与这个簇一起是一个 Brelot $\mathfrak{C}$ 空间,而对于 $n\geqslant 3$,$\mathbf{R}^n$ 是 Brelot $\mathfrak{P}$ 空间. 这时,v 是 C^2 类超调和函数,当且仅当 $\Delta v\leqslant 0$.

可解集 U 的边界 ∂U 的点 y 称为正则边界点(regular boundary point),如果对于 ∂U 上任意有限连续函数 φ,下面极限关系成立:

$$\lim_{x\to y}H_\varphi(x)=\varphi(y),\ x\in U;$$

否则,y 称为非正则边界点(irregular boundary point). 令 F 为 U 上收敛于 y 的滤子(filter). 定义在 U 与 y 的某一个邻域的交集上的严格正的超调和函数 v,当沿 F 收敛于 0 时,称之为滤子 F 的闸函数(barrier). 如果对于 $\mathfrak{C}$ 调和空间的相对紧可解集 U,所有收敛于点 $y\in\partial U$ 的滤子都有闸函数,则 U 是正则集(regular set),即它的所有边界点都是正则的. 如果 U 是 $\mathfrak{P}$ 调和空间的相对紧开集且在 U 上存在一个严格正的超调和函数,它在每一点 $y\in\partial U$ 收敛于 0,则 U 是正则集.

除了关于 Dirichlet 问题的可解性与正则性的研究以外,在抽象位势论中,下列问题是比较重要的:调和空间 X 里点集的**容量**(capacity)理论;关于 X 上的函数与测度的扫除理论(见**扫除法**(balayage method));推广 Martin 表示(见**位势论中的 Martin 边界**(Martin boundary in potential theory)),所得到的 X 上正上调和函数的积分表示理论.

在 20 世纪初,位势论与概率论的一些概念,如 **Brown 运动**(Brownian motion);**Wiener 过程**(Wiener process)及 **Марков 过程**(Markov process)之间的密切联系已经显示出来. 例如,在区域 $G\subset\mathbf{R}^2$ 里的 Brown 运动轨道,从点 $x_0\in G$ 出发首先击中边界 ∂G 的(Borel)子集 E 的概率恰好是 E 关于 x_0 的**调和测度**(harmonic measure);∂G 上的**极集**(polar set)是几乎必然不被轨道击中的集合. 后来,概率方法促进了对位势论的某些概念的更深入的了解且导出了一系列新的结果;另一方面,位势论的方法使有可能更好地理解概率论的结果,而且也导出概率论的一系列新的结果.

设 X 是具有可数基的局部紧空间,令 C_c 与 C_0 分别为 X 上具紧支集与在无穷远点收敛于 0 的有限连续函数类. 对于每一个相对紧(Borel)集 $E\subset X$,测度核 $N(x,E)\geqslant 0$ 是 $x\in X$ 的(Borel)函数. 借助于 N,每一个函数 $f\geqslant 0$($f\in C_c$)对应着一个位势函数

$$Nf(x)=\int f(y)N(x,dy),\ x\in X,$$

而每一个测度 $\theta\geqslant 0$ 对应着一个位势测度

$$\theta N(E)=\int N(x,E)d\theta(x).$$

单位核 $I(x,E)$,当 $x\notin E$ 时取 0 值而当 $x\in E$ 时取值为 1,它不使 $f(x)$ 与 $\theta(E)$ 发生改变. 例如,在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$,核

$$N(x,E)=\int_E\frac{dy}{|x-y|}$$

确定了具有密度 f 的 **Newton 位势**(Newton potential)Nf,而 θN 是这样一个测度,其密度与测度 θ 的 Newton 位势的密度相等(见**位势论**(potential theory)).

乘积核具有形式

$$MN(x,E)=\int N(y,E)M(x,dy).$$

一族核 $\{N_t\}$,$t\geqslant 0$,若具有合成律 $N_{t+s}=N_tN_s$,是一个单参数半群. 称核 N 满足完全最大值原理(complete maximum principle),如果对于任意 f,$g\in C_c$,$f,g\geqslant 0$ 且 $a>0$,则由不等式 $Nf\leqslant Ng+a$ 在 $f>0$ 的集合上成立可推出在 X 上处处成立. 这个理论的基本定理是 Hunt 定理(Hunt theorem),其最简单的解释如下:如果 C_c 在变换 N 下的象在 C_0 里稠密,且设 N 满足完全最大值原理,则存在一个半群 $\{P_t\}$ $(t\geqslant 0)$ 使得

$$Nf(x)=\int_0^\infty P_tf(x)dt,\ f\geqslant 0$$

(一个 Feller 半群(Feller semi-group));此外,P_t 把 C_c 变进 C_0;P_0 是单位核;$\lim_{t\to 0}P_tf=f$($f\in C_0$)是局部一致的;且 $P_t(1)\leqslant 1$. 可测函数 $f\geqslant 0$ 称为

关于半群 $\{P_t\}$ 的过分函数（excessive function），如果 $P_t f \leqslant f$ 恒成立且 $\lim_{t\to 0} P_t f = f$；如果 $P_t f = f$，则 f 称为不变函数（invariant function）．对于位势测度 θN，相应的公式也成立．

上面简述的 Hunt（1957－1958）理论有直接的概率意义．设 X 上给定某个由 Borel 集组成的 σ 代数 $\mathfrak{U}$ 及一个概率测度 P．随机变量 $S = S(x)$ 是从 X 到状态空间 $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$ 里的 $\mathfrak{U}$ 可测映射．随机变量族 $\{S_t\}$ $(t \geqslant 0)$ 是 **Марков 过程**（Markov process）($S_t(x)$ 是点 $x \in X$ 的轨道），如果对任意 y $(-\infty \leqslant y < \infty)$，存在 $\mathfrak{U}$ 上的一个概率测度 P^y 使得 a) $\mathrm{P}^y(\{S_0 = y\}) = 1$；b) $\mathrm{P}^y(A)$ $(A \in \mathfrak{U})$ 是 y 的 Borel 函数；且 c) 在时刻 r 通过 y 的轨道的形式当 $t \geqslant r$ 时不依赖于此前所经过的点的位置．在这种 Марков 过程中，半群 $\{\mathrm{P}_t\}$ 可以理解为测度半群

$$\mathrm{P}_t(y, B) = \mathrm{P}^y(\{S_t \in B\}).$$

研究关于半群 $\{\mathrm{P}_t\}$ 的超过函数与不变函数都很重要．

另一方面，如果 X 是具可数基的 $\mathfrak{B}$ 调和空间，那么总可以选取一个位势核满足 Hunt 定理的要求；在这种情况下，相关联的半群的超过函数正好是非负超调和函数．Hunt 定理也可以推广到某些类型的 Bauer 空间（见[4]、[7]）．

抽象位势论的其他概念，如扫除、极集与薄集，在随机过程的一般理论的框架中也有它的概率解释；这一点推进了后者的研究．另一方面，用位势论方法探讨一系列概念，例如鞅，已证实是很重要的，它已超过 Марков 过程极限的范围．

参考文献

[1] Brelot, M., Lectures on potential theory, Tata Inst. Fundam. Research, 1960.

[2] Brelot, M., Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel, *Enseign. Math.*, **18** (1972), 1, 1－36.

[3] Bauer, H., Harmonische Raume und ihre Potentialtheorie, Springer, 1966.

[4] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

[5] Meyer, P. A., Probability and potentials, Blaisdell, 1966.

[6A] Hunt, G. A., Markov processes and potentials, Ⅰ, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 44－93.

[6B] Hunt, G. A., Markov processes and potentials, Ⅱ, *Illinois J. Math.*, 1 (1957), 316－362.

[6C] Hunt, G. A., Markov processes and potentials, Ⅲ, *Illinois J. Math.*, 2 (1958), 151－213.

[7] Blumenthal, R. and Getoor, R., Markov processes and potential theory, Acad. Press, 1968.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 抽象位势论也称为公理位势论（axiomatic potential theory）．

测度核 $N(x, E)$ 也可定义作关于 E 的一个（σ 可加、非负的）测度，而 $Nf: x \to Nf(x)$ 也可以通过考虑 f 是非负 Borel 函数的情形来定义；在上文中，假定了当 $f \in C_c$ 时 Nf 是有限的．根据定义，Feller 半群（Feller semi-group）(P_t) 把 C_0 变换成 C_0，P_0 是单位核且对于 $f \in C_0$，变换 $t \mapsto P_t f$ 关于一致拓扑在 0 点是连续的．如果 N 与 (P_t) 依 Hunt 定理相关联，则称 N 为 Feller 半群 (P_t) 的位势核（potential kernel），而且对于任意非负的 Borel 函数 f，f 的位势 Nf 是关于半群 (P_t) 的超过函数．可以类似地定义超过测度与位势测度，对它们的研究也是非常重要的．上文关于 Марков 过程的定义的那一小段有点误导：其实配有 σ 代数 $\mathfrak{U}$ 的 X 必须代之以一个外加的可测空间，比如 $(\Omega, \mathfrak{U})$，而状态空间 $\overline{\mathbf{R}}$ 须用局部紧空间 X 来代替且设 X 上已定义了 Hunt 核 N，这样，在等式 $\mathrm{P}_t(y, B) = \mathrm{P}^y(S_t \in B)$ 中有 $y \in X$ 及 $B \subseteq X$（且为 Borel 集）．见 **Марков 过程**（Markov process）．

1959 年前后，A. Beurling 与 J. Deny 引进了抽象位势论的另一个分支：Dirichlet 空间（Dirichlet space）的概念，它是 **Dirichlet 积分**（Dirichlet integral）理论的公理化．见[A3]．

有好几个抽象理论已经引进，目的在于把位势论的不同分支统一起来，比如扫除空间（balayage spaces）理论，见[A2]，及 H 锥（H-cones）理论，见[A1]．这两个概念都是利用满足某些收敛性，Riesz 性质及分离性质的函数（比如正超调和函数）构成的凸锥作为主要工具．简要的介绍亦见[A4]．

参考文献

[A1] Boboc, N., Bucur, Gh. and Cornea, A., Order and convexity in potential theory: H-cones, Springer, 1981.

[A2] Bliedtner, J. and Hansen, W., Potential theory. An analytic and probabilistic approach to balayage, Springer, 1986（中译本：J. 波里特诺，W. 汉森，位势理论——扫除之分析与概率方法，厦门大学出版社，1994）．

[A3] Fukushima, M., Dirichlet forms and Markov processes, North-Holland, 1980.

[A4] Král, J., Lukeš, J. and Veselý, J. (eds.), Potential theory, Surveys and problems, Springer, 1988.

[A5] Brelot, M., Bauer, H., Bony, J.-M., Deny, J. and Mokobodzki, G. (eds.), Potential theory, Cremonese, 1970.

[A6] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential, C. North-Holland, 1988（译自法文）．

[A7] Maeda, F. Y., Dirichlet integrals on harmonic spaces, Lecture notes in math., 803, Springer, 1980.

[A8] Röckner, M., Markov property of generalized fields and axiomatic potential theory, *Math. Ann.*, **264** (1983), 153 – 177.

尚琪仁 吴炯圻 译

位势论中的反问题[potential theory, inverse problems in; потенциала теории, обратные задачи]

这样的一些问题：求一个产生吸引力的物体的形状与密度使得该物体的外（内）部位势具有事先给定的值（见**位势论**（potential theory））．换言之，这种问题之一是求一个物体使其外部体积位势具有指定的密度且在该物体的外部与一个指定的调和函数相等．最初，位势论反问题是在地球形状的理论框架及天体力学中考虑的．位势论反问题与旋转流体的平衡状态问题及地球物理学的问题相关联．

研究位势论反问题的中心是存在性、唯一性及稳定性问题及为这些问题的求解建立有效的数值方法．对于接近于指定物体的一物体而言，局部解的存在定理已经获得．但是，最大的困难出现在非线性方程的研究，而这些问题一般又都要归结于这种方程的研究．关于整体解的判别法不存在（1983）．在许多情况下都是事先假定整体解存在（这在许多应用中是很自然的），然后再去考虑唯一性与稳定性．研究唯一性时的一个主要步骤是去发现那些使解唯一的附加条件．与唯一性问题密切关联的是稳定性问题．对于写成第一类方程的形式的问题，一般说来，解的有限变差可能对应于等式右边的一个任意小的变差，即这种问题是不适定的（见**不适定问题**（ill-posed problems））．为了使问题成为适定的，可以对该问题附加一系列限制．在这些限制下，关于一个解可得到它的偏差的不同特征数作为右边的偏差的一个函数．

下面在三维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中叙述关于 **Laplace 方程**（Laplace equation）的 Newton（体积）位势与单层位势的反问题，虽然上述问题在 n 维（$n>2$）Euclid 空间中关于一般椭圆方程的位势也得到了研究（见[7]）．

设 T_α，$\alpha=1,2$，是具有分片光滑边界 S_α 的单连通有界区域；又设

$$U_\alpha=\int_{T_\alpha}\frac{1}{|x-y|}\mu_\alpha(y)dy$$

为 **Newton 位势**（Newton potential）；而

$$V_\alpha(x)=\int_{S_\alpha}\frac{1}{|x-y|}\zeta_\alpha(y)dS_y$$

为**单层位势**（simple-layer potential），其中 $|x-y|$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 与 $y=(y_1,y_2,y_3)$ 之间的距离，$\mu_\alpha\neq 0$（$\zeta_\alpha(y)\neq 0$）在 T_α（在 S_α）上几乎处处成立．再设

$$Z_\alpha(x)=\beta U_\alpha(x)+\gamma V_\alpha(x),$$

这里 β，γ 为实数且 $\beta^2+\gamma^2\neq 0$．

一般的位势论中的外部反问题（exterior inverse problem in potential theory）是据给定的外部位势的值 $Z(x)$ 来求任一物体的形状与密度．关于这个问题的解的唯一性条件可以用下面方式来阐述：求关于区域 T_α 与关于密度 μ_α、ζ_α 的条件使得由外部位势 $Z_1(x)$ 与 $Z_2(x)$ 的等式

$$Z_1(x)=Z_2(x),\ x\in\mathbf{R}^3\setminus(\overline{T}_1\cup\overline{T}_2) \qquad (1)$$

可推出等式 $T_1=T_2$，$\mu_1=\mu_2$，$\zeta_1=\zeta_2$．若集合 $\mathbf{R}^3\setminus(\overline{T}_1\cup\overline{T}_2)$ 仅有一个连通分支，则当 $Z_1(x)=Z_2(x)$ 对于充分大的 R 在 $|x|>R$ 成立时，或在球的边界 $|x|=R$ 上的数据能保证 $Z_1(x)$ 与 $Z_2(x)$ 在该球外部相等时，条件（1）成立．可以选取在闭球的整个边界上的 Dirichlet 数据，或者该闭球的某一段边界上的 Cauchy 数据等作为这样的数据．这样一来，为了简便起见，可假定集合 $T'=T_1\cap T_2$ 及 $T''=\mathbf{R}^3\setminus(\overline{T}_1\cup\overline{T}_2)$ 都是单个连通分支．

在下面条件下，一般的位势论反问题的解是唯一的，若 $\mu_1=\mu_2=\mu>0$，$\zeta_1=\zeta_2=\zeta>0$ 且 T_α 是接触的区域，即使得对两个区域 T' 与 T''，边界 S_α 有一个共同段 S_*（$\mathrm{mes}\,S_*\neq 0$），而且 $\mathrm{mes}[(S_1\cup S_2)\setminus S_*]=0$．

为得到关于 Newton 位势的位势论反问题，须假定（1）中的 $\beta=1$ 且 $\gamma=0$．设 T_α，$\alpha=1,2$，是关于一个共同点的两个星形区域，又设 $\mu_\alpha(y)$ 形如：$\mu_\alpha=\delta_\alpha\nu(y)$，其中 $\delta_\alpha=$ 常数，且 $\nu>0$ 与 $\rho=|y|$ 无关．如果 Newton 位势满足条件（1）且存在一点 $x_0\in T_1\cap T_2$ 使得 $U_1(x_0)=U_2(x_0)$，则 $T_1=T_2$，$\mu_1=\mu_2$．

若在条件（1）中假定 $\mu_1=\mu_2=\mu$，$\beta=1$，$\gamma=0$，就得到这样的问题：据给定密度的外部 Newton 位势 $U(x)$ 的已知值来确定产生吸引力的物体的形状．若给定的密度 $\mu(y)$ 是随 $|y|$ 的增加而单调不减的，则这个问题的解关于这样的区域 T_α 的族是唯一的，即每一个区域关于一个共同的点是星形的．

若在（1）中令 $\beta=0$，$\gamma=1$，$S_1=S_2$，就得到由给定的密度 ζ 的外部单层位势 $V(x)$ 的已知值来确定产生吸引力的物体的形状这一问题．关于具有常数密度的凸形物体，这个问题的解唯一．

若在（1）中令 $T_1=T_2=T$，$\beta=1$，$\gamma=0$，就得到由外部 Newton 位势的已知值来确定一个任意物体的密度这一问题．这问题的解当函数 $\mu_\alpha(y)$ 具有形式 $\mu_\alpha(y)=\eta(y)\nu_\alpha(y)$ 时唯一，其中 $\partial\nu_\alpha/\partial\rho=0$，

$\partial\eta/\partial\rho \geqslant 0$.

一般的位势论中的内部反问题(interior inverse problem in potential theory)是由一个内部位势 $Z(x)$ 的给定值来找出产生吸引力的物体的形状与密度. 为得到唯一性定理可把这个问题阐述为:求关于区域 T_i 及关于密度 μ_α, ζ_α 的条件, 使得关于内部位势 $Z_1(x)$ 与 $Z_2(x)$ 的等式

$$Z_1(x) = Z_2(x),\ x \in T_1 \cap T_2 \qquad (2)$$

蕴涵等式: $T_1 = T_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\zeta_1 = \zeta_2$.

若在条件(2)中 $\beta = 1$, $\gamma = 0$, 则关于具不同正密度的凸形物体类, 这个解是唯一的. 若在条件(2)中 $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta =$ 常数, 这种解同样在凸形物体类中是唯一的.

设 T_1 是一个待求的物体, 使得关于一个给定密度 $\mu(x)$ 的外部 Newton 位势 $U(x; T_1, \mu)$ 在物体 T_1 之外等于如下给定的调和函数 $H(x)$: 当 $|x| \to \infty$ 时 $H(x) \to 0$ 且 $H(x)$ 依某种意义下的函数距离趋近于一个具有密度 μ 的给定物体 T 的外部 Newton 位势 $U(x; T, \mu)$. 对于具有光滑边界 S 的单连通区域 T, 在条件 $\mu(x)|_S \neq 0$ 下, 这个问题的解存在且唯一.

内部问题可类似于外部问题那样叙述, 此外, $H(x)$ 在一个有界区域 $G_0 \supset \bar{T}$ 中还是下面非齐次方程的一个解:

$$\Delta H = -\mu(x),\ x \in G_0.$$

求一个物体 T_1 使得

$$\operatorname{grad} H(x) = \operatorname{grad} U(x; T_1, \mu).$$

与外部问题不同, 一般说来, 内部问题的解不唯一, 解的个数由对应的分歧方程决定, 见**解的分支**(branching of solutions).

位势论中的平面反问题(planar inverse problems in potential theory)($n = 2$)通过考虑无穷远处的位势的相应性质,可以类似于空间问题来叙述. 因此, 上面对于 $n = 3$ 的情况所做的一系列论断经修正仍然成立. 位势论中的平面反问题应用复变函数论的方法和共形映射方法来研究有时是很方便的.

平面的位势论中的外部反问题(planar exterior inverse problem in potential theory). 设 $\mu = 1$ 是一个取定的密度, 不考虑对数质量位势而考虑它的导数 $\partial/\partial z = [(\partial/\partial x) - i(\partial/\partial y)]/2$. 设 $H(x)$ 是复平面 $z = x + iy$ 上在圆盘 $K(0,R) = \{z : |z| < R\}$ 之外给定的解析函数, $H(\infty) = 0$, 在解析延拓下它的奇异点都置于一个区域 D_* 中, $0 \in D_*$. 要求找一个具有 Jordan 边界的有界单连通区域 D, $\bar{D}_* \subset D \subset \bar{D} \subset K(0,R)$, 使得在 $|z| > R$ 上有 $H(z) = U(z, D)$, 其中

$$U(z, D) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{1}{z - \zeta}\, d\xi\, d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta.$$

这个问题的解是一个函数 $z(t)$, 它把复 t 平面上的单位圆 $|t| < 1$ 共形映上($z = x + iy$)平面上的区域 D 并且满足条件 $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$.

设 D 是一个取定的具有 Jordan 边界的有界单连通区域, 又设函数 $U_e(z) = U(z, D)$, $z \in \mathbf{R}^2 \setminus D$. 则这个函数满足方程

$$z^*(s) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{U_e[z(t)]\,dt}{t - s},\ |s| > 1. \quad (3)$$

其中

$$z^*(s) = \overline{z\left[\frac{1}{\bar{s}}\right]},\ |s| \geqslant 1.$$

若 $z(t)$ 是方程(3)当其中 $U_e(z)$ 用上述函数 $H(z)$ 取代时的解, 又假定 $z(t)$ 在 $|t| < 1$ 是单叶的, $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$, 则 $H(z) = U(z, D)$ 在 $|z| > R$ 成立.

由方程(3)可得到一些关于函数 $U_e(z)$ 与 $z(t)$ 之间的关系. 例如, 若外部位势 $U_e(z)$ 可以越过整条边界 ∂D 解析延拓到 D 的内部, 则 $z(t)$ 在 $|t| = 1$ 是一个解析函数; 而且

$$U_e(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{z^k},\ |z| > R,\ c_m \neq 0,$$

蕴涵

$$z(t) = \alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m,\ \alpha_m \neq 0.$$

这个事实有时使有可能用闭形式来解平面的位势论中的反问题. 设 $H(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k/z^k$, $c_m \neq 0$. 则 $z(t)$ 所关联的非线性方程, 一般说来, 等价于一个用 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 为系数的非线性代数方程组. 一般说来, 函数 $z(t)$ 在 $|z| < 1$ 不是单叶的, 但可以作为这个代数方程组的解求得. 在圆盘 $|t| < 1$ 中满足 $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$ 的单叶解 $z(t)$ 构成的族就是所说的位势论中的反问题的解.

类似的研究可以在对数的单层位势的外部反问题的情形及在对数位势的内部反问题的情形中展开; 而且对内部与外部反问题都可以考虑变密度的情形.

参考文献

[1] Новиков, П., 《Докл. АН СССР》, 18 (1938), 3, 165 – 168.

[2] Тихонов, А. Н., 《Докл. АН СССР》, 39 (1943), 5, 195 – 198.

[3] Сретенский, Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М. Л., 1946.

[4] Иванов, В. К., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 20 (1956), 6, 793 – 818.

[5A] Иванов, В. К., 《Докл. АН СССР》, 105 (1955), 3, 409 – 411.

[5B] Иванов, В. К., 《Докл. АН СССР》, **106** (1956), 4, 598 – 599.

[6] Лаврентьев, М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962 (英译本: Lavrentiev, M. M. [M. M. Lavrent'ev], Some improperly posed problems of mathematical physics, Springer, 1967).

[7A] Прилепко, А. И., 《Дифференциальные уравнения》, **2** (1966), 1, 107 – 124.

[7B] Прилепко, А. И., 《Дифференциальные уравнения》, **3** (1967), 1, 30 – 44.

[7C] Прилепко, А. И., 《Дифференциальные уравнения》, **6** (1970), 1, 27 – 49

[7D] Прилепко, А. И., 《Дифференциальные уравнения》, **8** (1972), 1, 118 – 125.

[7E] Прилепко, А. И., 《Сиб. Матем. Ж.》, **6** (1965), 6, 1332 – 1356.

[7F] Прилепко, А. И., 《Сиб. Матем. Ж.》, **12** (1971), 3, 630 – 647.

[7G] Прилепко, А. И., 《Сиб. Матем. Ж.》, **12** (1971), 3, 630 – 647.

[7H] Прилепко, А. И., 《Сиб. Матем. Ж.》, **12** (1971), 6, 1341 – 1353.

[8] Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979 (英译本: Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Ya., Solutions of ill-posed problems, Winston, 1977).

А. И. Прилепко 撰

【补注】 由单层位势转换到双层位势及反过来的情况在[A4]中得到了考虑.

关于 Newton 位势的反问题, 要使得 $T_1 = T_2$ 及 $\mu_1 = \mu_2$, 可不必要求区域 T_α 是星形的, 见[A5].

参考文献

[A1] Anger, G., Inverse and improperly posed problems in differential equations, Akad. Verlag, 1979.

[A2] Lavrent'ev, M. M., Some improperly posed problems of mathematical physics and analysis, Amer. Math. Soc., 1986(译自俄文).

[A3] Schulze, B. W. and Wildenhain, G., Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Birkhäuser, 1977.

[A4] Ramm, A. G., Scattering by obstacles, Reidel, 1986, P.71.

[A5] Aharonov, D., Schiffer, M., and Zalcman, L., Potato Kugel, *Israel J. of Math.*, **40** (1981), 331 – 339.

吴炯圻 高琪仁 译

位势论的混合边值问题 [potential theory, mixed boundary value problems of; потенциала теории, смешанные краевые задачи]

【补注】 这样一类边值问题, 在边界的一部分上给定 Dirichlet 边界条件(见 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem)), 在其余部分上指定 Neumann 型边界条件(见 **Neumann 问题** (Neumann problem)). 混合边值问题在工程学的几乎所有分支都会遇到, 且最难求解. 上一世纪首先解决的是带电圆盘与球冠的问题([A1]). 所采用的方法被归类于 Green 函数法, 其主要缺陷是, 所涉及的 Green 函数是构造出来的而不是求出的. 构造过程的成功主要取决于研究者的创造才能与想象能力. 能够用这个方法解的问题不是很多. 本世纪的前半世纪发展了多种积分变换法. [A7] 描述了一些初期的结果. 在现代文献[A8], [A9]中可以找到解混合边值问题的两种较重要的方法: 导出对偶积分方程的积分变换法与对偶级数方程法. 这两种方法可以解轴对称问题, 而当需要解非轴对称问题时, 对每一种谐波的结果必须分别求得, 通常要采用一个很麻烦的过程, 当谐波的数目增加时变得越来越复杂. [A2] 系统地提出了一个新的一般方法, 使得首次有可能用初等方法求非轴对称问题的恰当的闭形式的解. 这种新方法也允许用解析方法处理非经典区域. [A2] 研究了多种形状的区域, 其解析解的精确性高得出人意外. 为了阐明新方法与老方法之间的显著差异, 这里以怎样用对偶积分方程来解圆盘问题为例说明之, 条件是在该圆盘上有一个**位势** (potential) $v_0 =$ 常数. 这必须求一个**调和函数** (harmonic function) V, 它在无穷远点取 0 值且在平面 $z = 0$ 上服从混合边界条件:

$$\left.\begin{aligned} V &= v_0, \quad \text{当 } \rho \leqslant a; \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 0, \quad \text{当 } \rho > a. \end{aligned}\right\} \tag{A1}$$

其解表示为形式

$$V(\rho, z) = \int_0^\infty A(t) e^{-tz} J_0(t\rho) \frac{dt}{t}. \tag{A2}$$

这里 J_0 是 0 阶的 **Bessel 函数** (Bessel functions), 而 $A(t)$ 此时仍是未知函数, 它将适当选取使之满足 (A1). 在 (A2) 中替换边界条件 (A1) 导出对偶积分方程

$$\int_0^\infty A(t) J_0(t\rho) \frac{dt}{t} = v_0, \quad \text{当 } 0 \leqslant \rho \leqslant a,$$

$$\int_0^\infty A(t) J_0(t\rho) \frac{dt}{t} = 0, \quad \text{当 } \rho > a.$$

利用不连续的 Weber-Schafheitlin 积分 (Weber-Schafheitlin integrals), 可以推出

$$A(t) = \frac{2}{\pi} v_0 \sin(at).$$

解 (A2) 现在可以写成

$$V(\rho,z)=\frac{2}{\pi}v_0\int_0^{\infty}e^{-tz}\sin(at)J_0(t\rho)\frac{dt}{t},$$

当 $z\geqslant 0$. (A3)

可见，即使对于最简单的问题求解也不易．

新方法建立在用柱坐标表示的两点之间的距离的一般积分表示式的基础上：

$$\frac{1}{R_0^{1+u}}=$$

$$=\frac{1}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+z^2]^{(1+u)/2}}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi u}{2}\times$$

$$\times\int_0^{l_1(\rho_0)}\frac{\lambda\left[\frac{x^2}{\rho\rho_0},\varphi-\varphi_0\right]x^u dx}{\{[l_1^2(\rho_0)-x^2][l_2^2(\rho_0)-x^2]\}^{(1+u)/2}}. \quad (A4)$$

这里 $|u|<1$，且引进下面符号：

$$\lambda(k,\psi)=\frac{1-k^2}{1+k^2-2k\cos\psi},$$

$$l_1(\rho_0)\equiv l_1(\rho_0,\rho,z)=$$

$$=\frac{1}{2}\{[(\rho+\rho_0)^2+z^2]^{1/2}-[(\rho-\rho_0)^2+z^2]^{1/2}\},$$

$$l_2(\rho_0)\equiv l_2(\rho_0,\rho,z)=$$

$$=\frac{1}{2}\{[(\rho+\rho_0)^2+z^2]^{1/2}+[(\rho-\rho_0)^2+z^2]^{1/2}\}.$$

(A4) 的主要特点是描述所连接的点之差异的参数的因式分解以及它们位置半径之间的角度已不再是放在无理式里面了．

新方法使有可能用初等方法来解一般的非轴对称问题．例如，考虑这样的问题，求一个位势，它在半空间 $z\geqslant 0$ 调和，在无穷远点等于 0，且在平面 $z=0$ 上服从下面的边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&V=v(\rho,\varphi),\quad 当\ \rho\leqslant a,\ 0\leqslant\varphi<2\pi,\\&\frac{\partial V}{\partial z}=0,\quad 当\ \rho>a,\ 0\leqslant\varphi<2\pi.\end{aligned}\right\}\quad (A5)$$

问题 (A5) 可以解释为带电圆盘在它的表面具非均匀位势的静电问题，或者解释为被压的圆形钻孔对弹性半空间的弹性接触问题；也可以有其他解释．这个问题称为内部问题，因为在圆盘内部规定了非零的条件．位势 V 可以通过单层位势表示如下：

$$V(\rho,\varphi,z)=\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{\sigma(\rho_0,\varphi_0)}{R_0}\rho_0 d\rho_0 d\varphi_0,\quad (A6)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&R_0=[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+z^2]^{1/2},\\&\sigma=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0}.\end{aligned}\right\}\quad (A7)$$

在 (A6) 中，替换边界条件 (A5) 导出控制积分方程

$$4\int_0^{\rho}\frac{dx}{(\rho^2-x^2)^{1/2}}\int_x^a\frac{\rho_0 d\rho_0}{(\rho_0^2-x^2)^{1/2}}\times$$

$$\times\mathscr{L}\left[\frac{x^2}{\rho\rho_0}\right]\sigma(\rho_0,\varphi)=V(\rho,\varphi). \quad (A8)$$

其中算子 $\mathscr{L}$ 定义为

$$\mathscr{L}(k)f(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(k,\varphi-\varphi_0)f(\varphi_0)d\varphi_0.$$

这种新方法的主要优越性是，控制积分方程表示成两个 Abel 型算子和一个 $\mathscr{L}$ 算子构成的序列．因为它们中的每一个的逆都是已知的、方程 (A8) 的恰当闭形式的解是 ([A2])：

$$\sigma(\lambda,\varphi)=\frac{1}{\pi^2 y}\mathscr{L}\left[\frac{y}{\zeta}\right]\frac{d}{dy}\int_y^a\frac{dt}{(t^2-y^2)^{1/2}}\times$$

$$\times\mathscr{L}\left[\frac{\zeta^2}{t}\right]\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\rho d\rho}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}\mathscr{L}\left[\frac{\rho}{\zeta}\right]v(\rho,\varphi).$$
(A9)

在 (A6) 中，用 (A9) 的逆替换可根据圆盘上预先规定的值来表示空间中的位势如下：

$$V(\rho,\varphi,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^a\frac{dl_1(t)}{[\rho^2-l_1^2(t)]^{1/2}}\times$$

$$\times\mathscr{L}\left[\frac{\rho}{l_2^2(t)}\right]\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}}\mathscr{L}(\rho_0)v(\rho_0,\varphi).$$

在 $v=v_0=$ 常数的特殊情况下，由最后一个表达式推出，

$$V(\rho,z)=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left[\frac{a}{l_2}\right],$$

它比起等价的解 (A3) 简单得多．

现在再考虑另一个基本的内部问题，在边界 $z=0$ 上用下面混合条件来刻画：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial z}=-2\pi\sigma(\rho,\varphi),\\&\qquad 当\ \rho\leqslant a\ 且\ 0\leqslant\varphi<2\pi,\\&V=0,\ 当\ \rho>a\ 且\ 0\leqslant\varphi<2\pi.\end{aligned}\right\}\quad (A10)$$

问题 (A10) 可以解释为在一个接了地的无限大的薄片

$\rho > a$的余集 $\rho \leqslant a$ 这 带电圆盘的静电问题. 在数学上一个类似的问题出现在当人们考虑一个形如一个便士(硬币)样的裂缝在受到法线方向任意的压力 σ 时的情形. 这个问题的恰当解具有形式([A2]):

$$V(\rho,\varphi,z) = 4\int_0^a \frac{d l_2(t)}{[l_2^2(t)-\rho^2]^{1/2}} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{\rho_0 d\rho_0}{(t^2-\rho_0^2)^{1/2}} \mathscr{L}\left[\frac{\rho\rho_0}{l_2^2(t)}\right]\sigma(\rho_0,\varphi).$$

相应的外部问题可以用类似的方法求解. 新方法已成功地应用于电磁学([A4]), 声学([A3])和扩散([A6])中的更复杂的问题. 其他可应用新方法的还有流体力学和热传递中的一些问题.

在各种坐标系下采用新方法使有可能有效地应用不同的几何学. [A5]已做了球面坐标的转换. 众所周知, 也可以转换为超球面坐标. 下面是一些有关的结果, 至今未发表.

具有超环面坐标 (v,u,φ) 与 (x,β,ψ) 的两点之间的距离可以写成

$$R_0 = \frac{2c\cosh(v/2)\cosh(x/2)}{\sqrt{\cosh v-\cos u}\sqrt{\cosh x-\cos\beta}} \times$$

$$\times\left[\tanh^2\left[\frac{V}{2}\right]+\tanh^2\left[\frac{X}{2}\right]+\right.$$

$$-2\tanh\left[\frac{V}{2}\right]\tanh\left[\frac{x}{2}\right]\cos(\varphi-\psi)+$$

$$\left.+\frac{\sin^2[(u-\beta)/2]}{\cosh^2(v/2)\cosh^2(x/2)}\right]^{1/2}. \quad (A11)$$

这里 c 是维数的参数. 利用前面的结果, 可以得到关于两点间距离的倒数的如下积分表示:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{\sqrt{\cosh v-\cos u}\sqrt{\cosh x-\cos\beta}}{\pi c} \times$$

$$\times\int_0^{t_1}\frac{\lambda\left[\frac{\tanh^2(\tau/2)}{\tanh(v/2)\tanh(x/2)},\varphi-\psi\right]d\tau}{\sqrt{\cosh v-\cosh\tau}\sqrt{\cosh x-\cosh\gamma}}. \quad (A12)$$

这里引入如下符号:

$$\cosh\gamma \equiv \cosh\gamma(\tau) \equiv \cosh\gamma(\tau,\beta,v,u) =$$

$$=\cosh\tau+\sin^2\left[\frac{u-\beta}{2}\right]\frac{\sinh^2\tau}{\cosh v-\cosh\tau},$$

$$t_1 \equiv t_1(x) \equiv t_1(x,\beta,v,u) = 2\tanh^{-1}$$

$$\left\{\frac{\sqrt{\cosh(x+v)-\cos(u-\beta)}-\sqrt{\cosh(x-v)-\cos(u-\beta)}}{2\sqrt{2}\cosh(x/2)\cosh(v/2)}\right\}$$

积分表达式(A12)的用途可从下面求球冠上 Dirichlet 问题解的过程中体现出来. 该解须在球冠表面上满足条件:

$$V = V(v,\varphi),\ 当\ 0\leqslant v\leqslant b,$$

$$u=\beta,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \quad (A13)$$

在空间里待求的位势可以通过单层分布表示为:

$$V(v,u,\varphi) =$$

$$= c^2\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{\sigma(x,\psi)\sinh x\,dx\,d\psi}{(\cosh x-\cos\beta)^2 R_0}, \quad (A14)$$

这里 σ 是电荷的分布, R_0 由(A11)定义. 在(A14)里替换(A12), 改变积分次序后得到,

$$V(v,u,\varphi) =$$

$$= 2c\sqrt{\cosh v-\cos u}\int_0^{t_1(b)}\frac{d\tau}{\sqrt{\cosh v-\cosh\tau}} \times$$

$$\times\int_\gamma^b \frac{\mathscr{L}\left[\frac{\tanh^2(\tau/2)}{\tanh(v/2)\tanh(x/2)}\right]\sigma(x,\varphi)\sinh x\,dx}{(\cosh x-\cos\beta)^{3/2}\sqrt{\cosh x-\cosh\gamma}} \quad (A15)$$

在(A15)中替换边界条件(A13), 从控制积分方程推出,

$$V(v,\varphi) =$$

$$= 2c\sqrt{\cosh v-\cos\beta}\int_0^v\frac{d\tau}{\sqrt{\cosh v-\cosh\tau}} \times$$

$$\times\int_\tau^b \frac{\mathscr{L}\left[\frac{\tanh^2(\tau/2)}{\tanh(v/2)\tanh(x/2)}\right]\sigma(x,\varphi)\sinh x\,dx}{(\cosh x-\cos\beta)^{3/2}\sqrt{\cosh x-\cosh\tau}}. \quad (A16)$$

(A16)的恰当闭形式解是

$$\sigma(s,\varphi) =$$

$$= -\frac{(\cosh s-\cos\beta)^{3/2}}{2\pi^2\sinh s}\mathscr{L}\left[\tanh\frac{s}{2}\right]\times$$

$$\times\frac{d}{ds}\int_s^b\frac{\sinh y\,dy}{\sqrt{\cosh y-\cosh s}}\mathscr{L}\left[\coth^2\frac{y}{2}\right]\times$$

$$\times\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{\mathscr{L}[\tanh(v/2)]V(v,\varphi)\sinh v\,dv}{\sqrt{\cosh v-\cos\beta}\sqrt{\cosh y-\cosh v}}. \quad (A17)$$

为了通过球冠上位势的值得到空间里的位势, 可以在(A15)中用(A17)代入, 得到如下结果:

$$V(v,u,\varphi) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\cosh v-\cos u} \times$$

$$\times\int_0^b\frac{dt_1}{\sqrt{\cosh v-\cosh t_1}}\mathscr{L}\left[\frac{\tanh(v/2)}{\tanh^2(t_2/2)}\right]\times$$

$$\times \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\sinh y \sqrt{[\tanh(y/2)]}\, F(y,\varphi)\,dy}{\sqrt{\cosh y-\cos\beta}\,\sqrt{\cosh x-\cosh y}},$$

这里 $t_2 \equiv t_2(x,\beta,v,u) = 2\tanh^{-1}$

$$\left\{\frac{\sqrt{\cosh(x+v)-\cos(u-\beta)}+\sqrt{\cosh(x-v)-\cos(u-\beta)}}{2\sqrt{2}\cosh(x/2)\cosh(v/2)}\right\}$$

如何确定完善的坐标使得新的方法能成功地应用，这一问题尚未解决．

参考文献

[A1] Hobson, E. W., On Green's function for a circular disc with application to electrostatic problems, *Trans. Cambrige Philos. Soc.*, **18** (1990), 277－291.

[A2] Fabrikant, V. I., Applications of potential theory in mechanics. Selection of new results. Kluwer, 1989.

[A3] Fabrikant, V. I., *J. Sound and Vibration*, **121** (1988), 1－12.

[A4] Fabrikant, V. I., Potential of several arbitrarily located disks, *Austral. Math. Soc. Ser., B* **29** (1988), 342－351.

[A5] Fabrikant, V. I., Mixed problems of potential theory in spherical coordinates, *Z. Angewandte Math. Mech.*, **67** (1987), 507－518.

[A6] Fabrikant, V. I., *J. Applied Phys.*, **61** (1987), 813－616.

[A7] Sneddon, I. N., Mixed boundary value problems in potential theory, North-Holland, 1966.

[A8] Ufliand, Ia. S. [Ya. S. Ufliand], Survey of articles on the application of integral transforms in the theory of elasticity, Applied Math. Res. Group File, PSR-24/6, North Carolina State Univ.（译自俄文）．

[A9] Ufliand, Ya. S., Method of dual equations in mathematical physics, Leningrad, 1977（俄文）．

V. I. Fabrikant 撰　高琪仁　吴炯圻 译

位势法 [potentials, method of; потенциалов метод]

把数学物理中的一些边值问题化为积分方程进行研究的方法；这种方法在于把这些问题的解表示为（广义）位势的形式．

设在 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 中给定一个二阶椭圆型偏微分方程

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n}\left[a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right]+\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i}+cu = f(x), \qquad (1)$$

具有足够光滑的系数 $a_{ij}=a_{ji}=a_{ij}(x)$, $e_i=e_i(x)$, $c(x)\leqslant 0$ 以及右端 $f(x)$；并且设在某个有界区域外 $c(x) < -k^2 < 0$，而在其内部包含着区域 D, D 具有 C^1 类边界 $S=\partial D$．这时，(1) 的任何 $C^2(D\cup S)$ 类的解 $u(x)$ 都能表示为三个（广义）位势的和：体积质量位势（见 **Newton 位势**（Newton potential））

$$\int_D E(x, y)\rho(y)dy, \qquad (2)$$

单层位势（simple-layer potential）

$$\int_S E(x, y)\sigma(y)ds_y \qquad (3)$$

和**双层位势**（double-layer potential）

$$\int_S Q_y[E(x, y)]\mu(y)ds_y, \qquad (4)$$

其中 $E(x, y)$ 是 (1) 的主**基本解**（fundamental solution），符号 Q_y 表示作用在点 $y\in S$ 上的算子

$$Q_y v = a\frac{\partial v}{\partial N} - bv,$$

N 是点 $y\in S$ 上的单位余法线向量，

$$a^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cos(\nu, y_j)\right]^2,$$

$$b=\sum_{i=1}^{n} e_i\cos(\nu, y_i)$$

ν 是点 $y\in S$ 上的单位外法向量．位势密度 $\rho(y)$, $\sigma(y)$ 和 $\mu(y)$ 是在 D 中或 S 上的足够光滑的函数．

位势论（potential theory）一条中针对 L 是 **Laplace 算子**（Laplace operator）的情况叙述的调和位势的一切可微性和边界性质，对于位势 (2)－(4) 也成立．根据这些性质，就可把形如 (1) 的椭圆型方程的边值问题化为积分方程，所用方法与在**位势论**（potential theory）一条中处理调和函数的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题的方法相同．

参考文献

[1] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type. Springer, 1970.

[2] Бицадзе, А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966（英译本：Bitsadze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968）．

[3] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981（英译本：Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, M. Dekker, 1971）

[4] Купрадзе, В. Д., Методы потенциала в теории упругости, М., 1963.

[5] Milne-Thomson, L. M., Theoretical hydrodynamics, Macmillan, 1949

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Král, J., Integral operators in potential theory, Springer, 1980.

[A2] Simader, C. G., On Dirichlet's boundary value prob-

lem, Springer, 1972

[A3] Colton, D. and Kress, R., Integral equation methods in scattering theory, Wiley, 1983.

[A4] Jawson, M. and Symm, G., Integral equation methods in potential theory and elastostatics, Acad. Press, 1977.

杜小杨 译

幂 [power; степень]

最初意义下（正整数幂）是 n 个相同因子的乘积，记为 $a^n = a \cdots a$（n 次相乘），其中 a 是底，n 是指数，而 a^n 就是幂．幂的基本性质有：

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ (a^n)^m = a^{nm}.$$

幂概念的进一步推广，包括零幂：$a^0 = 1$（若 $a \neq 0$）；负幂：$a^{-n} = 1/a^n$；分数次幂：$a^{n/m} = (a^{1/m})^n$；以及指数为无理数的幂：$a^\alpha = \lim_{r_n \to \alpha} a^{r_n}$，其中 r_n 是收敛于 α 的任意有理数列．复数为底的幂（见 **de Moivre 公式**（de Moivre formula））以及底和指数均为复数的幂（按定义，$z^w = e^{w \operatorname{Ln} z}$）都是要研究的．　БСЭ-3

【补注】 除上述三条性质外，还有第四条性质：

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

这四条性质统称为指数定律（laws of exponents）．

王斯雷 译

幂函数 [power function; степенная функция]

函数 $f: x \mapsto y$，形式为

$$y = x^a,$$

其中 a 是一个常数．如果 a 是整数，则幂函数是有**理函数**（rational function）的特殊情况．当 x 和 a 具有复数值时，如果 a 不是整数，则幂函数不是单值的．

对于固定的实数 x 和 a，数 x^a 是一个**幂**（power），因此 $y = x^a$ 的性质可由幂的性质推出．

当 $x > 0$ 时，对任何实数 a，幂函数 x^a 有定义，而且是正的．当 $x \leqslant 0$ 时，幂函数 x^a 定义情况如下．

a) 当 $x = 0$ 时，如果 $a > 0$，则幂函数 x^a 定义为 0，如果 $a < 0$，则没有定义．对于一切 x，x^0 定义为 1；特别是，$0^0 = 1$．

b) 如果 n 是自然数，则对于一切 x，幂函数 x^n 有定义，而对于一切 $x \neq 0$，幂函数 $1/x^n = x^{-n}$ 有定义．因此，$x^1 = x$，而且如果 $n > 1$，则 $x^n = x \cdot x^{n-1}$．

c) 当 n 是奇自然数时，对于一切实数 x，幂函数 $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ 有定义，当 $x < 0$ 时，是负的．但是在这种情况下，规定幂函数 $x^{1/n}$ 仅对 $x \geqslant 0$ 有定义，有时是方便的．当 m/n 是不可约分数时，对于幂函数 $x^{m/n}$ 也可作类似的规定．因此，$(x^{1/n})^n = x$，$x^{m/n} = (x^{1/n})^m$

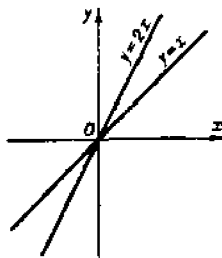


图 a

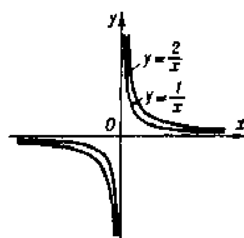


图 b

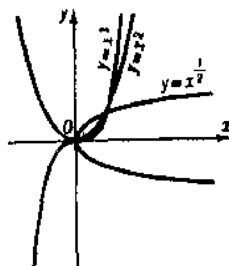


图 c

通常在 $x > 0$ 和 a 是实数的情况下来考察函数 x^a 的性质，虽然其中有许多性质当 $x \leqslant 0$ 且例如 a 是自然数时也成立．

形式为 $y = cx^a$ 的函数，其中 c 是常系数，当 $a = 1$ 时表示成正比例（direct proportionality）（其图形是通过坐标原点的直线（图a）），而当 $a = -1$ 时表示成反比例（inverse proportionality）（其图形是等边双曲线，中心在坐标原点，渐近线为两坐标轴（图b））．物理学中的许多定律在数学上都能用形如 $y = cx^a$ 的函数来表示．

当 $x > 0$ 时，幂函数 x^a 是连续的、单调的（当 $a > 0$ 时单调增加，当 $a < 0$ 时单调减小）．无限可微的，且在每个点 $x_0 > 0$ 的邻域内能够展开为 **Taylor 级数**（Taylor series）．而且，

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

当 $|x - x_0| < |x_0|$ 时，

$$x^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x_0^{a-n} (x - x_0)^n,$$

其中 $\binom{a}{n}$ 是**二项式系数**(binomial coefficients).

在复数域中,对于一切 $z \neq 0$,幂函数 z^a 由下列公式来定义:

$$z^a = e^{a\operatorname{Ln}z} = e^{a(\ln|z| + i\arg z + 2k\pi i)}, \qquad (*)$$

其中 $k = 0, \pm 1, \cdots$. 如果 a 是整数,则幂函数 z^a 是单值的:

$$z^a = |z|^a e^{ia\arg z}.$$

如果 a 是有理数($a = p/q$,其中 p 和 q 是互素的),则幂函数 z^a 取 q 个不同的值:

$$(z^a)_k = |z|^a e^{ia\arg z}\varepsilon_k,$$

其中 $\varepsilon_k = e^{2k\pi i/q}$ 是单位 1 的 q 次方根: $\varepsilon_k^q = 1$, $k = 0, \cdots, q-1$. 如果 a 是无理数,则 z^a 有无穷多个值;对于不同的 k,因子 $e^{a2k\pi}$ 取不同的值. 对于 a 的非实数的复值,幂函数 z^a 由同样的公式(*)来定义. В. И. Битюцков 撰

【补注】 还要注意公式(*),符号 e^w 是指数函数 exp 在复数 w 上的值 $\exp(w)$ 的简写. 这个函数由级数

$$\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

来定义,它在每个复数 w 上(绝对)收敛. 注意:当 $w = n = 0$ 时,$n! = w^n = 1$.

在(*)中取 $-\pi < \arg z \leq \pi$, $k = 0$,便得到主值. 如果 $z = a = i$,则得到一个有趣的例子:

$$i^i = e^{i\operatorname{Ln}i} = e^{i \cdot i\arg i} = e^{-\pi/2}.$$

参考文献

[A1] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A2] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964 (英译本: Blackie, 1951).

[A3] Marsden, J., Basic complex analysis, Freeman, 1973.

杜小杨 译

检验的功效函数[power function of a test; мощности критерия функция]

表征**统计检验**(statistical test)优劣的函数. 设随机向量 X 取值于样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$;需要根据 X 的实现 x 检定假设 H_0 对备选假设 H_1. 这里,H_0:假设 X 的概率分布 P_θ 属于子集 $H_0 = \{\mathsf{P}_\theta: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta\}$, H_1:假设

$$\mathsf{P}_\theta \in H_1 = \{\mathsf{P}_\theta: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0\}.$$

记 $\varphi(\cdot)$ 为检定 H_0 对 H_1 所用统计检验的临界函数. 那么,

$$\beta(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} \varphi(x)\, d\mathsf{P}_\theta(x), \theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \qquad (*)$$

称为以 $\varphi(\cdot)$ 为临界函数的统计检验的功效函数(power function of the statistical test). 由(*)可见,当 X 服从分布律 $\mathsf{P}_\theta(\theta \in \Theta)$ 时,$\beta(\theta)$ 是检定 H_0 对 H_1 的统计检验否定假设 H_0 的概率.

在由 J. Neyman 和 E. Pearson 创立的统计假设检验理论中,复合假设 H_0 对复合备选假设 H_1 的检验问题,是用检验的功效函数描述的. 旨在构造这样的统计检验,使得在对于一切 $\theta \in \Theta_0$, $\beta(\theta) \leq \alpha$ 的条件下,当 $\theta \in \Theta_1$ 时 $\beta(\theta)$ 取最大值. 其中 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 称做检验的显著性水平(significance level)——当 H_0 事实上成立时错误否定 H_0 的概率的给定允许值.

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946(中译本: H. 克拉美,统计学数学方法,上海科学技术出版社, 1966).

[3] Waerden, H. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

统计检验的功效[power of a statistical test; мощность статистического критерия]

对于简单假设 H_0 对简单假设 H_1 的统计检验(statistical test),在 H_1 事实上成立的情形下否定 H_0 的概率. 对于被检定假设 H_0 的对立假设 H_1 为复合假设的情形(H_0 本身可以是简单假设也可以是复合假设,记作 $H_0: \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$, $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$), H_0 对 H_1 的统计检验的功效,定义为功效函数 $\beta(\theta)(\theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1)$ 到 Θ_1 的收缩.

除上述定义外,还广泛采用如下定义:检定 H_0: $\theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ 对复合备选假设 $H_1: \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ 的统计检验的功效为 $\inf_{\theta \in \Theta_1} \beta(\theta)$,其中 $\beta(\theta)$ 是该检验的**功效函数**(power function of a test).

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[2] Hajek, J. and Sidak, Z., Theory of rank test, Acad. Press, 1967.

[3] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[4] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946(中译本: H. 克拉美,统计学数学方法,上海科学技术出版社, 1966).

М. С. Никулин 撰 周概容 译

幂剩余[power residue; степенной вычет], 模 m 的

对于给定的整数 $n>1$，使同余式(congruence)

$$x^n \equiv a \pmod m$$

可解的且与 m 互素的整数 a．数 a 叫做模 m 的 n 次剩余(residue)．如果此同余式不可解，则称 a 为模 m 的 n 次非剩余(non-residue)．当 $n=2$ 时，幂剩余和非剩余称为二次的(quadratic)；$n=3$ 时称为三次的(cubic)；而 $n=4$ 时称为四次的(biquadratic)．

对于素数模 $m=p$ 的情形，同余式 $x^n \equiv a \pmod p$ 的可解性问题可用 Euler 检验(Euler test)解决：设 $q=(n,p-1)$，则同余式 $x^n \equiv a \pmod p$ 可解的充要条件为

$$a^{(p-1)/q} \equiv 1 \pmod p.$$

如果这个条件得以满足，那么原同余式对模 p 有 q 个不同的解．由此检验法可知，在数 $1,\cdots,p-1$ 中恰好有 $(p-1)/q$ 个模 p 的 n 次剩余和 $(q-1)\cdot(p-1)/q$ 个 n 次非剩余．见**幂剩余和非剩余的分布**(distribution of power residues and non-residues)．

C．A．Степанов 撰

【补注】 在二次剩余的情形，可以定义幂剩余符号(power-residue symbol)．设 K 是一个含有 n 次单位根的数域，A 是 K 的整数环而 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想．又设 $\mathfrak{p}$ 与 n 互素而 $a\in A$．如果 ζ_n 是一个 n 次单位原根，且有

$$a^{(N(\mathfrak{p})-1)/n} \equiv \zeta_n^r \pmod{\mathfrak{p}},$$

其中 $N(\mathfrak{p})$ 是 $\mathfrak{p}$ 的范数，即商环 $A/\mathfrak{p}$ 的元素的个数．那么就定义幂剩余符号为：

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right)_n = \zeta_n^r.$$

当 $(a/\mathfrak{p})_n=1$ 时，a 是模 $\mathfrak{p}$ 的 n 次幂剩余，即 $a\equiv b^n \pmod{\mathfrak{p}}$ 对于 $b\in A$ 是可解的．当 $K=\mathbf{Q}$，$n=2$ 且 $\mathfrak{p}=p\neq 2$ 时就回到了二次剩余符号，见 **Legendre 符号**(Legendre symbol)．

同样存在幂剩余互反律(power-residue reciprocity laws)．可见参考文献[A2]，其中当 $K=\mathbf{Q}$，$n=2$ 时，就成为特殊的二次互反律．

参考文献

[A1] Narkiewicz, W., Elementary and analytic theory of algebraic numbers, Springer & PWN, 1990, p. 394 ff.

[A2] Neukirch, J., Class field theory, Springer, 1986, p. IV §9.

戚鸣皋 译 潘承彪 校

幂级数[power series; степенной ряд]

1) 单复变量 z 的幂级数(power series in one complex variable z)．形如

$$s(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k \tag{1}$$

的函数项级数，a 是其中心(centre)，b_k 是其系数(coefficient)，而 $b_k(z-a)^k$ 是其项(term)．存在称为幂级数(1)的收敛半径(radius of convergence)的数 $r(0\leqslant r\leqslant\infty)$，它由 Cauchy-Hadamard 公式(Cauchy-Hadamard formula)

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}|b_k|^{1/k}} \tag{2}$$

确定，使当 $|z-a|<r$ 时级数(1)绝对收敛，而当 $|z-a|>r$ 时此级数发散(Cauchy-Hadamard 定理(Cauchy-Hadamard theorem))；因之复 z 平面 $\mathbf{C}$ 中的圆盘 $D=\{z\in\mathbf{C}: |z-a|<r\}$ 称为此幂级数的收敛圆盘(disc of convergence)(图1)．

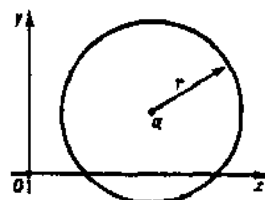


图 1

当 $r=0$ 时，收敛圆盘退化为单个点 $z=a$，例如对于幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}k!(z-a)^k$ 就是如此(这种情况无甚意义，因而以下假定 $r>0$)．当 $r=\infty$ 时，收敛圆盘与整个复平面 $\mathbf{C}$ 相同，例如对于幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(z-a)^k/k!$ 就是如此．当 $0<r<\infty$ 时，级数(1)的收敛集(set of convergence)即它的所有收敛点的集合，由收敛圆盘 D 添加收敛圆(circle of convergence) $S=\{z\in\mathbf{C}: |z-a|=r\}$ 上全部或某些点或不添加任何点构成．此时收敛圆盘是该幂级数绝对收敛点集的内部．

幂级数(1)在 D 内部即在任一紧集 $K\subset D$ 上绝对并一致收敛；因而此级数的和(sum of the series) $s(z)$ 至少在 D 内有定义并且是一个正则**解析函数**(analytic function)．它在 S 上至少有一个奇点，对于它和 $s(z)$ 不可能解析延拓．存在在 S 上恰有一个奇点的幂级数；也存在整个圆 S 都由奇点组成的幂级数．

当 $r=\infty$ 时，级数(1)或者中断即是一个多项式

$$s(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k(z-a)^k,$$

或者它的和是一个超越整函数，它在整个平面 $\mathbf{C}$ 中正则且在无穷远处具有一个**本质奇点**(essential singular point)．

反过来，函数 $f(z)$ 在点 a 处的解析性概念本身基于 $f(z)$ 在 a 的一个邻域内可展开为幂级数即

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k$$

这一事实，此幂级数是 $f(z)$ 的 **Taylor 级数**（Taylor series），即其系数由公式

$$b_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

确定．因此，幂级数的唯一性性质（uniqueness property）是重要的：如果幂级数（1）的和 $s(z)$ 在一个无穷集 $E\subset D$ 上等于零且 E 在 D 内有极限点，则 $s(z)\equiv 0$，从而所有 $b_k=0$，$k=0,1,\cdots$．特别地，如果在某点 $z_0\in D$ 的一个邻域内 $s(z)=0$，则 $s(z)\equiv 0$，从而所有 $b_k=0$．

这样，每个幂级数是其和的 Taylor 级数．

设除（1）外另有一个中心 a 相同、收敛半径为 $r_1>0$ 的幂级数

$$\sigma(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \tag{3}$$

则至少在圆盘 $\Delta=\{z\in \mathbf{C}: |z-a|<\rho\}$ $(\rho=\min(r, r_1))$ 内，级数（1）与（3）按下列公式的加法（addition），减法（subtraction）和乘法（multiplication）成立：

$$\left.\begin{aligned} s(z)\pm\sigma(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}(b_k\pm c_k)(z-a)^k,\\ s(z)\sigma(z)&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n}\right)(z-a)^k.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

交换律、结合律和分配律成立，而减法是加法的逆运算．这样，具有固定中心且收敛半径为正的幂级数的集合是域 **C** 上的一个**环**（ring）．如果 $c_0\neq 0$，则幂级数的除法（division）是可能的：

$$\frac{s(z)}{\sigma(z)}=\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-a)^k, \tag{5}$$

其中系数 d_k 由无穷多个方程的方程组

$$\sum_{n=0}^{k} c_n d_{k-n}=b_k,\ k=0,1,\cdots$$

唯一确定．当 $c_0\neq 0$，$r>0$，$r_1>0$ 时，（5）的收敛半径也是正的．

为简单起见，在（1）和（3）中令 $a=\sigma(0)=c_0=0$；此时复合函数 $s(\sigma(z))$ 在坐标原点的一个邻域内正则，而把它展开为幂级数的过程称为以级数代入级数（substitution of a series in a series）：

$$s(\sigma(z))=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right)^n=\sum_{m=0}^{\infty} g_m z^m. \tag{6}$$

（6）中的系数 g_m 可作为各个函数 $b_n(\sigma(z))^n$ 的展开式中 z^m 的系数之和求得，而 $(\sigma(z))^n$ 的展开式由 $\sigma(z)$ 的级数自乘 n 次得到．级数（6）当 $|z|<\rho$ 时收敛，这里 ρ 取得使 $|\sigma(z)|<r$．再令 $a=\sigma(0)=c_0=0$ 并令 $c_1=\sigma'(0)\neq 0$，$w=\sigma(z)$．构造反函数 $z=\varphi(w)$（它在所给条件下在原点的一个邻域内正则）的幂级数问题，称为级数（3）的反演（inversion of the series），其解为 Lagrange 级数（Lagrange series）：

$$z=\varphi(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\zeta}{\sigma(\zeta)}\right]_{\zeta=0}^{(n)} w^n$$

（关于更一般的反演问题，见 **Bürmann-Lagrange 级数**（Bürmann-Lagrange series））．

如果幂级数（1）在点 $z_0\neq a$ 处收敛，则它对满足 $|z-a|<|z_0-a|$ 的所有 z 绝对收敛；这就是 Abel 第一定理（Abel first theorem）的实质．这一定理也使建立级数（1）收敛域的形状成为可能．Abel 第二定理（Abel second theorem）提供了更细致的结论：如果级数（1）在收敛圆 S 上的点 $z_0=a+re^{i\theta_0}$ 处收敛，则

$$\lim_{\rho\to r} s(a+\rho e^{i\theta_0})=s(z_0),$$

即此级数的和 $s(z)$ 在点 $z_0\in S$ 处具有径向边值 $s(z_0)$ 从而它沿半径 $z=a+\rho e^{i\theta_0}$ $(0\leqslant\rho\leqslant r)$ 连续；更进一步，$s(z)$ 还有非切向边值 $s(z_0)$（见**角边界值**（angular boundary value））．这一定理可追溯到 1827 年并可看作研究幂级数边界性质的最早主要结果．不对所给幂级数的系数加以额外的限制，Abel 第二定理的逆不能成立．然而，如果假定，例如 $b_k=o(1/k)$，此时若 $\lim_{\rho\to r} s(a+\rho e^{i\theta_0})=s_0$ 存在，则 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z_0-a)^k$ 收敛到 s_0．Abel 第二定理的这类部分逆定理，统称为 **Tauber 定理**（Tauberian theorems）．

关于幂级数的边界性质以及特别地关于幂级数奇点的位置的其他结果，见 **Hadamard 定理**（Hadamard theorem）；**解析延拓**（analytic continuation）；**解析函数的边界性质**（boundary properties of analytic functions）；**Fatou 定理**（Fatou theorem）（亦见 [3]－[5]）．

2）多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ $(n>1)$ 的幂级数（power series in several complex variables）或多重幂级数（multiple power series）是形如

$$s(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty} b_k(z-a)^k \tag{7}$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n=0}^{\infty} b_{k_1\cdots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n}$$

的函数项级数，其中 $b_k=b_{k_1\cdots k_n}$，$(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}\cdots(z_n-a_n)^{k_n}$，$|k|=k_1+\cdots+k_n$，而此幂级数的中心 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 是复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的一个点．此幂级数的绝对收敛点的集合的内部 D，称为它的收敛域

(domain of convergence)；但当 $n>1$ 时，它没有类似于 $n=1$ 时的简单形式．$\mathbf{C}^n$ 的一个区域 D 是某个幂级数(7)的收敛域，当且仅当 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的对数凸的完全 **Reinhardt 区域**(Reinhardt domain)．如果某个点 $z^0\in D$，则多圆盘 $U(a,r)=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_\nu-a_\nu|<r_\nu,\ \nu=1,\cdots,n\}$ 的闭包 $\overline{U}(a,r)$ 也包含于 D 中且级数(7)在 $\overline{U}(a,r)$ 上绝对并一致收敛，这里 $r_\nu=|z_\nu^0-a_\nu|$，$r=(r_1,\cdots,r_n)$ (Abel 第一定理的推广)．多圆盘 $U(a,r)$ $(r=(r_1,\cdots,r_n))$ 称为级数(7)的收敛多圆盘(polydisc of convergence)，如果 $U(a,r)\subset D$ 且任一较大的多圆盘 $\{z\in\mathbf{C}^n:|z_\nu-a_\nu|<r_\nu'\}$ (其中 $r_\nu'\geqslant r_\nu$，$\nu=1,\cdots,n$ 且至少有一个不等式是严格的)中有使级数(7)发散的点．收敛多圆盘的诸半径 r_ν 称为共轭收敛半径(conjugate radii of convergence)并满足类似于 Cauchy-Hadamard 公式(Cauchy-Hadamard formula)的关系：

$$\limsup_{|k|\to\infty}(|b_k|r^k)^{1/|k|}=1,$$

其中 $|b_k|=|b_{k_1\cdots k_n}|$，$r^k=r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}$．收敛域 D 为收敛多圆盘所逼近．例如，对于级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(z_1,z_2)^k$，收敛多圆盘的形状为

$$U\left(0,r_1,\frac{1}{r_1}\right)=$$

$$=\left\{z=(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2:|z_1|<r_1,\ |z_2|<\frac{1}{r_1}\right\},$$

而收敛域为 $D=\{z\in\mathbf{C}^2:|z_1||z_2|<1\}$ (图 2 在绝对值象限中表示了这一情形)．

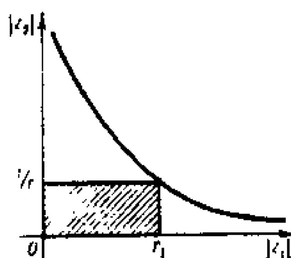


图 2

幂级数的唯一性性质在下述意义下保持：如果在点 z^0 在 $\mathbf{C}^n$ 中的一个邻域内(甚至只需在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个邻域即在集合 $\{z=x+iy\in\mathbf{C}^n:|x-\operatorname{Re}a|<r,\ y=\operatorname{Im}a\}$ 内)有 $s(z)=0$，则 $s(z)\equiv 0$，从而所有 $b_k=0$．

粗略地说，对多重幂级数的运算可按 $n=1$ 情形中同样的规则进行．关于多重幂级数的其他性质，见例如[8]，[9]．

3) **实变量** $x=(x_1,\cdots,x_n)$ $(n\geqslant 1)$ **的幂级数**(power series in real variables)是形如

$$s(x)=\sum_{|k|=0}^{\infty}b_k(x-a)^k \tag{8}$$

的函数项级数，其中用了类似于(7)中所用的简略记号，$a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$ 是此级数的中心．如果级数(8)在平行六面体 $\Pi=\{x\in\mathbf{R}^n:|x_k-a_k|<r_k,\ k=1,\cdots,n\}$ 中绝对收敛，则它也在多圆盘 $U(a,r)=\{z\in\mathbf{C}^n:|z-a|<r\}$ $(r=(r_1,\cdots,r_n))$ 中绝对收敛．此级数的和 $s(x)$ 在 Π 中是实变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的解析函数，它可以形如

$$s(z)=\sum_{|k|=0}^{\infty}b_k(z-a)^k \tag{9}$$

的幂级数解析延拓到 $U(a,r)$ 中复变量 $z=x+iy=(z_1=x_1+iy_1,\cdots,z_n=x_n+iy_n)$ 的解析函数 $s(z)$．如果 D 是(9)在 $\mathbf{C}^n$($\mathbf{C}$ 是 $z=x+iy$ 的空间)中的收敛域，则它到实变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的空间 $\mathbf{R}^n$ 上的限制 Δ 是(8)的收敛域，$\Delta\subset D$．特别当 $n=1$ 时，D 是收敛圆盘而其限制 Δ 是 $\mathbf{R}$ 上的收敛区间(interval of convergence)，且 $\Delta=\{x\in\mathbf{R}:a-r<x<a+r\}$，其中 r 是收敛半径．

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967 (中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)．

[3] Titchmarsh, E., The theory of functions, Oxford Univ. Press, 1979 (中译本：E. 梯其玛希，函数论，科学出版社，1962)．

[4] Bieberbach, L., Analytische Fortsetzung, Springer, 1955.

[5] Landau, E., Gaier, D., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Springer, reprint, 1986.

[6] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本：Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966)．

[7] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1-2, М., 1976 (第二卷英译本：Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992)．

[8] Bochner, S., Martin, W. T., Several complex variables, Priceton Univ. Press, 1948.

[9] Янушаускас, А. И., Двойные ряды, Новосиб., 1980.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 通过幂级数研究解析函数的方法称为 Weierstrass 方法 (Weierstrass approach). 关于多少更为抽象的处理 (C 代之以适当的域), 见 [A3], 第 2.3 章 (亦见**形式幂级数** (formal power series)).

关于多复变量情形见 [A1], [A2].

参考文献

[A1] Rudin, W., Function theory in polydiscs, Benjamin, 1969.

[A2] Narasimhan, R., Several complex variables, Univ. Chicago Press, 1971 (中译本: R. 纳拉西姆汉, 多复变函数, 科学出版社, 1985).

[A3] Diederich, K., Remmert, R., Funktionentheorie, 1, Springer, 1972. 沈永欢 译

Prandtl 方程 [Prandtl equation; Прандтля уравнение]

有限翼展的飞机机翼的基本积分微分方程. 在推导 Prandtl 方程时做了假设, 这些假设允许认为机翼的每个元仿佛是处于绕翼的平面平行气流中. 这使有可能把机翼的几何特性与它的空气动力学性质联系起来. 于是, 所得的 Prandtl 方程具有形式

$$\frac{F(t_0)}{B(t_0)} + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{F'(t)}{t-t_0}\,dt = f(t_0),$$

$$-a < t_0 < a, \tag{1}$$

式中 F 是未知函数, $F'(t) = dF(t)/dt$, B 和 f 是给定的函数, $B(t) = cb(t)$, $f(t) = v\omega(t)$, 广义积分理解为 Cauchy 主值的意义. 在方程中出现的量的意义如下: $2a$ 是机翼的翼展, 它假定相对 yz 平面是对称的且 z 轴方向与无穷远处气流的方向相重合; $b(x)$ 代表对应横坐标 x 的翼剖面翼弦; $F(x)$ 是该剖面周围气流的环流; c 是常数; v 是无穷远处气流的速度; ω 是依赖于剖面曲率和机翼扭曲的函数 (见 [1]). 根据实验, 设 $F(-a) = F(a)$.

Prandtl 方程只在非常严格的假设下才能以封闭形式求解. 在一般情况下 Prandtl 方程可以化为 **Fredholm 方程** (Fredholm equation) (见 [3]).

Prandtl 方程是以 L. Prandtl 的名字命名的.

参考文献

[1] Голубев, В. В., Лекции по теории крыла, М.-Л., 1949.

[2] Kármán, T. von and Burgers, J. M., General aerodynamic theory - Perfect fluid, Springer, 1936.

[3] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968 (英译本: Muskhelishvili, N. I., Singular integral equations, Wolters-Noordhoff, 1972.)

Б. В. Хведелидзе 撰 李维新 译

Prandtl 数 [Prandtl number; Прандтля число]

流体和气体中的热过程相似性的特征量之一. Prandtl 数只依赖于介质的热力学状态, 且定义为

$$\Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

其中 $\nu = \mu/\rho$ 是运动粘性系数, μ 是动力粘性系数, ρ 是密度, λ 是热传导系数, $a = \lambda/\rho c_p$ 是热扩散系数, c_p 是介质的定压比热.

Prandtl 数与其他相似性特征量 **Péclet 数** (Péclet number) 和 **Reynolds 数** (Reynolds number) 的关系为 $\Pr = \mathrm{Pe}/\mathrm{Re}$.

Prandtl 数是以 L. Prandtl 的名字命名的.

根据 БСЭ-3 中同名条目的材料.

【补注】 Prandtl 数同时也称为 Darcy-Prandtl 数.

参考文献

[A1] Curle, N. and Davies, H. J., Modern fluid dynamics, II, v. Nostrand Reinhold, 1971.

[A2] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Dover, reprint, 1981.

[A3] Yih, C.-S., Stratified flows, Acad. Press, 1980.

[A4] Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., Гидродинамика, Физматгиз, 1958 (参阅中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹, 连续介质力学, 人民教育出版社, 1958). 李维新 译

准基 [pre-base; предбаза], 子基 (subbase)

拓扑空间 (topological space) X 的开子集族 γ, 使得 γ 中所有有限多个元素之交的全体构成 X 的一个基 (base). М. И. Войцеховский 撰

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

胡师度 白苏华 译

准紧空间 [pre-compact space; предкомпактное пространство], 完全有界空间 (totally-bounded space);

一个**一致空间** (uniform space) X, 对其任何近域 U, 存在 X 的一个有限覆盖, 由 U 的集合组成. 换言之, 对每个近域 $U \subset X$, 存在有限子集 $F \subset X$, 使得 $X \subset U(F)$. 一致空间准紧的充要条件是: 它的每一个网 (见**网** (**拓扑空间中集合的**) (net (of sets in a topological space)) 均有 Cauchy 子网. 因此, X 是准紧空间的充分条件是: X 有一个紧的完全化; 必要条件是: X 的任何完全化都是紧的 (见**完全化** (**一致空间的**) (completion (of a uniform space)).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Engelking, R., General Topology, Heldermann, 1989.

【译注】 近域（entourage）的定义见一致空间（uniform space）.

胡师度 白苏华 译

准 Hilbert 空间［pre-Hilbert space; предгильбертово пространство］

复或实数域上的向量空间（vector space）E，具有满足下列条件的标量积 $E \times E \to \mathbf{C}$，$x \times y \to (x, y)$：

1) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$,
$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $(y, x) = \overline{(x, y)}$,
$x, y, z \in E$, $\lambda \in \mathbf{C}(\mathbf{R})$;

2) $(x, x) \geqslant 0$, $x \in E$;

3) $(x, x) = 0$，当且仅当 $x = 0$.

在准 Hilbert 空间上定义了范数 $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. 准 Hilbert 空间 E 关于这个范数的完全化是 **Hilbert 空间（Hilbert space）**.

В. И. Ломоносов 撰

【补注】 上述函数 (x, y) 也称为内积（inner product）. 如果它仅满足条件 1) 和 2)，则有时称为准内积（pre-inner product）. 因此，准 Hilbert 空间有时也称为内积空间（inner product space），而具有准内积的向量空间也称为准内积空间（pre-inner product space）.

如果 $(E, \|\cdot\|)$ 是线性赋范空间，则它具有生成范数的内积，当（且仅当）范数满足平行四边形法则（parallelogram law）：

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\| = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

对于内积空间的描述，见［A1］，第四章.

参考文献

［A1］ Istrǎtescu, V. I., Inner product structures, Reidel, 1987.

［A2］ Rudin, W., Functional analysis, McGraw-Hill, 1979.

［A3］ Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980（中译本：吉田耕作. 泛函分析, 人民教育出版社, 1981）.

杜小杨 译

准测度［pre-measure; предмера］，亦称预测度

某空间 Ω 上的一个实或复值有限加性测度（measure），它定义在形如 $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$ 的 Ω 的子集形成的代数上，其中 $\mathfrak{B}_\alpha$ 是 Ω 的一族 σ 代数且由某个偏序集 A 的元标定，使得当 $\alpha_1 < \alpha_2$ 时有 $\mathfrak{B}_{\alpha_1} < \mathfrak{B}_{\alpha_2}$，而该测度在任一 σ 代数 $\mathfrak{B}_\alpha$ 的限制都是可数加性的. 例如，如果 Ω 是一个 Hausdorff 空间，A 是依包含关系为序的所有紧集统，$\mathfrak{B}_\alpha$，$\alpha \in A$，是紧集 α 的所有 Borel 子集的 σ 代数，以及 $C_0(\Omega)$ 是 Ω 上具有紧支集的连续函数空间，那么 $C_0(\Omega)$ 上的任一线性泛函，它按 $C_0(\Omega)$ 中一致收敛的拓扑是连续的，在代数 $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$ 上生成一个准测度.

设 Ω 是一个局部凸线性空间，A 是其对偶空间 Ω' 的有限维子空间的集合，它以包含关系为序，又设 $\mathfrak{B}_\alpha$，$\alpha \in A$，是关于所有线性泛函 $\varphi \in \alpha$ 是可测的最小 σ 代数. 代数 $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$ 的集合称为柱集（cylindrical sets），在 $\mathfrak{A}$ 上的任一准测度称为**柱测度**（cylindrical measure）（或拟测度（quasi-measure））. Ω' 上的一个正定泛函——在任一有限维子空间 $\alpha \subset \Omega$ 上是连续的——是 Ω 上一有限非负准测度的特征函数（Fourier 变换）.

参考文献

［1］ Bourbaki, N., Elements of mathematics. Integration, Addison-Wesley, Chapt. 6, 7, 8, 1975（译自法文）.

Р. А. Минлос 撰

【补注】 术语“准测度”也在稍有不同但相关的下述意义下使用. 设 R 是某空间 Ω 上的一个集环，μ 是定义在 R 上的一个数值函数，那么 μ 是一个准测度（pre-measure），如果

i) $\mu(\emptyset) = 0$；对一切 $A \in \mathscr{R}$，$\mu(A) \geqslant 0$，

ii) 对任一可数互不相交子集列 $A_n \in \mathscr{R}$，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}，有\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

如果 ii) 仅对有限互不相交列成立，那么 μ 称为一个容度. 不是每个容度都是准测度.

参考文献

［A1］ Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972, 13ff（译自德文）.

周民强 译

准范数［pre-norm; преднорма］

同半范数（semi-norm）.

前序［pre-order 或 pre-ordering; предпорядок］，拟序（quasi-order, quasi-ordering）

集合上的一个自反的、传递的二元关系（binary relation）. 如果 $\leqslant$ 是集合 M 上的一个前序，那么关系 $a \sim b$（当且仅当 $a \leqslant b$，并且 $b \leqslant a$）$(a, b \in M)$ 是集合 M 上的一个等价关系（equivalence relation）. 前序 $\leqslant$ 导出商集 $M/\sim$ 上的一个序关系（order relation）（亦见序（集合上的）（order (on a set)）.

Т. С. Фофанова 撰 卢景波 译

准可序群［pre-orderable group; доупорядочиваемая группа］

一个群（group），其上的任何偏序（partial order）可扩展为全序（见可序群（orderable group））. 准可序

群也称为 O^* 群(O^*-group)．依照下列准则判别一个群是否为准可序群．设 $S(g)$ 为群 G 的含元素 g 的极小不变子半群，则 G 是准可序群，当且仅当对任何 $g\neq e$，$S(g)$ 不包含 G 的单位元，并且对任何 $x,y\in S(g)$，交 $S(x)\cap S(y)$ 非空．

所有无扭幂零群，以及所有可序的两步可解群，都是准可序群．一个可序群可以不是准可序群，秩大于 2 的自由群和可解性大于 2 的自由可解群都是这样的例子．局部定理(见 **Мальцев 局部定理**(Mal'tsev local theorems))可应用于准可序群，即如果群 G 的所有有限生成子群是准可序的，则 G 同样是准可序的．然而准可序群的子群不必是准可序的．如果一个准可序群的商群是可序的，则这个商群是准可序的．存在这样的可序群，它不是准可序的，但它关于中心的商群是准可序的．准可序群类关于直积是闭的，但关于全直积不是闭的，从而不是公理化的(见**公理化类**(axiomatized class))．准可序群的圈积，不总是准可序的．群 G 的子群 H 被称为 Γ 准可序群(Γ-pre-orderable group)，如果 G 的任何极大偏序可导出 H 的全序．

参考文献

[1] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972 (英译本：Kokorin, A. I. and Kopytov, V. M., Fully ordered groups, Israel Progr. Sci. Transl., 1974).

[2] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов 撰

【补注】 在英语中通常使用术语"O^* 群"，较少使用"准可序群"，后者可能引起误解，因为易与**准序**(pre-order)概念相联系(而这种联系并不存在)．

蔡传仁 译

预层[pre-sheaf; предпучок]，拓扑空间 X 上取值于范畴 $\mathscr{K}$(例如集合、群、模、环等等的范畴)的

从 X 的开集及其自然包含映射所组成的**范畴**(category)到 $\mathscr{K}$ 中的一个反变**函子**(functor)F．函子 F 依照 $\mathscr{K}$ 分别称为集合、群、模、环、等等的预层(pre-sheaf)．对应于包含关系 $V\subset U$ 的态射 $F(U)\to F(V)$ 叫作限制同态．

每个预层生成 X 的一个层(sheaf)(见**层理论**(sheaf theory))．

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】 更一般地，若 C 是任一小范畴(small category)，则术语"C 上的预层"指定义于 C 上的一个反变(通常是集值的)函子(见**景**(site))．

张英伯 译

谓词[predicate; предикат]

一种函数，其自变元以个体的 n 元组为值，而函数的值为关于这种 n 元组的语句．当 $n=1$ 时，谓词称为"性质"，当 $n>1$ 时，称为"关系"；**命题**(proposition)可视为 0 元谓词．

为描述一个 n 元谓词 $P(x_1,\cdots,x_n)$，必须指出集合 $D_1,\cdots,D_n$——个体变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的变域；通常考虑 $D_1=\cdots=D_n$ 的情形．从集合论的观点看，谓词是由Descartes积 $D_1\times\cdots\times D_n$ 的一个子集 M 描述．此时 $P(a_1,\cdots,a_n)$ 指的是"序组 $(a_1,\cdots,a_n)$ 属于 M"．n 元谓词的语法描述是通过给出逻辑数学语言中的含有 n 个自由变元的公式实现的．谓词的概念始于 Aristotle；对含有谓词的语句进行运算的方法是在数理逻辑(见**逻辑演算**(logical calculus)；**谓词演算**(predicate calculus))中发展的．

С. Ю. Маслов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland & Noordhoff, 1952 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985).

[A2] Suppes, P., Introduction to logic, v. Nostrand, 1957.

[A3] Grzegorczyk, A., An outline of mathematical logic, Reidel, 1974.

别荣芳 译 罗里波 校

谓词演算[predicate calculus; предикатов исчисление]

一种形式的公理化理论；用来描述带任意谓词(predicate)(即性质、关系)的任意非空个体域上都为真的**逻辑定律**(logical law)的一种演算．

要将谓词演算公式化，先要给出一种严格的逻辑数学语言(logicol-mathematical language)Ω．多数常用的单种类一阶情形的语言都要有谓词变元 $x,y,z,\cdots$，具有不同个数自变量位置的函数符号 $f,g,h,\cdots$，具有不同个数自变量位置的谓词符号 $P,Q,R,\cdots$．由变元和函数符号可以构造语言的项(term)，项是所研究理论的个体的名称．此外还定义，如果 P 是 Ω 的一个 n 元谓词符号，$n\geqslant 0$，$t_1,\cdots,t_n$ 是项，则 $P(t_1,\cdots,t_n)$ 是 Ω 的原子(基本)公式．$P(t_1,\cdots,t_n)$ 的取值由 $t_1,\cdots,t_n$ 是否满足关系 P 决定．

用**命题联结词**(propositional connective)和**量词**(quantifier)可以把原子公式连成语言的公式．古典或直觉主义谓词演算中常用的联结词和量词有：& 或 $\wedge$(合取，"并且")，$\vee$(析取，不排斥的"或者")，$\to$ 或 $\supset$(蕴涵，"如果 …，那么")，$\neg$(否定"非")，$\forall$(全称量词，"对每一个")，以及 $\exists$(存在量词，"存在")．这些演算中相应的非原子公式的形状有：$(\varphi\wedge\psi)$，$(\varphi\vee\psi)$，$(\varphi\supset\psi)$，$\neg\varphi$，$\forall x\varphi$，$\exists x\varphi$．公式 φ 中出现的一个变

元 x 称为约束的（bound），如果 x 出现在 φ 的形如 $\exists x\psi$ 或 $\forall x\psi$ 的一部分中．φ 中另外出现的 x 称为自由的（free）．如果变元 x 在 φ 中至少有一处自由出现，就称 x 为 φ 的一个参数（parameter）．直观地说，一个带参数的公式表示一个条件句，如果给定这个演算的一个模型，即选定所研究的非空个体域，对谓词符号确定了谓词（即个体域上的关系），选定一定的个体作这些参数的值，这个条件句就变成了一个具体的陈述句．

一个谓词演算由它的公理和推演规则所确定．例如常见的公式化的谓词演算有如下公理：

1) $(\varphi\supset(\psi\supset\varphi))$;

2) $((\varphi\supset(\psi\supset\eta))\supset((\varphi\supset\psi)\supset(\varphi\supset\eta)))$;

3) $((\varphi\wedge\psi)\supset\varphi)$;

4) $((\varphi\wedge\psi)\supset\psi)$;

5) $(\varphi\supset(\psi\supset(\varphi\wedge\psi)))$;

6) $((\varphi\supset\eta)\supset((\psi\supset\eta)\supset((\varphi\vee\psi)\supset\eta)))$;

7) $(\varphi\supset(\varphi\vee\psi))$;

8) $(\psi\supset(\varphi\vee\psi))$;

9) $(\neg\varphi\supset(\varphi\supset\psi))$;

10) $((\varphi\supset\psi)\supset((\varphi\supset\neg\psi)\supset\neg\varphi))$;

11) $(\varphi\vee\neg\varphi)$;

12) $(\forall x\varphi\supset\varphi(x|t))$;

13) $(\varphi(x|t)\supset\exists x\varphi)$;

14) $(\forall x(\varphi\supset\psi)\supset(\varphi\supset\forall x\psi))$;

15) $(\forall x(\psi\supset\varphi)\supset(\exists x\psi\supset\varphi))$.

这里，φ,ψ,η 表示 Ω 的任意公式，因此 1)－15) 中每一条都表示一个公理模式，只要给出具体的 φ,ψ 和 η，就可以得到一条具体的公理．另外，14) 和 15) 中要假设 x 不是 φ 的参数；12) 和 13) 中 $\varphi(x|t)$ 表示用项 t 同时代换 φ 中所有自由出现的 x．（必须指出，如果 t 所代换的某个 x 出现在 φ 的形如 $\exists y\psi$ 或 $\forall y\psi$ 的一部分中，而 y 又在 t 中出现，则必须先将这部分中的所有约束变元 y 用不在 φ 中出现变元代换；这样做是为了使 t 代换 x 时不改变 φ 的含义，也就是不使 φ 的含义失真；这种含义失真称为变元冲突（collision of variables）．

谓词演算还含有两个推演规则：a) 如果已经推得 φ 和 $(\varphi\supset\psi)$，则也可以推出 ψ（**分离法则**（modus ponens）；b) 如果已推出 φ，x 是一个变元，则可以推出 $\forall x\varphi$（**推广法则**（rule of generalization））．

谓词演算中逻辑联结词的解释与**命题演算**（propositional calculus）中的一样．至于量词的解释，则要注意，在古典谓词演算中量词是当作实无穷来使用的．如果给定了语言的一种解释，则每个不含参数的公式就确定了取值"真"或是"假"．一个公式称为恒真的（classically (universally) valid），如果在任意的解释下并对参数的任意取值，公式的值都是"真的"．由 **Godel 完全性定理**（Godel completeness theorem），古典谓词演算中的恒真式恰好就是能够推导出来的公式．这个定理确切地表达了古典逻辑的形式化思想：古典谓词演算中，在所有模型中为真的一切逻辑定律都能被推导出来．

直觉主义谓词演算与古典谓词演算不同之处是公理模式 11) 不算是一种公理模式．这两种演算的区别反映在逻辑联结词和量词的理解上．直觉主义谓词演算中这种理解是在**直觉主义**（intuitionism）框架内进行．直觉主义谓词演算的完全性问题要复杂得多，而且相对于不同的语义有不同的解决办法；当然也可以建立一种与古典模型论类似的非常实体化的模型论（见 **Kripke 模型**（Kripke models）；**可实现性**（realizability））．

人们也可以采用另一种公式化的谓词演算．从证明论角度来看，最重要的是自然推导演算（见**自然逻辑演绎**（natural logical deduction）和**矢列演算**（sequent calculus））．

谓词演算是构造可以描述某种具体的数学理论的逻辑演算的十分常用的基础．例如，要描述集合论的某一类真命题，就可以用集合论术语构造一个逻辑演算，其中除了古典谓词演算的公理（逻辑公设）和推导法则之外，再加上描述集合性质的非逻辑公理（non-logical axioms）．**选择公理**（axiom of choice）就是集合论中非逻辑公理的一个典型的例子．

谓词演算有时也称狭义谓词演算（narrow predicate calculus），一阶谓词演算（first-order predicate calculus）或一阶函数演算（first-order functional calculus），以区别于含有对谓词所取的量词和相应的、表示各自谓词存在的结合公理的演算．后一种演算，尽管还没有纯逻辑特征，常被称为高阶谓词演算（higher-order predicate calculus）．**类型论**（types, theory of）就是这种演算的一例．除了古典的和直觉主义的谓词演算之外，还有其他类型的逻辑系统能描述那些可以用别的逻辑工具表示的或从别的方法论观点得到的逻辑定律．其中有模态谓词演算、归纳逻辑等等．

参考文献

[1] Hilbert, D. and Bernays, P., Grundlagen der Mathematik, 1－2, Springer, 1934－1939.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951（中译本：S. C. 克林著，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985）.

[3] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973（英译本：Novikov, P. S.: Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd, 1964）.

[4] Takeuti, G.: Proof theory, North-Holland, 1975).

А. Г. Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bell, J. and Machover, M., A course in mathematical logic, North-Holland, 1977.

[A2] Hatcher, W. S., Foundations of mathematics, Saunders, 1968.

沈复兴 译 罗里波 校

谓词符号 [**predicate symbol; предикатный символ**], 谓词字母 (predicate letter)

某些具体谓词或关系的一种记号. 例如符号 ≤ 常表示实数上的序关系; 它是一个二元谓词. 在语言的形式结构中, 表示谓词的符号必被用到, 它以一种良定义的方式, 用于构造语言的表达式. 特别地, 如果 P 是一个 n 元谓词符号, 那么以下规则应为在形式化语言中构造表达式的语法规则之一: "如果 $t_1, \cdots, t_n$ 是项, 那么 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 是一个公式". 因此, 谓词符号在语法上用于构造公式, 在语义上表示谓词.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

[2] Ершов, Ю. Л., Палютин, Е. А., Математическая логика, М., 1979.

В. Н. Гришин 撰

【补注】 谓词符号亦称为关系符号 (relation symbol).

参考文献

[A1] Manin, Yu. I., A course in mathematical logic, Springer, 1977 (译自俄文).

别荣芳 译 罗里波 校

谓词变元 [**predicate variable; предикатная переменная**], 二阶变元 (second-order variable)

其值可为谓词 (predicate) 的变元. 在公理系统的形式结构中, 谓词变元不同于个体变元 (individual variable), 它可以用公式替换. 因此, 在二阶谓词演算中, 如果在公理

$$\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$$

中 x 是表示 n 元谓词的谓词变元, 那么任何含有 n 个不同变元的公式都可以替换 t. 这里以带有 n 个不同变元 $z_1, \cdots, z_n$ 的公式 t 替换原子公式 $x(y_1, \cdots, y_n)$ (其中 $y_1, \cdots, y_n$ 是个体常量) 中的谓词变元 x 的结果是公式 $t(y_1|z_1, \cdots, y_n|z_n)$, 它是通过在 t 中同时用 $y_1, \cdots, y_n$ 代换 $z_1, \cdots, z_n$ 的自由出现得到.

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Takeuti, G., Proof theory, North-Holland, 1987.

В. Н. Гришин 撰 别荣芳 译 罗里波 校

直谓性 [**predicativity; предикативность**]

形成概念的一种特殊方法, 其特点是在定义中不出现"概念循环": 被定义的对象不能参与自身的定义. 如果描述定义的语言是形式化的, 那么通常直谓性意味着定义公式不能包含一个有界变元, 它的变域中有被定义的对象.

另一方面, **非直谓定义** (non-predicative definition) 的特点是在其中出现"概念循环". 非直谓定义的现象在某些推理中也会遇到, 此时论证推理某一部分的过程本身也被看作一个推理对象. 恰是这种推理的使用成为出现语义悖论 (antinomy) 的土壤. 典型的例子是说谎者悖论中的矛盾: 如果有人声称"我在说谎", 那么这个断言既不可能真也不可能假.

В. Н. Гришин, А. Г. Драгалин 撰

【补注】 关于容许循环的改进的集合论见 [A1]; "说谎者" 在此基础上的说明见 [A2].

参考文献

[A1] Aczel, P., Non well-founded sets, Centre Study of Language and Inform., Stanford Univ., 1987.

[A2] Barwise, J. and Etchemendy, J., The liar. An essay on truth and circularity, Oxford. Univ. Press, 1987.

别荣芳 译 罗里波 校

可料随机过程 [**predictable random process; предсказуемый случайный процесс**]

一种随机过程 (stochastic process) $X = (X_t(\omega), \mathscr{F}_t)$, 作为映射 $(\omega, t) \rightarrow X(\omega, t) = X_t(\omega)$, 关于可料 σ 代数 (predictable sigma-algebra) $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\mathbf{F})$ 可测, 其中 $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_t$.

А. Н. Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential, B, North-Holland, 1982 (译自法文).

[A2] Liptser, R. S. and Shiryayev, A. N., Statistics of random processes, II, Springer, 1978, p. 301 ff (译自俄文).

[A3] Liptser, R. S. and Shiryayev, A. N., Martingales, Kluwer, 1989 (译自俄文).

刘秀芳 译 陈培德 校

可料 σ 代数 [**predictable sigma-algebra, predictable σ-algebra; предсказуемая σ-алгебра**]

在

$$\Omega \times \mathbf{R}_+ = \{(\omega, t): \omega \in \Omega, t \geqslant 0\}$$

中, 由 $\Omega \times \mathbf{R}_+$ 到 $\mathbf{R}$ 的所有映射 $(\omega, t) \rightarrow f(\omega, t)$ 所生成的集合的最小 σ 代数 $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\mathbf{F})$, 其中 f 关于 t (对每一固定的 $\omega \in \Omega$) 是左连续的, 关于子 σ 代数 $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$, $t \geqslant 0$, 的非降族 $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 是 $\mathbf{F}$ 适应

的，$(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间，可料 σ 代数可由任一下述集族生成：

1) $A \times \{0\}$，其中 $A \in \mathcal{F}_0$ 及 $[[0, \tau]]$，此处 τ 是停时（见 **Марков 时**（Markov moment））而 $[[0, \tau]]$ 是随机区间；

2) $A \times \{0\}$，其中 $A \in \mathcal{F}_0$ 和 $A \times (s, t]$，其中 $s < t$ 而 $A \in \mathcal{F}_s$。

在可选 σ 代数（见可选 σ 代数（optional sigma-algebra））和可料 σ 代数之间存在关系 $\mathcal{P}(\mathbf{F}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{F})$.

参考文献

[1] Dellachene, C., Capacités et processus stochastique, Springer, 1972.

А. Н. Ширяев 撰

【补注】 更常使用"σ 域"代替"σ 代数".

参考文献

[A1] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential, A-C, North-Holland, 1978 – 1988（译自法文）.

刘秀芳 译 陈培德 校

前束公式 [prenex formula; предваренная формула]

限制谓词演算（restricted predicate calculus）中形如：

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \Psi$$

的公式，其中 Q_i 表示**全称量词**（universal quantifier）$\forall$ 或**存在量词**（existential quantifier）$\exists$，当 $i \neq j$ 时，变元 x_i, x_j 不同，而 Ψ 是不含量词的公式．前束公式亦称前束范式（prenex normal form）或前束式（prenex form）.

对狭义谓词演算语言中的每个公式 φ，有一个前束公式，它在经典**谓词演算**（predicate calculus）中与 φ 逻辑等价．寻找前束公式的过程是基于以下等价式（这些等价式在经典谓词演算中可推演）：

$$(\forall x \varphi(x) \supset \Psi) \equiv \exists x'(\varphi(x') \supset \Psi),$$

$$\exists x \varphi(x) \supset \Psi \equiv \forall x'(\varphi(x') \supset \Psi),$$

$$\Psi \supset \forall x \varphi(x) \equiv \forall x'(\Psi \supset \varphi(x')),$$

$$\Psi \supset \exists x \varphi(x) \equiv \exists x'(\Psi \supset \varphi(x')),$$

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi, \quad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi,$$

$$Qy \, \forall x \varphi \equiv \forall x \varphi, \; Qy \exists x \varphi \equiv \exists x \varphi,$$

其中 x' 是在 $\varphi(x)$ 或 Ψ 中不作为自由变元出现的任何变元，$\varphi(x')$ 可以由 $\varphi(x)$ 通过将 x 的所有自由出现换为 x' 而得；变元 y 在 $\forall x \varphi$ 或 $\exists x \varphi$ 中不作为自由变元出现．为利用以上等价式，首先要用 $\supset$ 和 $\neg$ 表示所有逻辑运算，然后应用等价式将全部量词提到公式左面．这样得到的前束公式称为给定公式的前束式（prenex form）.

参考文献

[1] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic, v. Nostrand, 1964.

В. Н. Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to mathematics, North-Holland & Noordhoff, 1950, Chapt. Ⅶ, § 35（中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册 1984，下册 1985）.

[A2] Fraissé, R., Course of mathematical logic, 1, Reidel, 1973, Sect. 5. 1. 1ff.

别荣芳 译 罗里波 校

表现 [presentation; представление]，群的

群由其生成元及它们之间的关系所给出的描述．

【补注】 每个群都可借生成元和关系来描述．一个表现称为有限生成的（finitely generated）（或有限相关的（finitely related）），如果其生成元个数（相应的，关系的个数）是有限的．有限表现（finite presentation）是指关系个数和生成元个数都有限的表现．n 个文字上的对称置换群有如下的表现：有 $n-1$ 个生成元 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ 和关系 $\sigma_i^2 = e$，$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$，若 $|i-j| \geqslant 2$，$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$．若把关系 $\sigma_i^2 = e$ 去掉，则得到辫群的表现（见**辫论**（braid theory））.

若 G 由生成元 $G_i (i \in I)$ 和关系 $R_j (j \in J)$ 表现，则写成 $G = \langle G_i, i \in I; R_j, j \in J \rangle$．此时 G 是生成元 G_i 上的自由群对于由关系 R_j 生成的正规子群的商群，其细节，见 [A1]，1，2 节．若已给出一个群的表现，有一些系统的方法来求出其子群和商群的表现．

参考文献

[A1] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations, Wiley-Interscience, 1966.

[A2] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., Generators and relations for discrete groups, Springer, 1965.

李慧陵 译

保区域原理 [preservation of domain, principle of; сохранения области принцип]

复平面中区域上全纯函数的一种性质：区域 $D \subset \mathbf{C}$ 上每个非常值全纯函数的值集也是一个区域，即一个连通开集．这里的基本性质是象的开性，此点可从 **Rouché 定理**（Rouché theorem）或**辐角原理**（argument, principle of the）得到．保区域原理可看作关于全纯函数的**最大模原理**（maximum-modulus principle）的推广．

保区域原理对任意复流形上的全纯函数成立：连

通复流形 (complex manifold) X 上的任一非常值全纯函数的值集是复平面内的区域. 对于复流形到 Riemann 曲面内的全纯映射此命题也成立. 然而, 到维数大于 1 的复流形 Y 内的全纯映射 $f: X \to Y$ 一般不一定是开的: 例如, 如果 f 为非常值, 但其秩处处小于 $\dim Y$, 则其象 $f(X) \subset Y$ 一般没有内点. 对于在较小维数的集合上 $\operatorname{rank} f < \dim Y$ 的情形, 开性也可遭到破坏. 例如, 在 $\mathbf{C}^2$ 到其自身内的映射

$$(z_1, z_2) \to (z_1, z_1 z_2)$$

下, 象是非开集 $\mathbf{C}^2 \setminus \{w_1 = 0; w_2 \neq 0\}$. 如果把 f 为非常值的条件改为较强的要求, 则保区域原理对全纯映射仍成立, 最简单的是要求使得 $\operatorname{rank} f < \dim Y$ 的点的集合是零维的.

参考文献

[1] Привалов, И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 复变函数引论, 人民教育出版社, 1956).

[2] Gunning, R. C., Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

E. M. Чирка 撰

【补注】 在较早的德文文献中, 全纯映射的"保区域性"用的是"Gebietstreue". 英文文献中通常用开映射原理 (open mapping principle) 一词, 见 [A1].

参考文献

[A1] Whyburn, G. T., Topological analysis, Princeton Univ. Press, 1964.

[A2] Чирка, Е. М., Комплексные аналитические множества, М., 1985 (英译本: Chirka, E. M., Complex analytic sets. Kluwer, 1989).

沈永欢 译

准素分解 [primary decomposition; примарное разложение]

把一个环 (ring) R 的一个理想 (ideal) I (或一个模 (module) M 的一个子模 N) 表示成准素理想 (准素子模, 见准素理想 (primary ideal)) 的交. 准素分解是整数分解为不同素数方幂的乘积的推广. 准素分解的存在性首先为 E. Lasker 在多项式环中所证明 ([1]), 在任意交换的 **Noether 环** (Noetherian ring) 中是由 E. Noether 证明的 ([2]). 设 R 是交换的 Noether 环. 一个准素分解 $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ 称作是不可约的 (irreducible), 如果对任一 $j = 1, \cdots, n$ 都有 $\bigcap_{i \neq j} Q_i \neq I$ 且 $Q_1, \cdots, Q_n$ 的根 $P_1, \cdots, P_n$ 两两不同 (一个准素理想 Q 的根 (radical) 是满足下述条件的唯一的**素理想** (prime ideal) $P \supseteq Q$: 对于某个自然数 n, $P^n \subseteq Q$). 素理想集合 $\{P_1, \cdots, P_n\}$ 被理想 I 唯一确定 (准素分解的第一唯一性定理 (first uniqueness theorem for primary decomposition)). 这个集合的极小元素 (相对于包含关系) 称作 I 的孤立素理想, 其他的素理想称作嵌入素理想. 相应于孤立素理想的准素理想的集合也是被理想 I 唯一确定的 (准素分解的第二唯一性定理 (second uniqueness theorem for primary decomposition), 见 [3]). 域上的多项式环的理想 I 的孤立素理想对应于 I 的根的**仿射簇** (affine variety) 的不可约分支. 准素分解的概念有若干种推广. 准素分解的公理化导致了**理想的加性理论** (additive theory of ideals) 的发展.

参考文献

[1] Lasker, E., Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann*, 60 (1905), 20 – 116.

[2] Noether, E., Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.*, 83 (1921), 24 – 66.

[3] Atiyah, M. F. and MacDonald, I., Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969 (中译本: M. F. 阿蒂亚, I. G. 麦克唐纳, 交换代数导引, 科学出版社, 1982).

[4] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1 – 2, Springer, 1975.

[5] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972 (译自法文).

В. Т. Марков 撰 赵春来 译

准素理想 [primary ideal; примарный идеал], 交换环 R 的

一个 R 中的理想 (ideal) I, 如果 $a \in R$, $b \in R$, $ab \in I$, 则 $b \in I$, 或对某个自然数 n, $a^n \in I$. 在整数环 $\mathbf{Z}$ 中, 准素理想是形如 $p^n \mathbf{Z}$ 的理想, 其中 p 是素数, n 为一自然数. **准素分解** (primary decomposition), 即将一交换 **Noether 环** (Noetherian ring) 中的任一理想表为有限多个准素理想之交, 在交换代数中起了重要作用. 更一般地, 设 $\operatorname{Ass}(M)$ 表环 (ring) R 中那些成为**模** (module) M 的非零子模的零化子的素理想集合. 在一 Noether 环 R 上的模 M 的子模 N 称为是准素的 (primary), 如 $\operatorname{Ass}(M/N)$ 成为一个元素的集. 如果 R 是交换环, 则 Noether R 模的每个不能表示为严格包含它的子模之交的真子模是准素的. 在非交换的情形下, 则不是这样. 因此, 人们对准素概念构造出各式各样的非交换的推广. 例如, 模 M 的真子模 N 称为是准素的 (primary), 如果对子模 M/N 的内射包 (hull) E 的每个非零投射模 E_1 (见**内射模** (injective module)), E 到 E_1 中的同态的核的交是平凡的. 另一种成功的推广是第三位理想的概念 ([4]): 在 Noether 环 R 中一左理想 I 是第三的 (tertiary), 如果对任一 $a \in R$, $b \in R \setminus I$, 若 $aRb \subseteq I$, 则对任一 $c \in R \setminus I$, 存在一元素 $d \in Rc \setminus I$, 使得 $aRd \subseteq I$. 这两个推广都导出了准素分解的非交换类似. 每个 Noether 环 R 的第三位理想是准素的, 当

且仅当 R 满足 Artin-Rees 条件：对任意两个 R 中的左理想 I, J，存在一自然数 n，使得 $I^n \cap J \subseteq IJ$（见[3]）.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972（译自法文）.

[2] Zariski, O., and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975

[3] Goldman, O., Rings and modules of quotients, *J. of Algebra*, **13**(1969), 1, 10–47.

[4] Lesieur, L. and Croisot, R., Algèbre noethérienne non commutative, Gauthier-Villars, 1963.

В. Т. Марков 撰 冯绪宁 译

准素表示 [primary representation; примарное представление]

同**因子表示**（factor representation）.

准素环 [primary ring; примарное кольцо]

一个有单位元的环（ring），关于 **Jacobson 根**（Jacobson radical）的商环同构于一个除环上的矩阵环，也就是 Artin 单环（Artinian simple ring）. 如果带有 Jacobon 根 J 的准素环 R，关于幂等元能模 J 提升（即 R/J 中的每个幂等元在 R 中存在一个幂等原象），则 R 同构于局部环上的全矩阵环. 特别地，当 J 是诣零理想时，结论成立.

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Faith, C., Algebra, 1–2, Springer, 1973–1976.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 亦见**诣零理想**（nil ideal）.

蔡传仁 译

素元 [prime element; простой элемент]

素数（prime number）概念的推广. 设 G 是一个**整环**（integral domain）或有幺元的交换半群（semigroup）. 一个不是幺元的因子的非零元 $p \in G$ 称作是素的（prime），如果乘积 ab 可被 p 整除，当且仅当元素 a 或 b 之一可被 p 整除. 每个素元都是不可约的（irreducible），即只能被幺元的因子和与它自身相伴的元素整除. 不可约元不一定是素的；但是在 Gauss 半群（Gauss semi-group）中这两个概念是一致的. 进而言之，如果半群 G 中每个不可约元都是素的，则 G 是 Gauss 半群. 类似的论断对于**唯一分解环**（factorial ring）成立. 环中的一个元素是素的，当且仅当这个元素生成的**主理想**（principal ideal）是**素理想**（prime ideal）.

在非交换的情形下有这些概念的推广（见[2]）.

参考文献

[1] Cohn, P. M., Free rings and their relations, Acad. Press, 1971.

[2] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973（英译本：Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963）.

[3] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

О. А. Иванова 撰

【补注】 交换半群或整环中的两个元素 a、b 称作彼此相伴的，如果每一个都是另一个的因子；即如果存在 c, d，使得 $a = bc$, $b = ad$.

赵春来 译

素域 [prime field; простое поле]

不包含其子域的域. 每个域都包含一个唯一的素域. 特征为 0 的素域与有理数域同构. 特征为 p 的素域同构于整数模 p 的域 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

О. А. Иванова 撰 裴定一 译

素理想 [prime ideal; первичный идеал]

环（ring）A 的**双边理想**（ideal）I，使得由包含关系 $PQ \subseteq I$ 可得 $P \subseteq I$ 或 $Q \subseteq I$，其中 P、Q 为 A 的双边理想. 环 R 中理想 I 是素的，当且仅当集合 $R \setminus I$ 为一 m 系统，即对任意 $a, b \in R \setminus I$，存在一 $x \in R$，使得 $axb \in R \setminus I$. 环 A 的理想 I 是素的，当且仅当模它的商环是**素环**（prime ring）.

К. А. Жевлаков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rowen, L., Ring theory, 1, Acad. Press, 1988, p.163.

冯绪宁 译

素理想 [prime ideal; простой идеал]

环 R 的**双边理想**（ideal）P，满足：对 R 的任意理想 A, B，由 $AB \subseteq P$ 可推出 $A \subseteq P$ 或 $B \subseteq P$. 对一个结合环来说，以下是一个用元素表示的等价定义：

$$aRb \subseteq P \Rightarrow a \in P \text{ 或 } b \in P,$$

其中 a, b 为 R 的元素. 每个**本原理想**（primitive ideal）是一个素理想.

设 R 为有幺元的结合交换环，则理想 $P \subset R$ 是素理想，当且仅当由 $ab \in P$ 可推出 $a \in P$ 或 $b \in P$，亦即当且仅当商环 R/P 是**整环**（integral domain）. 这时每个极大理想都是素理想，所有素理想的交是幂零理想（即所有幂零元的集合）的根.

准素理想（primary ideal）是素理想概念的推广. 在**准素分解**（primary decomposition）理论中，素理想起着与素数在整数分解为素数幂乘积时所起的相同的

作用，而准素理想起着素数幂的作用．

格（lattice）L 的理想 P 称作素的，若

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ 或 } b \in P.$$

理想 P 是素的，当且仅当 $F = L \setminus P$ 是素滤子，即若 $a + b \in F$，则 $a \in F$ 或 $b \in F$.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972（译自法文）.

[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[3] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975.

[4] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, М., 1970（英译本：Skornyakov, L. A., Elements of lattice theory, A. Hilger, 1977）.

О. А. Иванова 撰 裴定一 译

素数［prime number；простое число］

只有两个正除数 1 和 p 的自然数（**正整数**（integer））$p > 1$. 例如：

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \cdots.$$

至少有 3 个不同整除数的数称为合数（composite numbers）．素数概念是研究自然数整除性的基本概念．因为初等数论的基本定理（fundamental theorem of elementary number theory）断言：任何不为 1 的自然数或者是素数，或者是可由素数的乘积表示的合数，而且这种表示式是唯一的（不计因子的顺序）．这种分解的一种表述方法是，按素数增加的顺序以素数的乘幂形式表出：

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},\ p_1 < p_2 < \cdots < p_k,$$

它称为自然数的典范分解．由自然数 $a_1, \cdots, a_k$ 的典范分解可求出其**最大公因数**（greatest common divisor）$d = (a_1, \cdots, a_k)$ 和**最小公倍数**（least common multiple）$m = [a_1, \cdots, a_k]$. 借助于自然数 n 的典范分解可以计算出数论函数 $\tau(n)$, $S(n)$ 和 $\varphi(n)$ 的值，它分别表示 n 的除数个数，n 的除数和以及自然数 $m \leqslant n$ 且与 n 互素（即有 $(m, n) = 1$）的个数：

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1),$$

$$S(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1},$$

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

这些公式的一个重要特征是它们都依赖于 n 的算术结构．

素数起着"建筑用砖"的作用，由它可以构造出所有其他自然数．早在公元前 3 世纪 Euclid 就已证明：素数集合是无穷的，而 Eratosthenes 找到一个把素数从自然数序列中筛出来的方法．（见 **Eratosthenes 筛法**（Eratosthenes, sieve of））．基于数学分析工具的应用，L. Euler 发现了素数集合是无限的证明．Euler 的解析方法的进一步发展证明是大有成效的（见**解析数论**（analytic number theory））．П. Л. Чебышев 发现了许多以素数为主题的新定律．特别是，利用数 $n!$ 的典范分解，他找到一个关于素数 $p \leqslant x$ 的个数 $\pi(x)$ 的不等式：

$$a \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \frac{x}{\ln x},$$

此处 a, b, $a < 1 < b$ 是某些正的常数．以素数序列的性态为主题的最深刻的定律是通过改进 Чебышев 的原有思想和用分析的以及在许多情况下是初等的方法得到的（见**素数分布**（distribution of prime numbers））．

素数不仅与自然数的乘性结构有关，而且与其加性结构有关．把自然数分拆为三个素数之和的 Goldbach 问题是这方面的代表（见 **Goldbach 问题**（Goldbach problem））．这是 И. М. Виноградов 于 1937 年解决的（见**加性数论**（additive number theory））．代数域中素数分解规律的研究弄清了普通素数的某些性质．例如，考虑 $p \neq 2$ 的素数在 Gauss 数域（见 **Gauss 数**（Gauss number））中的分解可得到 Euler 定理（Euler theorem）：当且仅当 $p \equiv 1 (\bmod 4)$ 时 $p = a^2 + b^2$.

直到现在（1990）仍有若干与素数有关的未解决的问题．例如：

Mersenne 素数集合

$$p = 2^q - 1, \text{ 此处 } q \text{ 是素数},$$

是无限的吗？

Fermat 素数集合

$$p = 2^{2^n} + 1, \text{ 此处 } n \geqslant 0 \text{ 是整数},$$

是无限的吗？

是否存在**孪生素数**（twins）p_1, p_2——即满足 $p_1 - p_2 = 2$ 的素数——的无限集合？

对上述问题以及其他一些类似的问题，经验和具有启发性的考虑都倾向于支持肯定的回答．

参考文献

[1] Hasse, H., Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer, 1950.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 关于代数数域中的素数问题亦见**代数数论**（algebraic number theory）；**Kummer 定理**（Kummer theorem）.

为兼顾专家和非专业人员而写的文献[A1]中，读者可以找到在素数理论中大量未解决的问题，结果和进展．也可在此书及文献[A2]中找到若干算法的描述、用它来检验数的素性，如果是合数，则将其分解．此类能处理 100 位或 200 位数的算法与**密码学**(cryptography)的联系近来广泛引起关注．

参考文献

[A1] Ribenboim, P., The book of prime number records, Springer, 1988.

[A2] Riesel, H., Prime numbers and computer methods for factorization, Birkhäuser, 1985.

[A3] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

[A4] Bressoud, D. M., Factorization and primality testing, Springer, 1989.

戚鸣皋 译 潘承彪 校

素环 [prime ring; первичное кольцо]

一个环(ring)R，它里面的两个双边理想(ideal) P 和 Q 的乘积为零理想当且仅当 P 或 Q 是零理想．换句话说，素环的理想在乘法下构成无零因子的**半群**(semi-group)．一个环 R 是素环当且仅当它的任一非零右(左)理想的右(左)**零化子**(annihilator)等于(0)，亦当且仅当对任意的非零的 $a,b\in R$，都有 $aRb\neq 0$．素环的中心是**整环**(integral domain)．任一**本原环**(primitive ring)是素环．如果一个环 R 不包含非零的诣零理想，则 R 是素环的子直和．素环的类在**环与代数的根**(radical of rings and algebras)的理论中起着重要的作用([1])．

素环的概念有下述的推广：环 R 称为*半素的*(semi-prime)，如果它没有非零的幂零理想．

参考文献

[1] Андрунакиевич, В. А., Рябухин Ю. М., Радикалы алгебр и структурная теория, М., 1979.

[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[3] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

К. А. Жевлаков 撰

赵春来 译

原始类 [primitive class; примитивный класс]，*代数系统的*

同簇(**代数系统簇**(algebraic systems, variety of))．

原函数 [primitive function; первообразная]，*反导数*(anti-derivative)，*有限函数 f 的*

在 f 的定义域内，使 $F'(x)=f(x)$ 处处成立的函数 $F(x)$．这是应用最广的定义．但也有其他的定义，例如将 F' 处处存在有限且满足方程 $F'=f$ 这些条件减弱；有时在定义中用**广义导数**(generalized derivative)．关于原函数定理大都研究原函数的存在性、求法以及唯一性．给定在某区间上的函数 f，有原函数的一个充分条件是，f 在该区间上连续；而必要条件则是，f 应当属于第一 Baire 类(见 **Baire 类**(Baire classes))，并且它有 Derboux 性质．函数在给定区间上的任意两个原函数相差一个常数．当 F' 连续时，从 F' 求 F 的方法由 **Riemann 积分**(Riemann integral)解得．对有界的 F'，由 **Lebesgue 积分**(Lebesgue integral)解得，而对任意的 F'，则可用狭义(或广义) **Denjoy 积分**(Denjoy integral)以及 **Perron 积分**(Perron integral)来解得．

参考文献

[1] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, М., 1981.

[2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд, т. 1, М., 1975(中译本：尼科尔斯基，数学分析教程，第一卷，一、二分册，人民教育出版社，1980).

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】 实值函数 f 在给定区间 I 上具有 Denjoy 性质(Denjoy property)或*中间值性质*(intermediate-value property)是指，若 $f(a)$，$f(b)$ 为 f 的两个值，$a,b\in I$，则 f 必在 a 与 b 之间的某点取到介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 间的任意值．连续函数具有中间值性质(*中间值定理*(intermediate-value theorem))．一阶可微的实值函数在区间上具有中间值性质，这一事实有时称为 Darboux *定理*(Darboux theorem)．它是 Rolle *定理*(Rolle theorem)的直接推论．

亦见**导数**(derivative)的补注．

参考文献

[A1] Boas, R. P., A primer of real functions, Math. Assoc. Amer., 1981.

[A2] Apostel, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974.

王斯雷 译

本原置换群 [primitive group of permutations，或 primitive permutation group; примитивная группа подстановок]

仅保持集合 M 的平凡等价关系(相等的关系和任意二元素均等价的关系)不变的置换群 (G,M)．多数情况下研究的是有限本原置换群．

本原置换群是传递的，而每个 2 传递群是本原的(见**传递群**(transitive group))．真的 1 传递(即非 2 传递)本原群称为*幺本原的*(uniprimitive)．交换的本原置换群只能是素数阶循环群．传递置换群是本原的，当且仅当每个 $a\in M$ 的**稳定化子**(stabilizer) G_a 是 G 中的极大子群．本原性的另一判别法基于每个置换群 (G,M) 对应着由该群的二元轨道决定的图这

一事实．群 (G, M) 是本原的，当且仅当对应于非反身 2 轨道的图都是连通的．2 轨道的个数称为群 (G, M) 的秩 (rank)．二重传递群的秩为 2 而单本原群的秩至少是 3．

本原置换群的每个非单位**正规子群** (normal subgroup) 是传递的．每个传递置换群都可嵌入到本原置换群的多重**圈积** (wreath product) 内（但是，这种表示不是唯一的）．

置换群的许多问题都可以归结到本原置换群的情形．次数 $\leqslant 50$ 的所有本原置换群都已知道（见[4]）．对本原置换群和有限单群的关系有许多研究工作．

本原置换群这一概念的一个推广是所谓多重本原群 (multiply primitive group)．置换群 (G, M) 称为 k 重本原的，如果它是 k 重传递的，而 $(k-1)$ 个点的点稳定化子在其余的点上是本原的．

参考文献

[1] Cameron, P., Finite permutation groups and finite simple groups, *Bull. London Math. Soc.*, 13(1981), 1–22.

[2] Krasner, M. and Kaloujnine, L., Produit complet des groupes de permutations et problème d'extension de groupes II, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), 14(1951), 39–66.

[3] Wielandt, H., Finite permutation groups, Acad. Press, 1968(中译本：H．维兰特，有限置换群，科学出版社，1984)．

[4] Погорелов, Б. А., в кн. VI всесоюзный симпозиум по теории групп, Сборник, К., 1980, 146–157.

[5] Шмидт, О. Ю., Абстрактная теория групп, 2 изд., М.-Л., 1933(英译本：Shmidt, O. Yu., Abstract theory of groups, Freeman, 1966).

Л. А. Калужнин 撰 李慧陵 译

本原理想 [primitive ideal; примитивный идеал]，右本原理想 (right primitive ideal)

结合环 R 的双侧理想 P（见**结合环与结合代数** (associative rings and algebras)），使得商环 R/P 是一个（右）**本原环** (primitive ring)．类似地，可以用左本原环来定义左本原理想 (left primitive ideals)．环的所有本原理想的集合 Π，赋予某种拓扑结构，有助于研究各种环类．通常 Π 由下述**闭包关系** (closure relation) 拓扑化：

$$\mathrm{Cl}A = \{P' : P' \in \Pi, P' \supseteq (\cap P, P \in A)\},$$

这里 A 是 Π 的一个子集．环的赋予这一拓扑的所有本原理想的集合称为这个环的结构空间 (structure space)．

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

К. А. Жевлаков 撰 蔡传仁 译

本原多项式 [primitive polynomial; примитивный многочлен]

多项式 (polynomial) $f(X) \in R[X]$，R 是唯一因子分解整环，f 的系数没有公因子．任一多项式 $g(X) \in R[X]$ 可写为 $g(X) = c(g) f(X)$，使 $f(X)$ 是本原多项式，$c(g)$ 是 g 的系数的**最大公因数** (greatest common divisor)．元素 $c(g) \in R$，除了乘上 R 中一可逆元外，它是确定的，称作多项式 $g(X)$ 的容度 (content)．我们有 Gauss 引理 (Gauss lemma)：若 $g_1(X), g_2(X) \in R[X]$，则 $c(g_1 g_2) = c(g_1)c(g_2)$．特别地，本原多项式的乘积仍是本原多项式．

参考文献

[1] Zariski, O. and Samuel, P. Commutative algebra, 1, Springer, 1975.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1982, P. 165.

[A2] Birkhoff, G and MacLane, S., A Survey of modern algebra, MacMillan, 1953, P. 79

冯绪宁 译

原始递归 [primitive recursion; примитивная рекурсия]

定义自变数及值均为自然数的函数的一种手段．人们称 $n+1$ 元函数 $f(x_1, \cdots, x_n, y)$ 经原始递归方式由一个 n 元函数 $g(x_1, \cdots, x_n)$ 和一个 $n+2$ 元函数 $h(x_1, \cdots, x_n, y, z)$ 得到，若对 $x_1, \cdots, x_n, y$ 的一切自然数值，有

$$f(x_1, \cdots, x_n, 0) = g(x_1, \cdots, x_n)$$

且

$$f(x_1, \cdots, x_n, y+1) =$$
$$= h(x_1, \cdots, x_n, y, f(x_1, \cdots, x_n, y)).$$

对给定的 g 和 h 如此的一个函数 f 总是存在的且唯一．当 $n = 0$ 时，对 f 的定义等式可以写为

$$f(0) = a, f(x+1) = h(x, f(x)).$$

原始递归方式的一个基本性质是对任何可计算性概念的有意义的明确陈述，当 f 是由可计算函数 g 和 h 经原始递归方式得来的，那么 f 本身也是可计算的（见**可计算函数** (computable function)）．原始递归方式是由一组基本函数的初始集产生一切原始递归函数和一切部分递归函数的基本手段之一（见**原始递归函数** (primitive recursive function)；**部分递归函数** (partial recursive function)）．

参考文献

[1] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960(英译本 Uspenskii, V. A., Leçons sur les fonctions calculables, Hermann, 1966).

[2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965(英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970)

[3] Rogers, Jr., H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

С. Н. Артемов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Calude, C., Theories of computational complexity, North-Holland, 1988

[A2] Manin, Yu. I., A course in mathematical logic, Springer, 1977(译自俄文).

[A3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, Chapts. Ⅸ; Ⅺ, § 54, North-Holland & Noordhoff, 1959.

[A4] Odifreddi, P., Classical recursion theory, North-Holland, 1989.

杨东屏 译

原始递归函数[primitive recursive function; примитивно рекурсивная функция]

由初始函数

$$s(x)=x+1;\ o(x)=0;\ I_m^n(x_1,\cdots,x_n)=x_m$$

出发经过有限次使用**复合**和**原始递归**(primitive recursion)算子后得到的由自然数到自然数的函数.

由于初始函数是可计算的且代入和原始递归算子保持可计算性,一切原始递归函数的集合是一切可计算函数(见**可计算函数**(computable function))类的一个子类.每个原始递归函数皆可由从初始函数出发通过某构造法加以刻画(一个原始递归描述);从而原始递归函数类是可数的.实际上由于某种实在的理由在数学中而使用的一切算术函数都是原始递归函数;例如 $x+y$、$x\cdot y$, x^y, $\mathrm{sign}(x)$, $[x/y]$ (x 被 y 除后的余数), $\pi(x)$ (指标为 x 的素数),等等.

自然数上的一个关系 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 称为原始递归关系(primitive recursive relation),若满足当 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 真时 $g(x_1,\cdots,x_n)=1$ 且当 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 假时 $g(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的函数 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 是原始递归的.称关系 $P(x_1,\cdots,x_n,z)$ 是由关系 $Q(x_1,\cdots,x_n,y,z)$ 使用有界量词(bounded quantifier)而得,若

$$P(x_1,\cdots,x_n,z)\Leftrightarrow\ \forall y(y\leqslant z\Rightarrow \Rightarrow Q(x_1,\cdots,x_n,y,z)),$$

或

$$P(x_1,\cdots,x_n,z)\Leftrightarrow \Leftrightarrow\exists y(y\leqslant z\,\&\,Q(x_1,\cdots,x_n,y,z)).$$

原始递归关系类关于逻辑联结词(包括否定词)和有界量词是封闭的.

设 $f_1,\cdots,f_{s+1}$ 是 n 元原始递归函数,且 $P_1,\cdots,P_s$ 是原始递归关系,使得对任意变数值集,它们之中最多一个是真的,则函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}f_1(x_1,\cdots,x_n) & \text{若 } P_1(x_1,\cdots,x_n),\\ \cdots\quad\cdots & \cdots\quad\cdots\\ f_s(x_1,\cdots,x_n) & \text{若 } P_s(x_1,\cdots,x_n),\\ f_{s+1}(x_1,\cdots,x_n) & \text{否则,}\end{cases}\qquad(*)$$

是原始递归函数.

称函数 $f(x_1,\cdots,x_n,z)$ 是由一个处处有定义的函数 $g(x_1,\cdots,x_n,y,z)$ 使用有界极小化算子(bounded minimization operator)而得,若 $f(x_1,\cdots,x_n,z)$ 等于最小的 y 使得 $y\leqslant z$ 且 $g(x_1,\cdots,x_n,y,z)=0$,若存在如此 y;否则等于 $z+1$.原始递归函数类对有界极小化算子封闭.

一个函数 $\Phi(y,x_1,\cdots,x_n)$ 称为对 n 元原始递归函数是通用的(universal),若对每个原始递归函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 有一自然数 k,使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\Phi(k,x_1,\cdots,x_n)$$

对每个 $n\geqslant 1$ 有一通用函数,但不要求通用函数是原始递归函数.

每个递归可枚举集是一原始递归函数的值域;每个递归可枚举关系 $R(x_1,\cdots,x_n)$ 可表示为 $\exists yA(y,x_1,\cdots,x_n)$,其中 A 是一原始递归关系.每个原始递归函数可在**形式算术**(arithmetic, formal)中被表示;即对每个原始递归函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 有一算术公式 $F(y,x_1,\cdots,x_n)$ 使得对一切自然数 $k_1,\cdots,k_n,m$,若 $f(k_1,\cdots,k_n)=m$,则在形式算术中可推导出 $F(\overline{m},\overline{k}_1,\cdots,\overline{k}_n)$;若 $f(k_1,\cdots,k_n)\neq m$ 则可推导出 $\neg F(\overline{m},\overline{k}_1,\cdots,\overline{k}_n)$.(这里 $\overline{k}_1,\cdots,\overline{k}_n$, $\overline{m}$ 是在形式算术中表达自然数 $k_1,\cdots,k_n$, m 的算术项.)这事实在形式算术的不完全性证明中居于中心位置(见[4]).

参考文献

[1] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960(英译本: Uspenskii, V. A., Leçons sur les fonctions calculables, Hermann, 1966).

[2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965(英译本: Mal'tsev, A. I., Algorithm and recursive functions Wolters-Noordhoff, 1970)
[3] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967
[4] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic v. Nostrand, 1964.
С. Н. Артемов 撰

【补注】 在给定的条件下函数(*)是原始递归的这个事实经常用的另一说法是: 原始递归函数类在分情况定义下是封闭的.

参考文献

[A1] Calude, C., Theories of computational complexity, North-Holland, 1988
杨东屏 译

本原环 [**primitive ring**; **примитивное кольцо**], 右本原环(right primitive ring)

带有忠实右**不可约模**(irreducible **module**)的结合环(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras)). 类似地(用左不可约模)可以定义左本原环. 右和左本原环类不相重. 每个交换本原环是一个域(field). 每个(在 **Jacobson 根**(Jacobson radical)意义下的)半单环是本原环的次直积. **单环**(simple ring)或者是本原环, 或者是根环. 有非零极小右理想的本原环可由稠密性定理刻画. 满足右理想极小条件的本原环(即 Artin 本原环)是单环.

环 R 是本原的, 当且仅当它有一个极大模右理想 I(见**模理想**(modular ideal)), 使得 I 不包含 R 的任何非零双侧理想. 这一性质可作为在非结合环类中的本原环的定义.

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.
[2] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.
К. А. Жевлаков 撰

【补注】 Jacobson 根意义下的半单环现在被称作半本原环(semi-primitive rings). 带有多项式恒等式的本原环是有限维中心单代数. 有极小单侧理想的本原环有一个**基座**(socle), 可被完全刻画[A1].

参考文献

[A1] Rowen, L., Ring theory, I, II, Acad. Press, 1988.
蔡传仁 译

原根 [**primitive root**; **первообразный корень**]

1) 域 K 的 m 阶本原单位根(primitive root of unity)是 K 中的一个元素 ζ, 它适合 $\zeta^m=1$, 但对任意正整数 $r<m$ 有 $\zeta^r\neq 1$. 元素 ζ 生成 m 阶单位根组成的**循环群**(cyclic group) $\mu(m)$.

如果在 K 中存在一个 m 阶本原单位根, 则 m 与 K 的特征互素. 一个**代数闭域**(algebraically closed field)包含与其特征互素的任意阶本原单位根. 如果 ζ 是 n 阶本原根, 则对任意与 n 互素的 k, ζ^k 也是一个本原根. 如果 $(m,\mathrm{char}(K))=1$, 则所有 m 阶本原根的个数等于 **Euler 函数**(Euler function) $\varphi(m)$ 的值.

在复数域中, m 阶本原根形如

$$\cos\frac{2\pi k}{m}+i\sin\frac{2\pi k}{m},$$

其中 $0<k<m$, 且 k 与 m 互素.

2) 一个模 m 的原根是一个整数 g, 它适合

$$g^{\varphi(m)}\equiv 1(\bmod m),$$

$$g^{\gamma}\not\equiv 1(\bmod m),\ 1\leqslant\gamma\leqslant\varphi(m)-1,$$

这里 $\varphi(m)$ 是 Euler 函数. 对一个原根 g, 它的幂 $g^0=1,g,\cdots,g^{\varphi(m)-1}$ 是模 m 互不同余且构成模 m 的一个**既约剩余系**(reduced system of residues). 因此, 对每个与 m 互素的整数 a, 都存在指数 $\gamma(0\leqslant\gamma\leqslant\varphi(m)-1)$, 使得 $a\equiv g^{\gamma}(\bmod m)$.

原根并不是对每个模都存在, 而是仅仅对形如 $m=2,4,p^a,2p^a$ 的模 m 存在, 这里 $p>2$ 是素数. 在这些情况下, 模 m 既约剩余类的**乘法群**(multiplicative group)具有最简单的结构: 它们是 $\varphi(m)$ 阶循环群. 模 m 原根的概念与一个数模 m 的**指数**(index)的概念紧密相关.

模素数的原根的概念是由 L. Euler 引进的, 但模任意素数原根的存在性是由 C. F. Gauss 于 1801 年证实的.

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.
[2] Gauss, C. F., Disquisitiones Arithmeticae, Yale Univ. Press, 1966(译自拉丁文).
[3] Виноградов, И. М., Основы теорий чисел, 8 изд., М., 1972.
Л. В. Кузьмин, С. А. Степанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.
裴定一 译 赵春来 校

主解析纤维化 [**principal analytic fibration**; **главное аналитическое расслоение**]

局部平凡的解析纤维化, 结构 Lie 群单可迁且解析地作用于它的纤维上. 换句话说, 主解析纤维化是一个四元组 (P,B,G,π), 其中 P 和 B 是域 k 上的**解析空间**(analytic space), $\pi: P\to B$ 是解析映射, G 是 k 上 Lie 群, 从右边解析地作用于 P 上, 而且对基 B 的每个元素存在一个邻域 U 以及解析同构

$$\varphi: U \times G \to \pi^{-1}(U),$$

使得

$$\varphi(x, gh) = \varphi(x, g)h, x \in U, g, h \in G.$$

每个具有 n 维纤维的解析向量丛(vector bundle, analytic) $p: V \to B$ 确定了一个具有基 B 以及群 $GL(n, k)$ 的主解析纤维化，它在点 $b \in B$ 上的纤维是纤维 $p^{-1}(b)$ 的所有基的簇．这是在具有给定纤维以及结构群 G 的解析纤维化和与它相关联的主解析纤维化间的一一对应的一个特例．主解析纤维化的其他例子包括纤维化 $H \to H/G$，它的纤维是 Lie 群 H 关于它的 Lie 子群 G 的左陪集，以及解析**覆叠**(covering)(这里的覆叠群是结构群)．

主解析纤维化可由它的基 B 的一个开覆叠 $\{U_i\}_{i \in I}$ 以及转移函数(transition function)，即下列解析映射所确定：

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \to G, i, j \in I, U_i \cap U_j \neq \emptyset.$$

它们满足以下条件：

$$g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x), x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

转移函数构成在解析映射 $B \to G$ 的芽层 $\mathcal{O}^G$ 内取值的一维上闭链．这样就导出了以 B 为基以 G 为群的主解析纤维化的集合与上同调空间 $H^1(B, \mathcal{O}^G)$ 的集合间的一一对应．以 B 为基和 G 为结构群的主解析纤维化的分类至今仍是一个问题(对于非 Abel 群 G 的情形)，仅在某些特殊的情形得到解决(见解析结构的形变(deformation)，关于相应的局部模问题)．上述分类与主拓扑纤维化的分类间的联系可由下列自然映射来表示：

$$\alpha: H^1(B, \mathcal{O}^G) \to H^1(B, C^G),$$

这里 C^G 是连续映射 $B \to G$ 的芽层．

设 $k = \mathbf{C}$，B 是约化 **Stein 空间**(Stein space)．映射 α 是一一映射的，分类问题可归结为同伦论中的问题([4])．特别地，以非紧 Riemann 曲面为基、具有连通结构群的任何主解析纤维化都是平凡的．事实上对于更广泛的 E 主纤维化的类，可以得到[4]的结果．在 E 主纤维化的定义中群 G 被换成复 Lie 群上的某个局部平凡解析纤维化 $E \to B$，它按纤维化作用于 P 上．这个结果已被推广到结构群是复 Banach Lie 群的情形([2])．另一方面，如果 B 是紧 Riemann 曲面，则 α 是满的但不是单的．在一般情形下 α 可能既非满亦非单．对于连通可解群 G，已经知道了使 α 为单或满的上同调的充分条件([3])．

当 B 为亏格 p 的紧 Riemann 曲面以及 G 为连通约化代数群的情形也已被研究过．对 $p = 0$ 的相应分类可见([5])，对 $p = 1$，$G = GL(n, \mathbf{C})$ 的分类见[1]．在 $p \geq 2$，$G = GL(n, \mathbf{C})$ 的情形(见**代数向量丛**(vector bundle, algebraic))，稳定向量丛的概念起着十分重要的作用．这个概念已被推广到任意连通约化群 G 的情形([6])．在紧 Riemann 曲面上的有给定拓扑类型的所有稳定主纤维化的集合具有自然的连通**正规解析空间**(normal analytic space)的结构．已经得到在复射影空间 $B = P^m(\mathbf{C})$ 以及代数曲面上的向量丛的部分分类．

对于实主解析纤维化($k = \mathbf{R}$ 的情形)可见**实解析空间**(real-analytic space)．

参考文献

[1] Atiyah, M. F., Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London Math. Soc.* (3), 7 (1957), 414 – 452.

[2] Bungart, L., On analytic fibre bundle-I. Holomorphic fibre bundles with infinite dimensional fibres, *Topology*, 7 (1968), 55 – 68.

[3] Frenkel, J., Cohomologie non Abélienne et espaces fibrés, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 135 – 220.

[4] Grauert, H., Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, *Math. Ann.*, **135** (1958), 263 – 273.

[5] Grothendieck, A., Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphere de Riemann, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 121 – 138.

[6] Ramanathan, A., Stable principal bundles on a compact Riemann surface, *Math. Ann.*, **213** (1975), 129 – 152.

A. Л. Онищик 撰

【补注】 在复射影空间或代数曲面上的丛的不完整的分类可见[A1]–[A3].

参考文献

[A1] Ven, A. van de, Twenty years of classifying algebraic vectorbundles, in A. Beauville (ed.): Journées de géométrie algébrique d'Angers, Sijthoff & Noordhoff, 1980, 3 – 20.

[A2] Hartshorne, R., Four years of algebraic vectorbundles, in A. Beauville (ed.): Journées de géométrie algébrique d'Angers, Sijthoff & Noordhoff, 1980, 21 – 29.

[A3] Okonek, C., Schneider, M. and Spindler, H., Vector bundles on complex projective spaces, Birkhäuser, 1980.

陈志杰 译

主特征标[**principal character**; **главный характер**], Dirichlet 主特征标(Dirichlet principal character)

由条件

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{若 } (n, D) = 1, \\ 0 & \text{若 } (n, D) \neq 1 \end{cases}$$

定义的算术特征标 χ_0，其中 D 是给定的自然数．主特征用来定义本原特征和非本原特征标的概念(见 **Di-**

richlet 特征标(Dirichlet character)).

Н. Г. Чудаков 撰 戚鸣皋 译 潘承彪 校

主曲率[principal curvature; главная кривизна]

曲面沿主方向(沿使法曲率取极值的方向)的法曲率(normal curvature). 主曲率 k_1 和 k_2 是二次方程:

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

的根, 其中 E, F 和 G 是**第一基本形式**(first fundamental form)的系数, 而 L, M 和 N 是**第二基本形式**(second fundamental form)的系数, 它们在给定点计值.

曲面主曲率 k_1 和 k_2 之和的一半给出**平均曲率**(mean curvature), 而它们的乘积等于曲面的 **Gauss 曲率**(Gaussian curvature). 方程(*)可写为

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

其中 H 和 K 是曲面在给定点的平均曲率和 Gauss 曲率.

Euler 公式(Euler formula):

$$\widetilde{k} = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi,$$

使主曲率 k_1 和 k_2 与任意方向的法曲率 $\widetilde{k}$ 联系起来, 其中 φ 是所选方向与 k_1 的主方向作成的角.

Е. В. Шикин 撰

【补注】

在 n 维 Euclid 空间 E^n 的 m 维子流形 M 的情况下, 主曲率和主方向定义如下.

设 ξ 是 M 在 $p\in M$ 处的单位法向量. M 在 p 处沿方向 ξ 的 Weingarten 映射(Weingarten mapping)(形状算子(shape operator)) A_ξ 由 $-\bar\nabla\bar\xi$ 的切向部分出, 其中 $\bar\nabla$ 是 E^n 中的**共变微分**(covariant differential), $\bar\xi$ 是由 ξ 局部延拓成的单位向量场. A_ξ 与所选的 ξ 延拓无关. M 在 p 处沿方向 ξ 的主曲率由 A_ξ 的特征值给出, 主方向由它的特征方向给出. A_ξ 的特征值的(规范化)初等对称函数定义了 M 的高阶平均曲率(higher mean curvature), 它包括作为极端情况的平均曲率(A_ξ 的迹)和 Lipschitz-Killing 曲率(Lipschitz-Killing curvature)(它的行列式).

参考文献

[A1] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, V. Nostrand, 1965.

[A2] Chen, B. Y., Geometry of submanifolds, M. Dekker, 1973.

[A3] Berger, M. & Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988(译自法文).

[A4] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A5] do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976(中译本: 多卡模著, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988).

[A6] Guggenheimer, H., Differential geometry, McGraw-Hill, 1963.

[A7] Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952(译自德文)[中译本: D. 希尔伯特 & S. 康福森, 直观几何, 高等教育出版社, 1964.]

[A8] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Acad. Press, 1966.

[A9] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1-5, Publish or Perish, 1979.

沈一兵 译

主方向[principal direction; главное направление]

正则曲面一点处使得曲面在该点的**法曲率**(normal curvature)达到极值的切方向. 在曲面的每点或有两个主方向, 或每个方向都是主方向(在**平坦点**(flat point)和**脐点**(umbilical point)). 在前一种情况下, 主方向是正交的, 共轭的, 且重合于曲率标形(见 **Dupin 标形**(Dupin indicatrix))的轴的方向. 若 t 是一主方向, 则成立关系(Rodrigue 公式(Rodrigue formula)):

$$\nabla_t \mathbf{n} = -k\nabla_t \mathbf{r}.$$

这里 $\mathbf{n}$ 是曲面的单位法向量, k 是曲面 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ 沿 t 方向的法曲率. 反之, 若等式 $\nabla_t\mathbf{n} = \lambda\nabla_t\mathbf{r}$ 沿某方向 t 成立, 则该方向是主方向. 沿主方向的法曲率就是众所周知的**主曲率**(principal curvature).

Е. В. Шикин 撰

【补注】

参考文献见**主曲率**(principal curvature).

沈一兵 译

主因子[principal factor; главный фактор], 半群的

形如 $J(x)/N(x)$ 的 Rees 商半群(见**半群**(semi-group)), 其中 $J(x)$ 是半群中由 x 生成的双边主理想(principal ideal), 而 $N(x)=J(x)\setminus J_x$, 其中 J_x 是包含 x 的 $\mathcal{J}$ 类(见 **Green 等价关系**(Green equivalence relation)). 若集合 $N(x)$ 是非空的, 则它是一个理想, 而若 $N(x)=\varnothing$, 则令 $J(x)/N(x)=J(x)$. 半群的主因子也称理想因子(ideal factor). 半群的任意主因子或者是一具零乘法的半群, 0 单半群, 或者是一理想**单半群**(simple semi-group). 当且仅当半群有一个核(见**半群的核**(kernel of a semi-group))并且这个核与所给主因子重合时后一种情况出现. 半群若没有具零乘法的主因子, 则称为半单的(semi-sim-

ple); 半群的半单性条件等价于, 例如说, 对于任意双边理想 A, $A^2=A$ 成立. 所有**正则半群** (regular semi-group) 是半单的. 若一半群的每个主因子或者是完全 0 单的, 或者是完全单的 (见**完全单半群** (completely-simple semi-group)), 则该半群称为完全半单的 (completely semi-simple). 一个半群是完全半单的, 当且仅当它是正则的, 并且满足下列 (相互对偶的) 条件之一: 对任一 $\mathscr{J}$ 类, 包含在它中的 $\mathscr{L}$ 类 (或 $\mathscr{R}$ 类) 的半序集中有一极小元; 此时 $\mathscr{J}=\mathscr{D}$.

任意半群象是由主因子组成的. 这说明了理想单半群和 0 单半群在半群理论中所起的重要作用.

参考文献

[1] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960 (英译本: Lypin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974).

[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer. Math. Soc., 1961-1967.

Л. Н. Шеврин 撰

【补注】 半群的主因子亦称为 "a chief factor of a semi-group."

李慧陵 译

主纤维丛 [principal fibre bundle; главное расслоение]

G **纤维化** (fibration) $\pi_G: X\to B$ 使得群 G 自由地且完满地作用在空间 X 上. 主纤维丛的意义在于下述事实: 给定了 G 到 F 的同胚群里的表示后, 可利用主纤维丛来构造相伴的以 F 作纤维的纤维丛. 带有 Lie 群的微分主纤维丛在联络与和乐群的理论中起着重要作用. 例如, 设 H 是拓扑群, G 是它的闭子群, H/G 是 H 关于 G 的左陪集的齐性空间, 则 $\pi_G: H\to H/G$ 是主纤维丛. 再设 X_G 是一个 Milnor 构造 (Milnor construction), 即为无限多个 G 的并, 其中每个点有以下形式:

$$\langle g, t\rangle=\langle g_0t_0, g_1t_1, \cdots\rangle,$$

这里 $g_i\in G$, $t_i\in[0,1]$, 而且只有有限多个 t_i 非零. 由公式 $h\langle g,t\rangle=\langle hg,t\rangle$ 定义的 G 在 X_G 上的作用是自由的, 且纤维丛 $\omega_G: X_G\to X_G \bmod G$ 是可数值化主纤维丛.

主纤维丛的每个纤维都同胚于 G.

主纤维丛的态射是纤维丛的态射 $f: \pi_G\to\pi_{G'}$, 使得纤维的映射 $f_{x_0}^{-1}(b)$ 诱导群的同态:

$$\theta_b=\xi_b'^{-1}f_{x_0}^{-1}(b)\xi_b: G\to G',$$

这里 $\xi_b(g)=gx$, $\pi_G(x)=b$. 特别地, 一个态射被称为同变的, 如果 $\theta_b=\theta$ 与 b 无关, 所以 $gf(x)=\theta(g)f(x)$ 对所有的 $x\in X$, $g\in G$. 当 $G=G'$, $\theta=$ id 时, 同变态射称为 G 态射. 任何 (G,B) 态射 (即 B 上的 G 态射) 称为 G 同构.

对任何映射 $u: B'\to B$ 以及主纤维丛 $\pi_G: X\to B$, **诱导纤维丛** (induced fibre bundle) $u^*(\pi_G)\to\pi_G$ 是具有同一个群 G 的主纤维丛, 而且映射 $U: u^*(\pi_G)\to\pi_G$ 是 G 态射, 它毫无歧义地决定了 G 在空间 $u^*(x)$ 上的作用. 例如, 当主纤维丛 π_G 平凡时, 它同构于主纤维丛 $\varphi^*(\eta)$, 这里 η 是在单独一个点上的 G 丛, φ 是常映射. 反之亦然, 所以具有一个截面的主纤维丛是平凡的. 对于每个可数值化的主纤维丛 $\pi_G: X\to B$, 存在映射 $f: B\to X_G \bmod G$, 使得 $f^*(\omega_G)$ 是 G 同构于 π_G 的, 而且主纤维丛 $f_0^*(\omega_G)$ 和 $f_1^*(\omega_G)$ 为同构的充要条件是 f_0 和 f_1 同伦 (homotopy). 这就是主纤维丛的同伦分类的主要定理, 它显示了 (用 Milnor 构造得到的) 主纤维丛 ω_G 关于分类映射 f 的普遍性.

参考文献

[1] Bishop, R. L., Crittenden, R. J., Geometry of manifolds, Acad. Press, 1964.

[2] Nomizu, K., Lie groups and differential geometry, Math. Soc. Japan, 1956.

[3] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.

[4] Расслоенные пространства и их приложения, сб. переводов, М., 1958.

[5] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951

[6] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

А. Ф. Щекутьев 撰

【补注】 主纤维丛 $\pi_G: X\to B$ 称为可数值化的 (numerable), 如果存在连续映射 $B\to[0,1]$ 的序列 $(u_n)_{n\geq 0}$, 使得开集 $U_n=u_n^{-1}((0,1])$ 构成 B 的开覆盖 (见**覆盖 (集合的)** (covering (of a set))), 且 X 在每个 U_n 上是可平凡化的 (即限制丛 $\pi_G: X\to U_n$ 是平凡的, 见**纤维空间** (fibre space)).

参考文献

[A1] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology 1900-1960, Birkhäuser, 1989.

陈志杰 译

主基本解 [principal fundamental solution; главное фундаментальное решение]

二阶椭圆型方程

$$Au\equiv\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=0 \quad (*)$$

定义在整个空间 E^n 上的**基本解** (fundamental solution) $G(x,y)$, 对于某两个正常数 a 和 R, 当 $|x-y|>R$ 时满足条件

$$G(x,y)=o(e^{-a|x-y|}),\quad \frac{\partial G}{\partial x_i}=o(e^{-a|x-y|})$$

如果系数 $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ 和 $c(x)$ 在 E^n 上满足 **Hölder 条件** (Hölder condition), 且如果对某个 $\gamma > 0$ 满足不等式 $c(x) < -\gamma$, 那么主基本解存在. 如果算子 A 的系数都定义在某个具有光滑边界的有界域中, 那么它们可以扩展到整个 E^n 空间, 以致对扩张算子将存在主基本解.

参考文献

[1] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970. (译自意文)

Ш. А. Алимов 撰 孙和生 译 陆柱家 校

主 G 对象 [principal G-object; главный G-объект], 范畴中的

范畴论中的一个概念, 例子有拓扑学中的**主纤维丛** (principal fiber bundle), 代数几何学中的**主齐性空间** (principal homogeneous space) 等. 令 G 是带有积和终对象 e 的范畴 C 中的一个**群对象** (group object). 一个对象 P 叫作 G 对象, 是指有态射 $\pi: P \times G \to P$, 使下两图交换:

$$\begin{array}{ccc} P \times G \times G & \xrightarrow{1_P \times \mu} & P \times G \\ \downarrow{\scriptstyle \pi \times 1_G} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ P \times G & \xrightarrow{\pi} & P \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} P \times e & \xrightarrow{1_P \times \beta} & P \times G \\ \downarrow{\scriptstyle pr_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ P & \xrightarrow{1_P} & P \end{array},$$

其中 $\mu: G \times G \to G$ 是 G 上的群乘法态射, $\beta: e \to G$ 是到 G 中的单位元态射. 确切地说, 如上定义的 G 对象叫作右 G 对象 (right G-object); 左 G 对象 (left G-object) 可类似定义. 群对象 G 自身是 G 对象的一个例子, 这时 μ 与 π 重合, 称为平凡 G 对象 (trivial G-object). 范畴 C 中的 G 对象构成一个范畴 C^G. 其态射是 C 中与 π 可交换的态射 $\varphi: P \to P'$ (即 $\pi'(\varphi \times 1) = \varphi\pi$). 一个 G 对象叫作形式主 G 对象 (formal principal G-object), 是指态射 $pr_1: P \times G \to P$ 和 $\pi: P \times G \to P$ 诱导出一个同构 $\varphi = (\pi, pr_1): P \times G \to P \times P$. 如果 T 是范畴 C 上的某种 **Grothendieck 拓扑** (Grothendieck topology), 一个形式主 G 对象 P 叫作 (相对于拓扑 T 的) 主 G 对象, 则指存在终对象的一个覆盖 $(U_i \to e)_{i \in I}$, 使得任取 $i \in I$, 积 $G \times_e U_i$ 同构于平凡 $G \times_e U_i$ 对象.

例. 1) 若 C 是集范畴, G 是一个群, 则非空 G 对象叫作 G 集. 存在集合 P, 可以定义映射 $P \times G \to P((p, g) \to pg)$ 满足条件: $p(gg') = (pg)g'$, 对任意 $g, g' \in G$ 成立, 以及 $p \cdot 1 = p$ 对任意 $p \in G$ 成立. 一个主 G 对象是一个 G 集, 使得任取 $p, p' \in P$, 存在唯一的元素 $g \in G$, 满足 $pg = p'$ (主齐性 G 集 (principal homogeneous G-set)). 若 P 非空, 选择 $p_0 \in P$, 则确定一个映射 $g \to p_0 g$, 它建立了 P 与平凡 G 集 G 之间的一个同构. 这样, 在任意拓扑中, 一个形式主 G 对象是一个主 G 对象.

2) 若 X 是一个微分流形, H 是一个 Lie 群, C 是 X 上的纤维化范畴, 群对象 G 取作射影 $H \times X \to X$, 并在 C 中定义带有开覆盖族的拓扑, 则可得到主 G 纤维化的定义.

若 P 是范畴 C 中的形式主 G 对象, 则任取范畴 $\mathrm{Ob}(C)$ 中的对象 X, 集合 $P(X) = \mathrm{Hom}_C(X, P)$ 或者是空的, 或者是一个主齐性 $G(X)$ 集.

一个形式主 G 对象 P 同构于平凡 G 对象, 当且仅当存在一个截面 $e \to P$. 形式主 G 对象的同构类集记作 $H^1(C, G)$. 若 G 是一个 Abel 群对象, 则以平凡 G 对象类为基点的集合 $H^1(C, G)$ 是一个群, 且可用同调代数的标准工具进行计算. 一般地说, 在 $H^1(C, G)$ 的计算中, 可应用 Čech 同调结构 (见**非 Abel 上同调** (non-Abelian cohomology)).

参考文献

[1] Grothendieck, A., et al. (eds.), Revêtements étales et groupe fondamental, Sem. Geom. Alg. 1, Springer, 1971.

И. В. Долгачев 撰

【补注】 形式主 G 对象通常称为 G 躯干 (G-torsors). 形式主 G 对象与主 G 对象之间的区别并不深奥. 一个形式主 G 对象 P 是主 G 对象的必要和充分条件是, $P \to e$ 的唯一态射构成 e 的一个覆盖.

参考文献

[A1] Giraud, J., Cohomologie non abélienne, Springer, 1971.

张英伯 译

主齐性空间 [principal homogeneous space; главное однородное пространство]

代数簇或概形范畴里的**主 G 对象** (principal G-object). 如果 S 是**概形** (scheme), Γ 是 S 上**群概形** (group scheme), 则 Γ 上概形范畴里的主 G 对象称为主齐性空间. 如果 S 是域 k 的谱 (见**环的谱** (spectrum of a ring)), Γ 是代数 k 群 (见**代数群** (algebraic group)), 则 Γ 上主齐性空间是一个代数 k 簇 V, Γ (从左边) 作用于 V 上使得当把 k 换成它的可分代数闭包 $\bar{k}$ 后, 每个点 $v \in V(\bar{k})$ 可定义簇 $V_{\bar{k}}$ 与 $\Gamma_{\bar{k}}$ 间的同构映射 $g \to gv$. 主齐性空间 V 为平凡, 当且仅当 $V(k)$ 非空. 光滑代数群 Γ 上的主齐性空间的同构类的集合可被等同于 **Galois 上同调** (Galois cohomology) 的集合 $H^1(k, \Gamma)$. 在一般的情形下, S 群概形 Γ 上的主齐性空间的类的集合等同于一维非 Abel 上同调的集合 $H^1(S_T, \Gamma)$, 这里 S_T 是概形 S 上的某个 **Grothendieck 拓扑** (Grothendieck topology) ([2]).

主齐性空间已在很多情形下被计算过. 如果 k 是有限域, 则在连通代数 k 群上的主齐性空间都是平凡的 (Lang 定理 (Lang theorem)). 当 k 为 p 进数域

且 Γ 为单连通半单群时，这个定理仍正确（Kneser 定理（Kneser theorem））．如果 $\Gamma=\Gamma_{m,S}$ 是乘性 S 群概形，则 Γ 上主齐性空间的类的集合等同于 S 的 **Picard 群**（Picard group）Pic(S)．特别当 S 是域的谱时，这个群是平凡的．如果 $\Gamma=\Gamma_{a,S}$ 是加性 S 群概形，则 Γ 上主齐性空间的类的集合等同于 S 的结构层 $\mathscr{O}_S$ 的一维上同调群 $H^1(S,\mathscr{O}_S)$．特别当 S 是仿射概形时这个集合是平凡的．如果 k 是整体域（即代数数域或单变量代数函数域），则代数 k 群 Γ 上的主齐性空间的类的集合的研究是以对 Tate-Шафаревич 集 Ш(Γ) 的研究为基础的，Ш(Γ) 是由 Γ 上这样的主齐性空间构成，它们在关于 k 的赋值的所有完全化 k_v 里都有有理点．如果 Γ 是域 k 上的 Abel 群，则 Γ 上的主齐性空间的类的集合成为一个群（见 **Weil-Châtelet 群**（Weil-Châtelet group））．

参考文献

[1] Serre, J.-P., Cohomology Galoisienne, Springer, 1973.

[2] Demazure, M. and Gabriel, P., Groupes algébriques, I, Masson, 1970.

[3] Lang, S. and Tate, J., Principal homogeneous spaces over abelian varieties, *Amer. J. Math.*, **80** (1958), 659－684.

В. Е. Воскресенский, И. В. Долгачев 撰

【补注】 主齐性空间的概念并不局限于代数几何．例如它在 G 集合的范畴里被定义，这里 G 是一个群．设 G 是有限（投射有限，等）群．E 是一个 G 集合（G-set），即带有 G 作用 $G\times E\to E$ 的一个集合 E．设 Γ 是一个 G 群（G-group），即 G 集合范畴里的一个群对象，这意味着 Γ 是一个群而且 G 在 Γ 上的作用是 Γ 的群自同构：$(xy)^\gamma=x^\gamma y^\gamma$ 对 $\gamma\in G$，$x,y\in\Gamma$．如果存在 E 上的一个 Γ 作用 $\Gamma\times E\to E$ 使得 $(\gamma x)^g=(\gamma^g)(x^g)$ 对 $g\in G$，$\gamma\in\Gamma$，$x\in E$，则称 Γ 与 G 作用相容地左作用于 E 上．在这个架构里的 Γ 上的主齐性空间（principal homogeneous space）是一个 G 集合 P，Γ 与 G 作用相容地作用于其上，使得对所有的 $x,y\in P$ 存在 $\gamma\in\Gamma$ 使 $y=\gamma x$．（这正是术语“主”所提示的性质，人们也说 P 是 Γ 上的仿射空间（affine space））．在这种情形下，$H^1(G,\Gamma)$ 与 Γ 上主齐性空间的同构类间存在自然的一一对应，而且事实上 $H^1(G,\Gamma)$（对于非 Abel 的 Γ）有时就是用这种方式定义的．　　陈志杰 译

主理想 [principal ideal; главный идеал]

由一个元素 a 生成的（环，代数，半群或格中的）理想（ideal），亦即包含元素 a 的最小理想．

一个环 K 的左主理想 $L(a)$ 除了包含元素 a 本身之外，还包含所有形如

$$ka+na$$

的元素．右主理想 $R(a)$ 包含所有形如

$$ak+na$$

的元素，而双边主理想 $J(a)$ 包含所有形如

$$na+ta+as+\sum_i[(k_ia)l_i+k_i'(al_i')]$$

的元素，其中 k，t，s，k_i，k_i'，l_i，l_i' 是 K 中任意元素，$na=a+\cdots+a$（n 项，$n\in\mathbf{Z}$）．如果 K 是含有幺元的环，则 na 项可以省略．特别地，对域上代数 A，

$$L(a)=Aa,\ R(a)=aA,\ J(a)=AaA.$$

在半群 S 中也有由一个元素 a 生成的左，右和双边理想，它们分别等于

$$L(a)=S^1a,\ R(a)=aS^1,\ J(a)=S^1aS^1,$$

其中 S^1 为一个半群，当 S 包含幺元时，S^1 即为 S，否则 S^1 为 S 添加一个幺后所得到的半群．

一个格 L 中由一个元素 a 生成的主理想定义为由适合 $x\leqslant a$ 的所有元素 x 组成的集合，通常表示为 a^Δ，$[a]$，当格包含零元素时亦可表为 $[0,a]$．于是

$$a^\Delta=aL=\{ax:x\in L\}.$$

在一个有限长的格内所有理想都是主理想．

В. Н. Ремесленников, Т. С. Фофанова, Л. Н. Шеврин 撰

【补注】 设 A 是具有分式域 K 的整环，A 的主分式理想（principal fractional ideal）是 K 中形如 Ar 的 A 子模，其中 r 为 K 中的某个元素．

设 L 为格．对偶于 $a\in L$ 生成的主理想，有 a 所决定的主对偶理想（principal dual ideal）或主滤子（principal filter），它是集合 $[a)=\{y\in L:a\leqslant y\}$．$L$ 中由 a 决定的主理想也可（更确切地）表为 $(a]$．

一个偏序集是完全格（complete lattice），当且仅当它包含零元素及其中每个理想都是主理想．

参考文献

[A1] Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1963, Chapt. Ⅳ, Sect. 3（译自俄文）．

[A2] Beran, L., Orthomodular lattices, Reidel, 1985, p. 4ff.

[A3] Grätzer, G., Lattice theory, Freeman, 1971, p. 23ff.

[A4] Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, reprint, 1963, p. 78; 86; 162（译自俄文）．

裴定一 译　赵春来 校

主理想环 [principal ideal ring; главных идеалов кольцо]

具有幺元的结合环 R（见**结合环与代数**(associative rings and algebras)），其所有的右理想与左理想都是主理想，即分别具有形式 aR 和 Ra，$a \in R$．主理想环的例子有整数环，域 F 上的多项式环 $F(x)$，具有自同构 $S: F \to F$ 的域 F 上的斜多项式环(ring of skew polynomials) $F(x, S)$（$F(x, S)$ 中的元形如 $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i$，$a_i \in F$，加法是通常的，乘法是由方程 $ax = xa^s$，$a \in F$ 以及结合律与分配律所定义），具有导子：$F \to F$ 的域 F 上的微分多项式环(ring of differential polynomials) $F(x, ')$（这个环由形如 $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i$，$a_i \in F$ 的元组成，加法由通常方式给出，乘法是由方程 $ax = xa + a'$，$a \in F$ 决定）．没有零因子的主理想环称为主理想整环(principal ideal domain)．交换主理想环是主理想整环与一个具有唯一幂零素理想的主理想环的直和（见**幂零理想**(nilpotent ideal)；**素理想**(prime ideal)）．如果 R 是一个主理想整环，那么 R 中两个非零元 a 和 b 有最大左公因子 (a, b) 和最小右公倍元 $[a, b]$，它们被定义为满足下列方程的元素：

$$aR + bR = (a,b)R; \quad aR \cap bR = [a,b]R.$$

元素 (a, b) 和 $[a, b]$ 除差一个右可逆因子外是唯一确定的．主理想整环是唯一因子分解整环．一个主理想整环的全体双边理想构成一个具有零元和幺元的交换乘法半群(semi-group)（环的极大理想是这个半群的自由生成元）．

R 上具有有限秩 n 的自由模 M 的子模 N 是一个秩 $k \leq n$ 的自由模，在模 M 和 N 中可以选取基 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_k$，使得 $b_i = e_i a_i$ $(1 \leq i \leq k)$，这里 $e_i \in R$，且当 $i < j$ 时 e_i 是 e_j 的完全因子(complete divisor)，即 $e_i R \cap R e_i \supseteq R e_j R$．$R$ 上的每一个有限生成模 K 是循环模 $R/e_i R$ $(1 \leq i \leq m)$ 的直和，这里 $e_i \in R$，当 $e_i \neq 0$ $(i < j)$ 时，e_i 是 e_j 的完全因子．这个定理推广了有限生成 **Abel 群**(Abelian group)的基本定理．上述定理中的元素 e_i $(1 \leq i \leq m)$ 在相似之下是确定的（见**结合环与代数**(associative rings and algebras)）．这些元素称为 K 的不变因子(invariant factors)．进一步，K 可以表示成不可分解循环模 $R/q_i R$ 的直和，这里 $q_i \in R$ $(1 \leq i \leq k)$，q_i $(1 \leq i \leq k)$ 在相似下是确定的，称为模 K 的初等因子(elementary divisors of the module)．如果主理想整环 R 是交换的，则 $q_i R = 0$ 或 $q_i R = p_i^{n_i} R$ $(1 \leq i \leq k)$，这里 p_i 是 R 的不可约（素）元．有限维线性空间的线性变换的初等因子和不变因子的性质可以由以上论述推出([3])．

参考文献

[1] Jacobson, N., The theory of rings, Amer. Math. Soc., 1943.

[2] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1, Springer, 1975.

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra: Algebraic structures, Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, chapt. 1; 2.（译自法文）.

Л. А. Бокуть 撰

【补注】 上文中的斜多项式与微分多项式环的两个例子是一般斜多项式环 $F[x; S, d]$ 的特殊情形，这里 S 是 F 的自同构，d 是一个 S 导子(S-derivation)（即 $d(ab) = a^s d(b) + d(a) b$），乘法由 $ax = xa^s + d(a)$ 定义．这个环是一个主理想环．如果 S 是使得 $F^s \neq F$ 的一个同构，则此环是右主理想的，但不是左主理想的．

含有非零因子矩阵的有限矩阵环的左（和右）理想也是左（右）主理想．上面所讲的关于模的性质，对于矩阵也有（原始的）翻译，即这种环上的每个矩阵都等价于对角形矩阵．

裴定一 译　赵春来 校

主法线 [principal normal; главная нормаль]

过曲线 L 的点 M_0 且位于 L 在 M_0 处的**密切平面**(osculating plane)内的 L 的法线．若 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 是曲线的参数方程，值 t_0 对应于 M_0，则主法线的向量形式的方程是：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \lambda \mathbf{r}''(t_0).$$

Е. В. Шикин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Struik, D. J., Lectures in classical differential calculus, Dover, reprint, 1988, p. 13.

[A2] Millman, R. S. & Parker, G. D., Elements of differential geometry, Prentice Hall, 1977, p. 26（中译本：R. S. 密尔曼、G. D. 派克，微分几何原理，广东高等教育出版，1987）.

沈一兵 译

微分算子的主部 [principal part of a differential operator; главная часть дифференциального оператора]

由给定算子丢弃所有不含最高阶导数的项后所构成的齐次微分算子．微分算子

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

的主部是 $\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D^\alpha$．一个微分算子的主部有时由引入对不同自变量的微分给予的补充的权而定义．例如，微分算子 $D_1 - D_2^2 + \alpha D_2$ 的主部有时定义为 $D_1 - D_2^2$（如果 D_1 被给予权 2 而 D_2 权 1）．

А. А. Дезин 撰

【补注】 主部也称为主象征(principal symbol)(见**算子的象征**(symbol of an operator)．

主象征的零集称为 L 的**特征**(characteristic)．

此外，$\mathbf{R}^n$ 中一个常系数微分算子 L 称为实主型(real principal type)的，如果主象征 l 是实的又如果对 $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0$，$l'(\xi)\neq 0$(亦见**主型偏微分算子**(principal type, partial differential operotor of)．

对 C^∞ 流形 X 中具有 C^∞ 系数的 m 阶微分算子 L，其主象征可看成 X 的余切从上一个不变地定义的函数．

参考文献

[A1] Hormander, L., The analysis of linear partial differential operators, I, Springer, 1983.

葛显良 译　鲁世杰 校

主列 [**principal series**; **главный ряд**]，长为 m 的群 G 的正规子群组成的有限降链

$$G=G_0>G_1>\cdots>G_m=1,$$

而它不含在其他任何具有相同性质的链中．即 G_{i+1} 是 G_i 的真子群中作为 G 的**正规子群**(normal subgroup)的极大者，$i=0,\cdots,m-1$．一个群有至少一个主列，当且仅当所有正规子群的升链和降链都有有限长．若一群有两个主列，则它们是同构的，即它们有相同长度且有从一个序列的商群 G_i/G_{i+1} 的集合到另一序列的相应集合上的一一映射，使对应的商群是同构的．　Ю. И. Мерзляков 撰

【补注】 "principal series" 这一术语在西方几乎不用，而使用 "chief series"．上面有关同构的断言就是关于主列的 Jordan-Hölder 定理(Jordan-Hölder theorem)．由主列定义的商群 G_i/G_{i+1} 称为主因子(chief factor)．任一主列可以加细成为**合成序列**(composition sequence)．

参考文献

[A1] Carmichael, R., Groups of finite order, Dover, reprint, 1956, p. 97.

[A2] Hall, M., Jr., The theory of groups, MacMillan, 1959, p. 124(中译本：M．赫尔，群论，科学出版社，1981)．

[A3] Huppert, B., Eudliche Gruppen, I, Springer, 1967, p. 64(中译本：贝·胡佩特，有限群论，第一卷，福建人民出版社，1992)．

李慧陵 译

主平移 [**principal translation**; **главная трансляция**]

一个**代数系统**(algebraic system) $\mathbf{A}=\langle A,\ \Omega\rangle$ 到其自身内如下形式的映射

$$\varphi: x\to F(a_1,\cdots,a_{k-1},x,a_{k+1},\cdots,a_n),$$

这里 F 是 Ω 内一个基本运算符号，而 $a_1,\cdots,a_n$ 是集合 A 的固定元素．　Д. М. Смирнов 撰

【补注】 "主平移" 这个术语在西方文献中不用．如上的函数通常称为(一个变量的)代数函数(algebraic function)或多项式(polynomial)．　郝钢新 译

主型偏微分算子 [**principal type, partial differential operator of**; **главного типа оператор с частными производными**]，具有常系数的

一个算子 $A(D)$，其主部 $P(D)$(见**微分算子的主部**(principal part of a differential operator))对任意非零的向量 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$|x|\neq 0$，满足以下条件

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial P(x)}{\partial x_j}\right|^2\neq 0. \qquad (*)$$

另一种提法是：对于 $P(D)$ 为**特征**(characteristic)的任意实超平面必为单特征的．条件(*)是 $A(D)$ **控制**(domination)任意低阶算子的充分必要条件．具有相同主部 $P(D)$ 的算子当且仅当(*)成立时具有相同强度．若算子是变系数的，$A(D)$ 为主型的条件通常要用一些特殊不等式估计式来表述，这些估计式是对于具有紧支集的函数，用算子作用于其上所得的值去估计该函数的导数值．若条件(*)逐点成立，则对**换位子**(commutator) $[P(x,\ D),\ \overline{P}(x,\ D)]$ 之阶数加一补充的条件，就足以保证 $A(D)$ 事实上是主型算子．

A. A. Дезин 撰

【补注】 令 $A(D)$，$B(D)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的常系数线性偏微分算子，其主部分别为 $P(D)$，$Q(D)$．对于 $A(\xi)$，作 $\widetilde{A}(\xi)=\sum_{|\alpha|\geq 0}|A^{(\alpha)}(\xi)|^2$(这是一个有限和，因为 $A(\xi)$ 是一个多项式)．类似地，对 $B(\xi)$ 作 $\widetilde{B}(\xi)$．说 $A(D)$ 强于 $B(D)$，记作 $B\prec A$，如果存在一个常数 C 使

$$\frac{\widetilde{B}(\xi)}{\widetilde{A}(\xi)}<C,\quad \xi\in\mathbf{R}^n.$$

如果 $B\prec A\prec B$，就说 $A(D)$ 与 $B(D)$ 有相同强度．

参考文献

[A1] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, II, Springer, 1983.

【译注】 对于一般的**拟微分算子**(pseudo-differential operator)——其中包括变系数的**线性偏微分算子**(linear partial differential operator) $P(x,\ D)$，也可以定义主型算子．它是就其简单性而言仅次于常系数算子和**椭圆型算子**(elliptic operator)的一大类．设 $P(x,\ D)$ 是一个 m 阶拟微分算子，$P_m(x,\ \xi)$ 是它的主象征(principal symbol)，$P(x,\ D)$ 称为主型算子即指它与 $P_m(x,\ D)$ 有相同强度．当 $P(x,\ D)$ 为常系数算子时，这条件即可化为 $\sum_{j=1}^{n}|\partial P_m(\xi)/\partial\xi_j|^2\neq 0$ 于

$\xi\neq0$ 时. 在研究这类算子时, 开始也使用 $\sum_{j=1}^{n}|\partial P_m(x,\xi)/\partial\xi_j|^2\neq0$ 于 $\xi\neq0$ 时作为定义. 现代的研究则采用较宽的一类, 并要求其 Hamilton 流不能恒停留在 x 空间的一个紧集的上方, 这里假设主象征是实的. 解析地说, 也就是当 $\xi\neq0$ 时, $d_{(x,\xi)}P_m(x,\xi)$ 与 $\xi dx=\sum_{j=1}^{n}\xi_j dx_j$ 不能平行.

参考文献

[B1] Hormander, L., The analysis of linear partial differential operators, Ⅳ, Springer, 1985.

[B2] Егоров, Ю. В., Линейные дифференциальные уравнения, М. 1984 (英译本, Egorov, Yu. V., Linear differential equations of principal type, Consultant Bureau, 1986.

齐民友 译

最小反作用原理 [principle of least reaction; наименьших реакций принцип]

Gauss 原理 (Gauss principle) 的一个推论, 对于约束系统的点, 运用代表 Newton 第二定律的方程, 就可以得到本原理 (见[1]). 根据最小反作用原理, 对于系统的真实运动来说, 下面的量:

$$\sum_{\nu}\frac{R_\nu^2}{2m_\nu}$$

相对于所有在 Gauss 意义下可能发生的运动取最小值. 这里, R_ν 为约束的反作用力, m_ν 为系统中各点的质量.

参考文献

[1] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962.

В. В. Румянцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lindsay, R. B. and Margenau, H., Foundations of physics, Dover, reprint, 1957.

王克仁 译 诸德超 校

最大保证结果原理 [principle of the largest sure result; наибольшего гарантированного результата принцип]

在**运筹学** (operations research) 和**对策论** (games, theory of) 中运用的决策基本原理之一. 最大保证结果原理体现力求选取这样的策略, 使得运用该策略时, 所得最大, 而其支付最小 (见**极大化极小** (maximin)). 在许多情形, 这一原理可以作为某个公理体系的推论来导出, 而这一公理体系的各个公理, 对任何"合理"的最优行为原则来说, 表明它们都是应该具有的自然性质 (见[5]). 最大保证结果原理的具体化, 在不同的局势下, 导致形形色色的极大化极小问题的陈述.

运筹学研究, 即通向达到预定目标的活动研究, 是由运筹学工作者根据用户的利益来进行的. 后者尽力达到其目标, 在数学上, 表达为力求增加**有效性准则** (effectiveness criterion) —— 函数 $f(x,y)$, 其中 x 是用户选择, y 是用户无法控制的因素. 具体值 $x\in X$ 的选择取决于用户所掌握的信息, 而关注 y 值的运筹学工作者, 确定用户策略 $\widetilde{x}=x(y)$.

基于运筹学工作者所掌握的关于 y 值的信息, 不可控制的因素 y 分为三个组: 固定因素, 其值已知; 随机因素, 即具有已知分布律的随机过程; 以及不确定因素, 对它们只知道其取值范围 Y 或者其分布律所属范围.

运筹学工作者估计策略的有效性, 并基于用户所掌握的有关不可控制的因素的信息, 极大化可保证的有效性准则的值, 来由此作出他对策略的选择. 如果 $\widetilde{x}$ 是用户的策略, 那么它对用户来说, 在仅知道 $y\in Y$ 时, 其值定义为

$$\inf_{y\in Y}f(\widetilde{x},y).$$

最大保证结果 (largest sure result) 定义为

$$\sup_{\widetilde{x}}\inf_{y\in Y}f(\widetilde{x},y),\qquad(*)$$

满足

$$\inf_{y\in Y}f(\widetilde{x}^*,y)=\sup_{\widetilde{x}}\inf_{y\in Y}f(\widetilde{x},y)$$

的策略 $\widetilde{x}^*$ 是所考虑的局势下的最优策略.

如果用户不顾有关具体值 $y\in Y$ 的信息, 即 $x(y)=x$, 则最大保证结果定义为

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)$$

(见**极小化极大原理** (minimax principle)).

如果 y 的值确切已知, 则对于 $(*)$ 下列等式成立:

$$\sup_{x(y)}\inf_{y\in Y}f(x(y),y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f(x,y).$$

如果 y 的值由一个主动的对方产生, 而运筹学工作者和用户也知道对方的有效性准则 $\varphi(\widetilde{x},y)$, $y\in Y$, 且假定对方根据条件 $\max_{y\in Y}\varphi(\widetilde{x}(y),y)$ 来选取 y, 那么最大保证结果定义为

$$\sup_{\widetilde{x}}\inf_{y\in Y_1(\widetilde{x})}f(\widetilde{x},y),$$

其中

$$Y_1(\widetilde{x})=\{y\in Y:\varphi(x(y),y)=\max_{y\in Y}\varphi(x(y),y)\}.$$

如果对策具有固定的局中人步骤序列, 并且在运作中关于不确定因素的信息随着时间的过去越来越确切, 那么最大保证结果原理的具体化导致非常复杂的极小化极大问题的解 (例如, **微分对策** (differential games)).

现在假设, 除了不确定因素 y ($y\in Y$) 以外, 运作还涉及一个具有已知分布律 P 的随机因素 z, $z\in Z$, 并且用户能够对随机事件作平均. 在这种情形下, 有

效性准则是数学期望

$$\overline{f}(\widetilde{x},y)=\int_Z f(\widetilde{x},y,z)\,dP(z),$$

它意味着用户必须承担确定的风险．照例，引入 $\overline{f}$ 经常在重复运作中应用．

如果 y 在逐次试验中为常值，且 $\widetilde{x}=x(y)$，那么最大保证结果是

$$\sup_{\widetilde{x}}\inf_{y\in Y}\overline{f}(\widetilde{x},y).$$

但是如果 y 在不同的试验中以任意的方式变化，那么最大保证结果将有如下形式：

$$\sup_{\widetilde{x}}\int_Z\inf_{y\in Y}f(\widetilde{x},y,z)\,dP(z).$$

在其他情形中（以及也在其他策略类中，例如在类型 $\widetilde{x}=x(y,z)$ 的策略中），最大保证结果是由极值估计和积分的其他组合来表示的（见[1]，[3]）．

一个混合策略（mixed strategy）定义为 X 上的概率测度（probability measure）Ψ．如果与前面一样，用户同意对有效性准则进行平均，

$$f(\Psi,y)=\int_X f(x,y)\,d\Psi(x),$$

那么最大保证结果是

$$\sup_{\Psi}\inf_{y\in Y}f(\Psi,y).$$

最优混合策略的计算问题有极为重要的意义（见二人零和对策（two-person zero-sum game））．

在具有有限步骤数 n 的多步骤运作中，有效性准则有形式为

$$f(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n),$$

其中 $x_i\in X_i$ 是用户的选择，而 $y_i\in Y_i$ 是在第 i 步时的不可控制因素的值．在多步骤运作中的最大保证结果一般记作多重（逐次）极大化极小．这样，在具有完全信息的二人零和对策中，它是

$$\sup_{x_1\in X_1}\inf_{y_1\in Y_1}\cdots\sup_{x_n\in X_n}\inf_{y_n\in Y_n}f(x_1,y_1,\cdots,x_n,y_n).$$

类似的极小化极大问题在微分对策的某些问题中也会遇到．

如果用户的目标并未明确陈述，例如，存在一个有效性准则的集合 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$，并且指标 i 对于运筹学工作者来说是一个不确定因素，则最大保证结果原理导致这些准则的轮转，以及最大保证结果是

$$\max_x\min_i\,(f_i(x)-f_i^0),$$

其中 f_i^0 是对第 i 个准则成份所期待的水平．如果最大保证结果变为非负，则这些所期待的水平是可达到的．

在用户所掌握的信息的量和类型的不同局势下，最大保证结果原理的始终如一的应用，对于估计策略的有效性和建立不确定条件下的决策的完备理论，提供了统一的方法．

参考文献

[1] Гермейер, Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971.

[2] Воробьев, Н. Н., 《Успехи матем. наук》, 25 (1970), 2, 81 – 140.

[3] Гермейер, Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976.

[4] Вентцель, Е. С., Исследование операций, М., 1972.

[5] Вилкас, Э., 《Теория вероятн. и ее примен.》, 8(1963), 3, 324 – 327.

Ф. И. Ерешко, В. В. Федоров 撰

【补注】 该原理"自然"只对于保守、厌恶风险的决策者或在零和对策中成立．在其他情况下，一些不同的准则可能在直观上引人注目．

最大保证结果对于用户来说，也可看作增益底限（gain-floor）．有关的条目是损失顶限（loss ceiling），安全水平（security level），以及安全策略（security strategy）．

参考文献

[A1] Basar, T. and Olsder, G. J., Dynamic noncooperative game theory, Acad. Press, 1982.

[A2] Vorob'ev, N. N., Game theory, Springer, 1977(译自俄文).

史树中 译

优先方法 [priority method; приоритета метод]

递归（recursion）论中为了构造满足一个确定类型条件的无穷系统的、具有（在递归论观点下）简单结构的集合（其最简单的例子是递归 - 可枚举集）所用的方法．可允许条件的一个特征是为满足系统的单个条件通常只要在一个简单的集合中包含依赖于该条件的一定的元素就足够了．但是，在每个（为保证所找对象的构造的递归简单性而由计算过程所表示的构造的步内，(一般定义而一个可构造对象的无穷集的）系统的每个条件可用它的一个有穷逼近来表示．但是，被构造的集合包含一个元素满足第 j 个条件的逼近的事实不能保证此集合将满足第 j 个条件本身．优先方法允许人们在一定条件下克服这个障碍，做法是在构造过程中对给定系统的第 j 个条件（$j=1,2,\cdots$）选择一个对应的自然数，其目的是：如果此数被放入被构造的集合时，此集合可以满足第 j 个条件；为方便起见用 $|\overline{j}|$（可能带有下标）来标志该元素．在构造的过程中，每个被选择的对象可以被替换（或者

等价地说，它的标志可被移动）；但是在最简单的优先构造中，人们希望用以满足给定条件所用的序列要按如下方式安排，每个标志只可改变位置有穷次，且在最后位置上的标志必须是保证相应条件被满足的元素的标志.

优先方法是为解决关于非平凡的递归-可枚举度的存在性的 Post 问题而被创造出来的. 其后优先方法还被用于下列研究中产生的问题，Turing 或其他度的研究，递归-可枚举集（用包含来排序）的结构的研究，可计算枚举理论的研究等等. 最早的优先方法有各种变型（特别地，有时允许标志改变位置无穷次），因此时常更恰当地被称为优先方法系.

参考文献

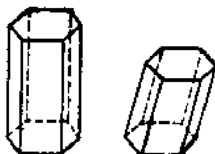
[1] Rogers, Jr, H., Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill, 1967, 164 − 165.

[2] Sacks, G. E., Degrees of unsolvability, Princeton Univ. Press, 1963

В. А Душский 撰 杨东屏 译

棱柱 [prism; призма]

一个**多面体**（polyhedron），其中两个面是 n 边形（棱柱的底（bases of the prism）），其他 n 个面（侧面（lateral faces））都是平行四边形. 两个底是全等的，并且分别处于两个平行的平面上. 一个棱柱称为直的（direct），如果它的侧面所在平面垂直于底所在平面. 一个直棱柱称为正的（regular），如果它的两底是**正多边形**（regular polyhedra）. 一个棱柱称为三棱柱、四棱柱等等，如果它的两底是三角形、四角形、等等. 六棱柱如图所示（左边的是直六棱柱）. 棱柱的体积等于它的一个底的面积乘以它的高（两底之间的距离）.



БСЭ-3

【补注】 在 d 维空间中，一个棱柱是一个 $(d-1)$ 维多胞形与一条不平行于这个 $(d-1)$ 维多胞形的仿射包的线段的向量和.

参考文献

[A1] Grünbaum, B., Convex polytopes, Wiley, 1967.

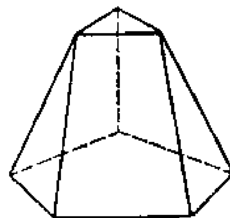
杜小杨 译

平截头棱锥体 [prismoid; призматоид]

一个**多面体**（polyhedron），它的两个面（底（bases））分别处于两个平行的平面上，其余各面是三角形或梯形，并且使得每个三角形面（不是底面）的一边和每个梯形面（不是底面）的两底边是平截头棱锥体的两底的边（见图）. 平截头棱锥体的体积是

$$\frac{h}{6}\ (S+S'+4S''),$$

其中 h 是两底之间的距离，S 和 S' 是两底的面积，S'' 是与两底等距离的横截面的面积.



БСЭ-3

【补注】 在 d 维空间中，一个平截头棱锥体是处于两个不同的平行超平面上的两个 $(d-1)$ 维多胞形的凸包.

参考文献

[A1] Grünbaum, B., Convex polytopes, Wiley, 1967

杜小杨 译

Привалов 算子 [Privalov operators; Привалова операторы], Привалов 参数（Privalov parameters）

不用求偏导数而能表示一个函数的调和性条件的算子（见**调和函数**（harmonic function））. 设 u 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 的有界区域 D 中的局部可积函数；$\omega(h)$ 表示以 $x\in D$ 为中心，h 为半径的球 $B(x;h)\subset D$ 的体积；令

$$\Delta_h u(x)=\frac{1}{\omega(h)}\int\limits_{B(x;h)}u(y)dy-u(x).$$

上（下）Привалов 算子（upper (lower) Privalov operators）分别用下面公式来定义:

$$\overline{\Delta}^* u(x)=\overline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{2(n+2)}{h^2}\ \Delta_h u(x),$$

$$\underline{\Delta}^* u(x)=\underline{\lim_{h\to 0}}\ \frac{2(n+2)}{h^2}\ \Delta_h u(x).$$

若上、下 Привалов 算子相同，则 Привалов 算子 $\Delta^* u(x)$ 定义为

$$\Delta^* u(x)=\overline{\Delta}^* u(x)=\underline{\Delta}^* u(x)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\ \frac{2(n+2)}{h^2}\ \Delta_h u(x).$$

若函数 u 在 $x\in D$ 具有直到二阶的连续偏导数，则在点 x，Привалов 算子 $\Delta^* u(x)$ 存在且等同于 **Laplace 算子**（Laplace operator）：$\Delta^* u(x)=\Delta u(x)$. Привалов

定理(Privalov theorem)称：如果函数 u 在区域 D 中连续且在 D 中处处满足条件

$$\underline{\Delta}^* u(x) \leq 0 \leq \overline{\Delta}^* u(x),$$

则 u 在 D 中是调和的．因此，在 D 中连续的函数 u 为调和的，当且仅当在每一点 $x \in D$，当 h 充分小时有 $\Delta_h u(x) = 0$；或者换言之，当且仅当

$$u(x) = \frac{1}{\omega(h)} \int_{B(x,h)} u(y)\,dy.$$

上述在球体上的平均值可以用在球面上的平均值来代替．

参考文献

[1] Привалов, И. И., 《Матем. сб.》, **32** (1925), 464 – 471.

[2] Привалов, И. И., Субгармонические функции, М.-Л., 1937.

[3] Brelot, M., Eléments de la théorie classique du potentiel, Sorbonne Univ. Centre Doc. Univ., Paris, 1969.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 更一般的，如果 $u > -\infty$ 是下半连续的，则 u 为超调和的(hyperharmonic)，当且仅当在 $\{u < \infty\}$ 上有 $\underline{\Delta}^* u \leq 0$ (Blaschke-Привалов 定理(theorem of Blaschke-Privalov))．

对于这个算子，若改用在球面上的平均值并用 $2n$ 代替 $2(n+2)$，类似的结论也成立．

吴炯圻 高琪仁 译

Привалов 定理 [Privalov theorem; Привалова теорема]

1) 关于共轭函数的 Привалов 定理(Privalov theorem on conjugate functions)：设

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

是以 2π 为周期的连续函数，并设

$$\widetilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kt - a_k \sin kt)$$

是 f 的三角共轭(trigonometrically conjugate)函数(亦见共轭函数(conjugate function))．如果 f 满足 α 阶 Lipschitz 条件即 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0 < \alpha \leq 1)$，则当 $0 < \alpha < 1$ 时 $\widetilde{f} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$，当 $\alpha = 1$ 时 $\widetilde{f}$ 的连续模 $M(\delta, \widetilde{f}) = \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |\widetilde{f}(x_1) - \widetilde{f}(x_2)|$ 不大于 $M\delta \ln(1/\delta)$．由 И. И. Привалов ([1]) 证明的这一定理，在三角级数理论中有着重要的应用．它能被换成按某些其他度量的 Lipschitz 条件(例如参见[5])．

2) 解析函数的 Привалов 唯一性定理(Privalov uniqueness theorem for analytic functions)：设 $f(z)$ 是复平面 z 上由可求长 Jordan 曲线 Γ 所围的区域 D 中的单值解析函数．如果在 Γ 的一个正 Lebesgue 测度集 $E \subset \Gamma$ 上，$f(z)$ 的非切向边界值(参见角边界值(angular boundary value))为零，则在 D 中 $f(z) \equiv 0$．这一定理是 И. И. Привалов ([2]) 证明的．**Лузин-Привалов 定理**(Luzin-Privalov theorems)是它的推广．也见**解析函数的唯一性**(uniqueness properties of analytic functions)．

3) 关于 Cauchy 奇异积分的 Привалов 定理(Privalov theorem on the singular Cauchy integral)或 Привалов 基本引理(Privalov main lemma)．它是 Cauchy-Stieltjes 型积分(见 **Cauchy 积分**(Cauchy integral))理论中的基本结果之一．设 $\Gamma: \zeta = \zeta(s) (0 \leq s \leq l)$ 是复平面 z 中的一条可求长(闭) Jordan 曲线，l 是其长度，s 是 Γ 上从某个定点起算的弧的长度；设 $\varphi = \varphi(s)$ 是 x 轴的正方向与 Γ 的切线之间的夹角；并设 $\psi = \psi(s)$ 是定义在 Γ 上的一个有界变差复值函数．设 $\zeta_0 \in \Gamma$ 是对应于弧长值 s_0 的点：$\zeta_0 = \zeta(s_0)$ $(0 \leq s_0 \leq l)$，又设 Γ_δ 是从 Γ 上除去以 $\zeta(s_0 - \delta)$ 与 $\zeta(s_0 + \delta)$ 为端点的小弧后剩余的部分．如果极限

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \frac{e^{i\varphi(s)}\,d\psi(s)}{\zeta - \zeta_0} = $$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\varphi(s)}\,d\psi(s)}{\zeta - \zeta_0} \qquad (1)$$

存在且有限，则称之为 Cauchy-Stieltjes 奇异积分(Cauchy-Stieltjes singular integral)．设 D^+ 和 D^- 分别是由 Γ 所围的有限区域和无穷区域．Привалов 定理叙述如下：如果奇异积分(1)在 Γ 上(关于 Γ 上的 Lebesgue 测度)几乎处处存在，则 Cauchy-Stieltjes 型积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\varphi(s)}\,d\psi(s)}{\zeta - z}, \quad z \in D^{\pm} \qquad (2)$$

的分别从 D^+ 和 D^- 取的非切向边界值 $F^{\pm}(\zeta_0)$ 在 Γ 上几乎处处存在，而且 **Сохоцкий 公式**(Sokhotskiĭ formulas)

$$F^{\pm}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\varphi(s)}\,d\psi(s)}{\zeta - \zeta_0} \pm \frac{1}{2} \psi'(s_0) \quad (3)$$

几乎处处成立．反过来，如果积分(2)的非切向边界值 $F^+(\zeta_0)$ (或 $F^-(\zeta_0)$) 在 Γ 上几乎处处存在，则奇异积分(1)以及从另一边取的非切向边界值 $F^-(\zeta_0)$ (相应地，$F^+(\zeta_0)$) 在 Γ 上几乎处处存在而且关系式(3)成立．这一定理是 Привалов 对于 Cauchy-Lebesgue 型积分(即绝对连续函数 $\psi(s)$ 的情形，参见[2])建立的，后来发展到一般的情形([3])．它在解析函数论的奇异积分方程及间断边值问题理论中起着基础的作用．

4) 关于 Cauchy-Lebesgue 型积分的边值的 Привалов 定理 (Privalov theorem on boundary values of integrals of Cauchy-Lebesgue type): 如果 Γ 是一条逐段光滑而且没有尖点的 Jordan 曲线, 又如果复值函数 $f(\zeta)$ $(\zeta\in\Gamma)$ 满足 Lipschitz 条件

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|<C|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1,$$

则 Cauchy-Lebesgue 型积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\quad, z\in D^*$$

是闭区域 $\bar{D}^*$ 中的连续函数. 而边界值 $F^\pm(\zeta)$ 满足

$$|F^\pm(\zeta_1)-F^\pm(\zeta_2)|<C_1|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha$$

如果 $0<\alpha<1$, 以及

$$|F^\pm(\zeta_1)-F^\pm(\zeta_2)|<C_2(\delta)|\zeta_1-\zeta_2|\ln\frac{1}{|\zeta_1-\zeta_2|}$$

如果 $\alpha=1$, $|\zeta_1-\zeta_2|\leqslant\delta<1$ (参见[2]).

参考文献

[1] Privalov, I. I., Sur les fonctions conjuguées, *Bull. Soc. Math. France*, **44** (1916), 100 – 103.

[2] Привалов, И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918.

[3] Привалов, И. И., Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1941.

[4] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[5] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[6] Хведелидзе, Б. В., в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, 7, М., 1975, 5 – 162.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Collingwood, E. F. and Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

朱学贤 译 娄元仁 校

特许紧集 [**privileged compact set; привилегированный компакт**]

一个在复空间理论, 特别是在复空间模理论中常用的概念. 命 K 为 $\mathbf{C}^n$ 中的一紧 Stein 集 (见 **Stein 流形** (Stein manifold)) 又命 $\mathcal{O}_K$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中全纯函数芽层在 K 上的限制. 那么 K 称为关于 K 上的凝聚解析层 $\mathcal{S}$ 是特许的 (见**凝聚解析层** (coherent analytic sheaf)), 如果存在 $\mathcal{O}_K$ 层的映射

$$0\to\mathcal{L}_n\to\cdots\to\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_0\xrightarrow{\varphi}\mathcal{S}\to 0\qquad(1)$$

的正合序列 (其中 $\mathcal{L}_i=\mathcal{O}_K^{r_i}$ 对某些 $r_i\geqslant 0$, $i=0,\cdots,n$), 使得诱导的连续算子序列

$$0\to B(K,\mathcal{L}_n)\xrightarrow{d}B(K,\mathcal{L}_{n-1})\to\cdots\qquad(2)$$
$$\cdots\to B(K,\mathcal{L}_1)\xrightarrow{d}B(K,\mathcal{L}_0)$$

是正合和分裂的 (见**正合序列** (exact sequence); **分裂序列** (split sequence)). 在此

$$B(K,\mathcal{L}_i)=B(K,\mathcal{O})^{r_i},$$

又 $B(K,\mathcal{O})$ 是在 K 内全纯在 K 上连续的函数赋与极大范数所成的 Banach 空间. 在此, 序列 (2) 称为分裂的 (split), 如果对每一项微分 d 的核和象都有直接闭的补. 这个关于分裂的条件相当于: (2) 中存在一线性连续算子 h 映 $B(K,\mathcal{L}_i)$ 到 $B(K,\mathcal{L}_{i+1})$, 使得 $dhd=d$ (一个同伦算子 (homotopy operator)). 序列 (2) 是正合和分裂的性质并不依赖于 (1) 的选取.

假设一点 z 位于 K 的内部. 那么存在复形 (2) 到点 z 上的复形 (1) 的纤维的态射 π, 映 $B(K,\mathcal{L}_i)$ 的一元素, 即 K 上的一取值于 $\mathbf{C}^{r_i}$ 的函数到它在点 z 的芽. 这表示序列

$$B(K,\mathcal{L}_1)\xrightarrow{d}B(K,\mathcal{L}_0)\xrightarrow{\pi\varphi}\mathcal{S}_z\qquad(3)$$

是半正合的. 紧集 K 称为 z 的一 $\mathcal{S}$ 特许邻域 (privileged neighbourhood), 如果它是一 $\mathcal{S}$ 特许集并且如果 (3) 是一正合序列. 这个性质也不依赖于 (1) 的选择.

对于任一凝聚解析层 $\mathcal{S}$, 它的定义域上的每一点都有一 $\mathcal{S}$ 特许邻域的一基本系. 可以选择这样的邻域作为半圆盘, 它们的半径之间具有某种不等式型的关系. 存在一使多圆柱成为 $\mathcal{S}$ 特许邻域的充分条件, 它与层 $\mathcal{S}$ 和 K 的边界有关 (见[1]).

也可考虑关于给定在任一复空间 X 上的层的特许紧集; 在此记住紧集关于层 $f_*(\mathcal{O})$ 是特许的, 这里 f 是 X 上的图.

参考文献

[1] Douady, A., Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Ann. Inst. Fourier*, **16** (1966), 1 – 95.

В. П. Паламодов 撰 钟同德 译

投射 p 群 [**pro-p-group; про-p-группа**]

作为有限 p 群 (p-group) 的投射极限的投射有限群. 例如 p 进整数环 $\mathbf{Z}_p$ 的加法群就是一个投射 p 群. 在 Galois 理论中投射 p 群作为域的 p 扩张的 Galois 群出现.

设 G 为一投射 p 群. G 的生成元系 (system of generators) 是满足下列条件的子集 $E\subset G$: 1) G 是由

生成的 G 的最小闭子群; 2) G 的单位元的任一邻域包含 E 中几乎全部(即除有限个以外的全部)元素.

设 I 为一指标集而 F_I 为有生成元系 $\{a_i: i\in I\}$ 的抽象自由群. 在 F_I 中考虑满足下列条件的正规子群(normal subgroup) N: N 在 F_I 中的指数为 p 的方幂且几乎所有的 $a_i(i\in I)$ 在 N 中. 则群族 $\{F_I/N\}$ 的投射极限 $F(I)$ 是一投射 p 群, 称为具生成元系 $\{a_i: i\in I\}$ 的自由投射 p 群(free pro-p-group). 自由投射 p 群的闭子群仍然是自由投射 p 群. 每一个投射 p 群都是一个自由投射 p 群的商群, 即存在投射 p 群的同态的正合序列

$$1 \to R \to F \xrightarrow{\alpha} G \to 1,$$

其中 F 为一适当自由投射 p 群. (这个序列称为 G 借助 F 的表现(presentation)). 子集 $E\subset R$ 称为 G 的关系系(system of relations), 如果 R 是 F 中包含 E 的最小闭正规子群, 并且 R 中每个开正规子群包含 E 中几乎所有元素. 投射 p 群的表现中的极小(在包含关系下)生成元系和极小关系系的基数有一个上同调论的解释: 前一个基数是空间 $H^1(G)=H^1(G,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上的维数, 而后一个基数是空间 $H^2(G)=H^2(G,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 上的维数. 这里 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 看成有平凡 G 作用的离散 G 模. 若 G 为有限 p 群, 则

$$4\dim H^2(G) \geqslant (\dim H^1(G)-1)^2.$$

这一结论导致了经典类域塔问题的否定答案(见域塔(tower of fields)([4]).

参考文献

[1] Serre, J. P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[2] Koch, H., Galoissche Theory der p-Erweiterungen, Deutsch. Verlag Wissenschaft, 1970.

[3] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds:) Algebraic number theory, Acad. Press, 1967.

[4] Голод, Е. С., Шафаревич, И. Р., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 28(1964), 2, 261 – 272.

В. Л. Попов 撰 李慧陵 译

概率[probability; вероятность], 数学中的

一种表征在给定的可以无限重复的条件下某一事件可能出现的程度的数字特性. 作为科学知识的范畴, "概率"的概念描述典型的群体过程的现象之间的一种特殊类型的联系. "概率"的概念是构成概率论(probability theory)和数理统计(mathematical statistics)的特殊的理论系统的基础.

概率的数值有时可由其"古典"定义得到: 概率等于有利于该事件的情形数与"等可能"情形的总数之商. 例如, 10 000 000 张公债中, 有一张最高奖, 某一城市的居民共买了 500 000 张, 这一城市的某一居民获得这一最高奖的概率是 500 000/10 000 000 = 1/20.

在另外一些更复杂的情形, 决定概率的数值需要统计方法(statistical approach). 例如, 一个射手在 100 次射击中已击中目标 39 次, 可以认为在这些条件下, 他击中目标的概率接近于 4/10. 古典地和统计地确定的概率, 都可用来根据概率论的规律确定新的概率. 例如, 如果该射手可以以 4/10 的概率击中目标, 则在 4 次射击中他至少击中一次目标的概率是 $1-(1-4/10)^4\approx 0.87$. 这一结论可以被统计地检验: 如果将旨在 4 次射击中至少射中一次的试验重复充分多次, 大约有 87% 的情形试验成功(倘若该射手的技术在试验期间没有明显的变化).

数学上的概率是随机和非随机事件之间的特殊关系在数量上的一种表达. 在概率论的发展中, 为了保证进一步的推进, 将现阶段理论发展中必要的那些概率的性质形式化为公理. 可是, 无论是概率的这些公理还是古典方法以及统计方法都不能完全解释"概率"概念的真实意义; 它们只是越来越接近于完全的描述. 诚然, 不是每一个在给定条件下它的发生不唯一确定的事件都具有在这些条件下确定的概率. 对给定条件下给定事件存在确定的概率(即如果条件大量重复出现该事件发生的完全确定的比例数)是一个假设(hypothesis), 必须在每一个别情形进行检验和验证. 例如, 说从一给定的军事机构随机地选一射手用给定类型的步枪, 从一给定的距离射中某一给定大小的目标的概率是有意义的. 可是, 如果对发射条件毫无所知而谈论击中目标的概率则是无意义的.

至于概率和频率之间的联系, 必须铭记: 如果给定条件重复的次数 n 是有限的, 则给定事件发生的比例数, 称之为频率(frequency) m/n, 通常与概率 p 有一点差别. 重复次数 n 越大, 频率 m/n 和概率 p 有显著偏差的情形越稀少. 为了解释这一点, 考虑掷硬币的情形, 其中"正面"和"反面"的概率各为 1/2. 如果掷了 10 次, 得到 10 次"正面"或 10 次"反面"不是很可能的. 也没有充分的理由坚持"正面"将恰恰出现 5 次; 即使预测出现 4 或 5 或 6 次"正面", 也要冒很大的犯错误的风险. 可是, 如果掷 100 次, 则可以预言正面出现的次数将在 40 到 60 之间, 而不必承担任何显著的风险(见大数律(law of large numbers)).

数学上的概率在日常生活的意义上可以作为一个事件按常规发生的可能性的估计, 即可以用来更确切地描绘日常用语中, 诸如"可能"、"大概"、"非常可能"等表达的带有或然性的叙述. 必须铭记, 关于这类估计, 如果本来只能用真和假来叙述, 那么它的

概率估计也只具有暂时的或主观的意义，即它仅仅反映我们对这件事的态度．例如，一个人在没有任何客观信息的情况下，希望推测莫斯科在 1930 年 3 月 23 日的环境形势，可以说："在这一天，雪可能仍然覆盖着这一地区．"可是，实际上莫斯科附近区域的雪已经在 3 月 22 日化了．如果此人知道这一事实，则原来的叙述（在引号中带或然性的叙述），必定会修改．虽然在这种特殊情况下那个叙述彻底错了，但它是基于一个正确的一般规律："通常在 3 月的前 20 天左右莫斯科周围覆盖着雪．"这一规律反映了莫斯科周围气候的客观特性．这类规律可以通过指出问题中的事件在某些一般条件下的概率水平来表示，而这些条件是可以无限次实现的．这种估计确有客观意义．相应地，为了获得关于个别事件的某种叙述的可靠性程度所做的数学上的概率计算就不再只是表达对该事件发生与否的主观信念．对数学上概率意义的那种唯心的、主观的理解是错误的．如果沿着那种逻辑走下去将会导致荒谬的主张：在完全无知的情况下，人们仅仅通过分析主观的、多少有点可靠的信念，就可得出关于人们周围世界的正确结论．

利用计算所得的概率来估计各个情况的形势时必然要提出在实践中什么样的概率可以被忽略的问题．这一问题有不同的解决方式，依赖于是否有必要把可靠数据的积累迅速地转移到它的实际应用．例如，如果在给定环境下，一个军事问题通过提供一给定数量的炮弹得以解决的概率是 0.95（即所提供的弹丸数不足的概率为 0.05）．通常在假定此炮弹数够用的前提下执行军事补给．在和平环境中的科学研究通常仅仅忽略小到 0.003 这样的概率（这同 3σ 原则相联系），在某些情况下，称之为"必然"的一个结果的概率必须更接近于 1．在数理统计中，进行的研究中决定忽略的概率称之为**显著性水平**（significance level）．在统计中，建议的显著性水平，从对初步的倾向性试验的 0.05 变化到对重要的最终的结论性试验的 0.001，而可达到的概率结论的可靠性常常高得多．统计物理的主要结论建立在忽略概率小于 10^{-10} 的基础上．

概率论（probability theory）中所使用的数学模型建立在三个概念基础上：称之为基本事件的空间 Ω，Ω 的子集类（事件类）和**概率分布**（probability distribution）——定义在该子集类上的集函数 P．P 在一个事件 A 处的值 $\mathrm{P}(A)$ 称为 A 的**概率**（probability）．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974（中译本：A. H. 柯尔莫格洛夫，概率论基本概念，商务印书馆，1952）.

А. Н. Колмогоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Finetti, B. de, Theory of probability, 1-2, Wiley, 1974.

刘秀芳 译　陈培德 校

概率分布[probability distribution; распределение вероятностей]

概率论（probability theory）和**数理统计**（mathematical statistics）的一个基本概念．在现代方法中，适当的**概率空间**（probability space）(Ω, S, P) 取作所考虑的随机现象的模型，此处 Ω 是样本空间，S 是以某种方式指定的 Ω 的子集的 σ 代数而 P 是 S 上使得 $\mathrm{P}(\Omega)=1$ 的测度（**概率测度**（probability measure））．

在 (Ω, S) 上的任何一个这种测度都称之为一个概率分布（见[1]）．这一基于 А. Н. Колмогоров 1933 年引入的公理化定义，在理论进一步发展的进程中显得太一般化了，为了避免某些"病态"情形，用多些限制的定义代替．一个例子是要求 P 是"完美的"（见[2]）．在函数空间中的概率分布通常要求满足某种正则性，通常以可分性描述，也允许以不同术语来表征（见**可分过程**（separable process）及[3]）．

出现在概率论和数理统计的特殊问题中的许多概率分布早已为人所知，而且与一些基本模型（[4]）相联系．它们或者用离散值的概率（见**离散分布**（discrete distribution））或者用概率密度（见**连续分布**（continuous distribution））来描述．也有一些在某些情形下必需的编制好的表（[5]）．

在基本概率分布中，有些与独立试验序列相联系（见**二项分布**（binomial distribution）；**几何分布**（geometric distribution）；**多项分布**（multinomial distribution）），另外一些与这一模型当试验数无限增加时的极限律相联系（见**正态分布**（normal distribution）；**Poisson 分布**（Poisson distribution）；**反正弦分布**（arcsine distribution））．而这些极限分布也可以确切的形式直接出现，像在随机过程论中（见 **Wiener 过程**（Wiener process）；**Poisson 过程**（Poisson process））或作为在所谓**表征定理**（characterization theorems）中出现的某些方程的解（亦见**正态分布**（normal distribution）；**指数分布**（exponential distribution））．**均匀分布**（uniform distribution），通常视为表达试验结果是等可能的一种数学方式，也可以由极限分布得到（比如说，考虑大量随机变量的和或某些具有充分光滑性并按模 1"延拓"分布的其他随机变量）．更多的概率分布可由与上述分布相应的随机变量的函数变换得到．例如，在数理统计中具有正态分布的一些随机变量可用来得到具有 χ^2 **分布**（"chi-squared" distribution），**非中心 χ^2 分布**（non-central "chi-squared" distribution），

Student 分布（Student distribution），**Fisher F 分布**（Fisher F-distribution）的随机变量，等等．

与概率论和数理统计中的渐近方法相联系时发现了一些重要的分布类（见**极限定理**（limit theorems）：**稳定分布**（stable distribution）；**无穷可分分布**（infinitely-divisible distribution）；ω^2 **分布**（"omega-squared" distribution））．

能够定义分布的靠近性这一概念对理论和应用都很重要．在 (Ω, S) 上的所有的概率分布可以不同方式变成拓扑空间．这里概率分布的弱收敛起着基本的作用（见**分布的收敛性**（distributions, convergence of））．在一维和有限维情形，**特征函数**（characteristic function）是研究概率分布收敛的主要工具．

概率分布的完全描述（例如用**概率分布的密度**（density of a probability distribution）或**分布函数**（distribution function）的方法）常常用一有限特征数的集合来代替．最常使用的，在一维情形是**数学期望**（mathematical expectation）（平均值），**方差**（dispersion），**中位数（统计学中的）**（median (in statistics)）及各种**矩**（moment），对多维概率分布的数字特征见**相关（统计学中的）**（correlation (in statistics)）；**回归**（regression）．

概率分布的统计类比是**经验分布**（empirical distribution）．经验分布及其特征数可用来近似代表理论分布及其特征数（见**统计估计量**（statistical estimator））．为度量经验分布与假设的分布拟合的好坏程度，见**统计假设检验**（statistical hypotheses, verification of）及**统计中的非参数方法**（non-parametric methods in statistics）．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974（中译本：А. Н. 柯尔莫格洛夫，概率论基本概念，商务印书馆，1952）．

[2] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949（中译本：Б. В. 格涅坚科，А. Н. 郭洛莫格若夫，相互独立随机变量之和的极限分布，科学出版社，1955）．

[3] Prokhorov, Yu. V., The method of characteristic functionals, in Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Vol. 2, Univ. Calif. Press, 1961, 403–419.

[4] Feller, W. An introduction to probability theory and its applications, 1–2, Wiley, 1957–1971（中译本：W. 费勒，概率论及其应用，第一卷，上、下册，科学出版社，1964，1978；第二卷，科学出版社，1994）．

[5] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

[6] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969（中译本：Б. В. 格涅坚科，概率论教程，人民教育出版社，1956）

[7] Cramer, H.. Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1960）．

[8] Neveu, J., Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1970.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】"概率分布"最常用于 $\Omega = \mathbf{R}$，$\mathbf{R}^n$ 或实函数空间的情形．

参考文献

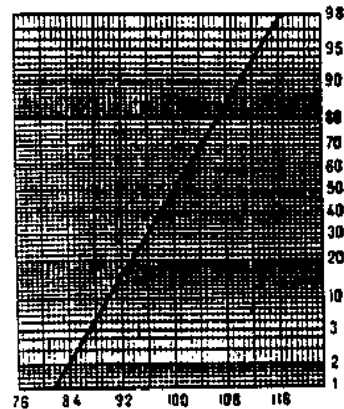
[A1] Loève, M., Probability theory, Ⅰ–Ⅱ, Springer, 1977（中译本：M. 洛易甫著，概率论，上册，科学出版社，1965）．

[A2] Billingsley, P., Probability and measure, Wiley, 1979.

刘秀芳 译　陈培德 校

概率图纸［**probability graph paper**；**вероятностная бумага**］，正态的（normal）

一种有特别刻度的图纸，它的构造使得**正态分布**（normal distribution）函数在其上的图象形成一条直线．这是由变动纵坐标的刻度来实现的（见图）．这一"矫正"性质，是证实一个给定样本是否来自正态分布的原则：如果点在概率图纸上的经验分布函数接近于一条直线，那就可以信赖地判断该样本取自的总体接近于正态分布．这个方法的优点在于可以从样本直接推出其分布的正态性，而不必知道其假设分布的参数值．



图中直线表示均值为 100、标准差为 8 的正态分布函数．

参考文献

[1] Arley, N., Buch, K. R., Introduction to the theory of probability and statistics, Wiley, 1950.

[2] Dixon, W. J., Massey, F. J., Introduction to statistical analysis, McGraw-Hill, 1957.

А. В. Прохоров 撰　潘一民 译

概率积分［**probability integral**；**интеграл вероятности**］，误差积分（error integral）

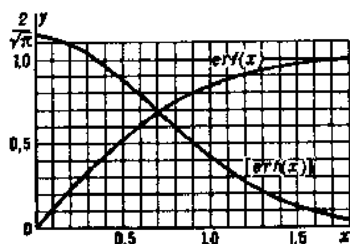
$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,\ |x|<\infty.$$

在概率论中最常遇到的不是概率积分，而是**正态分布**(normal distribution)函数

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right]\right],$$

这就是所谓的 Gauss 概率积分(Gaussian probability integral). 对于具有数学期望为 0、方差为 σ^2 的正态分布的随机变量 X, $|X|\leqslant t$ 的概率等于 $\mathrm{erf}(t/\sqrt{2})$. 对于实数 x，概率积分取实值；特别是

$$\mathrm{erf}(0)=0,\ \lim_{x\to\infty}\mathrm{erf}(x)=1.$$



概率积分及其导数的图形如图所示. 关于复变量 z 的函数，概率积分 $\mathrm{erf}(z)$ 是 z 的整函数.

对于大的 z, $\mathrm{Re}\,z>0$，有渐近表示式

$$1-\mathrm{erf}(z)\sim$$

$$\sim\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k}\frac{1}{z^{2k}}\right].$$

在 $z=0$ 的邻域内，概率积分可以由级数来表示：

$$\mathrm{erf}(z)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[z-\frac{z^3}{1!3}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}z^{2k+1}+\cdots\right].$$

概率积分与 **Fresnel 积分**(Fresnel integrals) $C(z)$ 和 $S(z)$ 之间由下列公式相联系：

$$\frac{1+i}{2}\mathrm{erf}\left[\frac{1-i}{\sqrt{2}}z\right]=C(z)+iS(z),$$

$$\frac{1-i}{2}\mathrm{erf}\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}}z\right]=C(z)-iS(z),$$

概率积分的导数由下式给出：

$$[\mathrm{erf}(z)]'=\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-z^2}.$$

有时也采用下列表示法：

$$\Theta(x)=H(x)=\Phi(x)=\mathrm{erf}(x),$$

$$\mathrm{Erf}(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x),$$

$$\mathrm{Erfi}(x)=-i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(ix)=\int_0^x e^{t^2}dt,$$

$$\mathrm{Erfc}(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\mathrm{Erf}(x)=\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt,$$

$$\alpha(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2}dt-1=\frac{2}{\pi}\mathrm{Erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right].$$

参考文献

[1] Beteman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 2. Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials, McGraw-Hill, 1953 (中译本：A. 爱尔台里等编，高级超越函数，上海科学技术出版社，1957－1958).

[2] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文).

[3] Krazer, A. and Franz, W., Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960.

[4] Лебедев, Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М., 1963 (英译本：Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Prentice-Hall, 1965).

А. Б. Иванов 撰

【补注】 在 $z=0$ 附近，概率积分的级数表示式取**汇合型超几何函数**(confluent hypergeometric function)的形式：

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}z\Phi\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right).$$

杜小杨 译

概率测度 [**probability measure**; **вероятностная мера**], **概率分布**(probability distribution), **概率**(probability)

一个在非空集合 Ω(基本事件空间)的子集(事件)类形成的 σ 域(即对可数次集论运算封闭) $\mathscr{A}$ 上定义的实、非负函数 P 满足

$$\mathsf{P}(\Omega)=1\ 及\ \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}(A_i),$$

如果对 $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\phi$ (σ 可加性).

概率测度的例子. 1) $\Omega=\{1,2\}$; $\mathscr{A}$ 是 Ω 的一切子集的类; $\mathsf{P}(\{1\})=\mathsf{P}(\{2\})=1/2$ (这一概率测度对应于掷一颗对称的硬币组成的随机试验；如果正面对应于 1 而反面对应于 2，掷得正面(反面)的概率是 $1/2$);

2) $\Omega=\{0,1,\cdots\}$; $\mathscr{A}$ 是 Ω 的所有子集的类;

$$\mathsf{P}(\{k\})=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

其中 $\lambda > 0$ (**Poisson 分布** (Poisson distribution));

3) $\Omega = \mathbf{R}^1$; $\mathscr{A}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 的 Borel 子集类;

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} dx$$

(**正态分布** (normal distribution));

4) $\Omega = C_0[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上连续且在原点为零的实函数空间; $\mathscr{A}$ 是关于一致收敛拓扑的 Borel 子集类; P 是由公式

$$\mathrm{P}(x: a_i < x(t_i) < b_i, i = 1, \cdots, n) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} dx_1 \cdots dx_n \right\}$$

唯一确定的测度, 其中 n 是任意自然数, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant 1$ (**Wiener 测度** (Wiener measure)).

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: A. H 柯尔莫格洛夫, 概率论基本概念, 商务印书馆, 1952)

[2] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969 (中译本: Б. В. 格涅坚科, 概率论教程, 人民教育出版社, 1956).

В. В. Сазонов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Billingsley, P., Probability and measure, Wiley, 1979.

刘秀芳 译 陈培德 校

大偏差的概率 [probability of large deviations; больших отклонений вероятности]

即如下类型的概率

$$\mathrm{P}(S_n - b_n > a_n), \mathrm{P}(S_n - b_n < -a_n) \text{ 或}$$

$$\mathrm{P}(|S_n - b_n| > a_n),$$

其中

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j,$$

$\{X_j\}$ 是独立随机变量序列, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是两个数值序列, 使得 $a_n > 0$, 且依概率有 $(S_n - b_n)/a_n \to 0$.

如果随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 有数学期望 0, 有穷方差 σ^2 的相同分布, 则可以设 $b_n = 0$, $a_n = x_n \sigma \sqrt{n}$, 其中当 $n \to \infty$ 时 $x_n \to \infty$. Cramér 定理及其加强型在这种关系中是特别重要的 (见 **Cramér 定理** (Cramér theorem)).

为了获得大偏差概率的确保的界, 可以利用 **Чебышев 不等式 (概率论中的)** (Chebyshev inequality in probability theory) 这种类型的不等式; 它们能提供所谓的大偏差概率的指数界 (exponential bounds for the probability of large deviations). 例如, 如果随机变量 X_j 是独立的, $\mathrm{E}X_j = 0$, $\mathrm{E}X_j^2 = \sigma_j^2$, 且以概率 1 成立 $|X_j| \leqslant L$. 令 $B_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$, $a = xL/B_n$, 则下面的估计式对所有 $x \geqslant 0$ 成立:

$$\mathrm{P}\{|S_n| > xB_n\} \leqslant 2\exp\left\{ -\frac{x^2}{2}\left[1 + \frac{a}{3}\right]^{-1} \right\}.$$

右边是随 x 的增加而依指数下降的.

参考文献

[1] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977 (中译本: M. 洛易甫, 概率论, 科学出版社, 1966).

[2] Петров, В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972 (英译本: Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).

[3] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965 (英译本: Ibragimov, I. A., Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971).

[4] Прохоров, Ю. В., в кн.: Итоги науки и техники, т. 10, М., 1972, 5 – 24.

[5] Юринский, В. В., 《Теория вероятностей и её применения》, 19 (1974) 1, 152 – 153.

В. В. Петров, В. В. Юринский 撰

【补注】 有一些实质性的新进展把指数衰减率与熵联系起来. 这些进展在统计物理学和统计学中找到了广泛的应用. 见**极限定理** (limit theorems) 及 [A1], [A2].

另一新近的进展是有关用随机过程替代独立随机变量和而发展了极限定理与大偏差理论, 见 [A3].

参考文献

[A1] Ellis, R. S., Entropy, Large deviations, and statistical mechanics, Springer, 1985.

[A2] Stroock, D. W., An introduction to the theory of large deviations, Springer, 1984.

[A3] Wentzell, A. D., Limit theorems on large deviations for Markov stochastic processes, Kluwer, 1990.

[A4] Cramér, H., Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités, Actualités Sci. et Industr., 5 – 24, Hermann, 1938.

[A5] Groeneboom, P., Oosterhoff, J., Ruymgaart, F. H., Large deviation theorems for empirical probability measures, *Ann. Probl.*, 7 (1979), 553 – 586.

潘一民 译

概率过程 [probability process 或 probabilistic process; вероятностный процес]

同随机过程(stochastic process).

概率空间 [**probability space; вероятностное пространство**], 概率场(probability field)

由非空集合 Ω, Ω 的子集类形成的 σ 代数(即对集合论中的可数次运算封闭) $\mathscr{A}$ 和在 $\mathscr{A}$ 上的**概率测度**(probability measure) P 组成的三元组 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$. 概率空间的概念是由 A. H. Колмогоров 引进的([1]). Ω 中的点称为基本事件(elementary events), 而 Ω 本身看作基本事件空间(space of elementary events)或样本空间(sample space). Ω 的属于 $\mathscr{A}$ 的子集是(随机)事件(events). 关于概率空间的研究常常限制在完全概率空间上, 即满足要求: $B \in \mathscr{A}$, $A \subset B$, $\mathrm{P}(B)=0$ 蕴含 $A \in \mathscr{A}$. 如果 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 是任意概率空间, 形如 $A \cup N$ 的子集类, 其中 $A \in \mathscr{A}$ 且 $N \subset M$, 对某一满足 $\mathrm{P}(M)=0$ 的 $M \in \mathscr{A}$, 形成一个 σ 代数 $\overline{\mathscr{A}}$, 用公式 $\overline{\mathrm{P}}(A \cup N)=\mathrm{P}(A)$ 定义的 $\overline{\mathscr{A}}$ 上的函数 $\overline{\mathrm{P}}$ 是 $\overline{\mathscr{A}}$ 上的概率测度. 空间 $(\Omega, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mathrm{P}})$ 是完全的, 并且称为 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 的完全化(completion). 通常人们可以把注意力限制在完满概率空间(perfect probability spaces)上, 这种空间使得对任意实 $\mathscr{A}$ 可测函数 f 和使得 $f^{-1}(E) \in \mathscr{A}$ 的实直线上的任意集合 E, 存在一 Borel 集 B 使得 $B \subset E$ 且 $\mathrm{P}(f^{-1}(E))=\mathrm{P}(f^{-1}(B))$. 在一般模式中, 某些"病态"结果(与条件概率的存在性, 独立随机变量的定义等相联系的), 不会发生在完满概率空间中. 满足某些给定的特殊要求的概率空间的存在性问题, 在许多情形下不是平凡的. 这种类型的一个结果是重要的 Колмогоров 相容性定理(Kolmogorov consistency theorem): 设对集合 T 的元素的每一有序组 $t_1,\cdots,t_n$, 对应着 Euclide 空间 $\mathbf{R}^n$ 的 Borel 集上的一个概率测度 $P_{t_1,\cdots,t_n}$, 并满足以下相容性条件:

1) $\mathrm{P}_{t_1,\cdots,t_n}(I_{y_1,\cdots,y_n})=\mathrm{P}_{t_{\alpha_1},\cdots,t_{\alpha_n}}(I_{y_{\alpha_1},\cdots,y_{\alpha_n}})$ 对所有的 $(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$ 成立, 其中 $I_{y_1,\cdots,y_n}=\{x=(x_1,\cdots,x_n): x_i \leqslant y_i,\ i=1,\cdots,n\}$ 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是数 $1,\cdots,n$ 的任一重新排列;

2) $\mathrm{P}_{t_1,\cdots,t_n}(I_{y_1,\cdots,y_{n-1},\infty})=\mathrm{P}_{t_1,\cdots,t_{n-1}}(I_{y_1,\cdots,y_{n-1}})$, 则在乘积空间 $\mathbf{R}^T=\{x=\{x_t\}: t\in T,\ x_t\in\mathbf{R}^1\}$ 的子集所构成的, 使一切坐标函数 $t(x)=x_t$ 为可测的最小 σ 代数 $\mathscr{A}$ 上存在一个概率测度 P, 使得对 T 的任意有限子集 $t_1,\cdots,t_n$ 和任意 n 维 Borel 集 B 下述等式成立:

$$\mathrm{P}_{t_1,\cdots,t_n}(B)=\mathrm{P}\{x\in\mathbf{R}^T:(t_1(x),\cdots,t_n(x))\in B\}.$$

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: A. H. 柯尔莫格洛夫, 概率论基本概念, 商务印书馆, 1952).

[2] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949 (中译本: Б. В. 格涅坚科, А. Н. 柯尔莫格若夫, 相互独立随机变量之和的极限分布, 科学出版社, 1955).

[3] Neveu, J., Mathematical foundations of the calculus of probabilities, Holden-Day, 1965 (译自法语).

B. B. Сазонов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Billingsley, P., Probability and measure, Wiley, 1979.

刘秀芳 译 陈培德 校

概率论 [**probability theory; вероятностей теория**]

数学的一个分支, 研究用某些随机事件的**概率**(probability)导出由这些随机事件以某种方式联结起来的其他一些随机事件的概率.

关于某一事件发生的概率是, 例如, 1/2, 这类命题本身是没有价值的, 因为人们感兴趣于可靠的知识(reliable knowledge). 只有那些结果, 它陈述某一事件 A 发生的概率十分接近于 1 或者(其实是一回事)该事件不发生的概率非常小, 才最终地提供有价值的信息. 根据"忽略充分小概率"的原理, 这一事件可认为是实际上必然的(practically certain). 下面将会看到(参见极限定理一节)对科学和实践有意义的结论常常基于假定一个事件 A 的发生或不发生依赖于大量的相互仅在很小程度上联结的随机因子(参见与此主题有联系的**大数律**(law of large numbers)). 因此, 也可以说, 概率论是研究支配大量随机因子相互作用规律的数学分支.

概率论的对象. 为了描述某些条件 S 和事件 A(它的发生和不发生可以确切地确定)之间有规律的联系, 在科学上通常使用下述两种模式:

1) 事件 A 随着条件 S 的每次实现而发生. 例如, 经典力学的所有定律就属于这种形式, 它陈述为: 在给定了初始条件和在一个物体或一组物体上作用一些外力之后, 运动将以唯一确定的方式进行.

2) 在条件 S 之下事件 A 的发生有一个确定的概率 $\mathrm{P}(A|S)$, 它等于 p. 例如, 支配电离放射物的规律指出: 对每种放射性物质, 在给定的时间区间内, 以确定的概率有某 N 个放射性物质的原子发生衰变.

在给定的 n 次试验序列(即条件 S 的 n 次重复实现)中事件 A 发生的频率(frequency of occurrence)是 A 发生的试验次数 m 与总的试验次数 n 的比 $p=m/n$. 在条件 S 之下事件 A 的发生有着确定的概率是由几乎所有充分大的试验序列 A 发生的频率渐近地等于 p 这一事实显现出来的. 任何一个打算用以概略地描述条件 S 和随机事件 A 之间的关系的数学模型, 通常也包含着某些关于试验的性质和相依程度的

假定．在做了这些附加假定（最经常的假定是试验相互独立（independence）；见概率论的基本概念的段落）之后，关于上面频率接近于概率的有点含糊的叙述就可能给出定量的更确切的表达．

统计关系、即上述模式 2）所描述的关系，在诸如掷骰子这种碰运气的游戏中首先引起注意．涉及生和死的统计关系也早已为人们所知（例如人类新生儿为男孩的概率是 0.515）．19 世纪末和 20 世纪前半叶人们目睹了在物理学、化学、生物学和其他科学领域内大量统计规律的发现．应该注意到统计规律也包含在与随机性概念没有直接关系的模式中．例如，在函数表中的数字分布等等（见**随机数和伪随机数**（random and pseudo-random numbers））．这一事实特别在随机现象"模拟"中是有用的（见**统计试验法**（statistical experiments, method of）．

概率论的方法可以用来研究显然彼此无关的大量科学领域中流行的关系，是由于事件发生的概率总是满足某些简单的规律这一事实，下面将加以讨论（见有关概率论的基本概念的段落）．在这些简单规律的基础上，研究事件发生的概率的性质构成概率论的对象．

概率论的基本概念．作为一个数学学科，概率论中的基本概念，在称之为初等概率论（elementary probability theory）的框架之内大都由简单的例子说明．在初等概率论中所考虑的每次试验 T 只产生唯一的一个结果，也就是称为基本事件（elementary events）的 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 中的一个，其数量假定是有限的．对每一结果 ω_k，有一非负数 p_k——这一结果的概率（probability）与之联系．这些数 p_k 之和必须是 1．考虑由条件

"或 ω_i 或 $\omega_j, \cdots$，或 ω_k 发生"

所表征的事件 A．称 $\omega_i, \omega_j, \cdots, \omega_k$ 为有利于事件 A 的结果．根据定义，说事件 A 的概率 $\mathrm{P}(A)$ 等于有利于这一事件的结果的概率之和：

$$\mathrm{P}(A) = p_i + p_j + \cdots + p_k. \qquad (1)$$

如果有 r 个结果有利于 A，则在 $p_1 = p_2 = \cdots = p_s = 1/s$ 的特殊情形就产生公式

$$\mathrm{P}(A) = \frac{r}{s}. \qquad (2)$$

公式（2）表达了所谓的古典概率的概念（classical concept of probability），据此，某一事件 A 的概率等于有利于 A 的结果的个数 r 与所有"等可能"的结果数 s 之间的比值．于是概率的计算归结为有利于 A 的结果数的计数问题并常常证明是组合学中的困难问题．

例．掷一对骰子的 36 种可能结果的每一个可用 $(i; j)$ 表示，其中 i 是第一个骰子显出的点数，而 j 表示第二个骰子显出的点数．有利于事件 A——"点数之和为 4"的三个结果是：$(1; 3), (2; 2), (3; 1)$．于是，$\mathrm{P}(A) = 3/36 = 1/12$．

在一个给定问题中，决定概率 p_k 的数值问题，严格说来超出了作为纯数学学科的概率论的范围．在某些情形下，这些值可以通过处理大量观察结果来确定．在另外一些情形，从理论上预测在给定试验中遇到给定事件的概率是可能的．这种预测常常基于进行试验的条件和试验的结果之间的客观对称性．在这种情形下就导致像（2）那样的公式．例如，令试验是掷一枚由均匀材料做成的立方体骰子．可以假定骰子的每一面以 1/6 的概率"出现"．在这种情形，所有可能结果是等可能的假定是与经验符合的．事实上，这类例子形成了概率的古典定义的基础．

在某些特殊情形，可以用称之为任意函数方法（method of arbitrary functions）更详尽且透彻地解释各个结果等概率的原因．仍以掷骰子为例来解释这一方法：假设试验的条件使得骰子上空空气的意外影响可以忽略不计．在这种情形，如果骰子的初始位置、初始速度和机械性质精确地知道，骰子的运动便可以用经典力学的方法来计算，试验的结果即可以可靠地给出预测．实际上，初始条件不可能绝对精确地决定，且初始速度的哪怕非常微小的改变都会导致不同的结果．倘若在骰子上抛和落下之间的时间间隔 t 足够的长，已经发现在关于初始值的概率分布非常一般的假定下（这是此方法名字的由来），六个可能结果的每一个的概率，当 $t \to \infty$ 时，均趋于 1/6．

第二个例子是不断地洗一副纸牌以保证所有会出现的分配是等可能的．这里，从纸牌的一种分配到下一种分配的转移，连续的两次洗牌的结果通常是随机的．等可能性趋势是通过 **Марков 链**（Markov chain）的理论建立的．

这两种情形都可以看作一般**遍历理论**（ergodic theory）的一部分．

给定某些事件，可以定义两个新的事件：它们的并（和）和联合（乘积，交）．事件 B："$A_1, \cdots, A_r$ 至少有一发生"称为事件 $A_1, \cdots, A_r$ 的并（union）．事件 C："$A_1, \cdots, A_r$ 都发生"称为事件 $A_1, \cdots, A_r$ 之联合（combination）或交（intersection）．对于事件的并和交分别使用符号 $\cup$ 和 $\cap$．于是

$$B = A_1 \cup \cdots \cup A_r, \quad C = A_1 \cap \cdots \cap A_r.$$

称事件 A 和 B 是互斥的（mutually exclusive），如果它们不可能同时发生，即没有既有利于 A 又有利于 B 的那种试验的可能结果．如果把每一事件 A_i 等同于对它有利的结果的集合，则事件 B 和 C 将分别等同

于相应集合的并和交．

概率论中的两个基本定理——概率的加法定理和乘法定理是同刚刚引人的运算相联系的．

概率的加法定理（theorem on addition of probabilities）．若 $A_1,\cdots,A_r$ 两两互斥，则它们的并的概率等于它们的概率的和．

于是，在上面提到的掷一对骰子的例子中，"点数之和小于等于 4"是三个互斥事件 A_2，A_3 和 A_4（点数之和分别为 2,3 和 4）之和．这些事件的概率分别是 1/36，2/36 和 3/36．根据加法定理 $\mathrm{P}(B)$ 等于

$$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**（conditional probability）用公式

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

来定义．它可以用同发生的频率的性质完全一致来说明．称事件 $A_1,\cdots,A_r$ 是**独立的**，如果在其他某些事件发生的条件下任一事件发生的概率等于它的"无条件"概率（亦见概率论中的**独立性**（independence））．

概率的乘法定理（theorem on multiplication of probabilities）．事件 $A_1,\cdots,A_r$ 联合发生的概率等于事件 A_1 发生的概率乘以在事件 A_1 事实上已经发生的条件下事件 A_2 发生的概率，…，乘以在事件 $A_1,\cdots,A_{r-1}$ 事实上已经发生的条件下事件 A_r 发生的概率．如果事件是独立的，乘法定理就引出公式

$$\mathrm{P}(A_1\cap\cdots\cap A_r)=\mathrm{P}(A_1)\cdots\mathrm{P}(A_r), \qquad (3)$$

亦即独立事件联合发生的概率等于这些事件概率的乘积．如果等式两边中的某些事件同时用它们的余事件代替，公式（3）仍成立．

例．四粒子弹向一目标发射，每粒子弹击中目标的概率是 0.2．不同子弹击中目标认为是独立的．问恰有三次击中目标的概率是多少？

试验的每一结果可以用 4 个字母的序列来表示（例如 (h,m,m,h) 表示第一、第四粒子弹射中而第二、第三粒子弹打飞了）．其结果总数是 $2\times2\times2\times2=16$．因为各个子弹的结果假定是独立的，结果的概率必可借助于公式（3）（包含随后的注解）决定．于是结果 (h,m,m,m) 的概率将是

$$0.2\cdot0.8\cdot0.8\cdot0.8=0.1024;$$

其中 $0.8=1-0.2$ 是单个子弹打飞的概率．有利于事件"恰有三次击中目标"的结果是 (h,h,h,m)，(h,h,m,h)，(h,m,h,h) 和 (m,h,h,h)，所有四个结果的概率都相等：

$$0.2\cdot0.2\cdot0.2\cdot0.8=\cdots=$$
$$=0.8\cdot0.2\cdot0.2\cdot0.2=0.0064.$$

于是这一事件的概率是

$$4\cdot0.0064=0.0256.$$

上述推理的一般化引出概率论中的一个基本公式：如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 独立且每一事件 A_i 发生的概率为 p，则这些事件中恰有 m 个发生的概率是

$$\mathrm{P}_n(m)=C_n^m\,p^m(1-p)^{n-m}, \qquad (4)$$

其中 $C_n^m=\binom{n}{m}$ 表示从 n 个元素中取 m 个元素的组合数（见**二项分布**（binomial distribution））．如果 n 很大，用公式（4）计算成为艰巨的任务．在上例中如果子弹数是 100，要求击中数在 8 到 32 之间的概率 x．利用公式（4）和加法定理得到一个精确的但不便计算的求概率值的表达式，即

$$x=\sum_{m=8}^{32}\binom{100}{m}(0.2)^m(0.8)^{100-m}.$$

利用 **Laplace 定理**（Laplace theorem）可以得到概率 x 的一个近似值：

$$x\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-3}^{+3}e^{-z^2/2}\,dz=0.9973.$$

其误差不超过 0.0009．这一结果表明事件 $8\le m\le 12$ 的发生实际上是必然的．这是一个非常简单而典型的应用概率论中**极限定理**（limit theorems）的例子．

初等概率论中另外一个基本公式是**全概率公式**（formula of total probability）：如果 $A_1,\cdots,A_r$ 两两互斥且其并为必然事件，则任一单个事件 B 的概率等于下述和

$$\mathrm{P}(B)=\sum_{k=1}^{r}\mathrm{P}(B|A_k)P(A_k).$$

当考虑**复合试验**（compound trials）时概率的乘法定理特别有用．称试验 T 是由试验 $T_1,\cdots,T_n$ 复合而成的，如果 T 的每一结果都是相应地由试验 T_1，$T_2,\cdots,T_{n-1}$，T_n 的某些结果 $A_i,B_j,\cdots,X_k,Y_l$ 联合而成的．常常会遇到这种情况，由于某种理由，概率

$$\mathrm{P}(A_i),\ \mathrm{P}(B_j|A_i),\cdots,\mathrm{P}(Y_l|A_i\cap B_j\cap\cdots\cap X_k)\ (5)$$

是已知的．（5）中的数据及乘法定理就可以用来决定复合试验的所有结果 E 的概率 $\mathrm{P}(E)$ 以及与此试验相联系的所有事件的概率（如同上面讨论的例子一样）．在实际中，两种类型的复合试验特别重要：A）每个试验是各自**独立的**，即（5）中的概率等于无条件概率 $\mathrm{P}(A_i)$，$\mathrm{P}(B_j)$，…，$\mathrm{P}(X_k)$，$\mathrm{P}(Y_l)$；B）给定试验结果的概率，只受与它紧接的前一试验的结果的影

响，即（5）中的概率分别等于 $P(A_i)$，$P(X_j|A_i)$，…，$P(Y_l|X_k)$．称这些试验以 Марков 链联结．与复合试验相联结的所有事件的概率完全被初始概率 $P(A_i)$ 以及中间联结概率 $P(B_j|A_i)$，…，$P(Y_l|X_k)$ 所决定（见 **Марков 过程**（Markov process））．

随机变量（random variables） 如果把试验 T 的每一结果与一个数 x_r 相对应，就指定了一个随机变量 X．在 $x_1,\cdots,x_s$ 这些数中，可以有相等的；x_r，$r=1,\cdots,s$，的不同值的集合是随机变量的可能值（possible values）的集合．随机变量可能值的集合连同它们相应的概率一起称之为随机变量的概率分布（probability distribution）．于是，在掷一对骰子的例子中，试验的每一结果 (i,j)，与随机变量的值 $X=i+j$ 对应，它是两颗骰子点数之和．可能值是 2，3，…，12，它们相应的概率是 1/36，2/36，…，1/36．

当同时研究几个随机变量时引入了它们的联合分布的概念，它是通过指定每一个的可能值及

$$\{X_1=x_1\},\cdots,\{X_n=x_n\} \tag{6}$$

这些事件同时发生的概率来定义的，其中 x_k 是变量 X_k 的可能值之一．如果在（6）中无论对 x_k 做怎样的选择这些事件都是独立的，则称这些随机变量是独立的（independent）．随机变量的联合分布可用来计算用这些随机变量定义的任一事件的概率，例如事件

$$a<X_1+\cdots+X_n<b,$$

等等．

经常，并不完整地给出随机变量分布，而只是利用一个不太大的数字特征集合．最常使用的是**数学期望**（mathematical expectation）和**方差**（dispersion）（亦见**矩**（moment）；**半不变量**（semi-invariant））．

几个随机变量的联合分布的基本特征除了这些随机变量的数学期望和方差以外，还包括**相关系数**（correlation coefficient）等等．这些特征的意义可以通过极限定理（见有关极限定理的段落）给予相当透彻的阐述．

具有限个结果的试验概型即使在最简单的概率论的应用中也是不够的．像在围绕某一目标中心的炮弹击中位置的散布，或测量某个值时误差的散布等等的研究中，都不可能局限于只有有限个结果的试验模型．此外，在某些情况下，这些结果可以用一个数或一个数集来表示，而在另外一些情况下，试验的结果可用一个函数（例如，在给定位置处某一时间区间内气压变化的记录），一个函数集来表示，等等．值得注意的是，上面给出的许多定义和定理在作一些适当的修正之后，对这些更一般的情形仍然适用，只是表述概率分布的形式有所不同（见**概率分布的密度**（density of a probability distribution）；**概率分布**（probability distribution））．这里，古典的"每一结果的等概率"被所考虑对象在某一区域中的**均匀分布**（uniform distribution）所代替．（当谈及在某一区域中随机地选择一个点，对某一图形随机选一切线，等等时，正好就是这个意思）．

主要的改变是在概率的定义中引进的．在初等情形它用公式（2）来定义，而在现在讨论的更一般的模型中，事件可能是无穷多个基本事件的并，而每一个的概率可能是零．于是前面描述的加法定理这一性质不再是概率定义的直接结果，而是概率定义的一个组成部分．

构造在概率论基础中最常使用的逻辑体系是由 A. H. Колмогоров 在 1933 年创立的．这一体系的基本特征如下：在用概率论方法研究一个实际问题时，第一步是界定一个由元素 u（称之为基本事件（elementary events））构成的集合 U．任何事件均可由有利于它的基本事件的集合来完全描述，因此可看作是基本事件的某一集合．对某些事件 A 指定某些数 $P(A)$，称之为它的概率，使其满足下述条件：

1）$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2）$P(U)=1$；

3）如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互斥，且 A 是它们的并，则

$$P(A)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)$$

（概率的可加性）．

为了构造数学上严格的理论，$P(A)$ 的定义域必须是 σ 代数，且条件（3）对任意两两互斥的事件的无穷序列也满足（概率的可列可加性）．非负性和可列可加性是测度的基本性质．这样，在形式上可以把概率论看作**测度**（measure）理论的一部分．于是概率论的一些基本概念有了新的理解：随机变量成为可测函数，它们的数学期望成为抽象的 Lebesgue 积分，等等．可是，概率论和测度论的主要问题是不同的．在概率论中基本的、特殊的的概念是事件、试验和随机变量的独立性，此外，概率论包括了对诸如概率分布、条件数学期望等课题的透彻研究．

下面的注解是针对上面所描述的体系的．按照这一体系，每一概率模型是建立在一个**概率空间**（probability space）的基础上，它是一个三元组 (Ω,S,P)，其中 Ω 是一基本事件集合，S 是 Ω 的子集的 σ 代数，P 是 S 上的概率分布（一个可列可加标准化测度）．这一体系的两大贡献是在无穷维空间中概率的定义（特别在与无穷试验序列和随机过程相联结的空间中），以及条件概率（conditional probability）和条件数学期望（对给定随机变量的，等等）的一般定义．

随后概率论的发展表明上述概率空间的定义可以

加以适当限制．这些发展导出诸如完满分布（perfect distributions）的概率空间，Blackwell 空间（Blackwell space），在拓扑（线性）空间上的 Radon 概率测度（Radon probability measure），等等（见**概率分布**（probability distribution））．

存在其他的方法建立概率论的基本概念，例如公理化，其主要对象是事件的标准化 Boole 代数．此处，其主要优点（以所考虑的代数在距离意义下是完备的为条件）是对任意事件的定向系统下面的关系式成立：

$$\mathsf{P}(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) = \sup_{\alpha} \mathsf{P}(A_{\alpha}),\ A_{\alpha}\uparrow,$$

$$\mathsf{P}(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) = \inf_{\alpha} \mathsf{P}(A_{\alpha}),\ A_{\alpha}\downarrow.$$

随机变量的概念可公理化为某一定义有正线性泛函（数学期望的类比）的交换代数中的元素．这是非交换和量子概率的出发点．

极限定理．在概率论的形式解释中极限定理似乎是初等结构之上的一种上层建筑，因为在初等情形所有的问题都具有有限的、纯算术的特征．可是概率论的创造性价值均与极限定理有关．例如，根据 **Bernoulli 定理**（Bernoulli theorem）在独立试验中给定事件发生的频率通常接近于它的概率，而 **Laplace 定理**（Laplace theorem）得出这一频率与它的极限值偏差的概率．用类似的方式，随机变量的诸如数学期望和方差的一些特征值的意义可以用**大数律**（law of large numbers）和**中心极限定理**（central limit theorem）来解释（亦见**极限定理**（limit theorems））．

设

$$X_1, \cdots, X_n, \cdots \tag{7}$$

是具有相同概率分布的独立随机变量，其 $\mathsf{E}X_k = a$，$\mathsf{D}X_k = \sigma^2$；设 Y_n 是序列（7）中前 n 项的算术平均：

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

根据大数律，对任意 $\varepsilon > 0$，当 $n \to \infty$ 时，不等式 $|Y_n - a| \leqslant \varepsilon$ 成立的概率趋向于 1，于是，一般地，Y_n 的值就接近于 a．这一结果用中心极限定理表达得更确切：根据它，Y_n 与 a 的差渐近于数学期望为零，方差为 σ^2/n 的正态分布．这样，对大的 n，为了计算 Y_n 和 a 的偏差的概率（到一阶逼近），不需要详细知道变量 X_n 的分布，知道它们的方差就足够了．如果要求更高的精确度的逼近，就需要用到高阶矩．

上面的叙述作适当的修改即可扩张到（在有限维或某些无穷维空间的）随机向量上．独立性条件可代之以 X_n 的"弱"相依（某种意义上）条件．关于群上的分布以及算术函数值的分布等的极限定理也是已知的．

在应用中，特别在数理统计和统计物理中，以很高的相对精度（relative accuracy）逼近较小的概率（例如，形如 $|Y_n - a| > \varepsilon$ 事件的概率）是必要的．这一内容包含对正态逼近的主要校正（见**大偏差的概率**（large deviations, probability of））．

20 世纪 20 年代人们注意到，非正态极限分布的出现是很自然的，即使在均匀分布和独立随机变量的模式中．例如，设 X_1 表示某个随机变化的变量回到它的初始位置所消耗的时间，令 X_2 表示从第一次到第二次这种返回所消耗的时间，等等．则在非常一般的条件下，和 $X_1 + \cdots + X_n$（即直到第 n 次返回以前所消耗的时间）在乘一个因子 $n^{-1/\alpha}$（其中 α 是小于 1 的常数）之后的分布收敛到某一极限分布．于是第 n 次返回以前的时间，粗略地说，与 $n^{1/\alpha}$ 成比例，亦即有比 n 更快的速率（如大数律适用，应当是与 n 同阶）．这是在 **Bernoulli 随机游动**（Bernoulli random walk）中见到的（在其中还出现了另一个悖论式的规律——**反正弦律**（arcsine law））．

证明极限定理的主要方法是**特征函数**（characteristic function）方法（以及有关的 Laplace 变换法和母函数法），许多情况下还必须求助于复变函数论．

绝大多数极限关系存在性机制只有在随机过程论的范围内才能完全理解．

随机过程．过去数十年间，在某些物理和化学研究中，与一维和高维随机变量的研究一道，产生了研究**随机过程**（stochastic process）（即按给定的概率以某种方式进行的过程）的需要．进行 **Brown 运动**（Brownian motion）的质点坐标可以作为随机过程的一个例子．在概率论中，随机过程通常看作随机变量 $X(t)$ 的单参数族．在绝大多数应用中，参数 t 是时间，但它也可以是任意变量，这时通常称为**随机函数**（random function）（如果 t 是空间中的点，就称为**随机场**（random field））．如果参数 t 取遍整数值，就称此随机函数为随机序列（random sequence）（或时间序列（time series））．当随机变量用一个分布律来表征时，一个随机过程可以用 $X(t_1), \cdots, X(t_n)$ 的联合分布的全体（称之为有限维分布（finite-dimensional distributions））来表征，这里 $n > 0$ 任意，$t_1, \cdots, t_n$ 取遍所有可能的时刻．在随机过程论中最有兴趣的具体结果是在以下两个领域内得到的：**Марков 过程**（Markov process）和**平稳随机过程**（stationary stochastic process）；关于**鞅**（martingale）的兴趣近来正在强烈地增长．

按照年代先后，Марков 过程是首先被研究的．一个随机过程 $X(t)$ 称为 Марков 过程，如果对任何两个时刻 t_0 和 t_1（$t_0 < t_1$），在 $X(t)$，$t \leqslant t_0$ 所有值给定的条件下，$X(t_1)$ 的条件概率分布仅依赖于 $X(t_0)$．据此理由，有时称 Марков 过程为无后效

过程(processes without aftereffect). Марков 过程是经典物理学中研究的确定性过程的自然推广. 在确定性过程中, 系统在时刻 t_0 时的状态唯一确定了过程在将来的进程. 在 Марков 过程中, 系统在时刻 t_0 时的状态唯一确定了过程在 $t>t_0$ 时进程的概率分布, 并且关于过程在时刻 t_0 以前的任何信息都不能改变这一分布.

正如研究连续的确定性过程导出与描述系统状态有关的函数的微分方程一样, 对连续的 Марков 过程的研究, 很大程度上可以归结为关于过程的概率分布的微分或微分 - 积分方程.

在随机过程领域内另一个主要对象是平稳随机过程论. 一个过程的平稳性, 即其概率关系不随时间改变, 对过程加上这一主要限制, 据此可以推导出若干重要的推论.

理论的主要部分只建立在广义平稳性的假定上, 即数学期望 $\mathrm{E}X(t)$ 和 $\mathrm{E}X(t)X(t+\tau)$ 与 t 无关. 这一假定导致谱分解:

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\,dz(\lambda),$$

其中 $z(\lambda)$ 是具有不相关增量的随机函数. 对平稳过程, 最佳(在均方意义上)线性内插、外推和滤波方法已经发展.

近来很大一类称之为半鞅的过程被界定出来, 用以解决最优非线性滤波、内插和外推的问题(见**随机过程的预测**(stochastic processes, prediction of); **随机过程的滤波**(stochastic processes, filtering of); **随机过程的内插**(stochastic processes, interpolation of)). 有关的分析工具的实质部分是随机微分方程、随机积分和鞅. **鞅**(martingale) $X(t)$ 的特征是: 在给定 $X(u)$, $u\leqslant s$, $s<t$ 之下, $X(t)$ 的条件数学期望是 $X(s)$.

随机过程理论与关于随机变量和的极限定理的经典问题有着紧密的联系. 出现在随机变量和的研究中的极限分布就成为在随机过程论中具有适当特征的确切分布. 这一事实使得借助于与其联系的随机过程证明许多极限定理成为可能.

最后, 人们注意到, 与随机过程相联系的一些概念的定义, 在上面讨论的公理化框架中逻辑上是无可指责的, 却已经引起并还将继续产生大量的测度论性质的困难. 例如, 与随机过程的概率连续性及可微性等等的定义相联系的一些问题(见**可分过程**(separable process)). 这就是为什么随机过程理论的专著花费大约一半的篇幅分析测度论结构的发展的原因.

参考文献

[1] Bernoulli, J., Ars conjectandi, Basle, 1713.
[2] Moivre, A. de, Doctrine of chances, Paris, 1756.
[3] Laplace, P. S., Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812.
[4] Чебышев, П. Л., Полн. собр. соч., 2 – 3, М.-Л., 1947 – 1948.
[5] Liapounoff, A. M., Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité., St. Petersburg, 1901.
[6] Марков, А. А., Исследование замечательного случая зависимых испытаний, 《Изв. АН, 6 серия》, 1(1907).
[7] Марков, А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924.
[8] Бернштейн, С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.-Л., 1946.
[9] Гнеденко, Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969 (中译本: Б. В. 格涅坚科, 概率论教程, 人民教育出版社, 1956)
[10] Боровков, А. А., Теория вероятностей, М., 1976.
[11] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications 1 – 2, Wiley, 1957 – 1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷, 上、下册, 科学出版社, 1964, 1979; 第二卷, 科学出版社, 1994)
[12] Poincaré, H., Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, 1912.
[13] Mises, R. von, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Wien, 1931.
[14] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет, 1917 – 1947, М.-Л., 1948.
[15] Колмогоров, А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за сорок лет, 1917 – 1957, т. 1, М., 1959.
[16] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: А. Н. 柯尔莫格洛夫, 概率论基本概念, 商务印书馆, 1952).
[17] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prohorov, Yu. V. [Yu. V. Prokhorov], Probability theory, Springer, 1969).

亦见概率论的每个专题的参考文献.

Ю. В. Прохоров, Б. А. Севастьянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Billingsley, P., Probability and measure, Wiley, 1979.
[A2] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley, 1968.
[A3] Chow, Y. S. and Teicher, H., Probability theory Independence, interchangeability, martingales, Springer, 1978.
[A4] Loève, M., Probability theory, 1 – 2, Springer, 1977 (中译本: M. 洛易甫, 概率论, 上册, 科学出版社, 1965).
[A5] Carnap, R., The logical foundations of probability,

Univ. Chicago Press, 1962

[A6] Finetti, B. de, Theory of probability, Wieley, 1974

[A7] Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

[A8] Liptser, R. Sh. and Shiryayev, A. N., Theory of martingales, Kluwer, 1989(译自俄文).

[A9] Liptser, R. Sh. and Shiryayev, A. N., Statistics of random processes, I – II, Springer, 1977 – 1978(译自俄文).

[A10] Paulaskas, V. and Račkauskas, A., Approximation theory in the central limit theorem, Kluwer, 1989 (译自俄文).

[A11] Gihman, I. I. [I. I. Gikhman] and Skorohod, A. V. [A. V. Skorokhod], The theory of stochastic processes, I – III, Springer, 1974 – 1979(译自俄文).

[A12] Dynkin, E. B., Markov processes, I – II, Springer, 1965(译自俄文).

[A13] Wentzell, A. D., Limit theorems on large deviations for Markov stochastic processes, Kluwer, 1990(译自俄文).

[A14] Skorohod, A. V., Random processes with independent increments, Kluwer, 1991(译自俄文).

刘秀芳 译 陈培德 校

概差[probable deviation; вероятное отклонение]，平均偏差(mean deviation)

概率分布(probability distribution)的散布的度量．对于连续型分布的对称随机变量 X，概差 B 定义为

$$\mathsf{P}\{|X-m|<B\}=\mathsf{P}\{|X-m|>B\}=\frac{1}{2}, \quad (*)$$

其中 m 是随机变量 X 的中位数(在此情形下，只要中位数存在，则它等于**数学期望**(mathematical expectation))．对于**正态分布**(nomal distribution)，在概差与**标准差**(standard deviation) σ 之间有如下简单关系：

$$\Phi\left(\frac{B}{\sigma}\right)=\frac{3}{4},$$

其中 $\Phi(x)$ 正态 $(0,\sigma)$ 分布函数．近似有 $B=0.6745\sigma$．

А. В. Прохоров 撰

【补注】 概差亦称为平均误差(mean error)([A2])．"平均偏差"的名称亦用来表示随机变量关于其中位数的一阶绝对矩 $\mathsf{E}(|X-m|)$．

参考文献

[A1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946, Sect 15.6(中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966).

[A2] Dubois, Ph. H., Introduction to psychological statistics, Harper & Row, 1965, 287.

周概容 译

面向问题的语言[problem-oriented language; програм-мирования язык]

专门用于对不同类问题进行程序设计的特定语言．类的指示归化为或者是作为要解问题的基础的数学对象的界定(例如线性代数问题类)，或者是计算机应用范围的界定(例如在商业或制造业中的规划或信息流问题类)．面向问题通常是在某一通用程序设计语言的内容上完成的，相对于后者来说面向问题语言可以是超语言，或预语言，或子语言．通过附加结构丰富通用语言就得到超语言(super language)，这些结构特别适合该类问题的表达．

通用语言的一般结构或者是由在整个程序连上附加结构，或者通过对非标准问题实例进行程序设计而得到．在预语言(pre-language)中，附加的结构完全包围通用语言，由一个专门的预处理程序把预语言翻译到通用语言．子语言(sublanguage)从通用语言中抛弃那些给定问题中不必要的结构而得到，或者通过标准程序库的初步组合而得到，该库在整体上对表达该类中的每个问题是充分的．在所有这些情况，使用面向问题语言的好处是不必对该类中每个问题逐一进行程序设计，而只需对不同问题给出不同参数就足够了．

А. П. Ершов 撰

【补注】 人们考虑面向特定类的机器或芯片的语言，见**面向机器的语言**(machine-oriented language)．

程 虎 译 刘椿年 校

过程[procedure; процедура]，亦称规程

1) 按规律执行的动作序列，它有精确的描述——**算法**(algorithm)．

2) 过程是表述部分地解决较大问题中的一个问题的**程序**(program)的专门方法；它是**算法语言**(algorithm language)中的一个基本结构．

过程是通过把问题系统分割成若干部分的方法来克服程序设计复杂性的主要工具．人们把在程序设计中说明过程的方法分为两类：下降法和上升法．在下降方法(descending approach)中，过程表现为把一层问题分割为若干个相连的子问题；因此，过程和它的程序的结构等同．在上升方法(ascending approach)中，过程被保持，使得它能在将来解决更大问题时用作基本动作．

过程形成的程序通常包含一些自由变量，它们称为过程的形式参数．在调用过程时，形式参数取得它们的值，称为实在参数．过程的描述通常由四部分组成：过程体，即由它形成的程序本身；过程的名字；形式参数表；和过程性质的属性表．通常属性刻画形式参数和过程的结果取值的集合．最简单的过程类是函数过程(function procedure)．对函数过程来说，形

式参数就是函数的变元(自变量),而调用函数过程,有过程名字,跟着括在括号里的实在参数表,表示计算对应于这些参数的函数值的"命令".

А П Ершов 撰

【补注】 一些作者专门区分算法和过程.算法规定一系列动作,它常常在有限步后终结.过程不要求终结:过程可能执行非终结的计算,在它计算的路程中产生有意义的计算结果.这一区别使人们可以描述这样的计算过程,它们通过终止而不是通过接受状态来接受其输入.

参考文献

[A1] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., Introduction to automata theory, languages and computation, Addition-Wesley, 1979.

穆 虎 译 刘椿年 校

观测值的处理 [processing of observations; наблюдений обработка]

应用数学方法处理观测结果,旨在作出关于未知量真值的结论.与测量有关的任何观测结果,都包含各种不同起源的误差.误差按其本质可以分为三组:过失误差、系统误差和随机误差(关于过失误差见**误差理论**(errors, theory of);以下将假设观测结果不含过失误差).某一量 μ 的测量结果 Y 一般视为随机变量,则测量误差 $\delta = Y - \mu$ 也是随机变量.设 $b = \mathsf{E}\,\delta$ 是其**数学期望**(mathematical expectation).那么,

$$Y = \mu + b + (\delta - b).$$

量 b 称为系统误差(systematic error),而 $\delta - b$ 称为随机误差(random error);$\delta - b$ 的数学期望等于 0.系统误差往往是事先已知的,这时很容易排除.例如,天文学中在测量天体方向与水平面间夹角时,系统误差是两种误差之和:在读入该角时由仪器所产生的系统误差(仪器误差)和由光线在大气中的折射所产生的系统误差.仪器误差可以利用该仪器校正表或图来确定;与折射有关的误差(对于天顶距离小于 80°的情形),可以充分精确地从理论上计算出来.

随机误差的值可利用误差理论的方法来估计.如果 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是对 μ 的 n 次独立测量结果,并且测量是在相同条件下用同种工具进行的,则通常设

$$\mu \approx \overline{Y} - b = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} - b, \qquad (1)$$

其中 b 是系统误差.

假设拟计算某函数 $f(y)$ 在点 $y = \mu$ 处的值,而 μ 的值根据 n 次独立观测结果 $Y_1, \cdots, Y_n$ 来估计,则设所求值近似为

$$f(\mu) \approx f(\overline{Y} - b). \qquad (2)$$

设 B 是

$$\Delta = f(\overline{Y} - b) - f(\mu)$$

的数学期望,则

$$f(\overline{Y} - b) - f(\mu) + B + (\Delta - B).$$

因此,B 是近似式(2)的系统误差,而 $\Delta - B$ 是其随机误差.假如独立观测结果 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的随机误差服从同一分布,而函数 $f(y)$ 在点 $y = \mu$ 的邻域内和线性函数相差甚微,则 $B \approx 0$ 且

$$\Delta \approx f'(\mu)(\overline{\delta} - b),$$

其中 $(\overline{\delta - b})$ 是原始观测结果之随机误差的**算术平均值**(arithmetic mean).这表明,如果

$$\mathsf{E}(\delta_i - b)^2 = \sigma^2,\ i = 1, \cdots, n,$$

则当 $n \to \infty$ 时,有

$$\mathsf{E}(\Delta - B)^2 \approx \mathsf{E}\Delta^2 \approx \frac{[f'(\mu)]^2\sigma^2}{n} \to 0.$$

在有若干个未知参数的场合,观测数据的处理常借助**最小二乘法**(least squares, method of).

假如拟研究随机变量 X 和 Y 之间的相依性,研究基于 n 次独立观测序列,其中每一个向量 (X_i, Y_i) $(i = 1, \cdots, n)$ 服从 X 和 Y 的(未知)联合分布,则观测数据处理利用**相关**(correlation)理论.

每当进行观测数据的处理,需要作某些关于函数关系的特点、随机误差的分布等的某些假设,因此观测数据的处理应包含检定所作假设与现在所用以及其他观测结果的一致性.见**统计假设检验**(statistical hypotheses, verification of).

参考文献

[1] Whittaker, E. and Robinson, G., The calculus of observations, Blackie, 1944.
[2] Линник, Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

Л. Н. Большев 撰 周概容 译

积积分 [product integral; мультипликативный интеграл]

形如

$$\prod\nolimits_{\Delta} = e^{A(s_n)(s_n - s_{n-1})} e^{A(s_{n-1})(s_{n-1} - s_{n-2})} \cdots e^{A(s_1)(s_1 - s_0)}$$

的积的极限,其中 A 是定义在 $[a, b]$ 上取值在 Banach 空间 E 的有界算子的空间中的连续函数而 Δ 是用点 $s_0 = a, s_1, \cdots, s_n = b$ 构成的 $[a, b]$ 的划分,极限是当划分的直径 $|\Delta| \to 0$ 时取的且记为

$$\int_a^{b} \exp A(s)\,ds.$$

如果算子 $A(t)$ 对不同的 t 可交换，则

$$\int_a^{b} \exp A(s)\,ds = e^{\int A(s)\,ds}.$$

积积分是表示微分方程 $\dot{X} = A(t)X$ 的**发展算子**（evolution operator）$U(t,\tau)$ 的方便的方法（见[1]）．这里

$$U(t,\tau) = \int_\tau^{t} \exp A(s)\,ds,$$

其极限是上述积分的积也是对具有分段常算子 $\widetilde{A}(t) = A(s_k)$（当 $s_{k-1} \leqslant t \leqslant s_k$）的方程的发展算子．

如果 A 和 B 是两个连续的算子值函数，则

$$\int_a^{b} \exp(A(s)+B(s))\,ds = \qquad (2)$$

$$= \lim_{\Delta l \to 0} \prod_{k=1}^{n} e^{A(s_k)(s_k - s_{k-1})} e^{B(s_k)(s_k - s_{k-1})}.$$

这里积上的符号 $\leftarrow$ 表示带有较低指标的因子写在带有高指标的因子的右边．

公式（1）和（2）可推广到带有无界算子函数的某几类微分方程，由此得到了抛物型和 Schrödinger 型偏微分方程解的用轨道空间上积分（**路径积分**（path integrals），**连续积分**（continual integrals），见**轨道上积分**（integral over trajectories））的表示式（见[2]）．

（2）型的公式是解方程的某些数值方法的基础．

如果 f 是一个标量值连续函数而 F 是算子值有界变差函数，则极限

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \prod_{k=1}^{n} e^{f(s_k)(F(s_k)-F(s_{k-1}))} = \int_a^{b} \exp(f(t)\,dF(t))$$

存在；它称为 Stieltjes 积积分（product Stieltjes integral）．这些积分已被用于 J 压缩矩阵和算子的理论（见[3]，[4]）．

参考文献

[1] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970（英译本：Daletskiĭ, Yu. L. and Kreĭn, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974）.

[2] Далецкий, Ю. Л.,《Успехи матем. наук》, **17**（1962）, 5, 3 – 115.

[3] Потапов, В. П.,《Тр. Моск. матем. об-ва》, **4**（1955）, 125 – 236.

[4] Гинзбург, Ю. П.,《Матем. исследования》,（Киш.）, **2**（1967）, 2, 52 – 85.

С. Г. Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Reed, M. and Simon, B., Methods of modern mathematical physics, Acad. Press, 1972.

[A2] Dollard, J. D. and Friedman, Ch. N., Product integration, Addison-Wesley, 1979.

葛显良 译 鲁世杰 校

范畴中对象族的积［product of a family of objects in a category; произведение семейства объектов категории］

用态射的语言刻画 Descartes 积的概念．令 A_i（$i \in I$）是范畴 $\mathfrak{K}$ 中对象的加标族．对象 $P \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$（连同态射 $\pi_i : P \to A_i$，$i \in I$）叫作对象族 A_i（$i \in I$）的**积**，是指对每一族态射 $\alpha_i : X \to A_i$（$i \in I$）存在唯一的态射 $\alpha : X \to P$，使 $\alpha\pi_i = \alpha_i$，$i \in I$．态射 π_i 叫作**积投射**（product projections）；这个积记作 $\prod_{i \in I}^{*} A_i\,(\pi_i)$ 或 $\prod_{i \in I} A_i$．在 $I = \{1, \cdots, n\}$ 时，记作 $A_1 \times \cdots \times A_n$．出现在积的定义中的态射 α 有时记作 $\prod_{i \in I} \alpha_i$ 或 $(\times)_{i \in I}\alpha_i$．族 A_i（$i \in I$）的积在同构意义下唯一确定；它是结合的，交换的．对象族的积的概念对偶于对象族的余积（coproduct）概念．

对象的空族的积是范畴的右零（一个**终对象**（terminal object））．在大多数可构造集范畴（集、群、拓扑空间范畴等等）中对象族的积重合于这些对象的 Descartes（直）积．但是这种重合性不是必要的；在挠 Abel 群范畴中，群族 G_i（$i \in I$）的积是它们的 Descartes 积的挠部，一般来说不同于 Descartes 积自身．

在有零态射的范畴中，对任意积 $P = \prod_{i \in I}^{*} A_i(\pi_i)$ 都有唯一的态射 $\sigma_i : A_i \to P$，$i \in I$，使得 $\sigma_i\pi_i = 1_{A_i}$，对 $i \neq j$，$\sigma_i\pi_j = 0$．若 I 是有限的，范畴是加性的，则 $\pi_1\sigma_1 + \cdots + \pi_n\sigma_n = 1$，且对象族 $A_1, \cdots, A_n$ 的积也是它们的余积．

参考文献

[1] Цаленко, М. Ш., Шульгейфер, Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 一般认为 S. MacLane（[A1]）首先发现 Descartes 积可用纯范畴的语言作如上刻画．

参考文献

[A1] MacLane, S., Duality for groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56**（1950）, 485 – 516.

[A2] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

张英伯 译

产生集［productive set; продуктивное множество］

一个自然数的集合 A，存在一个**部分递归函数**（partial recursive function）φ，使得对每个包含在 A 中的、具有 Gödel 数 x 的**递归可枚举集**（enumerable

set) W_x，有 $\varphi(x)\in A\setminus W_x$。已经知道，对每个产生集 A，存在一个**一般递归函数** (general recursive function) φ，使得对任何 x，根据集合 A 和 W_x 的相互安置，要么有 $\psi(x)\in A\setminus W_x$，要么有 $\psi(x)\in W_x\setminus A$。因此一个产生集可以和任何递归 - 可枚举集"能行地"区别开来。另外，每个产生集包含无穷递归可枚举子集，所以产生集和**禁集** (immune set) 不同，虽然产生集和禁集并没有穷尽非递归可枚举的集族。在递归集合理论及其应用中一个起重要作用的许多集合都是产生的 (例如在一切部分递归函数的一个 Gödel 枚举中，一切一般递归函数的 Gödel 数的集合是产生集，在初等算术的一切公式的自然枚举中真或假的公式的一切数 (即公式在枚举中的序数) 的集合是产生集)。一些递归可枚举集称为创造集 (creative sets)，如果它们对自然数集的补集是产生集；创造集组成递归可枚举集中的一个重要的类。

参考文献

[1] Rogers, Jr. H., Theory of recursive function and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

В. А Душский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Odifreddi, P., Classical recursion theory, North-Holland, 1989.

杨东屏 译

投射有限群 [profinite group; проконечная группа]

作为有限离散群 $G_i(i\in I)$ (这里 I 为已给序的正向集) 的反向系的**投射极限** (projective limit) 的拓扑群。投射有限群 G 记作 $\lim_{\leftarrow} G_i$。作为带有紧拓扑的直接积 $\prod_{i\in I}G_i$ (单位元的邻域基由全体投射 $\prod_{i\in I}G_i\to G_j$ 的核组成) 的子空间，G 是闭的，因而也是紧的。

例。1) 设 I 为大于零的整数集合并有自然的序关系，取 $G_i=\mathbf{Z}/p^i\mathbf{Z}$。假设 $\tau_i^{i+1}:G_{i+1}\to G_i$ 为自然满同态，且当 $i<j$ 时，令

$$\tau_i^j=\tau_i^{i+1}\tau_{i+1}^{i+2}\cdots\tau_{j-1}^j,$$

则 $\lim_{\leftarrow} G_i$ 是 p 进整数环 $\mathbf{Z}_p$ 的 (加法) 群。

2) p 进数域上的每个紧解析群 (例如 $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p)$) 作为拓扑群都是投射有限群。

3) 设 G 为一抽象群并设 $\{H_i: i\in I\}$ 为 G 的具有限指数的正规子群所成的集合。在 I 中引进关系 $\leqslant$，规定若 $H_i\supseteq H_j$ 则 $i\leqslant j$。这一关系使 I 成为正向集。把每个 $i\in I$ 对应 G/H_i，并对每个对 (i,j)，$i\leqslant j$，取自然同态 $\tau_i^j:G/H_j\to G/H_i$。于是得到了投射有限群 $\hat{G}=\lim_{\leftarrow} G/H_i$，称为 G 的投射有限完全化 (profinite group completion)。对于由有限指数子群定义的拓扑而言，这是 G 的可分完全化 (见**环的可分完全化** (separable completion of a ring))。自然同态 $G\to\hat{G}$ 的核是所有具有限指数的子群的交。在上述构造中，若仅限于考虑那些指数是一固定素数 p 的方幂的正规子群，则相应的群记作 $\hat{G}_p$，是一**投射 p 群** (pro-p-group)。

4) 投射有限群以如下方式自然地产生于域的 (不一定是有限的) 代数扩张的 Galois 理论中。设 K/k 为一 **Galois 扩张** (Galois extension)，并设 $\{K_i/k: i\in I\}$ 是 k 的含于 K 中的所有有限 Galois 扩张所成的族，则 $K=\bigcup_{i\in I}K_i$，在 I 内引入关系 $\leqslant$：$i\leqslant j$，如果 $K_i\subseteq K_j$。于是 I 成为一偏序集。设 $\mathrm{Gal}(K_i/k)$ 为 K_i/k 的 Galois 群。对每个对 $(i,j)\in I\times I$，$i\leqslant j$，自然对应一个同态：

$$\tau_i^j:\mathrm{Gal}\,K_j/k\to\mathrm{Gal}\,K_i/k.$$

相应的投射有限群 $\lim_{\leftarrow}\mathrm{Gal}(K_i/k)$ 就同构于 $\mathrm{Gal}(K/k)$，因此 $\mathrm{Gal}(K/k)$ 可视为投射有限群。族 $\{\mathrm{Gal}(K_i/k)\}$，在 $\mathrm{Gal}(K/k)$ 内组成单位元素的一个邻域基 (见 **Galois 拓扑群** (Galois topological group))。这一结构在代数几何中当定义概形的基本群时得到了推广。

投射有限群可以刻画为紧的完全不连通群 (见**紧群** (compact group))，也可以刻画成为紧群但它以一开正规子群系作为单位元的邻域基。投射有限群的上同调论 (见**群的上同调** (cohomology of groups)；**Galois 上同调** (Galois cohomology)) 在近代 Galois 理论中起重要作用。

参考文献

[1] Serre, J. P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[2] Koch, H., Galoissche Theorie der p-Erweiterungen, Deutsch. Verlag Wissenschaft, 1970.

[3] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A., Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

В. Л. Попов 撰 李慧陵 译

程序 [program; программа]

要由执行者执行的动作的规划，执行者通常是一个自动装置，最常见的是一个计算机；**算法** (algorithm) 的一串指令。程序由命令 (command) (指令 (instruction)) 的有限集合组成，每条命令使执行者在数据上执行某种基本操作，数据存储在执行者的存储器里，它的名字是命令的参数。执行者的自动作用由下列事实完成：除了停止命令外，每条当前命令唯一地指出程序中在当前命令之后要执行的下一条命令。执行者的一个特征是包括分支命令 (branching command) (条件转移)，在检查命令中提到数据的性质的基础上，从几个指出的动作中选择一个。另一个特征是同时执行不同命令的可能性。这些特征导致这样的事实，使用程序时，在已经唯一地定义了数据后，命令

序列和它的长度可能是变化的．因此，像定理和它们的证明一样，程序体现数学规律的普遍性特性．

程序的数学抽象在**理论程序设计**（theoretical programming）中研究．程序不仅作为计算机的指示是重要的，而且作为人的操作知识的源泉也是重要的．因此为编写程序而创建的**算法语言**（algorithmic language）也有自然语言的通信功能特性．

为计算机开发程序，或者称为**程序设计**（programming），在计算机广泛应用的情况下已变成数学实践的巨大分支．

参考文献

[1] Ershov, A. P., *Human and aesthetic factors in programming*, *Cybernetics*, 8 (1972), 5, 809 − 813 (Kibernetika, **8** (1972), 5, 95 − 99).

[2] Турский, В., Методология программирования, М., 1981.

А. П. Ершов 撰 程 虎 译 刘椿年 校

程序最优化变换［program-optimizing transformations, программ оптимизирующие преобразования］

用一种中间形式表示的程序的受控变换，在编译（翻译或程序生成）时用于改进程序工作特性的目的．这些工作特性与被程序使用的计算机资源有关，主要的资源是执行时间和使用的存储量．

通常，程序最优化变换的每个应用改变程序片段的局部语义，但是保留整个程序的语义——结果程序或者是等价于初始程序，或者是对较大数据集的扩充．

人们可以区分依赖于机器的程序最优化变换（machine-dependent program-optimizing transformations）和通用的程序最优化变换（universal program-optimizing transformations）．前者是通过机器语言的特性或者其他具体计算机的具体特性定义的．后者（例如把从程序的开始就不可访问的操作符移去）仅由包括在算法初始描述中的语义定义，对一大类计算机是可应用的．

使用程序最优化变换改进机器程序的常用方法是从程序的执行过程中移去一些计算或对象，或者是以简单的计算代替复杂的计算（在计算复杂性的既定界限基础上）．这要求考虑程序的各语句和对象之间在这些过程中产生的控制、信息和频率关系．程序最优化变换的组成：必须借助于程序语句的局部语义搜索指示的类型的关系（称为程序的流程分析（flow analysis of the program）；检查收集的信息的某些性质（称为上下文条件（context condition））；和在这些条件满足的情况下变换程序的片段（由给定的程序最优化变换进行适当的变换）．

按照由独立于环境的程序最优化变换处理的程序部分（称为经济部分（economy part））的大小，把程序最优化变换分成局部的（local），全局的（global），和拟局部的（quasi-local），地带（zone）或小丘（hammock）．经济部分不大于一个语句者称为局部的；经济部分是整个程序者称为全局的；经济部分是有固定内部结构的片段者——例如射线（ray）（语句的线性序列），称为拟局部的，不包含其他地带的地带（程序控制流程图的非平凡强连通子图），不包含其他小丘或地带的小丘（正好在两个顶点——输入和输出与控制流程图的其他部分相连通的子图；输入顶点属于小丘，输出顶点不属于小丘）．

为了减少全局程序最优化变换的时间和体积的复杂性，人们常常使用因子分解（factorization）——用一系列半局部的变换代替全局变换，按它们的复杂性应用于程序片段．

仅对窄小的一类程序，例如线性程序类，可能构造程序最优化变换的有限完全集．因此，在现代编译程序中，对很大范围来说，一套程序优化变换是在启发式背景上构造，本质上是依赖于编译程序（翻译程序或程序生成程序）所要解决的一类问题．通常程序最优化变换的应用顺序的选择是重要的，因为，程序最优化变换集不是 Church-Rosser 系统，在那里结果不依赖于变换应用的次序．

用于编译程序（翻译程序）的程序最优化变换集对大多数广泛使用的面向问题的语言（见**面向问题的语言**（problem-oriented language）），诸如 **Algol 语言**（Algol）；**Fortran 语言**（Fortran）；**PL/Ⅰ语言**（PL/Ⅰ）已经得到充分的研究，能得到在质量上可与手工编程相比的机器程序．变换包括：移去有同样结果的重复计算，翻译时程序的部分执行，从程序中删去无用的对象和计算，用较简单的计算代替复合计算，减少同时存在的对象的总数，压缩程序的维数．

参考文献

[1] Aho, A. and Ullman, J., The theory of parsing, translation and compiling, 2, Prentice-Hall, 1973.

[2] Бабецкий, Г. И. и др., Альфа-система автоматизации программирования, Новосиб., 1967（英译本：Ershov, A. P. (ed.), The ALPHA automatic programming system, Acad. Press. 1971）.

[3] Касьянов, В. Н., Поттосин, И. В., Технология трансляции, Новосиб., 1979.

[4] Kas'yanov, V. N., Optimizing program transformations, Moscow, 1988（俄文）.

В. Н. Касьянов 撰 程 虎 译 刘椿年 校

程序模式［program scheme；программы схема］

通过从下述两方面抽象由程序（program）得到的形式构造对象：一方面是当写出该程序时使用的形式

程序设计语言的字典特色，另一方面是程序中使用的基本动作和对象的含义．程序模式用于**理论程序设计**（theoretical programming）．

A．П Ершов 撰 程 虎 译 刘椿年 校

程序设计 [programming；программирование]

1）设计程序（program）即规划动作的过程．

2）研究设计程序的方法和手段的学科．作为一个学科，程序设计以很大的任意性分成**理论程序设计**（theoretical programming），系统程序设计（system programming）和应用程序设计（applied programming）．理论程序设计研究程序的数学抽象和构造它们的方法．系统程序设计从事计算机**软件**（software）的开发工作，即大规模或长期使用的程序复合体的开发．应用程序设计着眼于计算机各种各样的具体应用．

设计程序是一种创造性的活动，因为为了试图用某种方法达到一个哪怕是清楚地勾画出的目的，一般地，要求发展或涉及新知识．在某些特殊情况，可能发现更系统的或形式的程序设计过程．例如如果程序设计任务已经公式化为一个算法，程序设计就简化为**翻译**，把写算法的语言，或**算法语言**（algorithm language）翻译成能直接被计算机接受的语言．对某些数学模型，这个翻译问题已经彻底地解决．例如如果问题公式化为一个存在性定理，

$$\forall x \exists ! y P(x, y),$$

其中 $P(x, y)$ 是受限谓词演算中的一个公式，则从构造性逻辑中该定理的证明，人们能有效地推断出函数 $\varphi(x)$ 的递归描述

$$\forall x P(x, \varphi(x))$$

（Kleene-Nelson 定理（Kleene-Nelson theorem））．翻译算法描述为程序，以及用系统的方法从问题的条件和附加信息导出程序的努力形成**自动程序设计**（automatic programming）的主题，它的特殊情况是**程序的翻译**（translation of programs）．

程序设计方法把专门的注意放在需要编程的问题的初始规约的描述，因为规约中包含的信息的灵巧使用能给程序设计以更可靠的特性．程序设计的一个重要方面是关心清晰的程序结构，促进程序正确性的验证，最重要的是程序片段的抽取和分离，这些片段的细节方面的进一步精心制作要求援引新知识．

从问题的规约到程序的转移方法的概念由下列程序设计例子给出，即求 x 的 n 次方问题．

初始知识：$x^1 = x, x^{n+m} = x^n \cdot x^m, x^{nm} = (x^n)^m$．发现这些关系允许人们将问题 x^n 的解简化为较简单的一些问题（即以较小的 n），人们企图用简单形式（一个创造性的步骤）说明初始知识：

$$x^0 = 1, x^{n+1} = x^n \cdot x, x^{2n} = (x^n)^2.$$

通过分析，发现第三个关系比第二个更有效，但并不是永远可用的．为了给予与第三个关系互补的情况（一个创造性的步骤），人们重写第二个关系，得到

$$x^0 = 1, x^{2n+1} = x^{2n} \cdot x, x^{2n} = (x^n)^2.$$

通过使用函数 $n \mapsto 2n$ 和 $n \mapsto n+1$ 的可逆性和关系的逻辑不相容性，人们用分情形（形式步骤）方法得到一个递归关系：

$$x^n = 若 \begin{cases} n = 0, 则 1; \\ n 偶数, 则 (x^{n/2})^2; \\ n 奇数, 则 x \cdot x^{n-1}. \end{cases}$$

还需要用某个算法语言，例如 Algol-60（形式步骤）重写这个规则：

```
real procedure power (x, n), real x, integer n;
power := if n = 0 then 1 else
if even(n) then power (x, n/2) ↑ 2 else
x × power (x, n − 1).
```

检查奇偶性的过程 even(n) 的制定是分开的，更特殊的程序设计问题．

程序设计的一个重要部分是检查程序的正确性．保证正确性的一种方法是用类似于定理证明的形式说明程序设计的过程，即形成程序的每一步时能结合推理，用程序初始知识和在这一步使用的附加信息确认这一步的一致性．用这个方法产生的形式演绎系统也在**理论程序设计**（theoretical programming）中研究．检查已经编译的程序的正确性的附加的方法是系统的执行（systematic execution），即在计算机上系统的测试，并把由程序生成的结果与期望的结果进行比较．虽然实际上系统执行是检查程序的最重要的方法，但理论上它不能穷举，因为通过测试有限系统建立程序正确性只能对很窄的一类问题实现（见**自动机理论**（automata, theory of）．

参考文献

[1] Любимский, Э. З., Мартынюк, В. В., Трифонов, Н. П., Программирование, М., 1980

[2] Dijkstra, E. W., A discipline of programming, Prentice-Hall, 1976.

[3] Meyer, B. and Baudoin, C., Méthodes de programmation, 1-2, Eyrolles, 1978.

A．П．Ершов 撰 程 虎 译 刘椿年 校

程序设计语言 [programming language；программиро-

вания язык]

用于人类和计算机通信的形式符号系统．在求解计算问题或控制执行程序时，计算机及其**软件**(software)以复杂的方式运作，通常与人类的智力活动有关．正是这种功能的相似性反映了有生命的机体和自动装置中信息处理的控制论规律的普遍性，这就允许人们谈论：计算机的语言，能理解给予其信息的机器，人和计算机之间的通信．

程序设计语言的基本功用是作为**程序设计**(programming)，即描述能在计算机上执行的程序的手段．一个计算机的合理程序，是反映外部世界某一规律性的可操作和提供信息的特殊模型．其中程序以一种明确的和可再现的形式固定这个规律性．程序设计在文档方面也使程序设计语言成为人类之间进行专业通信的重要工具．

最广泛传播的一类程序设计语言是**算法语言**(algorithmic language)，用这种语言可以描述在计算机上解题的算法．通常，程序设计语言具有通用的特性，允许人们描述在不同计算机上解决各种问题的算法．为了更方便地表示十分特殊的一类问题，人们创造了**面向问题的语言**(problem-oriented language)，为了更全面地利用计算机的全部功能，人们创造了**面向机器的语言**(machine-oriented language)．**Algol 语言**(Algol)；**Fortran 语言**(Fortran)；**Cobol 语言**(Cobol)；**PL/I 语言**(PL/I)和 **Algol-68 语言**(Algol-68)是 70 年代广泛流行的语言．**Lisp 语言**(Lisp)；**Simula 语言**(Simula)和 **Snobol 语言**(Snobol)是更专门的语言．**Al'fa 语言**(Al'fa)和 **Refal 语言**(Refal)是曾在苏联广泛流行的语言．

参考文献

[1] Криницкий, Н. Л., Миронов, Г. Л., Фролов, Т. Д., Программирование и алгоритмические языки, 2 изд., М., 1979.

[2] Pratt, T., Programming languages: design and implementation, Prentice-Hall, 1975.

A. П. Ершов 撰

【补注】 广泛传播使用的其他程序设计语言是：Pascal，C，Modula II，Prolog．

参考文献

[A1] Tennent, R. D., Principles of programming languages, Prentice Hall, 1981.

[A2] Henson, M. C., Elements of functional languages, Blackwell, 1987.

[A3] King, K. N., Modula-2, Heath, 1988.

[A4] Kerninghan, B. W. and Ritchie, D. M., The C programming language, Prentice Hall, 1988.

[A5] Condillac, M., Prolog, Dunod, 1986.

[A6] Findlay, W. and Watt, D. A., Pascal, Pitman, 1981.

【译注】 现在又有 C++、Ada 和 Java 等．

程 虎 译 刘椿年 校

数列[**progression**；**прогрессия**]

见**等差数列**(arithmetic progression)；**等比数列**(geometric progression)．

项目管理和进度安排的数学理论[**project management and scheduling, mathematical theory of**]

【补注】 求解一类特殊的**数学规划**(mathematical programming)问题的数学描述和方法，这类问题可陈述为图和网络上的最优资源配置问题．

基本术语．一个项目(project)是一个相互关联的任务或运作的集合．为达到某个目标，这些任务或运作必须按一定的次序来执行．事件(event)是项目中的各种运作的起点和终点．

项目的运作是通过两种类型的优先关系(precedence relation)来相互关联的：不前(NOT BEFORE)和不后(NOT LATER)．设 $E=\{1,\cdots,n\}$ 是给定的项目的事件集，t_i 是事件 i 发生的(未知)时刻，$i\in E$．不前关系表示某个运作在某个另外的运作已经开始(和/或结束)后，不在 $a(i,j)$ 以前开始(和/或结束)，这里 $a(i,j)$ 是给定的时间单位量，即：$t_j-t_i\geqslant a(i,j),(i,j)\in V\subset E\times E$．

不后关系表示某个运作在某个另外的运作将开始(结束)前，不在给定的时间量 $b(i,j)$ 以后开始(或同样可能是结束)，即：$t_j-t_i\leqslant b(i,j),(i,j)\in V\subset E\times E$．

项目表达的传统图形式之一是定向图或网络，其中弧被看作项目运作，而节点被看作事件(见**网络模型**(network model))．为了确切表达运作间的优先关系，图也包含一些附加弧．

有节点集 E 和弧集 $\mathscr{A}$ 的合成图 $G=(E,\mathscr{A})$ 称为项目评估技术(亦称计划评审法)(Project Evalution and Review Technique, PERT)或关键路线法(Critical Path Method, CPM)网络(network)([A1]，[A2])．

问题的提出．项目管理和进度安排的数学理论看来是从下列问题的求解开始的([A2])．

问题 1(非循环网络中的关键路线问题)．

设 $G=(E,\mathscr{A})$ 是表达一个项目的具有节点集 E 和弧集 $\mathscr{A}$ 的项目评估技术网络．对于某条弧 $(i,j)\in\mathscr{A}$，假设存在给定的对应项目运作方向的 $d(i,j)$ 为其非负长度．给定两个固定节点，起始为 s，结束为 f，问题是求从 s 到 f 的最短定向路线(所谓"关键路线")．关键路线确定了由 G 描述的整个项目可以完成的最短可能的时间．

项目评估技术网络不一定是非循环的．能有效的解决问题 1 的**动态规划**(dynamic programming)技巧

也能成功地解决下列有循环的网络问题（[A3]、[A4]）.

问题 2（一般网络中的项目评估技术 - 时间问题）.

设 $P=(E,V)$ 为具有事件集 E 和运作集 V 的项目：其中有两种优先关系：不前和不后，被加到 P 的运作中：

$$a(i,j)\leqslant t_j-t_i\leqslant b(i,j),(i,j)\in V\subset E\times E. \quad (A1)$$

对应项目 P 的项目评估技术网络 G 构造如下：它的节点集恒同于 P 的事件集，它的弧集定义为 $V\cup V'$，其中

$$V'=\{(j,i):(i,j)\in V\}.$$

且其弧长 $l(i,j)$ 定义如下：

$$l(i,j)=\begin{cases} a(i,j), & \text{如果 } (i,j)\in V, \\ -b(j,i), & \text{如果 } (i,j)\in V'. \end{cases}$$

给定两个固定节点，起始为 s，结束为 f，问题为求项目 P 可能完成的最短时间（它等于求从 s 到 f 的最短路线的长度）. 项目管理和进度安排问题的更为意味深长的陈述还考虑运作的费用（[A5]，[A6]）.

问题 3（非循环网络中的项目评估技术 - 费用问题）.

设 P 为具有事件集 E 和运作集 V 的项目. 只有一种优先关系：不前被加到这个模型中的运作中. 对应的项目评估技术网络假定是非循环的.

与每个运作 $(i,j)\in V$ 相联系的是它的"正常"完成时间 $p(i,j)$，"干脆"完成时间 $q(i,j)$ 和使运作缩短单位时间的费用 $c(i,j)$. 以 $t(i,j)$ 表示运作 (i,j) 的实际（未知）持续时间，这一量在 $q(i,j)$ 和 $p(i,j)$ 之间，$(i,j)\in V$，而运作 (i,j) 的费用为 $c(i,j)(p(i,j)-t(i,j))$. 问题是求使项目的完成时间缩短为给定的持续时间 T 的最少费用.

问题 4（参数项目评估技术 - 费用问题）（[A5]，[A6]）.

除了整个项目的最少费用是对每个可行项目持续时间来确定的以外，这是与问题 3 一样的问题.

问题 5（一般网络中的恰当时间项目评估技术 - 费用问题）（[A7]）.

这是问题 3 的推广. 设 $P=(E,V)$ 是具有不前和不后两种优先关系的项目，这两种关系同样用问题 2 的（A1）来刻画. 尤其是，约束（A1）可以用来要求某些决定性的事件在恰当时间发生.

对应的项目评估技术网络可以有任意符号的弧长，也可以包含一些循环（它们必须有非正总长度）.

设事件集 E 为 $\{1,\cdots,n\}$. 假定问题的目标 $\varphi(t_1,\cdots,t_n)$ 是时间位移 t_j-t_i 的分段线性的非单调凸函数 Φ_{ij} 之和，$(i,j)\in V$，它代表对于项目运作作为起始/结束太早或太晚而引起的惩罚.

问题是使 $\Phi(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{(i,j)\in V}\Phi_{ij}(t_j-t_i)$ 在网络约束（A1）下极小化.

尽管问题 1－5 如同若干其他项目管理和进度安排问题那样，可以以多项式的计算步数有效地解决（见，例如，[A1]－[A10]），许多另一些项目管理和进度安排问题已被证明为属于令人头痛的 $\mathcal{NP}$ 硬问题类，它们在所有组合最优化问题中最为困难（[A11]）. 考虑两个典型的后一类的项目管理和进度安排问题.

问题 6（资源受约束的项目评估技术 - 时间问题（[A9]）.

设 $P=(E,V)$ 为如同问题 1，3 所描述的项目. 假设 k 种资源类型被要求执行运作，而每种运作只要求一种类型的资源，并且其按时间单位的消耗强度已知. 运作的持续时间也已知. 怎样分派给定的资源供应，使得整个项目的完成时间最少（给定的优先关系也需考虑）?

问题 7（资源受约束的项目评估技术 - 费用问题）（[A12]）.

设 $P=(E,V)$ 为如同问题 2，5 所描述的项目. 假设 k 种资源类型被要求执行运作，且对于每种运作 $(i,j)\in V$，已知有一个其执行的"可行方案"的有限集，每一种方案有其自己所要求的资源和运作持续值 $d(i,j)$. 需要同样的资源类型的两种运作是不允许同时发生的.

对于每个运作 $(i,j)\in V$，给定其最早起始时间和最晚结束时间以及当运作的起始（结束）太早（太晚）时所引起的惩罚.

怎样执行每种运作 $(i,j)\in V$ 的方案和选取其起始和结束时间，使得项目的总费用（等于所引起的惩罚之和）最少?

项目管理和进度安排的数学方法. 项目管理和进度安排的最著名的方法之一是动态规划（dynamic programming）. 当它的改进，Bellman - Ford 逐次逼近法（[A10]）被应用于项目管理和进度安排时，问题 1 以 $O(n^2)$ 的时间被解决，问题 2 以 $O(nm)$ 的时间被解决，其中 n 为节点个数，m 为对应的项目评估技术网络的弧数. 另一求解项目管理和进度安排的重要方法是网络流方法. D. R. Fulkerson（[A5]）和 J. E. Kelley（[A6]）使用问题 3 的线性规划结构，发现问题 3 是求网络中的最少费用流问题的对偶问题. 已知 Edmonds - Karp - Dinic 算法以多项式有界的计算步数解决后一问题（[A10]）. 后一事实蕴含解问题 3 和 4 的多项式程序的存在. 推广 Fulkerson - Kelley 方法来应用于问题 5 是可能的，它导致它的多项式有界的解（[A7]）.

至于项目管理和进度安排的 $\mathcal{NP}$ 硬问题（诸如问

题 6,7) 的数值求解. 它们没有多项式计算时间的解. 对于求解项目管理和进度安排, 近 30 年来所建议的众多的数值方法 (松弛法、分支定界法、局部最优化法、启发式法等等) 都极力避免在实际计算中, 而不是在最坏的情况下, 进行完全 (指数增长) 计数. 这里中心理论问题正如在一般情况下的**整数规划** (integer programming) 中那样, 为是否存在多项式有界的 (精确) 求解算法. 至今这个问题还是开的.

实际求解项目管理和进度安排的 ……硬问题的最有前途的现代方法是把意味深长的优化程序"嵌入"到决策支持系统或专家系统的外壳中去 ([A12]).

参考文献

[A1] Malcolm, D. G. Rosenboom, J. H., Clark, C. E. and Fazar, W., Applications of a technique for research and development program evaluation, *Operations Research*, 7 (1959), 5, 646 - 669.

[A2] Kelley, J. E., Jr. and Walker, M. R., Critical path planning and scheduling, in Proc. Eastern Joint Computer Conference, Boston, 1959.

[A3] Roy, B., Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnancement, Dunod, 1962.

[A4] Adel'son, G. M., On some aspects of project management, in A. A. Fridman (ed.): Studies in Discrete Mathematics, Moscow, 1973, 103 - 134 (俄文).

[A5] Fulkerson, D. R., A network flow computation for project cost curves, *Manag. Sci.*, 7 (1961), 161 - 178.

[A6] Kelley, J. E. Jr., Critical path planning and scheduling. Mathematical basis, *Operations Research*, 9 (1961), 296 - 320.

[A7] Levner, E. V. and Nemirovsky, A. S., A network flow algorithm for just-in-time project scheduling, in Proc. Sem. Project Management and Scheduling, Compiegne, 1990.

[A8] Ford, L. R., Jr. and Fulkerson, D. R., Flows in networks, Princeton Univ. Press, 1962.

[A9] Moder, J. J. and Phillips, C. R., Project management with CPM and PERT, v. Nostrand Reinhold, 1970.

[A10] Lawler, E. L., Combinatorial optimization: networks and matroids, Holt, Rinehart & Winston, 1976.

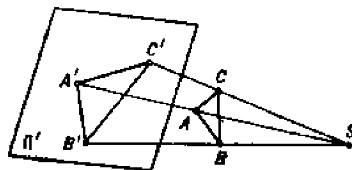
[A11] Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. H. G. and Shmoys, D. B., Sequencing and scheduling: algorithms and complexity, Report BS-R8909, CWI, Amsterdam, 1989.

[A12] Antonisse, J. M., Hee, K. M. van and Lenstra, J. K., Exercise-constrained project scheduling: an international exercise in DSS development, in A. Lewandowski (ed.): Internat. Comparative Study in DSS. IIASA, Laxenburg, 1988.

E. V. Levner 撰 史树中 译

投影 [projection; проекция]

有关投影 (projecting) 运算的一个术语, 可定义如下 (见图): 在空间里选定任意一点 S 作为投影中心 (centre of projection) 以及一个不通过 S 的平面 Π' 作为投影平面 (plane of projection). 为了通过中心 S 把空间的一点 A (原象 (pre-image)) 投射到平面 Π' 上, 作直线 SA 直到它与平面 Π' 的交点 A'. 点 A' (象 (image)) 称为 A 的投影 (projection). 一个图形 F 的投影定义为它所有点的投影的集合.



上面描述的投影称为中心的 (central) (或锥形的 (conical)). 中心在无穷远处的投影称为平行的 (parallel) (或柱面的 (cylindrical)). 进一步, 如果投影平面垂直于投影方向, 那么这种投影称为正交的 (orthogonal).

平行投影在**画法几何学** (descriptive geometry) 里被广泛应用, 以求得到各种不同类型的象 (例如见**轴侧投影法** (axonometry); **透视** (perspective)). 还有到平面, 球面与其他曲面上的一些特殊形式的投影 (例如见**制图投影** (cartographic projection); **球极平面投影** (stereographic projection)).

А. Б. Иванов 撰

【补注】 在几何学与线性代数里人们也遇到平行于一个子空间的投影 (projections parallel to a subspace). 例如, 如果 X 是一个向量空间, V 是一个子空间且 W 是一个补子空间 (即 $V \cap W = \{0\}$ 且 $X = V + W$), 那么从 X 到 V 上的平行于 W 的投影 P 是将 $x = v + w (v \in V,\ w \in W)$ 映为 v 的线性映射. 算子 P 满足 $P^2 = P$, 并且每个这样的算子来自一个分解 $X = V \oplus W$, 其中 $V = P(X)$, $W = (I - P)(X)$.

Hilbert 空间 H 到一个闭子空间 F 的正交投影 (orthogonal projection) 将 $x \in H$ 对应于 F 的唯一元素 y, 使得 $x - y$ 与 F 是正交的. 它是沿着正交补 (orthogonal complement) $F^{\perp} = \{x \in H: \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in F\}$ 到 F 上的平行投影. 元素 y 是 F 中的对 x 的最佳逼近元素. 在这种情况下对应算子 P 也是自伴的, 并且反之使得 $P^2 = P$ 的自伴算子 P 是正交投影. 亦见**投影算子** (projector).

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, I, Springer, 1987, Sect. 2.4.9.6 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一一五卷, 科学出版社, 1987 - 1991).

[A2] Birman, M. S. and Solomyak, M. Z., Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space,

Reidel, 1987(译自俄文).

[A3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, 1, Wiley, 1988.

林向岩 译

投影法[projection methods; проекционные методы]

求算子方程在一指定子空间中近似解的方法，基于把方程投影到某（一般地说，不同的）子空间上．投影法构成了解边界问题的各种计算方案的基础，包括有限元法和配置法（见 **Галеркин 法**（Galerkin method）；**配置法**（collocation method））．

设 L 是具有 Banach 空间 X 中定义域 $D(L)$ 和 Banach 空间 Y 中值域 $R(L)$ 的算子．为了用投影法解方程

$$Lx = y, \tag{1}$$

取两个子空间序列 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$

$$X_n \subset D(L) \subset X,\ Y_n \subset Y,\ n = 1, 2, \cdots,$$

且取把 Y 投影到 Y_n 上的投影算子 P_n．方程(1)用近似方程

$$P_n L x_n = P_n y,\ x_n \in X_n \tag{2}$$

代替．在 $X = Y$，$X_n = Y_n$，$n = 1, 2, \cdots$，的情形，投影法(2)通常称为 Галеркин 法（有时后面的方法在更广的意义上来理解，见 **Галеркин 法**）．

对线性方程的投影法有一个收敛定理（convergence theorem）成立（在有限维子空间 X_n 和 Y_n 的情形）．假设 L 是线性的且一一对应地把 $D(L)$ 映到 $R(L)$ 上，且 $D(L)$ 和 $R(L)$ 分别在 X 和 Y 中稠密．设子空间 X_n 和 Y_n 是有限维的，$\dim X_n = \dim Y_n$，$n = 1, 2, \cdots$，且投影算子 P_n 对 n 一致有界，即 $\|P_n\| \leqslant$ 常数，$n = 1, 2, \cdots$．则以下条件 a) 等价于联合的条件 b) 和 c)．

a) 从某个 $n = n_0$ 以后存在(2)的唯一解 x_n，且 $\|Lx_n - y\| \to 0$ 对任意 $y \in Y$；

b) 子空间序列 LX_n 按极限在 Y 中稠密，即对每个 $y \in Y$，距离 $d(y, LX_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$；

c) $\tau \equiv \lim_{n\to\infty} \tau_n > 0$，其中 $\tau_n = \inf\{\|P_n y_n\|: y_n \in LX_n, \|y_n\| = 1\}$．

在条件 b) 和 c) 下收敛速率由不等式

$$d(y, LX_n) \leqslant \|Lx_n - y\| < \left[1 + \frac{c}{\tau_n}\right] d(y, LX_n) \tag{3}$$

刻画．如果 X 和 Y 是 Hilbert 空间且 P_n 和 Q_n 分别是把 Y 投影到 Y_n 和 LX_n 上的正交投影算子，则条件 c) 等价于条件

c′) $\theta \equiv \overline{\lim}_{n\to\infty} \theta_n < 1$，其中 $\theta_n = \|P_n - Q_n\|$ 是子空间 Y_n 和 LX_n 之间的空隙（角）；取代(3)得到估计式

$$\|y - Q_n y\| \leqslant \|Lx_n - y\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - \theta_n^2}} \|y - Q_n y\|$$

在 $Y_n = LX_n$ 的情形（最小二乘法）有 $\theta_n = 0$，$n = 1, 2, \cdots$，且收敛准则就是条件 b)．

这个定理引出了关于偏差 $\|Lx_n - y\|$ 收敛性的一个条件．如果 L^{-1} 是有界的且 $y \in R(L)$，则偏差的收敛性推出逼近解 x_n 本身收敛于方程(1)的解 $x = L^{-1}y$．从这定理可引伸出 Галеркин 法的一个收敛准则；对 Галеркин-Петров 法应加上一个 c′) 型的附加条件．

设 l 是实 Hilbert 空间 H 上的一个有界线性型且 a 是 H 上双线性型（或在复 H 情形下的半双线性型）．假设 a 可表示为 $a = \dot{a} + b$，使得

$$\dot{a}(u, u) \geqslant \gamma \|u\|^2\ \forall\ u \in H,\ \dot{\gamma} = \text{常数} > 0,$$

而双线性型 b 是完全连续的，即 H 中的弱收敛性 $u_n \to u$，$v_n \to v$ 蕴涵收敛性 $b(u_n, v_n) \to b(u, v)$（型 a，$\dot{a}$，b 不一定对称）．假设提出以下问题：求 $u \in H$ 使得

$$a(u, v) = l(v)\ \forall\ v \in H. \tag{4}$$

解(4)的 Галеркин 法构成如下．选取（闭）子空间 $H_n \subset H$，$n = 1, 2, \cdots$，且求 $u_n \in H_n$ 使得

$$a(u_n, v_n) = l(v_n)\ \forall\ v_n \in H_n. \tag{5}$$

下面的定理成立：设 $\{H_n\}$ 按极限在 H 中稠密，上面加在 a 上的条件满足且问题(4)有唯一解 $u \in H$（一个等价条件是：从条件 $a(u, v) = 0$ 对每个 $v \in H$ 求 u 的齐次问题只有平凡解 $u = 0$）；则问题(5)对充分大的 n 有唯一解 $u_n \in H_n$，且 $\|u_n - u\| \to 0$，同时有估计

$$\|u - Q_n u\| \leqslant \|u_n - u\| \leqslant c\|u - Q_n u\|,$$

其中 Q_n 是把 H 投影到 H_n 上的正交投影算子且 $c =$ 常数．

当应用于椭圆型方程的边值问题时，通常对应的微分算子的主部的能量空间选作 H．

参考文献

[1] Красносельский, М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969（英译本：Krasnosel'skiĭ, M. A. et al., Approximate solution of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1972）.

Г. М. Вайникко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fletcher, C. A. J., Computational Galerkin meth-

eds., Springer, 1984　　　葛显良 译　鲁世杰 校

投射谱 [**projection spectrum**; **проекционный спектр**]

以**有向集** (directed set)$(A, >)$ 为指标的一族**单纯复形** (simplicial complex)$\{N_\alpha: \alpha\in A\}$, 使得对每一对指标 $\alpha, \alpha'\in A$, $\alpha'>\alpha$, 定义一个复形 $N_{\alpha'}$ 到复形 N_α 的单纯映射 (投射) $\pi_\alpha^{\alpha'}$. 还要求当 $\alpha''>\alpha'>\alpha$ 时 $\pi_\alpha^{\alpha''}=\pi_\alpha^{\alpha'}\pi_{\alpha'}^{\alpha''}$ (传递性条件). 这时就说, 给定了一个投射谱 (projection spectrum) $S=\{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}, A\}$, 简记为 $S=\{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$. 这个概念属于 П. С. Александров (见 [2]); 它实质上等价于逆系统(inverse system) 或逆谱 (inverse spectrum) 的一般概念 (见**系统** (**范畴中的**) (system (in a category))). 事实上, 每个复形 N_α 都自然地导致该复形的偏序单形集, 因而导致 T_0 拓扑空间 N_α. 因此, 投射 $\pi_\alpha^{\alpha'}$ 成为连续映射. 反之, 若 $\{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ 是 T_0 拓扑空间和连续投射 $\pi_\alpha^{\alpha'}$ 的逆系统, 则每个 T_0 空间 N_α 自然地成为一个偏序集, 且该偏序集以单纯复形 N_α 的形式实现. 这里, 连续投射 $\pi_\alpha^{\alpha'}$ 成为单纯映射.

"投射谱"的概念 (因而, 空间的逆系的概念) 和集系的神经 (nerve of a system of set) (见下文) 的概念, 对拓扑学的发展是有影响的. 在引入了上述概念后, 才有可能论及用较简单的对象来逼近复杂的拓扑的和代数拓扑的对象的理论.

若对每个 $\alpha\in A$, 复形 N_α 是有限的, 则称谱 $S=\{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ 为有限投射谱 (finite projection spectrum). 下列诸概念与每个投射谱 $S=\{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ 有关. 从谱 S 的每个复形 N_α 中取一个单形构成的集合 $\xi=\{t_\alpha: \alpha\in A\}$, 如果对 $\alpha'>\alpha$, t_α, $t_{\alpha'}\in\xi$, 总有 $\pi_\alpha^{\alpha'}t_{\alpha'}=t_\alpha$, 则称 ξ 为谱 S 的脉络 (thread). 具有下列拓扑的所有脉络的集合 $\overline{S}$ 称为谱 S 的完全极限 (complete limit of the spectrum): 拓扑的基由形为 $Ot_{\alpha_0}=\{\xi'\in S: t'_{\alpha_0}\leq t_{\alpha_0}\}$ 的集合组成, 这里 $\alpha_0\in A$, $t_{\alpha_0}\in N_{\alpha_0}$ 是任意的, 而 $t'_{\alpha_0}<t_{\alpha_0}$ 表示复形 N_{α_0} 的脉络 ξ' 的单形 t'_{α_0} 是单形 t_{α_0} 的一个面. 在 $\overline{S}$ 上赋予 Тихонов 乘积 $\prod\{\nu_\alpha: \alpha\in A\}$ 的拓扑, 便得到同上面一样的拓扑, 这里 ν_α 是对应于复形 N_α 的 T_0 拓扑空间. 脉络 $\xi'=\{t'_\alpha\}$ 是环绕脉络 $\xi=\{t_\alpha\}$ 的, 如果对所有 $\alpha\in A$ 均有 $t'_\alpha\geq t_\alpha$. 脉络 ξ 称为极大的 (maximal) (相应地, 极小的 (minimal)), 如果不存在与 ξ 不同而又环绕 ξ 的脉络 (相应地, 被 ξ 环绕). 由所有极大 (极小) 脉络组成的谱 S 的完全极限空间 $\overline{S}$ 的子空间, 称为谱 S 的上 (下) 极限 (upper (lower) limit of the spectrum). 完全极限 $\overline{S}$ 是半正则 T_0 空间, 它的上极限 $\hat{S}$ 和下极限 $\check{S}$ 都是 T_1 空间. 若 S 是有限投射谱, 则 $\overline{S}$, $\hat{S}$ 和 $\check{S}$ 都是紧空间.

用多面体 (更确切地说, 用单纯复形) 来逼近拓扑空间的整个理论的基础, 是 Александров 引入的集系的神经的概念 (见 [1]). 给定集系 α 的神经 (nerve) 定义为单纯复形 N_α, 其顶点与系 α 的元素一一对应, 顶点的集合确定了复形 N_α 的一个单纯形, 当且仅当系 α 的对应于这些顶点的集合具有非空交.

更方便的是考虑所谓空间 X 的典范覆盖. 空间 X 的局部有限 (有限) 覆盖 α 称为典范的 (canonical), 如果它的诸元素是内部互不相交的 (闭) **典范集** (canonical set)(另一个术语是正则闭集). 对于空间 X 的两个典范覆盖 α', α, 若 α' 在 α 之后, 即若 α' 是 α 的加细 (这时 $\alpha'>\alpha$), 则神经 $N_{\alpha'}$ 到神经 N_α 上的自然单纯映射 $\pi_\alpha^{\alpha'}$ (投射) 被定义; 定义方式是, 使 α' 的每个元素 $A^{\alpha'}$ 对应于 α 的唯一元素 A^α, $A^\alpha\supset A^{\alpha'}$. 设 $\mathfrak{A}(X)$ (相应地, $\mathfrak{A}_0(X)$) 表示空间 X 的所有局部有限 (有限) 典范覆盖的集合. 对每个 $\alpha\in\mathfrak{A}(X)$ (相应地, $\alpha\in\mathfrak{A}_0(X)$), 考察 α 的神经 N_α. 若 $\alpha'>\alpha$, 则定义了一个单纯映射 $\pi_\alpha^{\alpha'}: N_{\alpha'}\to N_\alpha$. 这样得到的投射谱 $S=\{N_\alpha, \pi_\alpha^{\alpha'}\}$ 称为拓扑空间 X 的完全 (相应地, 有限) 投射谱 (complete (finite) projection spectrum). 1928 年 Александров ([2]) 证明, 每个 (n 维) 度量紧空间都是在一个可数指标集上的 (n 维) 有限投射谱的上极限. 1934 年 А. Г. Курош 证明, 每个紧统都是它的有限投射谱的上极限. 1961 年 В. И. Пономарев 证明, 每个仿紧统都是它的完全投射谱的上极限, 即这个谱是在空间 X 的所有局部有限典范覆盖的集合 $\mathfrak{A}(X)$ 上构造的. Пономарев 引进了单纯复形 K 的松弛 (relaxation) 的概念, 所谓松弛, 是指包含复形 K 的所有顶点的任一闭子复形 $K'\subset K$. 由复形 K 的所有顶点组成的零维复形称为全松弛 (total relaxation) (或骨架 (skeleton)). 把已给投射谱的所有复形换为它们的 (全) 松弛, 且投射保持, 则得到谱的 (全) 松弛. 于是, 对仿紧统的不可约完满映射的研究化为对它的完全投射谱的松弛的研究. 这里, 仿紧统 X 的完全投射谱的全松弛的极限称为 X 的**绝对形** (absolute) $\dot{X}$, 任一正则空间的有限投射谱的全松弛的极限, 是该正则空间的绝对形 $\dot{X}$ 的 Stone-Čech 紧化 $\beta\dot{X}$. 每个有限抽象投射谱, 都等价于在某半正则紧 T_0 空间的有限典范覆盖的有向加细集上的谱, 即前者是后者经有限多次下列运算而得到的: 1) 把一个谱换成它的同构谱; 2) 把一个谱换成它的共尾部分; 3) 把一个谱换成它含该谱作为其共尾部分的谱 (Зайцев 定理 (Zaitsev theorem)).

神经和投射谱的概念提供了把一般空间 (首先是仿紧统、紧统和度量紧统) 的诸性质化为复形及其单纯映射之性质的方法. 这使我们不仅能够定义和研究多面体的同调不变量和上同调不变量, 也能定义和研究一般空间的那些量 (见 **Александров-Čech 同调与**

上同调 (Aleksandrov - Čech homology and cohomology); 谱同调 (spectral homology)). 所有这些, 导致把几何思想和集合论的思想融入拓扑学中.

参考文献

[1] Aleksandrov, P. S., Une définition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque, *C. R. Acad Sci. Paris*, **184** (1927), 317 319.

[2] Aleksandrov, P. S., Untersuchungen uber Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, *Ann of Math.*, **30** (1929), 101 – 187.

[3] Александров, П. С., 《Успехи матем. наук》, **2** (1947), 1, 5 – 57.

[4] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[5] Александров, П. С., Пономарёв, В. И., General Topology and Its relations to modern analysis and algebra, Vol. 2, Prague, 1967, 25 30.

[6] Александров, П. С., Федорчук, В. В., 《Успехи матем. наук》, **33** (1978), 3, 3 – 48.

[7] Пономарев, В. И., 《Матем сборник》, **60** (1963), 1, 89 – 119.

[8] Зайцев, В. И. 《Труды Моск. матем. об-ва》, **27** (1972), 129 – 193.

В. И. Пономарев 撰

【补注】 在西方, 投射谱的概念作为逆系的极重要概念的第一种提法, 普遍地被认为具有重要的历史价值. 例如, 描述空间的逆系的完全极限的抽象同调论的基本连续公理 (见 **Steenrod - Eilenberg 公理** (Steenrod - Eilenberg axioms)). 正如前面指出的, 在用适当的覆盖神经来表示一个空间时, 选择上极限是成功的, 但它不适用于与其他拓扑结构的结合.

1950 年至 1960 年间, 多位拓扑学家 (主要有 S. Mardešić ([A2]) 和 Б. А. Пасынков ([A5])) 发现了关于把 n 维空间表示为 n 维多面体系的逆极限的某些意想不到的特性. 此工作的关键点作为 Mardešić 定理 (Mardešić theorem) 发表. 每个 n 维覆盖的紧 Hausdorff 空间都是 n 维有限多面体的逆极限之一. 最近, Mardešić 和他的同事们用近似逆极限 (approximate inverse limit) 的概念成功地阐明了某些重要的特性. 一个逆系的近似逆极限与它的完全极限一致; 此外, 也用近似逆系的提法. 见 [A3], [A4].

参考文献

[A1] Eilenberg, S. and Steenrod, N., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1966.

[A2] Mardešić, S., On covering dimension and inverse limits of compact spaces, Ⅲ, *Illinois J. Math.*, **4** (1960), 278 – 291.

[A3] Mardešić, S. and Rubin, L., Approximate inverse systems of compacta and covering dimension, *Pacific J. Math.*, **138** (1989), 129 – 144.

[A4] Mardešić, S. and Segal, J., Stability of almost commutative inverse Systems for compacta, *Topology Appl.*, **31** (1989), 285 – 299.

[A5] Pasynkov, B. A., On spectra and dimension of topological spaces, *Mat Sb.*, **57** (**99**) (1962) 449 – 476 (俄文).

白苏华 胡师度 译

射影代数 [**projective algebra**; **проективная алгебра**], 在狭义意义下的

射影直线上的点的一种代数; 为位于满足 **Desargues 假定** (Desargues assumption) 的平面 π 上的射影直线 l 上的点定义加法和乘法的射影不变作图. 这些作图依赖于 l 上的三个不同点 O, E, U 的选取.

作图 Ⅰ. 对于不同于 U 的任何二点 A, B 决定不同于 U 的第三点 $A+B$, 称为 A 与 B 的和 (sum). 在 π 内通过 A, B 与 U 分别画三条不同于 l 的直线 a, b 与 u, 组成一个三角形. 令 P 是 u 与 a 的交点, Q 是 u 与 b 的交点, R 是 OQ 与 a 的交点, S 是 b 与 UR 的交点, 则 PS 与 l 交于点 $T = A+B$ (对于一般情形见图 1). 这样作出的点只依赖于 A, B, O 与 U, 而与直线或点 E 的选取无关.

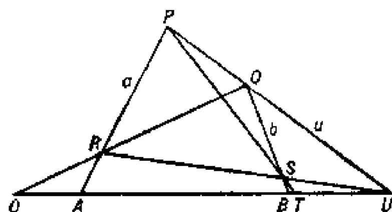


图 1

作图 Ⅱ. 对于不同于 U 的任何二点 A, B 决定不同于 U 的第三点 $A \cdot B$, 称为 A 与 B 的积 (product). 在 π 内通过 A, B 与 U 分别画三条不同于 l 的直线 a, b 与 u, 组成一个三角形. 令 P 是 u 与 a 的交点, Q 是 u 与 b 的交点, R 是 EQ 与 a 的交点, S 是 OR 与 b 的交点, 则 PS 与 l 交于一点 $T = A \cdot B$ (对于一般情形见图 2). 这样作出的点只依赖于 A, B, O, E, U, 而与直线 a, b 与 u 的选取无关. 直线 l 的 (不同于 U 的) 点在这种加法与乘法运算下构成一个**除环** (skew-field) $K(O, E, U)$. 在作图 Ⅱ 里交换 A 与 B 导致一个反同构除环 $K^{*}(O, E, U)$. 如果 O_1, E_1, U_1 是 π 内的直线 l_1 上另一个三点组, 则由于 l 与 l_1 之间有一个射影对应, 所以对应的除环 $K_1(O_1, E_1, U_1)$ 同构于 $K(O, E, U)$. 所以任何同构于它的除环简称为给定的射影平面 (或甚至给定的射影几何学) 的除环. 也称有一个除环 K 上的射影几何学 (projective geometry over the skew-field). 在作图 Ⅰ 与 Ⅱ 的一般情形下画出了位于同一平面内的四

点 P, Q, R, S，其中任意三点不共线，这些点组成一个具有三对对边 PQ, RS；PS, QR；与 PR, QS 的完全四角形（complete quadrangle）．这些对边的交点 X, Y, Z 称为对边点（diagonal points），而连结对边点的直线称为对角线（diagonals）．一个特殊情形对应于 X, Y, Z 共线的情形（见 **Fano公设**（Fano postulate））．未在图形中标出．

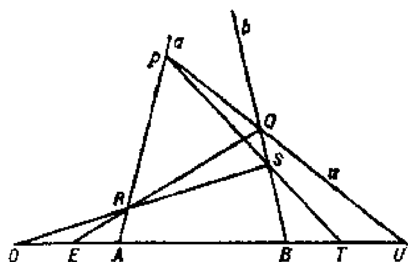


图 2

运用对偶于一个完全四角形的图形——完全四线形，能够在通过一点的直线束里进行类似的作图，且导出一个反同构于 K 的除环 K'．

作为一个代数系统，射影直线 l 的性质决定于 l 所在的射影平面的几何（射影不变）性质．例如，K 的交换性等价于 Pappus 公理成立；Fano 公设等价于 K 的特征数不同于 2；如果 K 除内自同构外无其他自同构，则每一个**射影变换**（projective transformation）是一个**直射变换**（collineation），等等．

利用直线上的除环 K，因而在包含直线的射影空间内能够引入射影坐标，给出射影空间的一个代数模型，使得射影几何学的内容实质上决定于建立在其上的同一除环 K 的性质．

在广义的意义下，射影几何学中所研究的射影空间的子空间的集合是一个补模格（modular lattice）．在这里并不要求空间是有限维的，但加了完全性、齐性基的存在性等条件．相应地，人们能够建立与素环和正则环理论，Abel 算子群理论和其他代数分支的各种联系．

参考文献

[1] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 1, Cambridge Univ. Press, 1947.

[2] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 一个直射变换是一个齐次坐标的线性变换（Baer 的术语，[A2]）．

运用其除环性质的射影几何学的构建已非常古老；这实质上归于 D. Hilbert（[A1]）．一个现代的处理由 E. Artin（[2]）给出．

参考文献

[A1] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Teubner, reprint, 1968（中译本：D. 希尔伯特，几何基础（第二版），科学出版社，1995）

[A2] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952

[A3] Coxeter, H. S. M., The real projective plane, Cambridge Univ. Press, 1951

林向岩 译

射影代数集［projective algebraic set；проективное алгебраическое множество］

定义在域 k 上的射影空间 P^n 的点的子集，它具有下列形式（在齐次坐标下）：

$$V(I)=\{(a_0,\cdots,a_n)\in P^n:\ f(a_0,\cdots,a_n)=0\ 对所有的\ f\in I\}.$$

这里 I 是多项式环 $k[X_0,\cdots,X_n]$ 里的齐次理想．（理想 I 称为齐次的，如果 $f\in I$ 以及 $f=\sum f_i$，这里 f_i 是 i 次齐次多项式，蕴含 $f_i\in I$）．

射影代数集具有以下性质：

1) $V(\sum_{i\in S}I_i)=\bigcap_{i\in S}V(I_i)$；

2) $V(I_1\cap I_2)=V(I_1)\cup V(I_2)$；

3) 如果 $I_1\subset I_2$，则 $V(I_2)\subset V(I_1)$；

4) $V(I)=V(\sqrt{I})$，这里 $\sqrt{I}$ 是理想 I 的根基（见**理想的根**（radical of an ideal））．

从性质 1)－3) 可知，在 $V(I)$ 上可引入 **Zariski 拓扑**（Zariski topology）．如果 $I=\sqrt{I}$，则 I 可被唯一地表成齐次素理想的交：

$$I=\mathfrak{P}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{P}_s$$

以及

$$V(I)=V(\mathfrak{P}_1)\cup\cdots\cup V(\mathfrak{P}_s).$$

当 I 是齐次素理想时，射影代数集 $V(I)$ 称为射影簇（projective variety）．

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）.

[2] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra, 1－2, Springer, 1975.

Вик. С. Куликов 撰

【补注】

[A1] Mumford, D., Algebraic geometry, 1: Complex projective varieties, Springer, 1976.

[A2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

射影联络［projective connection；проективная связность］

光滑流形 M 上的一种微分几何结构（differential-geometric structure），流形上的一类特殊联络（见**流形上联络**（connections on a manifold））．其中 M 上的光滑纤维空间 E 具有维数为 $n=\dim M$ 的射影空间 P_n 作为它的标准纤维．这个 E 的结构使每点 $x\in M$ 附带一射影空间的拷贝 $(P_n)_x$，它（确定到只差一个具有在点 x 的不变直线束的同调）恒同于附加了无穷远处超平面的中心仿射切空间 $T_x(M)$．作为这样的 E 的联络，射影联络由指定射影映照构成，即对于每条从 x_0 出发的曲线 $\mathscr{L}\in M$ 和曲线上每点 x_t，指定射影映照 $(P_n)_{x_t}\to(P_n)_{x_0}$，使得下述条件被满足．设 M 被坐标区域所覆盖，在这些区域上 $(P_n)_x$ 中的光滑标架场是固定的，其顶点由重合于 x 的向量 e_0 所确定．（P_n 中的一个标架由向量空间 V_{n+1} 中基的一个等价类所确定，其中两组基 $\{e_\alpha\}$ 和 $\{e'_\alpha\}$ 被认为是等价的，如果 $e'_\alpha=\lambda e_\alpha$，$\lambda\neq0$.）那么，当 $t\to0$ 时，映照族中的映照必须趋于恒同映照，并且关于点 x_0 的某邻域中的标架场，该映照与恒同映照之偏差的主部必由下列线性微分形式的矩阵所确定：

$$\begin{aligned}&\omega_\alpha^\beta=\Gamma_{\beta i}^{\alpha}dx^i,\quad \det\|\Gamma_{0i}^j\|\neq0,\\&\alpha,\beta=0,\cdots,n;\quad i,j=1,\cdots,n,\end{aligned}\tag{1}$$

对一切 $\mathscr{L}$ 都如此．换言之，在映照 $(P_n)_{x_t}\to(P_n)_{x_0}$ 下，点 x_t 处标架的像必由向量

$$e_\beta[\delta_\alpha^\beta+\omega_\alpha^\beta(X)t+\varepsilon_\alpha^\beta(t)]$$

确定，X 是 $\mathscr{L}$ 在 x_0 处的切向量，且 $\lim_{t\to0}\varepsilon_\alpha^\beta(t)/t=0$．通过等价基的变换可导致下列事实：在形式 (1) 中，实质性的形式仅仅是

$$\omega_0^i,\ \theta_i^j=\omega_i^j-\delta_i^j\omega_0^0,\ \omega_i^0.\tag{2}$$

当按公式 $e_{\alpha'}=A_{\alpha'}^{\beta}e_\beta$，$e_\beta=A_\beta^{\alpha'}e_{\alpha'}$ 变换标架场在任一点 $x\in M$ 处的标架时，其中 $A_0^{i'}=A_{0'}^{i}=0$，即当变换到空间 $(P_n)_x$ 中的标架主纤维空间 Π 的任一标架时，形式 (1) 被下列 Π 上的 1 形式所取代：

$$\omega_{\alpha'}^{\beta'}=A_\gamma^{\beta'}dA_{\alpha'}^{\gamma}+A_{\alpha'}^{\gamma}A_\delta^{\beta'}\omega_\gamma^\delta.\tag{3}$$

2 形式

$$\Omega_\alpha^\beta=d\omega_\alpha^\beta+\omega_\gamma^\beta\wedge\omega_\alpha^\gamma\tag{4}$$

是半基，即是 $\omega_0^k\wedge\omega_0^l$ 的线性组合，且是张量型的，即当标架被矩阵 A_α^γ 变换时，成立下面的公式：

$$\Omega_{\alpha'}^{\beta'}=A_{\alpha'}^{\gamma}A_\delta^{\beta'}\Omega_\gamma^\delta,$$

其中 $\Omega_{\alpha'}^{\beta'}$ 由类似于 (4) 那样的 (3) 所构成．对于实质性的形式 (2)，射影联络的结构方程成立（为简单计，省略撇）：

$$\left.\begin{aligned}&d\omega_0^i+\theta_j^i\wedge\omega_0^j=\Omega_0^i,\\&d\theta_i^j+\theta_k^j\wedge\theta_i^k=\omega_0^k\wedge(\delta_k^j\omega_i^0+\delta_i^j\omega_k^0)-\Theta_i^j,\\&d\omega_i^0+\omega_k^0\wedge\theta_i^k=\Omega_i^0,\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中 $\Theta_i^j=\Omega_i^j-\delta_i^j\Omega_0^0$．这里右边是半基；它们组成了射影联络的有挠曲率形式组．

等式 $\Omega_0^i=0$ 有一不变意义．在这种情况下，就说无挠射影联络；对此 $\Theta_i^i=\Theta_i^i$．不变恒等式

$$\Omega_0^i\equiv0,\quad \Theta_i^i\equiv0,$$

$$K_{ikj}^i\equiv0,\quad \Theta_i^j=\frac{1}{2}\ K_{ikl}^j\,\omega_0^k\wedge\omega_0^l$$

区分出一类特殊的射影联络，（被 E. Cartan）称为**法射影联络**（normal projective connection）．

形式 (1) 唯一地确定了 M 上的射影联络：在映照 $(P_n)_{x_t}\to(P_n)_{x_0}$ 下，点 x_t 处标架的像被方程组

$$du_\alpha=(\omega_\alpha^\beta)_{x(t)}(\dot{x}(t))u_\beta\tag{6}$$

在初始条件 $u_\alpha(0)=e_\alpha$ 下的解所确定，其中 $x^i=x^i(t)$ 是坐标为 $x^i(0)$ 的点 x_0 的某个坐标邻域内曲线 $\mathscr{L}$ 的方程．

定义在 Π 上且满足方程 (5) 的任何 1 形式 ω_0^i，θ_i^j，ω_i^0 在这种意义下定义了 M 上的一个射影联络，其中 (5) 的右边可用 $\omega_0^k\wedge\omega_0^l$ 表示，且 $\omega_0^i\ (i=1,\cdots,n)$ 是线性独立的．

在 $(P_n)_{x_0}$ 中由方程组 (6) 的解 $\{e_\alpha(t)\}$ 的第一个向量 $e_0(t)$ 确定的点所描绘的曲线称为曲线 $\mathscr{L}$ 的**展开**（development）．一条曲线称为 M 上**射影联络的测地线**（geodesic line of the projective connection），如果在曲线任意点 x 的某个邻域内它的展开是空间 $(P_n)_x$ 的直线．测地线的方程 $x^i=x^i(t)$ 是借助函数

$$\xi(t)=(\omega^i)_{x(t)}(\dot{x}(t))$$

来确定的，函数 ξ 来自方程组：

$$d\xi^i+\xi^j(\theta_j^i)_{x(t)}(\dot{x}(t))=\theta_{x(t)}(\dot{x}(t))\xi^i,$$

其中 θ 是 1 形式．在 $\omega^i=dx^i$ 和 $\xi^i=\dot{x}^i$ 的标架下，这个方程组取如下形状：

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^a}{(dx^n)^2}&=-Q^a\left[\frac{dx^1}{dx^n},\cdots,\frac{dx^{n-1}}{dx^n}\right]+\\&\quad+\frac{dx^a}{dx^n}\,Q^n\left[\frac{dx^1}{dx^n},\cdots,\frac{dx^{n-1}}{dx^n}\right],\end{aligned}\tag{7}$$

其中 Q^a 和 Q^n 是以 $x^1,\cdots,x^n$ 的函数作系数的二次多项式．

Cartan 定理（Cartan theorem）：若在光滑流形 M

上给出一系曲线．它们局部地由形如(7)的微分方程组定义，则存在一个且仅一个法射影联络，使得这系曲线是测地线系．

因此，射影联络的理论为一类特殊形式的微分方程组的不变形式研究提供了一种方法．射影联络在研究具有仿射联络的空间的测地（或射影）映照时也很有用．若 M 上存在局部标架场使得关于它有 $\omega_i^n = P_{ij}\omega_0^j$，则射影联络化为**仿射联络**(affine connection)．对于 M 上每个仿射联络，存在具有相同测地线的唯一法射影联络，前者可从这法射影联络得到．两仿射联络是测地等价的，如果它们的法射影联络相重合．特别是，在 $\dim M > 2$ 的 M 上一仿射联络是射影 Euclid 的，当且仅当它的射影曲率张量 K_{ikl}^j 消失．

参考文献

[1] Cartan, E., Sur les variétés à connexion projective, *Bull. Soc. Math. France*, 52(1924), 205－241

[2] Cartan, E., Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, Gauthier-Villars, 1937.

[3] Kobayashi, S. & Nagano, T., On projective connections, *J. Math. and Mech.*, 13(1964), 2, 215－235.

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

沈一兵 译

射影坐标 [projective coordinates; проективные координаты]

射影空间(projective space)$\Pi_n(K)$（射影子空间 S_q）的元素与一个**除环**(skew-field)K 的元素的有序有限子集的等价类之间的一个一一对应．子空间 $S_q(q>0)$ 的射影坐标（也称为 Grassmann 坐标(Grassmann coordinates)）是根据 S_q 中的点（0 维子空间）的坐标定义的．所以只要定义射影空间中点的射影坐标就足够了．

假设在除环 K 的不全为零的元素的行 $(x^0,\cdots,x^n)=x$（也称为**齐次点坐标**(homogeneous point coordinates)）的集合中引入了一个左（右）等价关系：$x\sim y$，如果存在 $\lambda\in K$，使得 $x^i=\lambda y^i$ $(x^i=y^i\lambda)$ $(i=0,\cdots,n)$，那么等价类的集合与射影空间 $P_n^l(K)$（相应地，$P_n^r(K)$）的点的集合 $\mathscr{P}$ 是一一对应的．如果 $\mathscr{P}$ 解释为左（右）向量空间 $A_{n+1}^l(K)$（相应地，$A_{n+1}^r(K)$）的直线的集合，那么一点 M 的齐次坐标就具有代表该点的直线上的向量的坐标的意义，并且射影坐标具有一切这种坐标的集合的意义．

在一般情形下，射影空间 Π_n 的点的射影坐标以如下方式与由纯射影意义（在 Π_n 中 **Desargues 假定**(Desargues assumption)成立这一必要条件下）引入的某一基联系．

空间 Π_n 的 $n+1$ 个独立的点 $A_0,\cdots,A_n$ 的一个集合 σ_n 称为一个单形(simplex)．在此情形点 $A_0,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_n$ 也是独立的且决定一个子空间 $S_{n-1}=\Sigma^i$，称为这个单形的一个面(face)．存在一点 E 不在任何面 Σ^i 上．令 $i_0,\cdots,i_n$ 是数 $0,\cdots,n$ 的任一置换．点 $A_{i_{k+1}},\cdots,A_{i_n}(k\geqslant 0)$ 与 E 是独立的且决定某个 S_{n-k}．然后，点 $A_{i_0},\cdots,A_{i_k}$ 也决定某个 S_k，且由于 S_k 与 S_{n-k} 的和是整个的空间 Π_n，S_k 与 S_{n-k} 恰好有一个公共点 $E_{i_0\cdots i_k}$ 不在由点 $A_{i_0},\cdots,A_{i_{j-1}},A_{i_{j+1}},\cdots,A_{i_k}$ 决定的每个 $(k-1)$ 维子空间里；在此情形点 $E_{i_0\cdots i_k},A_{i_{k+1}},\cdots,A_{i_n}$ 也是独立的．这样可得到 $2^{n+1}-1$ 个点 $E_{i_0\cdots i_k}$，包括点 $E_i=A_i$，$E_{0\cdots n}=E$，它们构成了空间 $S_n=\Pi_n$ 的一个**标架**(frame)；单形 σ_n 是它的骨架．

在每一条直线 A_iA_j 上有三个点 A_i,A_j,E_{ij}；研究中设想它们起到点 O,U,E 在射影几何学的除环 K 的定义中的作用（见**射影代数**(projective algebra)）．除环 $K(A_i,E_{ij},A_j)$ 与 $K(A_k,E_{kl},A_l)$ 是同构的，且同构由两直线 A_iA_j 与 A_kA_l 的点之间使得点 A_k,E_{kl},A_l 对应于点 A_i,E_{ij},A_j 的**射影对应**(projective correspondence)T_{ij}^{kl} 建立．对应于直线 A_iA_j 上一点 P 的除环 K 的元素称为在标度 (A_i,E_{ij},A_j) 中点 P 的**射影坐标**(projective coordinate)p．特别地，E_{ij} 的射影坐标永远是 1，而在标度 (A_j,E_{ij},A_i) 中点 P 的射影坐标是 $p^*=p^{-1}$．

令 P 是空间的一点，不在单形 σ_n：$A_0,\cdots,A_n$ 的任何面上，σ_n 与某点 E 组成一个标架 R．如果在标架的上述构造里用点 P 代替 E，那么得到一系列的点 $P_i,P_{ij},P_{ijk},\cdots$，此处 $P_{i_0\cdots i_k}$ 位于由 $A_{i_0},\cdots,A_{i_k}$ 决定的子空间中（但不在由这些点组成的单形 σ_k 的任何面上）．令 p_{ij} 是一点 P_{ij}（位于 A_iA_j 上）在标度 (A_i,E_{ij},A_j) 中的坐标．如果 i,j,k 不相同，那么

1) $p_{ij}p_{ji}=1$；

2) $p_{ik}p_{kj}p_{ji}=1$．

令 x_0 是 K 的任意不同于零的元素，且令 $x_i=x_0p_{i0}$，$x\neq 0$，$i=1,\cdots,n$（在此情形 $p_{ij}=x_j^{-1}x_i$），那么由各种不同的元素 x_0 所决定的等价的行的集合给出了点 P 关于标架 R 的射影坐标．

假设 P 在由点 $A_{i_0},\cdots,A_{i_k}$ 决定的子空间 S_k 中，但不在由这些点所决定的单形的任何面上．令等价行 $(x_{i_0},\cdots,x_{i_k})$ 的集合是一点 P 关于由一个单形 σ_k 与一点 $E_{i_0\cdots i_k}$ 所决定的子空间 S_k 的一个标架 R 的射影坐标，那么，点 P 关于标架 R 的射影坐标如下给出：$y_i=x_i$，$i=i_0,\cdots,i_k$；$y_i=0$，$i\neq i_0,\cdots,i_k$．

由以上方法构造的 $n+1$ 个左（右）等价行的任

何集合对应于空间 Π_n 中一个且仅对应于一个点 P，所以定义了其中的射影坐标．

参考文献

[1] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 1, Cambridge Univ. Press, 1947.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 关于射影坐标变换见**直射变换**（collineation）；**射影变换**（projective transformation）等．

林向岩 译

投射覆盖 [**projective covering**; **проективное накрытие**]，模的

【补注】 这是内射包络（injective envelope）或内射包（injective hull）（见**内射模**（injective module））中的相应概念的对偶概念． 设 R 是有单位元的结合环，M 是 R 上的左模． 以下所说的模都指左模，映射指左模间的映射． 一个满态射 $q: P\to M$ 是一个本质满态射（essential epimorphism），如果下述条件成立：$u: P'\to P$ 是满态射，当且仅当 qu 是一满态射． 这等价于说 $\mathrm{Ker}\, q$ 是一多余子模（superfluous submodule），这里 $N\subset M$ 是多余的，是指对任意子模 $M'\subset M$，若 $M'+N=M$，则 $M'=M$．本质满态射与本质单态射（或本质扩张）是互相对偶的．本质单态射是这样的单态射：$j: M\to Q$，使得 $v: M'\to M$ 是单态射，当且仅当 jv 是单射． M 的投射覆盖是一**投射模**（projective module）P 加上一个本质满态射 $q: P\to M$．与对偶概念内射包络（一**内射模**（injective module）Q 加上一个本质单态射 $M\to Q$）相反，投射覆盖不一定总存在． 例如，确实很特别的是 Abel 群（Z 模）的投射覆盖不存在． 一个使其模的投射覆盖一定存在的环在[A1]中已经刻画（也见**完满环**（perfect ring））．

这些概念完全是范畴上的． 所谓有生成元的 ABs 范畴（也称 Grothendieck 范畴（Grothendieck category））就是使得内射包总是存在的范畴．

参考文献

[A1] Bass, H., Finitistic homological dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95 (1960), 466 – 488.

[A2] Popescu, N., Abelian Categories with applications to rings and modules, Acad. Press, 1973, Sect. 3.10.

冯绪宁 译

射影形变 [**projective deformation**; **проективное изгибание**]

曲面度量理论中形变（叠加）概念的射影几何推广，它由 G. Fubini 在 1916 年利用一曲面在另一曲面上的所谓滚动的概念给出（E. Cartan 在 1920 年得到了这个概念在任一变换群几何上的推广）．

设 G 是空间 E 的变换群． 在群 G 的几何中，所谓曲面 S' 被叠加在曲面 S 上（或在 S 上滚动），如果在 S 和 S' 的点之间建立了一种一一对应，使得对于每一对对应点 $M\in S$ 和 $M'\in S'$，可指定一变换 $\gamma\in G$，它把 S' 变到 S 的位置，且还要求：

1) M' 与 M 恒同；

2) 过 M 的每条曲线 $l'\in S'$ 与对应的曲线 $l\in S$ 在该点有 n 阶切触（即与公共点 $M'=M$ 接近的两点 M'' 和 M^* 之间的距离关于公共点与它们的距离将是 $n+1$ 阶无穷小）．由数 n 特征的 S 和 S' 之间的这种对应称为 n 阶叠加（superposition of order n）．

这里距离概念的内容没有对群几何加上限制． 然而，这里曲线的切触阶应在比通常所说更窄一点的意义下来理解（区别在于两曲线的点之间的对应已由叠加所建立，而通常它是在定义切触阶中建立的）．

其次，设 G 为射影变换群，S 和 S' 被射影叠加． 那么，射影形变是保持射影线素

$$ds=\frac{F_3}{F_2}$$

的 S 的变换，其中 F_2 和 F_3 是 **Fubini 形式**（Fubini form），这时有二阶迭加． 由此得出，除直纹曲面外，仅仅所谓 R 曲面（见[1]）容有非平凡的射影形变．

射影几何处于度量几何与仿射几何之间，在度量几何中，一般每个曲面都能形变，而在仿射几何中，不存在形变的概念：任何两个曲面都容许一阶叠加，而两个不同曲面不能有二阶叠加．

参考文献

[1] Фиников, С. П., Проективно-Дифференциальная геометрия, М.-Л., 1937.

[2] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

沈一兵 译

度量的射影定义 [**projective determination of a metric**; **проективное мероопределение**]

用射影几何学的方法，在一个**射影空间**（projective space）的子集中引入一个度量，使得这些子集同构于一个 Euclid 空间，双曲空间或椭圆空间． 这是借助于在全体**射影变换**（projective transformation）的类里找出这样的变换：它们在这些子集里生成一个同构于相应的运动群的变换群． 运动的出现允许从一个给定点在一个给定的方向"删除"直线的一段，从而引入线段的长度的概念．

为了在 n 维射影空间 P 中得到度量的 Euclid 定义，应该在这个空间中找出一个 $(n-1)$ 维超平面 π，称为**理想超平面**(ideal hyperplane)，并且在这个超平面内建立一个点与 $(n-2)$ 维超平面的椭圆极对应 Π（即一个极对应，在它之下没有点属于它所对应的 $(n-2)$ 维平面）.

假设 E_n 是移去一个理想超平面后得到的射影空间 P 的一个子集；并且令 X, Y, X', Y' 是 E_n 中的点．称两线段 XY 与 $X'Y'$ 是合同的(congruent)，如果存在一个射影变换 φ 将点 X 与 Y 分别变到 X' 与 Y'，并且保持**配极**(polarity)Π 不变.

这样定义的线段合同的概念允许在 E_n 内引入 Euclid 空间的一个度量．为此，在射影空间 P 内引入一个具有基单形 $OA_1\cdots A_n$ 的**射影坐标**(projective coordinates)系，这里点 O 不属于理想超平面 π 而点 A_1、…、A_n 属于它，假设在这个坐标系里点 O 有坐标 $0,\cdots,0,1$，并且点 $A_i(i=1,\cdots,n)$ 有坐标

$$x_1=0,\cdots,x_{i-1}=0,\ x_i=1,\ x_{i+1}=0,\cdots,x_{n+1}=0,$$

则在超平面 π 内定义的椭圆极对应 Π 能够写为

$$u_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ i=1,\cdots,n.$$

这个对应的矩阵 (a_{ij}) 是对称的，并且对应于它的二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum a_{ij}x_ix_j$$

是正定的．令

$$X=(a_1:\cdots:a_{n+1})\text{ 与 }Y=(b_1:\cdots:b_{n+1})$$

是 E_n 中的两个点(即 $a_{n+1}\neq 0,\ b_{n+1}\neq 0$)．可置

$$\frac{a_1}{a_{n+1}}=x_1,\cdots,\frac{a_n}{a_{n+1}}=x_n;$$

$$\frac{b_1}{b_{n+1}}=y_1,\cdots,\frac{b_n}{b_{n+1}}=y_n,$$

那么点 X 与 Y 之间的距离 ρ 用

$$\rho(X,Y)=\sqrt{Q(x_1-y_1,\cdots,x_n-y_n)}$$

定义.

为了给出 n 维双曲空间的度量的射影定义，在 n 维射影空间 P 中考虑一个二阶实卵形超曲面 S 的内点的集合 U．令 X,Y,X',Y' 是 U 中的点，则线段 XY 与 $X'Y'$ 被认为是合同的，如果有空间 P 的一个射影变换，在它之下超曲面 S 映到自身上并且点 X 与 Y 分别变到点 X' 与 Y'．这样引入的线段合同的概念在 U 内建立了双曲空间的度量．在这个度量下，线段的长度用

$$\rho(X,Y)=c|\ln(XYPQ)|$$

定义，这里 P 与 Q 是直线 XY 与超曲面 S 的交点，c 是与 Лобачевский 空间的曲率有关的一个正数．为了在射影空间 P 中引入椭圆度量，考虑这个空间中的一个椭圆极对应 Π．称两线段 XY 与 $X'Y'$ 是合同的，如果存在一个射影变换 φ 将点 X 与 Y 分别变到点 X' 与 Y'，并且保持极映射 Π 不变(即对于任何点 M 与它的极面 m，点 $\varphi(M)$ 的极面为 $\varphi(m)$)．如果椭圆极对应 Π 由关系式

$$u_i=\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j\ (i=1,\cdots,n+1)$$

给定，那么矩阵 (a_{ij}) 是对称的并且对应于它的二次型是正定的．于是，如果

$$X=(x_1:\cdots:x_{n+1}),\ Y=(y_1:\cdots:y_{n+1}),$$

那么

$$\rho(X,Y)=\arccos\frac{|B(X,Y)|}{\sqrt{B(X,X)}\sqrt{B(Y,Y)}},$$

这里 B 是由矩阵 (a_{ij}) 给定的双线性型.

在所考虑的全部情形中(如果实射影空间附加到复射影空间中)，在定义线段合同关系的射影变换下，即在运动下某些二阶超曲面保持不变；它们称为**绝对形**(absolutes)．在度量的 Euclid 定义情形下，绝对形是一个虚的 $(n-2)$ 维二阶卵形面．在度量的双曲定义情形下，绝对形是一个实的 $(n-1)$ 维二阶卵形超曲面，在度量的椭圆定义情形下，绝对形是一个虚的 $(n-1)$ 维二阶卵形超曲面.

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978(中译本：Н. В. 叶菲莫夫，高等几何学，高等教育出版社，1956).

[2] Глаголев, Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М., 1963.

[3] Busemann, H. and Kelly, P. J., Projective geometry and projective metrics, Acad. Press, 1953(中译本：H. Busemann, P. Kelly, 射影几何与射影度量，天津师范大学出版社，1985).

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

林向岩 译

射影微分几何学[projective differential geometry; проективная дифференциальная геометрия]

几何学的分支，它所研究的是在射影变换下保持不变的曲线和曲面的微分几何性质．这种性质包括如渐近方向，或更一般地，**共轭方向**(conjugate directions)的概念，**密切二次曲面**(osculating quadric)(特别是

Lie 二次曲面，二次曲面的 Darboux 图等）的概念，**射影法线**（projective normal）的概念等．对偶原理在射影微分几何学中起着重要作用．例如，在射影空间中曲面或可看作双参数点族，或看作双参数平面族的包络．射影微分几何学范围内所发展的分支是：线性线汇（见**线汇**（congruence of lines））的（射影）理论，关于**射影形变**（projective deformation）和渐近变换（特别是 Backlund，Bianchi、Eisenhart、Laplace 等变换）的问题．

射影微分几何学的最早研究可追溯到 19 世纪末期；G．Darboux 关于曲面和线汇的工作是特别重要的．系统地揭示经典射影微分几何的第一本书是文献[1]．后来有文献[2]，[3]，[4]，在那里射影微分几何已作为广泛发展的几何理论而出现，它与其他几何学分支相关且有广泛的应用，例如，在微分方程论中（特别是在非线性方程中，利用与渐近变换类似的方法，近来已可"无需求积"而得到方程的解，例如，见**正弦 Gordon 方程**（sine-Gordon equation））．

G．Fubini 和 E．Čech 利用**共变微分**（covariant differentiation）以张量形式给出射影微分几何学的一种描述，并且奠基性地得到了基本形式（如见 **Fubini 形式**（Fubini form））．用这种方法，三维空间中曲面的射影不变标架的问题得到了解决．С．П．Фиников 和他的学生对射影微分几何学作出了较大贡献，特别是关于线汇理论和线汇对及其变换的理论．高维射影空间中流形的射影不变标架问题被 Г．Ф．Лаптев 和其他学者所研究．

在高维空间的射影微分几何学的研究中，一个有效的工具是 А．П．Норден（[6]）的法式化方法（normalization method）．在这种方法中，射影空间 P^n 中 m 维曲面 X^m 上每点 x 伴随一个与 x 关联的 $(n-m)$ 维平面（第一类法平面（normal of the first kind）），它与切平面仅相交于 x，而在 m 维切平面中选取一个与 x 不关联的 $(m-1)$ 维平面（第二类法平面（normal of the second kind））．而且，X^m 上存在诱导的无挠仿射联络（affine connection），它的性质既与 X^m 的结构有关，也与法式化的选择有关．在法式化超曲面的情况，可产生对偶构造，导致关于超曲面渐近张量对偶的第一和第二类无挠内蕴联络．对于法式化的特殊选择，与射影群的子群对应的空间的微分几何学可包含在下列一般的概形中：仿射空间，双轴空间，非 Euclid 空间和 Euclid 空间．

最后，在 E．Cartan 的工作中，具有**射影联络**（projective connection）的空间的一般理论被建立了．利用外形式方法，Г．Ф．Лаптев 已将它们作为纤维空间来研究，其结构群是射影空间的射影变换群．

参考文献

[1] Wilczynski，F．，Geometria projectiva differenziale，*Mém．Acad．Belgique*，**3**（1911）．2．

[2] Fubini，G．& Čech，E．，Geometria projectiva differenziale，1－2，Zanichelli，1926－1927．

[3] Bol，G．，Projektive Differentialgeometrie，1－3，Vandenhoeck & Ruprecht，1950－1967．

[4] Фиников，С．П．，Проективно-дифференциальная геометрия，М．-Л．，1937．

[5] Фиников，С．П．，Теория конгруэнций，М．-Л．，1950．

[6] Норден，А．П．，Пространства аффинной связности，2 изд．，М．，1976．

[7] Каган，В．Ф．，Основы теории поверхностей в тензорном изложении，ч．2，М．-Л．，1948

А．П．Норден，А．П．Широков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cartan，E．，Lecons sur la théorie des espaces à connexion projective，Gauthier-Villars，1937．

[A2] Fubini，G．& Čech，E．，Introduction à la géometrie projective différentielle des surfaces，Gauthier-Villars，1931

【译注】

参考文献

[B1] 苏步青，射影曲线概论，中国科学院出版，1954（英译本：Su Buchin，The general projective theory of curves，Science Press，1958）．

[B2] 苏步青，射影曲面概论，上海科学技术出版社，1964．

[B3] 苏步青，射影共轭网概论，上海科学技术出版社，1978．

[B4] 白正国（Pa Chenkuo），On the surfaces whose asymptotic curves of one system are projectively equivalent，Revita，Univ．Nac．Tucuman，（3），1942．

[B5] 白正国（Pa Chenkuo），The projective theory of surfaces in ruled space，Ⅰ；Ⅱ，*J．Amer．Math．Soc．*，**65**（1943）；**66**（1944）．

沈一兵 译

射影几何学 [projective geometry；проективная геометрия]

研究在**射影变换**（projective transformation），例如投影下图形的不变性质的几何学分支．这样的性质称为射影的（projective）；点位于一条线上（共线性（collinearity））的性质，代数曲线的阶，等等，是这样的性质．

在一个平面 Π 的点到另一个平面 Π′ 的投影下，不是 Π′ 的每一个点必须在 Π 里有一个原象，并且也不是 Π 的每一个点必须在 Π′ 有一个象．这就导致用所谓的**无穷远元**（infinitely-distant elements）（非正常点（improper point），线（line）或平面（plane））补充仿射空间的必要性以及一个新几何对象——三维**射影空间**（projective space）的形成．这

里、每条线用一个非正常点补充，每个平面用一条非正常线补充而整个空间用一个非正常平面补充．平行线用同一个非正常点补充，非平行线用不同的非正常点补充，平行平面用同一条非正常线补充，而非平行平面用不同的非正常线补充．补充了的完全平面的非正常点属于补充这个平面的非正常线．所有非正常点与线属于非正常平面．将仿射空间补充为射影空间后，投影成为一对一的．一个类似的过程可应用于 n 维空间．

存在各种不同的公理化方法构造射影空间．经常使用的是 1899 年由 D. Hilbert 为初等几何学基础提出的公理系统的一个调整（见 **Hilbert 公理系统**（Hilbert system of axioms））（见[10]）．射影空间被看成三种元素的集合：点，线和平面．作为射影几何学的基础，在它们之间建立了满足适当公理的关联关系．这些公理不同于相应的初等几何学中的公理组，其中平面内的任何二条直线要求有一个公共点，每一条直线上至少应该有三个不同点．在具体情形下，为了得到"更丰富的"射影几何学，这组公理用顺序公理与连续公理（对于实射影空间）、**Pappus 公理**（Pappus axiom）（对于交换除环上的射影几何学），**Fano 公设**（Fano postulate）（对于特征 $\neq 2$ 的除环上的射影几何学），等等来补全．

对偶原理（duality principle）在射影几何学中占有显著的地位．称点与线（线与平面，点与平面）是*关联的*（incident），如果点位于线上（线通过平面，等等）．于是，如果仅由其关联的术语阐述的射影空间中某个关于点，线与平面的命题 t 是真的，则由 t 以"平面"与"点"互换且保留"线"不变而得到的对偶命题 B 也是真的．

Desargues 假定（Desargues assumption）在射影几何学中起着重要作用．它的真实性对于用射影的方法引入一个由自然地附属于射影直线上的点的除环 K 的元素构成的**射影坐标**（projective coordinates）系是必要和充分的（见**射影代数**（projective algebra））．

射影几何学的基础于 17 世纪由 G. Desargues（与出他所发展的透视理论有关）与 B. Pascal（与圆锥曲线的某些性质的研究有关）建立．G. Monge 的工作（18 世纪后半叶与 19 世纪初）对于射影几何学的继续发展有重大价值．J. Poncelet（19 世纪初）的阐释使得射影几何学成为一个独立的学科．Poncelet 的功绩在于将图形的射影性质分离成单独的类和建立这些图形的度量与射影性质之间的一个对应．J. Brianchon 的工作在这同一时期．射影几何学的继续发展是通过 J. Steiner 与 M. Chasles 的工作．Ch. von Staudt 的工作中出现了射影几何学的公理化构造的实质，也在射影几何学的发展中起到了重要作用．当已经得到图形的射影性质的阐述后，所有这些科学家都试图用综合法证明射影几何学中的定理．射影几何学中的解析方向可提到 A. Mobius 的工作．Н. И. Лобачевский 关于非 Euclid 几何学的创建工作对于射影几何学的发展有影响；它使得 A. Cayley 与 F. Klein 从射影几何学的观点考虑各种不同的几何体系成为可能．普通射影几何学解析方法的发展和在此基础上复射影几何学的建立（J. Plücker，E. Study，E. Cartan）提出了除环上构建的几何学的某些射影性质的相关性问题．А. Н. Колмогоров 与 Л. С. Понтрягин 创建了拓扑射影几何学．

参考文献

[1] Глаголев, Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М.-Л., 1963.

[2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. E., Anschauliche Geometrie, Springer, 1932（中译本：D. 希尔伯特、S. 康福森，直观几何，上、下册，高等教育出版社，1959）.

[3] Coxeter, H. S. M., The real projective plane, Cambridge Univ. Press, 1961

[4] Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1913（中译本：D. 希尔伯特，几何基础（第二版），科学出版社，1995）.

[5] Hartshorne, R., Foundations of projective geometry, Benjamin, 1967.

[6] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978（中译本：Н. В. 叶菲莫夫，高等几何学，高等教育出版社，1956）.

[7] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии …, М., 1968.

[8] Ефимов, Н. В., Розендорн, Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970.

[9] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

[10] Veblen, O. and Young, J. W., Projective geometry, 1–2, Blaisdell, 1938–1946.

[11] Blaschke, W., Projective Geometrie, Wolfenbütteler Verlagsanstalt, 1947.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 Desargues 假定对于 $n \geqslant 3$ 的所有的 n 维射影空间都成立．

Möbius 与 Plücker 引入了**齐次坐标**（homogeneous coordinates）并由此开创了射影几何学的解析方向．

林向岩 译

射影群[projective group; проективная группа]，除环 K 上的 n 元的

由 K^n 的线性变换诱导的 $(n-1)$ 维**射影空间**（projective space）$P^{n-1}(K)$ 的变换所组成的群 $\mathrm{PGL}_n(K)$．存在一自然**满同态**（epimorphism）

$$P: \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{PGL}_n(K),$$

其核为 K^n 的**位似变换**(homothety)所成的群．它与 K 的中心 Z 的乘法群同构．$\mathrm{PGL}_n(K)$ 的元素称为射影变换(projective transformation)，是 $P^{n-1}(K)$ 的**直射变换**(collineation)．$\mathrm{PGL}_n(K)$ 也称全射影群(full projective group)，与之相平行的，还可考虑幺模射影群(unimodular projective group) $\mathrm{PSL}_n(K)$，以及更一般的，形如 $P(G)$ 的群，其中 G 为一个**线性群**(linear group)．

当 $n\geqslant 2$ 时群 $\mathrm{PSL}_n(K)$ 是单的，除非 $n=2$ 且 $|K|=2$ 或 3．若 K 为 q 元有限域，则

$$|\mathrm{PSL}_n(K)|$$

$$=(q-1,n)^{-1}q^{n(n-1)/2}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots$$

$$\cdots(q^2-1).$$

参考文献

[1] Dieudonné, J. A., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 对 $G\subset\mathrm{GL}_n(K)$，$P(G)$ 是 G 在同态 $\mathrm{GL}_n\to\mathrm{PGL}_n$ 下的象．关于其他有限典型群，诸如 PSp_n 等的阶和它们的单纯性的简介可参看，例如[A1]．

参考文献

[A1] Carter, R. W., Simple groups of Lie type, Wiley, 1972, Chapt. 1.

李慧陵 译

投射极限 [**projective limit**; **проективный предел**]，反极限(inverse limit)

最初出现于集合论及拓扑学中的一个构造，随后发现在许多数学领域内均有应用．投射极限的一个常见的例子是以预序集的元素为标集的同类型数学结构的族．令 I 是一个带有预序关系 $\leqslant$ 的集合，设对任意 $i\in I$，有集合 X_i，而对任意对 (i,j)，$i,j\in I$，$i\leqslant j$，有映射 $\varphi_{ij}:X_i\to X_j$，使得 φ_{ii}，$i\in I$，是恒同映射，且若 $i\leqslant j\leqslant k$，$\varphi_{jk}\varphi_{ij}=\varphi_{ik}$．称集合 X 是集合 X_i 及映射 φ_{ij} 的族的投射极限，即指下述条件成立：a) 存在映射 $\pi_i:X\to X_i$ 的族，使得任取 $i\leqslant j$，$\varphi_{ij}\pi_i=\pi_j$；b) 任取集合 Y，及其映射族 $\alpha_i:Y\to X_i$，$i\in I$，如果 $\varphi_{ij}\alpha_i=\alpha_j$ 对任意 $i\leqslant j$ 成立，则有唯一的映射 $\alpha:Y\to X$，使得 $\alpha_i=\pi_i\alpha$，$i\in I$．投射极限可被确切地刻画如下．考虑直积 $\prod_{i\in I}X_i$，选择其中由全体函数 $f:I\to\bigcup_{i\in I}X_i$ (满足 $\varphi_{ij}(f(i))=f(j)$，$i\leqslant j$) 构成的集合．这个子集是族 X_i 的投射极限．若 X_i 有同类型的附加结构，且 φ_{ij} 保存该结构，则投射极限亦有同样的结构，因而可以谈群、模、拓扑空间等等的投射极限．

投射极限这个概念的一个自然推广是函子的投射极限．令 $F:\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ 是从一个小范畴(small category) $\mathfrak{D}$ 到任意范畴 $\mathfrak{K}$ 的一个函子．对象 $X\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 连同态射族 $\pi_D:X\to F(D)$，$D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$ 叫作函子 F 的投射极限(反极限，或简称为极限(limit))，是指下述条件成立：α) 对任意态射 $\varphi:D\to D'$，$F(\varphi)\pi_D=\pi_{D'}$；β) 对任意态射族 $\alpha_D:Y\to F(D)$，若对所有的 $\varphi:D\to D'$，满足 $F(\varphi)\alpha_D=\alpha_{D'}$，则存在唯一的态射 $\alpha:Y\to X$，使得 $\alpha_D=\pi_D\alpha$，$D\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{D}$．记作 $\lim F=(X,\pi_D)$．

投射极限的例．1) 令 I 是离散范畴．则对任意函子 $F:I\to\mathfrak{K}$，函子 F 的投射极限重合于对象族 $F(i)$ $(i\in I)$的积(见**范畴中对象族的积**(product of a family of objects in a category))．

2) 令 $\mathfrak{D}$ 是仅有两个对象 A,B 和两个非恒等态射 $\alpha,\beta:A\to B$ 的范畴．则函子 $F:\mathfrak{D}\to\mathfrak{K}$ 的反极限是态射对 $F(\alpha)$，$F(\beta)$ 的等化子(见**范畴中态射的核**(kernel of a morphism in a category))．

若一个范畴中任意对象的小族有积，且任意态射对有等化子，则所有从一个小范畴到该范畴的函子均有极限．

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在范畴论的近期工作中，这一概念用未加修饰的名词"极限"表示(对偶概念称为上极限)．术语"反极限"及其对偶正极限(direct limit)(或归纳极限(inductive limit))一般限制到有向预序集上的图(见**有向序**(directed order)；"投射极限"一词最好不用，因为它容易与**范畴的投射对象**(projective object of a category)混淆．反极限和正极限的研究始于 19 世纪 30 年代，与一些拓扑概念，例如 **Čech 上同调**(Čech cohomology)有关；极限的一般概念是由 D. M. Kan 引入的([A1])．

参考文献

[A1] Kan, D. M., Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc*, 87 (1958), 294 – 329.

[A2] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

张英伯 译

射影度量 [**projective metric**; **проективная метрика**]

射影空间 P^n 的一个子集 R 中的一个度量 $\rho(x,y)$，使得关于这个度量的最短道路是部分或整条的射影直线．假定 R 不属于一个超曲面，并且：1) 对于任何三个不共线的点 x,y 与 z，三角形不等式在严格意义上成立：

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)>\rho(x,z);$$

2) 如果 x,y 是 R 中不同的点，那么通过 x 与 y 的直线 l 与 R 的交 $l(x,y)$ 或者是 l 的全部(一个大圆(large circle))，或者由 l 去掉某段(可以是一点)而得到(一条度量直线(metric straight line))．

具有射影度量的集合 R 称为一个射影度量空间(projective-metric space)．

在同一个射影度量空间中不能同时存在两种类型

的直线：它们或者全部是度量直线（即同构于 R 中的一个区间），或者全部是相同长度的大圆（Hamel 定理（Hamel theorem））．第一类的空间称为开的（open）（它们与仿射空间的子空间重合，即从 P^n 中除掉了一个超曲面）；开射影度量空间的几何学也称为 **Hilbert 几何学**（Hilbert geometry）．第二类的空间称为闭的（它们与整个 P^n 重合）．

确定全部的射影度量的问题是所谓的 Hilbert 第四问题（见[2]），并且它的一个完全的解已经由 A．B．Погорелов 给出（1974）．

所谓**度量的射影定义**（projective determination of a metric）与射影度量有关，并作为其特殊情形．它由在一个射影空间的一个子集中，用射影几何学的方法引进一个度量，使得这个子集成为一个同构于 Euclid、椭圆或双曲的空间而构成．例如，其子集与仿射空间的全部子集重合的开射影度量空间的几何学，称为 Minkowski 几何学（Minkowski geometry）．Euclid 几何学（Euclidean geometry）既是 Hilbert 几何学又是 Minkowski 几何学．

双曲几何学（hyperbolic geometry）是 Hilbert 几何学，并且在所有直线上都存在反射．子集 R 有一个双曲几何学，当且仅当它是一个椭球的内部．

椭圆几何学（elliptic geometry）（或 **Riemann 几何学**（Riemann geometry））既是第二类射影度量空间的几何学．

参考文献

[1] Busemann, H. and Kelly, P. J., Projective geometry and projective metrics, Acad. Press, 1953（中译本：H. Busemann, P. Kelly, 射影几何与射影度量，天津师范大学出版社，1985）．

[2] Hilbert's problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **8**(1902), 437－479（译自德文）．

М. И. Воицеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Busemann, H., The geometry of geodesics, Acad. Press, 1955.

[A2] Busemann, H., Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry, Princeton Univ. Press, 1942.

林向岩 译

投射模 [projective module; проективный модуль]

模 P 满足下列等价条件中的任一个：1）对任一模的**满态射**（epimorphism）$\alpha: B \to C$ 及任一同态 $\beta: P \to C$，存在一同态 $\gamma: P \to B$，使得 $\beta = \alpha\gamma$；2）模 P 是**自由模**（free module）的直和；3）**函子**（functor）Hom（P，－）是正合的（见**正合函子**（exact functor））；4）任一模的满态射是分裂的．

Kaplansky 定理（Kaplansky theorem）（[2]）断言：任一投射模是具有可数多生成元的投射模的直和，由此导致可数情形下投射模结构的研究．具有限多生成元的投射模是**代数 K 论**（algebraic K-theory）的研究内容．投射模最简单的例子是自由模．从在环上分解为直和来看投射模与自由模总是有差别的．已经证明的自由模类和投射模类重合的情形有局部环（见[2]）、域上几个变元的多项式环（见[3]、[4]）．

参考文献

[1] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Kaplansky, I., Projective modules, *Ann. of Math.*, **68** (1958), 2, 372－377.

[3] Суслин А. А., 《Докл. АН СССР》, **229** (1976), 5, 1063－1066.

[4] Quillen, D., Projective modules over polynomial rings, *Invent. Math.*, **36**(1976), 167－171.

В. Е. Говоров 撰

【补注】 有如下定理，域上几个变元的多项式环 $F[X_1, \cdots, X_n]$ 上的每个有限生成投射模一定是自由模，这是著名的 Quillen-Суслин 定理（Quillen-Suslin theorem）．这个问题是 J. P. Serre 在 1955 年提出来的（[A2]），这也就是所谓的 Serre 猜想（Serre conjecture）．完全和详尽的讨论见[A3]．

在[A5]中，Quillen-Суслин 定理被叙述为：设 M 是有限生成投射 $R[X]$ 模，$f \in R[X]$ 是首项系数为 1 的多项式，使得 M_f 是自由 $R[X]_f$ 模，则 M 是一自由 $R[X]$ 模．

Quillen 证明 Quillen-Суслин 定理时用了 Horrock 定理（Horrock theorem）：设 R 是一交换环，P 是 $R[t]$ 上有限生成投射模．若 $R(t) \otimes_{R[t]} P$ 是自由 $R(t)$ 模，则 P 是自由 $R[t]$ 模．另一个证明要素是 Quillen 插入定理（Quillen patching theorem）．设 R 是个环．M 是（从 R）扩充的 $R[X_1, \cdots, X_n]$ 模，如果存在一个 R 模 M_0，使得 $M \cong R[X_1, \cdots, X_n] \otimes_R M_0$，则插入定理断言，若 R 是交换环且 M 是有限表现 $R[X_1, \cdots, X_n]$ 模，则 M 是从 R 扩充的，当且仅当对 R 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，局部化 $M_{\mathfrak{m}}$ 是由 $R_{\mathfrak{m}}$ 扩充的．用这些术语可以得到广义 Quillen-Суслин 定理（generalized Quillen-Suslin theorem）：若 k 是交换正则环，其 Krull 维数为 2，则每个 $k[X_1, \cdots, X_n]$ 上有限生成投射模是由 k 扩充的．

Murthy-Horrock 定理（Murthy-Horrock theorem）提出，如果 R 是交换正则局部环，且 Krull 维数为 2，则 $R[t]$ 上的有限生成模是自由模．

在讨论 $k[X_1, \cdots, X_n]$ 上的消去定理时，Суслин 首一多项式定理（Suslin monic polynomial theorem）起了主要作用．（消去定理（cancellation theorem）是这样

一种类型的定理：如果 $M\oplus Q\simeq N\oplus Q$，则 $M\simeq N$。例如，Bass 消去定理提出，如果 R 是 Krull 维数 $d<\infty$ 的交换 Nother 环，Q，Q' 是有限生成投射模，它们是稳定同构的(stably isomorphic)，即对某个 s 有 $Q\oplus R^s\simeq Q'\oplus R^s$，且 Q 的秩 $>d$，则 $Q\simeq Q'$。) 首 1 多项式定理提出，如果 R 是交换 Noether 环，Krull 维数 $d<\infty$，$\mathfrak{a}$ 是 $A=R[X_1,\cdots,X_n]$ 中高度 $>d$ 的理想，则在 A 中存在新变量 $Y_1,\cdots,Y_n$，使得 $A=R[Y_1,\cdots,Y_n]$，且 $\mathfrak{a}$ 包含一个多项式，对 Y_1 而言是首 1 的。当 R 是域时，这实质上就是 Noether 正规化定理(Noether normalization theorem)。

交换环 R 称作是一 Hermite 环(Hermite ring)，如果每个有限生成稳定自由模(stably free module) P（即 $P+R^s\simeq R^t$，对某些 s、t）都是自由模。

当 $n\geqslant 2$，D 是一（非交换）除环时，对 $D[X_1,\cdots,X_n]$ Serre 猜想不一定成立([A4])．Serre 猜想的二次类比(quadratic analogue of Serre conjecture)问：是否赋予了二次型、双线性型或辛型的有限生成投射 $k[X_1,\cdots,X_n]$ 模必然从 k 的类似对象扩充而得？这并不总是成立的，详情见[A3]，第六章。

参考文献

[A1] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[A2] Serre, J.-P., Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, **61** (1975), 197–278.

[A3] Lam, T. Y., Serre conjecture, Springer, 1978.

[A4] Ojanguran, M and Sridharan, R., Concellation of Azumaya algebras, *J. of Algebra*, 18 (1971), 501–505.

[A5] Kunz, E., Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

冯绪宁 译

射影法线 [projective normal; проективная нормаль]

度量几何学中法线(normal)概念的一种推广．度量几何中法线被曲面的切平面（即一阶邻域）完全确定，与此不同，这在射影几何学中不成立．甚至一阶小量的项不能确定不在切平面中的坐标四面体的顶点（即对于所选的 **Darboux 二次曲面**(Darboux quadric)，不可能构造唯一的一个自配极的四面体）．这是很自然的情况：射影群比运动群大得多，因而不变量必是高阶的；但即使在四阶邻域内也不存在能取作四面体的第三轴的唯一直线．我们以这样的方式得到，例如：

Wilczynski 准线(Wilczynski directrix)

$$W=N+\frac{1}{\mathbf{I}}u^i r_i;$$

Green 棱(Green adge)

$$G=N+\frac{1}{4}\left[g^{pq}\frac{\partial_q\mathbf{I}}{\mathbf{I}}-\frac{1}{\mathbf{I}}A_{ij}T^{ip}\right]r_p,$$

Čech 轴(Čech axis)

$$C=N+\frac{1}{3}\left[g^{ij}\frac{\partial_j\mathbf{I}}{2\mathbf{I}}-\frac{1}{\mathbf{I}}A_{jk}T^{jk}\right]r_i;$$

及 Fubini 法线(Fubini normal)

$$F=N+g^{ij}\frac{\partial_j\mathbf{I}}{2\mathbf{I}}r_i.$$

这里 N 是**仿射法线**(affine normal)．

它们全都位于一个平面内．

参考文献

[1] Широков, П. А., Широков, А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959.

[2] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

[3] Фиников, С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.-Л., 1937.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bol, G., Projektive differentialgeometrie, I, II, Vandenhoeck & Ruprecht, 1950.

[A2] Cartan, E., Leçons sur la theorie des espaces à connexion projective, Gauthier-Villars, 1937.

[A3] Fubini, G & Čech, E., *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Gauthier-Villars, 1931.

沈一兵 译

范畴的投射对象 [projective object of a category; проективный объект категории]

将自由群、自由模等等的收缩核（或直和项）的性质形式化的一个概念．范畴 $\mathfrak{K}$ 的对象 P 叫作投射的(projective)，即指对任意满态射(epimorphism) $\nu: A\to B$ 和任意态射 $\gamma: P\to B$，必存在态射 $\gamma': P\to A$，使 $\gamma=\gamma'\nu$．换言之，对象 P 是投射的，是指从 $\mathfrak{K}$ 到集范畴 $\mathfrak{S}$ 的表示函子 $H_P(X)=\mathrm{Hom}(P,X)$ 将 $\mathfrak{K}$ 中的满态射变成 $\mathfrak{S}$ 中的满映射．

例．1) 在集范畴中，每个对象都是投射的．2) 在群范畴中，仅有自由群是投射的．3) 在有 1 的结合环 Λ 的左模范畴 ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ 中，一个模是投射的，当且仅当它是自由模的直和项．对使得每个投射模都是自由模的环的刻画构成了 Serre 问题(Serre problem)的内容．4) 在范畴 ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ 中，所有的模都是投射的，当且仅当环 Λ 是经典半单的．5) 在从一个小范畴(small category) $\mathfrak{D}$ 到集范畴 $\mathfrak{S}$ 的函数范畴 $\mathfrak{F}(\mathfrak{D},\mathfrak{S})$ 中，每一个对象都是投射的，当且仅当 $\mathfrak{D}$ 是离散范畴．

在投射对象的定义中，有时假定函子 H_P 并不将全体满态射，而仅将某一类特殊的满态射 $\mathfrak{E}$ 变成集合的满射．特别地，若 $\mathfrak{E}$ 是双范畴($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$)的容许满态射类，则 P 叫作容许投射对象(admissible projective object)．例如在某些群簇中，簇中的自由群是

相对于所有集合满同态类的容许投射对象，但不是投射对象，因为存在不是集合满同态的满态射．

与投射对象对偶的概念是**内射对象**（injective object）投射和内射对象的基本作用最先在同调代数中被研究．在模范畴中，每个模均可表示为投射模的商．这一性质使得可以构造投射分解并研究各种各样的同调维数．

参考文献

[1] Cartan, H., Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 例 1 中关于集范畴中的每个对象均为投射对象的断言也是阐述**选择公理**（axiom of choice）的一种途径，上述关于特殊范畴中投射对象的其他大部分断言都以某种方式涉及选择公理．例如自由 Abel 群是投射的这一论断已被证明与选择公理等价（[A1]），尽管每个 Abel 群是投射对象的商这一论断要弱一些．

参考文献

[A1] Blass, A. R., Injectivity, projectivity and the axiom of choice, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **255** (1979), 31 – 59.

张英伯 译

射影平面 [**projective plane**; **проективная плоскость**]，二维射影空间（two-dimensional projective space）

一个关联结构 $\pi=\{\mathscr{P},\mathscr{L},I\}$（见**关联系统**（incidence system））．集合 $\mathscr{P}$ 的元素称为点（point），集合 $\mathscr{L}$ 的元素称为（直）线（(straight) line），而 I 是一个关联关系．一个关联结构满足以下公理：

1）对于任意两个不同的点 p 与 q，存在唯一线 L，使得 pIL 与 qIL；

2）对于任意两条不同线 L 与 M，存在唯一点 p，使得 pIL 与 pIM；

3）存在四个点，其中无三点与一条线关联．

例如，三维仿射空间中通过一点 o 的线与平面的集合 Π 是一个射影平面，如果以 Π 的线作为射影点且以 Π 的平面作为射影线．在这个解释中，域上射影平面的一点的**齐次坐标**（homogeneous coordinates）作为对应于该点的直线上的某个向量的坐标（见**射影几何学**（projective geometry）；**射影坐标**（projective coordinates））具有清晰的几何意义．另一个例子是七个点 $A_i(i=1,\cdots,7)$ 与七条线 $\{A_1,A_2,A_4\}$，$\{A_2,A_3,A_5\}$，$\{A_3,A_4,A_6\}$，$\{A_4,A_5,A_7\}$，$\{A_5,A_6,A_1\}$，$\{A_6,A_7,A_2\}$，$\{A_7,A_1,A_3\}$ 构成的射影平面（图 1）．这是有限射影平面类的一个代表．一个射影平面 $P(2,n)$ 称为一个 n 阶的**有限射影平面**（finite projective plane）；如果关联关系满足一个附加的公理：

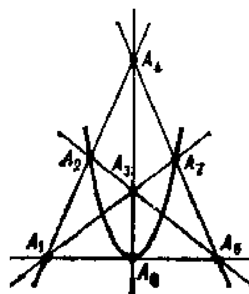


图 1

4）存在一条线恰好与 $n+1$ 个点关联．

在 $P(2,n)$ 中每一个点（线）与 $n+1$ 条线（点）关联，并且平面的点的个数等于线的条数，均为 n^2+n+1．对 n 的哪些值存在一个射影平面 $P(2,n)$ 问题尚未解决（1990）．阶是素数的幂的有限射影平面的存在性已经证明（见 [4]）．已经对一大类数证明了 $P(2,n)$ 的不存在性：如果 n 模 4 余 1 或 2 而且 n 的素因子分解式中，奇数幂因子中至少有一个模 4 余 3 的素数，那么 $P(2,n)$ 不存在．这些数是，例如，$n=6,14,21,22,\cdots$．对于 $n=10,12,15,18,\cdots$，问题尚待解决．有限射影平面理论中的一个重要问题是给定的 $P(2,n)$ 的子平面的研究．例如，如果 $P(2,m)$ 是 $P(2,n)$ 的一个真子平面，那么 $m^2+m\leqslant n$ 或 $m^2=n$（见 [5]）．

对偶性的概念对于射影平面是特征性的．两个射影平面称为**对偶的**（dual），如果其中一个平面的点（线）与另一个平面的线（点）之间有一个保持关联关系的一一对应．某些射影平面（例如域上的射影平面）容许有一个到自身上的对偶映射，称为一个**配极**（polarity）；容许有一个配极的射影平面称为**自对偶的**（self-dual）．对于射影平面所谓的小**对偶原理**成立：如果仅用关联的术语阐述的关于射影平面的点与线的某一个命题 $\mathscr{A}$ 成立，则与 $\mathscr{A}$ 对偶的命题 $\mathscr{B}$ 也成立，即由 $\mathscr{A}$ 中词"线"与"点"互换而得出的命题也成立．

射影平面到自身上的一个同构映射称为一个**直射变换**（collineation）．一个有限射影平面 $P(2,n)$ 的直射变换是点集的一个置换与线集的一个置换，这两个置换是匹配的．一个有限射影平面是 Desargues 的，如果它有一个直射变换群双传递地作用在它的点上．Desargues 射影平面 $\mathrm{PG}(2,p^h)$ 的直射变换群的阶为

$$h(p^{2h}+p^h+1)(p^{2h}+p^h)p^{2h}(p^h-1)^2.$$

非 Desargues 射影平面 $P(2,n)$ 的直射变换群的阶最多是

$$n^s(n^2+n+1)\ (n^2+n)n^2(n-1)^2,$$

其中 $s \leqslant \ln_2 n$．已知的非 Desargues 射影平面的直射变换群的阶不超过相同阶的 Desargues 平面的直射变换群的阶．

射影平面的 Lenz-Barlotti 分类（Lenz-Barlotti classification of projective planes）是基于考虑对于完全直射变换群 G 定义的 53 种类型的集合

$$T(G)=\{(x,X):G \text{ 是 } (x,X) \text{ 传递的}\}.$$

研究射影平面的一个基本方法是在这些平面上引入坐标与一个三元运算．对于 Lenz-Barlotti 分类中射影平面的每一个可能的类型对应一个由三元运算决定的射影平面的自然坐标域必须满足的代数律的系统．例如，一个射影平面是 Desargues（Pappus）的，当且仅当它所有的自然坐标域是除环（域）．一个 Desargues 有限射影平面 $P(2,n)$ 是 Pappus 的．

有限 Desargues 射影平面 $PG(2,n)$ 的一个特征是它有一个阶为 n^2+n+1 的直射变换循环地作用在点与线上．这使得用一个循环阵列表示 $PG(2,n)$ 成为可能．这个 $PG(2,n)$ 的表示如下：它的点用从 1 到 n^2+n+1 的自然数列出，分布在一个 $n+1$ 行 n^2+n+1 列的长方阵列中，使得表示所有点都在其上的一条线的每一列是由前一列的元素加 1（模 n^2+n+1）而得到．例如 $P(2,2)$ 的一个表示是

1 2 3 4 5 6 7
2 3 4 5 6 7 1
4 5 6 7 1 2 3

平面 $P(2,n)$ $(n \leqslant 8)$在不计同构时是唯一的——它们是 Desargues 或 Galois 平面（见[6]），然而对于 $n=9$ 已经知道四个不同构的平面（见[7]）．

如果在射影平面的公理与 Desargues 假定中添加顺序公理（由位于一条直线上的点偶的分离描述，例如，图 2 中偶 C,D 分离偶 A,B，而 A,C 不分离 B,D）与连续公理，那么所得的射影平面同构于由非正常元补充的实仿射平面：每一条线上添加一个非正常（无穷远）点，平行线上添加的点相同，不平行的线上添加的点不同，并且要求非正常点位于同一条非正常直线上．



图 2

一个射影平面称为拓扑的（topological），如果它的点与线的集合是拓扑空间，并且并与交是连续的．在一个拓扑平面中三元运算对它所有的自变元是连续的．从拓扑的观点看，实射影平面的点集（线集）是一个 Euler 示性数为 1 的闭不可定向流形．

参考文献

[1] Coxeter, H. S. M., Projective geometry, Cambridge Univ. Press, 1987.
[2] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1972.
[3] Скорняков, Л. А., 《Успехи матем. наук》, 6 (1951), 6, 112－154.
[4] Kárteszi, F., Introduction to finite geometries, North-Holland, 1976.
[5] Hall, M., The theory of groups, MacMillan, 1959, Chapt. 20（中译本：M．赫尔，群论，科学出版社，1981）.
[6] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.
[7] Room, T. G. and Kirkpatrick, P. B., Miniquaternion geometry, Cambridge Univ. Press, 1971.

В. В. Афанасьев 撰

【补注】一个射影平面称为 Desargues 的（Desarguesian），如果 **Desargues 假定**（Desargues assumption）在其中成立（即如果它同构于一个除环上的射影平面）．

有限射影平面（与空间）的概念由 K. von-Staudt 于[A5]第 87－88 页引入．

具有双传递直射变换群作用的有限射影平面是 Desargues 的这一事实是 Ostrom-Wagner 定理（Ostrom-Wagner theorem）．

一个有限 Desargues $P(2,n)$ 是 Pappus 的，因为有限除环是交换的．

$PG(2,n)$ 的一个阶为 n^2+n+1 的直射变换称为一个 Singer 循环（Singer cycle）（[A7]）．通过详尽的计算机检查已经得知不存在 10 阶射影平面，并且恰有四个不同构的 9 阶射影平面．坐标化射影平面的代数结构通常称为一个平面三元环（planar ternary ring）．旗传递的有限射影平面已由 W. M. Kantor 确定（[A1]）．

参考文献

[A1] Kantor, W. M., Primitive permutation groups of odd degree and an application to finite projective plane, *J. Algebra*, **106** (1987), 15－45.
[A2] Pickert, G., Projektive Ebenen, Springer, 1975.
[A3] Hughes, D. R. and Piper, F. C., Projective planes, Springer, 1973.
[A4] Lüneburg, H., Translation planes, Springer, 1979.
[A5] Staudt, K. G. C. von, Beiträge zur Geometrie der Lage, I, Nürnberg, 1865.
[A6] Fano, G., Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva, *Giornale di Mat.*, **30** (1892), 106－132.
[A7] Singer, I., A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43** (1938), 377－385.

林向岩 译

射影表示［projective representation；проективное пред-

ставление}，群 G 的

群 G 到射影空间 $P(V)$ 的射影变换群 $\mathrm{PGL}(V)$ 内的同态，其中 $P(V)$ 是与域 k 上的向量空间 V 对应的射影空间．

群 G 的每个射影表示 φ 都对应 G 的一个中心扩张：设 $\mathrm{GL}(V)$ 是 V 的**一般线性群**（general linear group）．于是有一个自然的**正合序列**（exact sequence）

$$1 \to k^{\times} \xrightarrow{i} \mathrm{GL}(V) \xrightarrow{p} \mathrm{PGL}(V) \to 1,$$

其中 p 为 $\mathrm{GL}(V)$ 到 $\mathrm{PGL}(V)$ 上的自然投影而 i 为域 k 的乘法群通过标量矩阵到 $\mathrm{GL}(V)$ 内的嵌入．考虑 φ 的原象得到下列的交换图表，其中每行都是正合的：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & k^{\times} & \xrightarrow{i} & \mathrm{GL}(V) & \xrightarrow{p} & \mathrm{PGL}(V) & \to & 1 \\ & & \| & & \uparrow \hat{\varphi} & & \uparrow \varphi & & \\ 1 & \to & k^{\times} & \xrightarrow[\hat{i}]{} & E_{\varphi} & \xrightarrow[\hat{p}]{} & G & \to & 1 \end{array} \qquad (*)$$

这就得到了对应的中心扩张．每个截段 $\psi: G \to E_{\varphi}$，即满足 $\psi \cdot \hat{p} = \mathrm{id}_G$ 的同态 ψ，都有性质

$$\psi(g_1 g_2) = c(g_1, g_2)\psi(g_1)\psi(g_2),$$

此处 $c: G \times G \to k^{\times}$ 是 G 的 2 上闭链．这一上闭链的上同调类 h 与截断 ψ 的选取无关．它由射影表示 φ 决定，而它又决定了扩张（*）的等价类．条件 $h=0$ 是射影表示 φ 为 G 的一线性表示与射影同态 p 的复合的必要充分条件．

射影表示是在研究群扩张的线性表示时自然引出的．射影表示的最重要的例子是：正交群的旋量表示和辛群的 Weyl 表示．表示的等价和不可约性的定义可直接推广到射影表示上．有限群的不可约射影表示的分类已被 I. Schur 得到（1904）．

一个射影表示称为酉射影表示，如果 V 是一个 Hilbert 空间，并且映射 ψ 可以选取使它在 V 的酉算子群 $U(V)$ 中取值．拓扑群的不可约酉射影表示已有研究工作（[4]）；对连通 Lie 群 G，这一研究可归结为单连通 Lie 群 $\tilde{G}$ 的不可约酉射影表示的研究，而 $\tilde{G}$ 的 Lie 代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 被一个 d 维交换 Lie 代数的中心扩张，其中 $d = \dim H^2(\mathfrak{g}, R)$．

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений. 2 изд., М., 1978（英译本：Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976）．

[2] Curtis, C. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962．

[3] Mackey, G. W., Unitary representations of group extensions, I. *Acta Math.*, 99（1958），265－311．

[4] Bargmann, V., Irreducible unitary representations of the Lorentz group. *Ann. of Math.*, 48（1947），568－640．

А. А. Кириллов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Curtis, C. and Reiner, I., Methods of representation theory, 1－2, Wiley, 1981－1987

[A2] Isaacs, I. M., Character theory of finite groups, Acad. Press, 1976.

李慧陵 译

射影概形［**projective scheme; проективная схема**］

射影空间 P_k^n 的闭子概形（见概形（scheme））．在 P_k^n 的齐次坐标 $x_0, \cdots, x_n$ 里，射影概形可由齐次代数方程组给出：

$$f_1(x_0, \cdots, x_n) = 0, \cdots, f_r(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

射影概形都是完全的（当 $k=\mathbf{C}$ 时是紧的）；反之，如果在完全概形上有一个丰富可逆层（见**丰富层**（ample sheaf），**可逆层**（invertible sheaf）），则它是射影的．还有别的射影性判则．

射影概形概念的推广是射影态射．概形的态射 $f: X \to Y$ 称为**射影的**（projective）（并且称 X 为 Y 上射影概形），如果 X 是射影纤维丛 $P_Y(\mathscr{E})$ 的闭子概形，这里 $\mathscr{E}$ 是局部自由 $\mathscr{O}_Y$ 模．射影态射的复合仍是射影的．态射的射影性在**换基**（base change）下仍然被保持；特别地，射影态射的纤维是射影概形（但反之不一定对）．如果概形 X 是射影的，$X \to Z$ 是有限满态射，则 Z 仍是射影的．

任何（Y 上的）射影概形都可利用射影谱（projective spectrum）来构造（见**射影谱（环的）**（projective spectrum of a ring））．限制于仿射基 $Y=\mathrm{Spec}\,R$ 的情形，假设 $A=\oplus_{i\geq 0}A_i$ 是分次 R 代数，R 模 A_1 是有限型的且生成代数 A，且设 $\mathrm{Proj}(A)$ 是不包含 A_1 的齐次素理想 $\mathfrak{p} \subset A$ 的集合．配备了自然拓扑和结构层后，集合 $\mathrm{Proj}(A)$ 成为射影 Y 概形，并且射影 Y 概形都有这样的形式．

参考文献

[1] Mumford, D., Algebraic geometry, I. Complex projective varieties, Springer, 1976.

В. И. Данилов 撰

【补注】 给出了 Y 上向量丛 E（或等价地，局部自由 $\mathscr{O}_Y$ 模 $\mathscr{E}$），与它相伴的**射影丛**（projective bundle）或**射影纤维丛**（projective fibre bundle）在 $y \in Y$ 上的纤维是由向量空间 E_y 的所有一维子空间构成的射影空间 $P(E_y)$．

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977

陈志杰 译

射影集 [**projective set; проективное множество**]

对 **Borel 集** (Borel set) 重复使用射影运算及补运算而得到的集合. 射影集可被分类并由此而形成射影分层. 设 $I=\omega^{\omega}$ 为 **Baire 空间** (Baire space) (与无理数空间同胚). 集合 $P\subset I^{m}$ 属于: 1) 类 A_1, 如果 P 是空间 I^{m+1} 中一 Borel 集的射影; 2) 类 CA_n (P 是一 CA_n 集 (CA_n-set)), 如果它的补 $I^{m}\setminus P$ 是 A_n 集 ($n\geqslant 1$); 3) 类 A_n (P 是一 A_n 集 (A_n-set)), 如果 P 是空间 I^{m+1} 中一 CA_{n-1} 集的射影, $n\geqslant 2$; 4) 类 B_n, 如果 P 同时属类 A_n 和 CA_n, $n\geqslant 1$. 当把射影换成(同一空间 I^{m} 中集合的)连续象时, 可以得到相同的类.

根据 **Суслин 定理** (Suslin theorem), 类 A_1 与 $\mathscr{A}$ 集的类吻合 (因而, 类 CA_1 与 $C\mathscr{A}$ 集的类吻合, 见 $\mathscr{A}$ **集** ($\mathscr{A}$-set); $C\mathscr{A}$ 集 ($C\mathscr{A}$-set)), 且类 B_1 与 Borel 集的类吻合. 对每一类 A_n, 可构造一通用集来证明如下射影分层定理 (projective hierarchy theorem) ("存在性"定理, "类的非空性"定理): $B_n\subset A_n\subset B_{n+1}$ (从而 $A_n\subset B_{n+1}\subset A_{n+1}$), 其中每一个包含都是严格的. 空间 I 的所有射影集组成的集合的基数等于 $2^{\aleph_0}$.

每一 A_2 集是 $\aleph_1$ 个 Borel 集的并, 于是它或者可数, 或者具有基数 $\aleph_1$ 或 $2^{\aleph_0}$ (见[2] 和[7]). 对于类 A_2, 单值化和归约原则成立, 而对于 CA_2, (第一) 分离原则成立; 见**描述集合论** (descriptive set theory). 具有指标 $n\geqslant 2$ 的每一射影类在 $\mathscr{A}$ **运算** ($\mathscr{A}$-operation) 下不变. 对于 A_n, CA_n 中的每一类, 存在一 δ-σ **运算** (δ-σ-operation), 从闭集开始使用该运算正好可以产生该类中的所有集合. 射影集 (即使第二类中的集合) 的研究是困难的. 射影集理论中的许多问题在经典意义下是不可解的, 这完全证实了如下预言 (见[6]): "在射影集域中, 排中律不是足够地强". 强集论假设的引入促进了射影集理论的进一步发展, 这些强集论假设如 MC (存在可测基数), PD (射影决定公理) 和 $V=L$ (可构造性公理 (constructibility axiom), 见 **Gödel 可构造集** (Gödel constructive set)).

在有 MC 假设下, 每一个 A_2 集是 (Lebesgue) 可测的, 并具有 **Baire 性质** (Baire property), 如果是不可数的, 则包含一非空的完满子集; 每一 A_3 集可被 A_4 集单值化.

在有 PD 假设下: a) 每一射影集是可测的, 并具有 Baire 性质, 如果是不可数的, 则包含一非空完满子集, 并且可被某射影集单值化; 更确切地, 对于类 A_{2n} 和 CA_{2n+1}, 单值化原则成立. b) 对于类 A_{2n} 和 CA_{2n+1}, 归约原则成立, 于是对于类 A_{2n+1} 和 CA_{2n} 分离原则成立.

在有 $V=L$ 假设下: a) 存在不包含非空完满子集的不可数 CA 集, 存在不可测且不具有 Baire 性质的 B_2 集. b) 对于 $n\geqslant 2$, 单值化原则对于 A_n 成立.

如果对于类 A_n 单值化原则成立, 则归约原则也成立. 当 $n\geqslant 3$ 时, 逆蕴涵在 ZFC 中不可证. 如果存在不可测的 A_2 集 (或存在不具有 Baire 性质的 A_2 集), 则存在不包含非空完满子集的不可数 CA 集. 如果每一不可数 CA 集包含非空完满子集, 则每一不可数 A_2 集亦然 (见[7]). 这里所提及的结论不仅对于空间 I 成立, 而且对于数轴也成立, 一般地, 对于任一完全可分度量空间均成立. 关于射影集的拓扑不变性有如下定理成立: 任一给定类中的射影集在同一空间或其他任一完全可分度量空间中的同胚象仍是同一类中的射影集.

参考文献

[1] Lusin, N. N., Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **180** (1925), 1572 – 1574.

[2] Sierpinski, W., Sur une classe d'ensembles, *Fund. Math.*, **7** (1925), 237 – 243.

[3] Kuratowski, K., Topology, I, Acad. Press, 1966 (译自法文).

[4] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1976 (译自波兰文).

[5] Sierpinski, W., Les ensembles projectifs et analytiques, Gauthier-Villars, 1950.

[6] Лузин, Н. Н., Собр. соч., 2, М., 1958, 242, 268.

[7] Jech, T. J., Set theory, Acad. Press, 1978.

[8] Hinman, P., Recursion-theoretic hierarchies, Springer, 1978.

[9] Новиков, П. С., Избр. труды, М., 1979.

[10] Козлова, З. И., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **26** (1962), 2, 223 – 260.

[11] Kantorovich, L. V. and Livenson, E. M., *Fund. Math.*, **18** (1932), 214 – 279.

[12] Martin, D. A., Descriptive set theory: projective sets, in J. Barwise (ed.): Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977, 783 – 815.

[13] Moschovaskis, Y., New methods and results in descriptive set theory, in Proc. Internat. Congress Mathematicians, Vancouver, 1974, Vol. 1, Canad. Math. Congres, 1975, 251 – 257.

[14] Кановей, В. Г., 《Докл. АН СССР》, **253** (1980), 4, 800 – 803.

[15] Любецкий, В. А., в сб.: Исследования по теории множеств и неклассич. логикам, М., 1976, 96 – 122.

[16] Kechris, A., On transfinite sequences of projective sets with an application to $\sum_2^1$ equivalence relations,

in Logic Colloquium '77 North-Holland, 1978, 155–160.

[17] Mauldin, R., Non-isomorphic projective sets, *Mathemtika*, 23 (1976), 2, 151–155.

[18] Marcus, S., Hamelsche Basis und projective Mengen, *Math. Nachr.*, 17 (1959), 3–6, 143–150.

[19] Козлова, З. И., филиппов, В. П., 《Изв. ВУЗов. Матем.》, 1978, No. 7, 33–39.

А. Г. Елькин 撰

【补注】 射影类的一个更常用的记号如下：用

Σ_n^1 表示 A_n 集的类，

Π_n^1 表示 CA_n 集的类，

Δ_n^1 表示 B_n 集的类，

这一记号反映了描述这些集合的方式：一个 Σ_n^1 集可被一公式描述，该公式（的范式）具有从 $\exists$ 开始的 n 个交替出现的量词；同理，Π_n^1 集的描述具有从 $\forall$ 开始的 n 个交替出现的量词.

亦见**描述集合论**（descriptive set theory），尤其是其中的[A9].

赵希顺 译

射影空间 [**projective space**; **проективное пространство**]

关联系统（incidence system）$\pi=\{\mathscr{P},\mathscr{L},I\}$ 的所有子空间的集合，其中集合 $\mathscr{P}$ 的元素称为点（point），集合 $\mathscr{L}$ 的元素称为线（line），而 I 是关联关系（incidence relation）. π 的一个子空间（subspace）定义为 $\mathscr{P}$ 的一个满足以下条件的子集 S：如果 $p,q\in S$ 且 $p\neq q$，则通过 p 与 q 的线上的点的集合也属于 S. 关联系统 π 满足以下要求：

1）对于任何两个不同点 p 与 q，存在唯一的线 L 使得 pIL 与 qIL；

2）每一条线至少与三个点关联；

3）如果两条不同线 L 与 M 相交于一点 p，且以下四个关系成立：qIL，rIL，sIM，lIM，则通过点偶 r,l 与 s,q 的直线相交.

称子空间 S 是由 $\mathscr{P}$ 中点的一个集合 s 生成的（generated）（记为 $S=\langle s\rangle$），如果 S 是所有包含 s 的子空间的交. 称点集 s 是独立的（independent）如果对于任意 $x\in s$ 有 $x\notin\langle s\setminus\{x\}\rangle$. 子空间 S 的一个有序的极大且独立的点集称为 S 的一个基（basis），并且它的元素的个数 $d(S)$ 称为子空间 S 的维数（dimension）. 0 维子空间是点，1 维子空间是**射影直线**（projective straight line），2 维子空间称为**射影平面**（projective plane）.

射影空间中定义了空间的加与交的运算. 两个子空间 P_m 与 P_k 的和 P_m+P_k 定义为既包含 P_m 又包含 P_k 的最小的子空间. 两个子空间 P_m 与 P_k 的交 $P_m\cap P_k$ 定义为既包含在 P_m 中又包含在 P_k 中的最大的子空间. 子空间 P_m，P_k，它们的和与它们的交的维数由以下关系联系：

$$m+k=d(P_m\cap P_k)+d(P_m+P_k).$$

对任意 P_m，存在 P_{n-m-1}，使得 $P_m\cap P_{n-m-1}=P_{-1}=\emptyset$，$P_m+P_{n-m-1}=P_n$（$P_{n-m-1}$ 是 P_m 在 P_n 中的一个补），并且如果 $P_m\subset P_r$，则

$$(P_m+P_k)\cap P_r=P_m+P_k\cap P_r$$

对任意 P_k 成立（Dedekind 法则（Dedekind rule）），即，关于刚引入的运算，射影空间是一个**有补模格**（modular lattice）.

维数超过 2 的射影空间是 Desargues 的（见 **Desargues 假定**（Desargues assumption）），从而同构于一个适当的除环（skew-field）k 上的（左或右）射影空间.（例如）一个除环 k 上的 n 维左射影空间 $P_n^l(k)$ 是 k 上 $(n+1)$ 维左线性空间 $A_{n+1}^l(k)$ 的线性子空间的集合；$P_n^l(k)$ 的点是 $A_{n+1}^l(k)$ 的线，即由 k 的不同时为零的元素组成的行 $(x_0,\cdots,x_n)$ 的左等价类（两行 $(x_0,\cdots,x_n)$ 与 $(y_0,\cdots,y_n)$ 是左等价的，如果存在 $\lambda\in k$，使得 $x_i=\lambda y_i$，$i=0,\cdots,n$）；子空间 $P_m^l(k)$ $(m=1,\cdots,n)$ 是 $(m+1)$ 维子空间 $A_{m+1}^l(k)$. 有可能在一个左 $P_n^l(k)$ 与一个右 $P_n^r(k)$ 射影空间之间建立一个对应，在此对应下子空间 $P_s^l(k)$ 对应于 $P_{n-s-1}^r(k)$（子空间 $P_s^l(k)$ 与 $P_{n-s-1}^r(k)$ 称为互相对偶的（dual）），子空间的交对应于和，并且和对应于交. 如果一个只基于线性子空间、它们的交与和的性质的断言对于 $P_n^l(k)$ 是真的，那么对应的断言对于 $P_n^r(k)$ 也是真的. 空间 $P_n^r(k)$ 与 $P_n^l(k)$ 的性质之间的这个对应称为射影空间的对偶原理（duality principle）（见[2]）.

一个有限除环必是交换的；因而，一个维数超过 2，阶为 q 的有限射影空间同构于 **Galois 域**（Galois field）上的射影空间 $PG(n,q)$. 有限射影空间 $PG(n,q)$ 包含 $(q^{n+1}-1)/(q-1)$ 个点与 $\prod_{i=0}^{r}(q^{n+1-i}-1)/(q^{r+1-i}-1)$ 个 r 维子空间（见[4]）.

射影空间的一个直射变换（collineation）是它的点的一个置换，将线映到线，从而子空间映到子空间. 射影空间的一个非平凡直射变换最多有一个中心且最多有一个轴. 有限射影空间 $PG(n,p^h)$ 的直射变换群的阶为

$$h\,p^{hn(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n+1}(p^{hi}-1).$$

每一个射影空间 $PG(n,q)$ 容许有一个循环传递的直射变换群（见[3]）.

射影空间的一个对射变换（correlation）δ 是子空间的一个置换，使得包含关系逆转，即，如果 $S\subset T$，则 $S^\delta\supset T^\delta$. 一个射影空间容许有对射变换仅当它是

有限维的．阶为 2 的对射变换，也称为**配极**(polarity)，在射影几何学里起着重要的作用．

参考文献

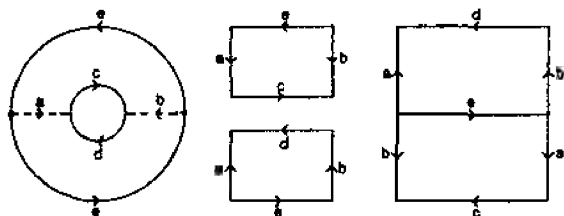
[1] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.
[2] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 1, Cambridge Univ. Press, 1947.
[3] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.
[4] Segre, B., Lectures on modern geometry, Cremonese, 1961. В. В. Афанасьев 撰

【补注】 通过 $\mathbf{R}^{n+1}(\mathbf{C}^{n+1})$ 中原点的所有的实(复)直线构成的实(复)射影空间 $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}))$ 是 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold) $G_{n+1,1}(\mathbf{R})=\mathrm{Gr}_1(\mathbf{R}^{n+1})$, $(G_{n+1,1}(\mathbf{C})=\mathrm{Gr}_1(\mathbf{C}^{n+1}))$.

$\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ 有一个对每一个偶数维恰有一个胞腔 e_{2m} 的 CW 分解，因而，它的同调是 $H_{2i}(\mathbf{P}_n(\mathbf{C});\mathbf{Z})=\mathbf{Z}$ 对于 $i=0,\cdots,n$ 与 $H_{2i+1}(\mathbf{P}_n(\mathbf{C});\mathbf{Z})=0$ 对于 $i=0,\cdots,n-1$.

实射影空间有一个对每一个维数恰有一个胞腔的 CW 分解．对于奇数 $n=2m+1$，同调群是：$H_{2i}(\mathbf{P}_{2m+1}(\mathbf{R}))=0$, $i=1,\cdots,m$, $H_0(\mathbf{P}_{2m+1}(\mathbf{R}))=\mathbf{Z}$; $H_{2m+1}(\mathbf{P}_{2m+1}(\mathbf{R}))=\mathbf{Z}$; $H_{2i+1}(\mathbf{P}_{2m+1}(\mathbf{R}))=\mathbf{Z}/(2)$，其中 $i=0,\cdots,m-1$．对于偶数 $n=2m$，同调群是：$H_0(\mathbf{P}_{2m}(\mathbf{R}))=\mathbf{Z}$; $H_{2i}(\mathbf{P}_{2m}(\mathbf{R}))=0$, $i=1,\cdots,m$; $H_{2i+1}(\mathbf{P}_{2m}(\mathbf{R}))=\mathbf{Z}/(2)$, $i=0,\cdots,m-1$.

实射影平面可由将一个圆盘沿着其边界粘合到一个交叉套(crosscap)(即 **Möbius 带**(Möbius strip))的边界上得到．看清此点的一个简单方法是将 $\mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ 看成是由一个圆盘粘合它的对径边界点而得到的．于是移去一个中心圆盘并且如以下所示的切开和粘合即得．



实射影平面不能嵌入 $\mathbf{R}^3$ 内，但能嵌入于 $\mathbf{R}^4$ 内．它的 **Euler 示性数**(Euler characteristic)是 1.

参考文献

[A1] Veblen, O. and Young, J. W., Projective geometry, 1-2, Blaisdell, 1938-1946.
[A2] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952. 林向岩 译 陆珊年 校

射影谱(环的) [**projective spectrum of a ring**; **проективный спектр кольца**]

与分次环 $R=\sum_{n=0}^{\infty}R_n$(见**分次模**(graded module))相关联的概形(scheme) $X=\mathrm{Proj}(R)$．作为点集，X 是不含 $\sum_{n=1}^{\infty}R_n$ 的齐次素理想 $\mathfrak{p}\subset R$ 的集合．X 上的拓扑由以下的开集基所定义：$X_f=\{\mathfrak{p}: f\notin\mathfrak{p}\}$ 对 $f\in R_n$, $n>0$．局部赋环空间 X 的结构层 $\mathcal{O}_X$ 用下述方式在基本开集上被定义：$\Gamma(X_f,\mathcal{O}_X)=[R_{(f)}]_0$，即关于乘法系 $\{f^n\}_{n\geq 0}$ 的分式环 R_f 中的 0 次元子环．

射影谱的最重要的例子是 $P^n=\mathrm{Proj}\,\mathbf{Z}[T_0,\cdots,T_n]$．对任意的域 k，其 k 值点的集合 P_k^n 自然对应于域 k 上 n 维射影空间的点集．

如果所有的环 R_m 都可作为 R_0 模由 $R_1\otimes\cdots\otimes R_1$($m$ 个)张成，则在 $\mathrm{Proj}(R)$ 上定义了一个附加的结构．也就是说，覆盖 $\{X_f: f\in R_1\}$ 以及单位 f/g 可确定 $\mathrm{Proj}(R)$ 上的一个 Čech 1 上闭链，与此相对应的是一个**可逆层**(invertible sheaf)记为 $\mathcal{O}(1)$．$\mathcal{O}(1)$ 的 n 次张量幂 $\mathcal{O}(1)^{\otimes n}$ 通常记为 $\mathcal{O}(n)$．存在典范同态 $\varphi_n: R_n\to\Gamma(X,\mathcal{O}(n))$，它显示了环 R 的分次的几何意义(见[1])．如果 $R=k[T_0,\cdots,T_n]$，则 $\mathcal{O}(1)$ 对应于 P_k^n 的超平面截面的层．

参考文献

[1] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.
[2] Grothendieck, A., Eléments de géométrie algébnque, *Publ. Math. IHES*, 1-4(1960-1967).
В. В. Шокуров 撰

【补注】 亦见**射影概形**(projective scheme)．

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.
陈志杰 译

射影直线 [**projective straight line** 或 projective line; **проективная прямая**]

一个一维的**射影空间**(projective space)．一条射影直线，考虑为一个独立的对象，是一个闭的一维流形(manifold)．一条射影直线是一个特殊(且独特)的射影空间：在其上并不像高维射影空间那样具有有趣的关联关系．射影直线仅有的不变量是它的点的个数．一条射影直线分别称为连续的(continuous)，离散的(discrete)或有限的(finite)，如果它分别关联于一个具有连续统基数、可数基数或有限基数的点集．

一条射影直线称为有序的(ordered)，如果在其上给定了由不同点组成的点偶的分离关系．假定这个关系不依赖于点偶的顺序或点偶中点的顺序，并且任何四个不同点的组唯一地分为互相分离的两个点偶．另

外，连接五个不同点的位置公理被采用（例如见[1]）．域 R 上一条射影直线的顺序关系与域 R 的顺序关系有关．即点偶{A,B}分离点偶{C,D}，如果交比（cross ratio）$(A,B;C,D)$ 是负的；不分离，如果 $(A,B;C,D)$ 是正的．奇数 q 阶的 Galois 域（Galois field）上的有限射影直线 $PG(1,q)$ 能够类似于实射影直线而成为有序的．假定（见[4]）一个点偶{A,B}分离一个点偶{C,D}，当且仅当 $(A,B;C,D)$ 是 Galois 域 $GF(q)$ 中的一个二次剩余．

如果将射影直线嵌入于一个高维射影空间，则它获得一定的几何结构．例如，当采用射影直线是除环 k 中的不全为零的元素对的等价类的集合这一解析定义时，一条射影直线由两个不同的点唯一决定，恰好等价于射影直线到射影空间 $P_n(k)(n\geqslant 2)$ 中的一个嵌入．如果 $P_1(k)$ 是域 k 上的射影直线，那么射影直线的自同构群 $\mathrm{Aut}\,P_1(k)$ 能够以参数形式在 $P_1(k)$ 的点上表示为映射的集合：

$$k \to \frac{k^{\alpha}a+b}{k^{\alpha}c+d},\ a,b,c,d\in k,\ ad-bc\neq 0,$$

$$\alpha\in \mathrm{Aut}\,k.$$

实射影直线的代数自同构群与实双曲平面的位移群同构，并且群 $\mathrm{Aut}\,PG(1,p^h)$ 的阶等于 $h(p^{3h}-p^h)$．

在一条射影直线上，可以构建不同的几何学．例如，p 阶 Möbius 平面容许有射影直线 $PG(1,p^2)$ 上的一个解释（见[5]）．另一个传统的几何的构建是在射影直线 $P_1(k)$ 上射影空间 $P_n(k)$ 的表示（见[2]），在此表示下 $P_n(k)$ 的一点表示为射影直线 $P_1(k)$（这里 k 是一个代数闭域）上的 n 点组．

参考文献

[1] Глаголев, Н. А., Проективная геометрия, М., 1963.

[2] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）.

[3] Hughes, D. R. and Piper, F. C., Projective plane, Springer, 1973.

[4] Kustaanheimo, P., On a relation of order in geometries over a Galois field, *Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys. Math.*, **20** (1957), no. 8.

[5] Veblen, O. and Young, J. W., Projective geometry, 1, Blaisdell, 1938.

В. В. Афанасьев 撰

【补注】 由以上陈述的交比的性质得知（对于 R 上射影直线）分离关系在射影变换下不变．

如果全部的经典分离公理成立，那么坐标域 k 的特征为零，且 k 是无限的．

参考文献

[A1] Hirschfeld, J. W. P., Projective geometries over finite fields, Clarendon Press, 1979.

林向岩 译 陆珊年 校

射影变换 [**projective transformation**、**проективное преобразование**]

射影空间（projective space）Π_n 的一个到自身上的一一映射 F，保持 Π_n 的所有子空间的集合（按包含）的偏序关系，即 Π_n 的一个到自身上的映射，使得：

1）如果 $S_p\subset S_q$，则 $F(S_p)\subset F(S_q)$；

2）对于每一个 $\widetilde{S}_p$，存在一个 S_p，使得 $F(S_p)=\widetilde{S}_p$；

3）$S_p=S_q$，当且仅当 $F(S_p)=F(S_q)$．

在射影变换下，子空间的和与交都保持不变，点映到点，并且点的无关性保持不变．射影变换构成一个群，称为射影群（projective group）．射影变换的例子有：**直射变换**（collineation），**透视**（perspective）与**透射**（homology）．

设空间 Π_n 被解释为一个除环 K 上的左向量空间 $A_{n+1}(K)$ 的子空间 $P_n(K)$ 的集合．A_{n+1} 到自身内的一个半线性变换（semi-linear transformation）是一个由加法群 A_{n+1} 的一个自同构 $\overline{F}$ 与除环 K 的一个自同构 φ 组成的偶对 $(\overline{F},\varphi)$，使得对于任何 $a\in A_{n+1}$ 与 $k\in K$，等式 $\overline{F}(ka)=\varphi(k)\overline{F}(a)$ 成立．特别地，半线性变换 $(\overline{F},\varphi)$ 是线性的（linear），如果 $\varphi(k)\equiv k$．一个半线性变换诱导一个射影变换 F．其逆命题是射影几何学的第一基本定理（first fundamental theorem of projective geometry）：如果 $n\geqslant 2$，则每一个射影变换 F 都是由空间 $A_{n+1}(K)$ 的某个半线性变换 $(\overline{F},\varphi)$ 诱导的．

参考文献

[1] Baer, R., Linear algebra and projective geometry, Acad. Press, 1952.

[2] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 1, Cambridge Univ. Press, 1947.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 一个射影变换也可定义为在两个方向都保持共线性质的 Π_n 的点的一一映射．

用于射影变换的其他的名称是射影性（projectivity），直射变换（collineation）．关于术语亦见**直射变换**（collineation）．

林向岩 译 陆珊年 校

投影算子 [**projector** 或 projection operator；**проектор**, **проекционный оператор**]

向量空间（vector space）上使得 $P^2=P$ 的一种**线性算子**（linear operator）P．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在西方文献中常常用术语投影（projection）以代替投影算子．亦见**投影**（projection）．

如果 P 是投影，则 $I-P$ 也是投影，且它们一起

确定了一个直和分解 $X \simeq PX \oplus (I-P)X$. 反之，一个直和分解定义了一个投影. 在 Banach 空间理论中，投影通常也要求是有界的. 给定一个可交换的投影的集合 S，在 S 上有一个偏序，定义为 $P \geqslant Q$，当且仅当 $PX \supset QX$. 两个交换投影的交（intersection）和并（union）分别是投影 PQ 和 $P+Q-PQ$. 投影的一个 Boole 代数是交换投影的这样一个集合，它包含零算子和单位算子且它在投影的交（intersection of projection）（即取最大下界）和投影的并（union of projection）（即取最小上界）下是封闭的. 这种投影的 Boole 代数在（自伴和谐）算子理论中起重要作用，见谱测度（spectral measure）和[A1].

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, Wiley-Interscience, 1988, Chapts. X; XV.

葛显良 译　鲁世杰 校

微分方程解的延拓[prolongation of solutions of differential equations; продолжаемость решений дифференциальных уравнений]

常微分方程的解可以延拓到自变量的较大区间中去的性质. 令

$$x=\varphi(t),\quad t\in I \tag{1}$$

是方程组

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x\in\mathbf{R}^n \tag{2}$$

的一个解. (2) 的解 $x=\psi(t)$, $t\in J$ 称为解 (1) 的延拓（prolongation of solution），如果 $J\supset I$ 而且对于 $t\in I$, $\psi(t)\equiv\varphi(t)$.

设函数

$$f(t,x)=(f_1(t,x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_n(t,x_1,\cdots,x_n))$$

定义于区域 $G\subset\mathbf{R}^{n+1}_{t,x}$ 中且设 $t_0\in I$. 解 (1) 称为可无限延拓的（indefinitely extendible）（或可向前（向右）无限延拓的（indefinitely extendible forwards (to the right)），可向后（向左）无限延拓的（indefinitely extendible backwards (to the left))），如果它有一个延拓存在于全轴 $-\infty<t<\infty$（或分别存在于半轴 $t_0\leqslant t<\infty$; $-\infty<t\leqslant t_0$））上. 解 (1) 称为可向前（向右）延拓到 G 的边界 Γ（extendible forwards (to the right) up to the boundary），如果它有一个具有以下性质的延拓 $x=\psi(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_+<\infty$ 存在：对任一紧集 $F\subseteq G$ 均有一值 t_F 存在，$t_0<t_F<t_+$，使点 $(t_F,\psi(t_F))$ 不属于 F. 可向后（向左）延拓到边界 Γ 也可类似地定义. 不能拓展的解称为不可延拓的（non-extendible）.

若函数 $f(t,x)$ 在 G 中连续，则 (2) 的每个解 (1) 均可向前（向后）延拓，或为无限延拓，或为拓展到边界 Γ. 换言之，(2) 的每个解均可延拓成为一不可延拓解. 若偏导数

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\ i,j=1,\cdots,n \tag{3}$$

均在 G 中连续，则此延拓是唯一的.

若 (2) 之一解可延拓到区间 J 但不能延拓到更大的区间，则 J 称为此解的最大存在区间（maximal interval of existence）. 若线性方程组

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j+f_i(t),\ 1\leqslant i\leqslant n$$

之系数 $a_{ij}(t)$ 和右方的 $f_i(t)(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 的最大连续区间是 J，则其任一解的最大存在区间也是 J. 对于非线性方程组，最大存在区间可以因解而异，决定最大区间是一件困难的事. 例如对于 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）

$$\dot{x}=x^2,\ x(t_0)=x_0$$

之解，当 $x_0<0$ 时有

$$J=(t_0+x_0^{-1},\ \infty),$$

当 $x_0>0$ 时有

$$J=(-\infty,\ t_0+x_0^{-1}),$$

而当 $x_0=0$ 时有

$$J=(-\infty,\ \infty).$$

下面的 Wintner 定理（Wintner theorem）就是可以指出解的最大存在区间的充分条件之一例：设函数 $f(t,x)$ 对 $t\in J=[t_0,t_0+a]$, $x\in\mathbf{R}^n$ 为连续，且在此区域中满足以下估计式

$$|f(t,x)|\leqslant L(|x|),$$

其中 $L(r)$ 当 $r\geqslant0$ 时为连续，$L(r)>0$，且对某个 $\delta(0\leqslant\delta<\infty)$ 有

$$\int_\delta^\infty\frac{dr}{L(r)}=+\infty,$$

则 (2) 的每个解都在全区间 J 上存在.

这个定理当 $J=[t_0,\infty)$ 时也成立. 解的无限可延拓性的充分条件是很有意义的问题. 例如若 $f(t,x)$ 及其偏导数 (3) 都在 $t_0\leqslant t<\infty$, $x\in\mathbf{R}^n$ 连续，且对于 t, x 的这些值，估计式

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\leqslant c(t)<\infty,\ i,j=1,\cdots,n$$

成立，则 (2) 的适合 $x(t_0)=x_0$ 的解对于任意 $x_0\in\mathbf{R}^n$

都在 $t_0 \leqslant t < \infty$ 中存在.

考虑自治系统(autonomous system)的 Cauchy 问题

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

其中 $f(x)$ 在区域 $G \subset \mathbf{R}^n_x$ 中连续可微. 若当 t 增长时(4)的解 $x=\varphi(t)$ 的相轨道停留在紧子集 $F \subset G$ 内, 则此解必可拓展到半轴 $t_0 \leqslant t < \infty$ 上.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970 (中译本: 庞特利雅金, 常微分方程, 上海科学技术出版社, 1962).

[2] Арнольд, В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971 (中译本: В. И. 阿诺尔德, 常微分方程, 科学出版社, 1985).

[3] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性理论, 上、下, 科学出版社, 1956, 1959).

[4] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[5] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[6] Cesari, L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Springer, 1959.

[7] Wintner, A., The non-local existence problem of ordinary differential equations, *Amer. J. Math.*, 67 (1945), 277–284.

М. В. Федорюк 撰

【补注】 目前在英文中, "解的延拓"一词, 常写作 "continuation of solutions" 而非 "prolongation of solutions".

齐民友 译

预正规子群 [pronormal subgroup; пронормальная подгруппа]

群(group) G 的满足下列条件的子群 H: 若 K 是 G 中与 H 共轭的子群, 则 K 在由 H 和 K 所生成的子群内与 H 共轭(见**共轭元**(conjugate element)). 有限群内的 Sylow 子群, 有限可解群内的 Hall 子群和 Carter 子群都是预正规的(见 **Sylow 子群**(Sylow subgroup); **Hall 子群**(Hall subgroup); **Carter 子群**(Carter subgroup)). 预正规子群的概念与 **AB 正规子群**(abnormal subgroup)的概念密切相关. 每个 AB 正规子群是预正规的, 而每个预正规子群的正规化子(见**正规化子**(normalizer))是 AB 正规的.

参考文献

[1] Шеметков, Л. А., Формации конечных групп, М., 1978.

В. Д. Мазуров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1982.

李慧陵 译

证明 [proof; доказательство]

为确定某一命题(陈述、定理)的真实性而按照某些规则进行的推理; 证明的根据是一些原始陈述(公理). 然而, 它也可以根据以前已被证明的命题. 任何证明都是相对的, 因为它是在某些不可证明的假设的基础上进行的. 推理规则和证明方法构成逻辑学的主要论题. 见**证明论**(proof theory).

А. С. Кузичев 撰 杜小杨 译

证明论 [proof theory; доказательств теория]

数理逻辑(mathematical logic)的一个分支, 讨论数学中证明的概念以及这概念在科学和技术各领域中的应用.

在广泛意义下, 证明(proof)是判定某给定断言正确性的一种方法. 证明在多大程度上令人信服, 主要依赖于证实真理所使用的方法. 因此, 在精确科学中规定了一些条件, 在这些条件下可以认为某一实验事实已经证实(实验的可重复性, 实验技术的清楚描述, 实验的精确程度以及所使用的仪器设备等等). 在数学中, 研究的**公理方法**(axiomatic method)是特别的, 证明的方法在其发展的初期阶段就充分精确地建立了. 在数学中, 一个证明是由先前推导出的断言推导另一断言的过程, 并且这样的推导方法可以精确地加以分析.

证明论的起源可追溯到古代(初等几何中的推理方法, Aristoteles 的三断论等等), 但现代证明论肇始于 19 世纪末 20 世纪初, 随着 G. Frege, B. Russel, A. N. Whitehead, E. Zermelo, 还有, D. Hilbert 的研究而发展起来. 在那时, G. Cantor 的集合论研究产生了**悖论**(antinomy), 使人们甚至对关于任何集合的最简单的考虑的正确性都产生怀疑. L. E. J. Brouwer 严厉地批评了数学中证明存在某种对象的经典方法, 并提出了基于**直觉主义**(intuitionism)的数学基础的重构. 关于数学基础的问题一时变得相当重要. Hilbert 提出将实际数学的一部分分离出来, 成为有限数学(finitary mathematics), 从悖论的出现和直觉主义的批评来看, 这不会被反对的. 有限数学只讨论**构造对象**(constructive object), 例如自然数, 以及与**潜在可实现性抽象**(abstraction of potential realizability)一致的推理方法, 但不涉及**实无穷抽象**(abstraction of actual infinity). 特别地, 限制使用**排中律**(law of the excluded middle). 在有限数学中, 没有出现悖论, 并且也没有理由希望悖论在有限数学中出现. 从哲学上讲, 比起一般集合论数学中的推理方法有限数

学的推理方法更令人满意地反映了现实活动的构造过程．Hilbert 的想法是用有限数学作为经典数学所有主要分支的坚实基础．他相应地提出了他的形式化方法（formalization method），这是证明论的基本方法之一．

粗略地讲，形式化方法可以描述如下．首先形式化一个逻辑－数学语言（对象语言）L，由此可以将给定的数学理论 T 中的断言表示为公式．然后描述一类 L 的公式集 A，称为理论 T 的公理，并描述**推导法则**（derivation rule），由此可以将给定的一些公式转化为另一些公式．公理和推导法则统称为公设（postulate）．形式理论 T^*（根据不同术语，也称为**演算**（calculus））是由公设的刻画所定义的．由形式理论的公理用它的推导规则得出的公式称为在该理论中可推导的（deducible）或可证明的（provable）．推导过程本身也可以形式化为**推导树**（derivation tree）．从数学理论 T 的内容来看，T^* 是有特殊意义的，如果 T^* 的公理是 T 的真命题，并且通过推导规则真命题仍变为真命题．在这种情况下，T^* 可以看作是 T 的部分精确化，而 T^* 中推导的概念可以看作是 T 中证明的非形式思想的一个更精确的形式，至少在该演算 T^* 形式化的框架内是这样的．这样，在构造演算 T^* 时，首先必须说明什么样的公设从理论 T 的角度来看是合适的．然而这并不意味着在这阶段必须使用 T 的语义，但允许使用实际习惯，包括公设中最有用的或最具理论意义的事实．演算 T^* 中的推导描述的精确性使得在其研究中可能使用数学方法，并给出理论 T 的命题以及性质．

证明论包含数学理论形式化的标准方法．演算的公理和推导法则通常分为逻辑的和应用的．逻辑的公设用来产生的真命题主要是因为其形式，而不依赖于形式化的理论．这些公设定义了形式理论的逻辑，并形式化为**命题演算**（propositional calculus）或**谓词演算**（predicate calculus）（亦见**逻辑演算**（logical calculus）；**数理逻辑**（mathematical logic）；**直觉主义**（intuitionism）；**构造逻辑**（constructive logic）；**严格蕴涵演算**（strict implication calculus））．应用的公设是用来描述有关给定数学理论的特征的真理．例如，公理集合论中的**选择公理**（axiom of choice）；初等算术中归纳模式（见**数学归纳法**（mathematical induction））；和直觉主义分析中的**坝归纳**（bar induction）．

数学基础的 Hilbert 计划可以描述如下．可以希望任何数学理论 T，不管如何复杂或抽象（例如集合论的基础部分），都可以形式化为一个演算 T^*，并且演算的形式本身只要求有限数学．此外，由纯有限方法分析 T^* 的结论试图证明 T^* 的**相容性**（consistency），并且因而证明 T 中不存在悖论，至少那些反映在 T^* 的公设中的部分不存在悖论．直接结果是，就平常形式化方法而言，一些非常简单命题（用 Hilbert 的术语——实际命题（real statement））在 T^* 中可推导只有当它们在有限意义下是真的．起初希望实际上所有经典数学都可以用有限方法刻画，并且它的相容性也能用有限方法证实．这个计划的不可行性是由 K. Gödel 于 1931 年证明的，他证明了在一些自然假设下，不可能证明 T^* 的相容性，甚至用在 T^* 中形式化的强有力的工具，亦如此．因而，各种形式演算的研究在数学基础中仍是一个非常重要的方法．首先，以其相容性作为导引，对构造演算来重新产生现代数学的重要分支是有意义的，即使不可能用对所有数学家可接受的方法证明这演算的相容性．这样演算的一个例子是 Zermelo-Fraenkel 的集合论系统，在该系统中所有现代集合论数学的结果都可以推导出．在这理论是相容的假设下所得到的几个基本假设在这个理论中不可推导性的证明（见**公理集合论**（axiomatic set theory）；**力迫法**（forcing method））表明这些假设不依赖于数学中所接受的集合论原理．这可以看作是确定了这样的观点：现有概念不足以证明或反证所考虑的假设．正是在这意义下，P. Cohen 证明了 Cantor 的连续统假设的独立性．

其次，对由有限方法证明了相容性的演算类进行了广泛的研究．这样，1932 年 Gödel 提出了将经典算术演算可推导的公式转变为直觉主义算术演算可推导的公式的**翻译**（translation）（即前一演算在后一演算中的解释）．如果后者认为是相容性（例如借助于它的自然有限解释），那么经典算术演算也是自相容的．

最后，期望研究从其他某种角度来看是满意的，又比 Hilbert 传统有限主义更广的方法．这样，在潜可实现性的框架中，可以使用所谓的一般归纳定义．这样就可以用半形式理论，其中某些推导法则有无穷（但可构造产生的）的假设集，并且将许多语义结论转换为有限数学．这过程产生了 П. С. Новиков (1943) 得出的结论，用有限类型的能行泛函建立经典算术的相容性；C. Spector (1961) 的结论，通过扩展证明的自然直觉方法使之包括有限类型的直觉主义能行泛函，证明经典分析的相容性；以及 A. A. Марков (1971) 的结论，用一般归纳定义建立构造语义学．此外，演算中的许多重要问题也可以在数学基础之外讨论．这包括形式理论的完全性和可解性问题，一个给定形式理论的某些命题的独立性问题等等．当使用任何令研究者信服的证明的数学方法时，不必限制推导中的确定方法，并允许将证明理论发展为一个普通的数学理论．

所考虑的语言中公式的一个严格定义的**语义**（semantics），即一个严格定义在这语言中命题的意义，是研究演算的一个工具，有时甚至是引入新演算的推动力．

如经典命题演算的语义：重言式且只有重言式在这样的演算中可推导出来．在一般意义下，为证明某一公式 A 在一个演算 T^* 中不可推导，只需构造这个理论的语言的公式的一个语义使得所有 T^* 中的可推导公式在这语义下是真，但 A 是假的．一个语义可以是经典的，直觉主义的或者其他类型的，依赖于必须与其一致的逻辑公设．在研究经典演算中成功地使用了非经典语言——如 Cohen 的力迫关系可以自然地看作是直觉主义语义的一个修改．在 Cohen 理论的另一个形式中使用了多值语义；这些是真假值取自于一个完全 Boole 代数中的模型．另一方面，由经典集合论方法定义的 **Kripke 模型**（Kripke models）式的语义可以阐明模态、非标准逻辑（包括直觉主义逻辑的）的许多性质．

证明论广泛使用模型论（model theory）中的代数方法．将每个语言的每个初始符号与某代数对象对应的代数系统自然定义了语言的某种经典语义．一个代数系统称为形式理论 T^* 的模型（model of the formal theory），如果 T^* 中所有可推导的公式在这代数系统所生成的语义中是真的．Gödel 于 1931 年证明了任何相容的（经典逻辑）演算均有一个模型．А. И. Мальцев 后来独立地证明了如果一个演算的任何有穷部分有模型，则整个演算也有一个模型（即所谓的一阶逻辑的紧性定理（compactness theorem of first-order logic））．这两个定理是数理逻辑发展的基础．

算术的非标准模型说明自然数的概念在一阶理论的框架中是不可公理化的，并且数学归纳法原理独立于其他算术演算的公理．经典数学中一个集合的基数的概念在研究形式理论的可数模型中揭示了它的相对本质，它的解释基于平凡不可数模型（所谓的 Skolem 悖论）．许多语法结论起初都是由模型论方法得到的．借助于模型论的构造可以给出证明论中许多有意义的概念的简单准则．这样，根据 Scott 的准则，一个给定语言的代数系统类 K 是可公理化的，当且仅当它关于超积、同构和初等子系统是封闭的．

一个形式理论称为可判定的（decidable），如果存在一个算法判定任何一个公式 A 是否在这理论中是可推导的．可以证明，包含**递归函数**（recursive function）理论的某一部分的形式理论是不可判定的．因此，初等算术，Zermelo-Fraenkel 系统和许多其他理论也是不可判定的．证明论也使用一个理论在另一个理论中解释这一强有力的方法；这样的解释可以用来证明几个非常简单的、递归演算不能在其中直接解释的演算的不可判定性．这样的例子有初等群论，两个等价关系的理论，和分数序的基础理论等等．另一方面，也有一些有趣的可判定理论，例如初等几何，实数的初等理论和有唯一后继运算的自然数集理论．一个理论的可判定性是由模型论的和语法的方法来证明的．语法的方法常产生更简单的判定算法．例如，p 进数的初等理论的可判定性首先是用模型论的方法证明的．因此用某种形式的量词消除的语法方法可找到一个原始递归算法来识别这个理论的可判定性．估计理论的可判定算法的复杂性是相当重要的．作为一个规则，对可判定理论可以用原始递归的解算法，并且问题是找更精确的复杂性界．这方面研究所期望的方向是已知形式理论的实在部分的可判定性．与其相关，进一步研究了经典谓词演算，对所有可判定和不可判定的公式类，利用公式中的量词位置和出现在公式中的谓词符号的形式，作了能行描述．已描述了许多算术演算和初等集合论的可判定部分．

估计推导的复杂性方法吸引着研究者．这方面的研究产生了如，找以复杂形式可推导的相对短的公式，或以相对简单方式产生大量结论的公式，等的问题．这样的公式必须看作是表示理论中事实的"深度"．研究证明的复杂性的自然测度：证明的长度；找一个解所需要的时间；在证明中所用到的公式复杂性，等等．这是介于证明论和理论控制论的方法之间的研究领域．

参考文献

[1] Kleene, S. C., Mathematical logic, Wiley, 1967.
[2] Fraenkel, A. and Bar-Hille, Y., Foundations of set theory, North-Holland, 1958.
[3] Ершов, Ю. Л. и др., 《Успехи матем. наук》, 20 (1965), 4, 37 – 108.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Takeuti, G., Proof theory, North-Holland, 1975.
[A2] Girard, J.-Y., Proof theory and logical complexity, 1, Bibliopolis, 1987.
[A3] Bell, J. and Machover, M., A course in mathematical logic, North-Holland, 1977.
[A4] Manin, Yu. I., A course in mathematical logic, Springer, 1977（译自俄文）.
[A5] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977.

陆跃飞 译

真闭链[proper cycle; истинный цикл]，度量空间中的当 $k \to \infty$ 时满足 $\varepsilon_k \to 0$ 的一列 ε_k 闭链 $z^n = (z_1^n, z_2^n, \cdots)$（见 **Vietoris 同调**（Vietoris homology））．一个真闭链的所有单形的所有闭链的所有顶点所在的紧集称为 z 的紧支集（compact support）．若 $f: X \to X$ 是连续映射，则 $f(z)$ 也是真闭链，f 的形变诱导出真闭链的形变（deformation of the proper cycle）．

见 **Vietoris 同调**．

А. А. Мальцев 撰 潘建中 译 沈信耀 校

真态射 [**proper morphism**; **собственный морфизм**]

一个可分的,泛闭的,有限型的概形态射. 称概形态射 $f:X\to Y$ 是闭的(closed),意指对任意闭子集 $Z\subset X$,$f(Z)$ 是 Y 的闭子集. 称 f 是泛闭的(universally closed),则指对任意**换基**(base change) $Y'\to Y$,态射 $X\times_Y Y'\to Y'$ 是闭的. 真态射性在合成、换基和取 Descartes 积下保持不变. 真态射与投射态射密切相关:任意投射态射是真态射,而真的拟投射态射是投射的. 任意真态射均被一个投射态射支配(周(炜良)引理(Chow lemma)). 亦见**完全代数簇**(complete algebraic variety);**投射概形**(projective scheme).

真态射有一些好的上同调性质. 1) 若 $f:X\to Y$ 是真态射,F 是 O_X 模的**凝聚层**(coherent sheaf),则对任意 $q\geqslant 0$,O_X 模层 $R^qf_*(F)$ 是凝聚的(有限性定理(finiteness theorem)). 类似的事实对平展上同调亦成立. 特别地,若 X 是域 k 上的完全概形,则上同调空间 $H^q(X,F)$ 是有限维的. 2) 对任意点 $y\in Y$,$O_{X,y}$ 模 $R^qf_*(F)_y$ 的完备化重合于

$$\varprojlim_n H^q(f^{-1}(y),\ F/J^{n+1}F),$$

此处 J 是 X 的子概形 $f^{-1}(y)$ 的理想(比较定理(comparison theorem)). 3) 若 X 是完全局部环 A 上的真概形,则 X 上以及它的形式完全化 $\hat{X}$ 上的凝聚层范畴是等价的(代数化定理(algebraization theorem)). 第一和第三条性质有解析模拟. 例如(见[3])对于一个完全 C 概形 X,在 $X(C)$ 上的任意**凝聚解析层**(coherent analytic sheaf)是可代数化的,且

$$H^q(X,F)=H^q(X(\mathbf{C}),F^{an}).$$

4) 令 $f:X\to Y$ 是一个真态射,F 是 X 的平展拓扑中的有限 Abel 群的层,ξ 是概形 Y 的一个几何点. 这时,层 $R^qf_*(F)$ 在 ξ 点的纤维同构于 $H^q(f^{-1}(\xi),F|_{f^{-1}(\xi)})$(换基定理(base-change theorem)见[2]).

参考文献

[1] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géometrie algébrique, *Publ. Math. IHES*, **2 - 3** (1961 - 1963).

[2] Artin, M., Grothendieck, A. and Verdier, J. L., (eds.), Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, in SGA 4, Lecture notes in math., Vol. 269; 270; 305, Springer, 1972 - 1973.

[3] Grothendieck, A. (ed.), Revêtements étales et groupe fondamental, in SGA 1, Lecture notes in math., Vol. 224, Springer, 1971.

[4] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

В. И. Данилов 撰

【补注】 概形的态射 $f:X\to Y$ 叫作局部有限型的(locally of finite type),是指 Y 有一个由仿射子概形 $V_i=\mathrm{Spec}(B_i)$ 作成的开覆盖,且对每一个 i,$f^{-1}(V_i)$ 有一个由仿射子概形 $U_{ij}=\mathrm{Spec}(A_{ij})$ 作成的开覆盖,使得 A_{ij} 在 B_i 上是有限生成的(相对于定义 $f:U_{ij}\to V_i$ 的环同态 $B_i\to A_{ij}$). 若对所有的 i,$f^{-1}(V_i)$ 的覆盖 $\{U_{ij}\}$ 均可取有限多个,则态射是有限型的.

态射 $f:X\to Y$ 叫作有限的,则指 Y 有一个仿射开覆盖 $\{V_i\}$,$V_i=\mathrm{Spec}(B_i)$,使得 $f^{-1}(V_i)$ 对所有的 i 都是仿射的,即 $f^{-1}(V_i)=\mathrm{Spec}(A_i)$,且 A_i 是有限生成的 B_i 模.

上述性质 1) 的解析模拟称为 Grauert 有限性定理,见**有限性定理**(finiteness theorems).

在拓扑学中,称拓扑空间的映射 $f:X\to Y$ 是真的,若对任意拓扑空间 Z,映射 $f\times id:X\times Z\to Y\times Z$ 是闭的. 这样,对每一个连续映射 $g:Z\to X$,基变换映射 $f:X\times_Y Z=\{(x,z):f(x)=g(z)\}\to Z$,$(x,z)\mapsto z$ 是闭映射,因而拓扑空间的真映射就是泛闭映射(universally closed mapping). 如果 Y 是局部紧的,一个连续映射 $f:X\to Y$ 是真映射,当且仅当 Y 的每个紧子集的逆象是紧的. 这里的后一条性质有时被当作定义.

令 A 是 Noether 环,且相对于 A 上的 I-adic 拓扑是完备的(和分离的),即 $A=\varprojlim_n A/I^n$. 可以在 $\mathscr{X}=V(I)=\mathrm{Spec}(A/I)\subset\mathrm{Spec}(A)$ 上定义拓扑环的层 $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$,其中 $\Gamma(D(f)\cap\mathscr{X},\mathscr{O}_{\mathscr{X}})=\varprojlim_n A_f/I^nA_f$,对 $f\in A$. 环空间 $(\mathscr{X},\mathscr{O}_{\mathscr{X}})$ 叫作 A(相对于 I)的形式谱(formal spectrum),记作 Spf (A). 定义 Noether 形式概形(formal scheme)为局部同构于一个 Noether 环的形式谱的拓扑环空间. 形式概形的态射是对应的拓扑环空间的态射.

令 X 是一个(局部)Noether 概形,Y 是一个由理想 $\mathscr{I}\subset\mathscr{O}_X$ 的层定义的闭子概形. X 沿 Y 的形式完全化(formal completion)是拓扑戴环空间 $(Y,\varprojlim_n\mathscr{O}_X/\mathscr{I}^n)$,记作 $\hat{X}$. 这是一个(局部)Noether 形式概形.

下述定理有时被称为真态射基本定理(foundamental theorem on proper morphism):令 $f:X\to Y$ 是局部 Noether 概形的真态射,$Y'\subset Y$ 是闭子概形,$X'\equiv X\times_Y Y'$ 是 Y' 的逆象. 令 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 分别是 X,Y 沿 X' 和 Y' 的形式完全化,$\hat{f}$ 是形式概形 $\hat{X}\to\hat{Y}$ 的诱导态射. 这时,对 X 上的每一个凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模 M,存在着典范同构

$$(R^qf_*(M))|_{Y'}\cong R^q\hat{f}_*(M|_{X'}),\ q\geqslant 0.$$

这个定理可以用来证明 Zariski 连通性定理(见 **Zariski**

定理（Zariski theorem））.

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Elements of mathematics, General topology, Capt. 1, § 10, Addison-Wesley, 1966（译自法文）. 张英伯 译

命题 [proposition; предложение]

语言中最简单的表达式．它由若干单词联结而成，具有独立含义，也就是说，它表示一个完整的陈述．形式语言中的命题是指没有自由变元（参量）的公式．形式语言中命题也称为闭公式（closed formula）．例如，一阶语言（狭义谓词演算的语言）中，公式

$$\forall x \forall y \exists z (x \leqslant z \& z \leqslant y),$$

$$\exists z (1 \leqslant z \& z \leqslant 4),\ 1 \leqslant 2$$

都是闭的（在自然数范围内第一式是假的，第二和第三式是真的）．公式

$$\exists z (x \leqslant z \& z \leqslant y),\ z \leqslant 1$$

都不是闭的，它含有自由变元（第一式中有 x，y，第二式中有 z）．

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956.

В. Н. Гришин 撰

【补注】 用西方的说法，术语"命题"倾向于专指语言中完全不含变元的公式（见命题演算（propositional calculus））．而术语"句子"（sentence）才用来指这样的公式，它的变元都受量词约束，如同上面所给的例子．

沈复兴 译 罗里波 校

命题演算 [propositional calculus; высказываний исчисление]

一种演绎系统的通称，其中可推出的对象可以解释成由简单（即在命题演算框架中不能分解的）语句利用命题联结词（例如"否定"，"并且"，"或"，"如果…那么"等；见**逻辑演算**（logical calculus））构成的语句．最重要的例子是经典命题演算，其中语句可以取两个值——"真"或"假"——并且可推出的对象恰为所有永真语句．命题演算之所以有趣是由于它们构成几乎所有逻辑数学理论的基础，并且常常把相对简单与内容丰富结合起来．尤其，许多理论和应用问题都可以归约到经典命题演算中的一些问题．

参考文献见**逻辑演算**（logical calculus）．

С. Ю. Маслов 撰 别荣芳 译 罗里波 校

命题演算 [propositional calculus; пропозициональное исчисление]

一种**逻辑演算**（logical calculus），其中可推出对象是**命题公式**（propositional formula）．每个命题演算由一组公理（特殊的命题公式）和**推导法则**（derivation rule）给出．在给定的命题演算中可推出的公式称为该命题演算的定理．通常采用**分离法则**（modus ponens）和替换（用任何命题公式替换变元）法则作为推导法则．有时命题演算不是由公理而是由**公理模式**（axiom scheme）给出．这时替换法则是不需要的．

经典命题演算是由下述公理给出：

1) $p \supset (q \supset p)$;

2) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$;

3) $(p \& q) \supset p$;

4) $(p \& q) \supset q$;

5) $p \supset (q \supset (p \& q))$;

6) $p \supset (p \vee q)$;

7) $q \supset (p \vee q)$;

8) $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$;

9) $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$;

10) $\neg\neg p \supset p$.

在这一命题演算中，**命题联结词**（propositional connective）$\&$，$\vee$，$\supset$，$\neg$ 不是独立的．如果取联结词 $\supset$，$\neg$ 作为基本联结词，则这一命题演算也可由 1)，2)，9) 和 10) 给出．此时，联结词 $\&$ 和 $\vee$ 成为缩写：

$$A \& B \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B),\ A \vee B \Leftrightarrow \neg A \supset B,$$

而 3) - 8) 成为定理．经典命题演算亦称为完全命题演算（complete propositional caculus），因为加入任何在其中不可推出的公式作为另外一条公理都得到一个矛盾命题演算（contradictory propositional caculus），即在其中所有命题公式是可推出的．经典命题演算通常简称为命题演算．

直觉主义（构造）命题演算（intuitionistic (constructive) propositional caculus）可以在经典命题演算中用较弱的公理

11) $\neg p \supset (p \supset q)$

代替 10）来得到．

在直觉主义命题演算中加入公理的有限（或递归）集得到的命题演算称为中间的（intermediate），超直觉主义的（superintuitionistic）或超构造的（superconstructive）．亦见**中间逻辑**（intermediate logic）．

命题演算的其他例子有：**蕴涵命题演算**（implicative propositional calculus）；**极小命题演算**（minimal propositional calculus）；和**正命题演算**（positive propositional calculus）．

命题演算的解释（interpretation of a propositonal

calculus)由形如:

$$\mathfrak{M}=\langle M, D; \&^*, \vee^*, \supset^*, \neg^*\rangle$$

的代数(矩阵)给出.这里 M 是**真假值**(truth value)集,D 是指定真假值集,$D\subset M$、而 $\&^*$, $\vee^*$, $\supset^*$, $\neg^*$ 是 M 上的运算,分别相应于联结词 &, ∨, ⊃, ¬. 集合 D 必须满足以下条件:对任何 $a, b\in D$, 如果 $a\in D$ 并且 $(a\supset^* b)\in D$, 那么 $b\in D$(与分离法则的相容性).一个公式称为在 $\mathfrak{M}$ 上普遍有效,如果它对变元的每个解释(作为 M 中元素)都在 D 中取值.最简单的矩阵是 $\mathfrak{M}_2$, 它包含两个元素 0 和 1("假"和"真")和单个指定真值 1, 运算 $\&^*$, $\vee^*$, $\supset^*$, $\neg^*$ 按通常方式定义(见**逻辑代数**(algebra of logic)).在 $\mathfrak{M}_2$ 上普遍有效的命题公式称为重言式(tautology).一个公式是重言式,当且仅当它是经典命题演算的定理.

参考文献

[1] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1, Princeton Univ. Press, 1956. C. K. Соболев 撰

【补注】 有时命题演算亦称为语句演算(sentential calculus),([A3]).

参考文献

[A1] Bell, J. and Machover, M., A course in mathematical logic, North-Holland, 1977.

[A2] Wójcicki, R., Theory of logical calculi, Kluwer, 1988.

[A3] Tarski, A., Introduction to logic, Oxford Univ. Press, 1946.

[A4] Kleene, S. C., Introduction to mathematics, North-Holland & Noordhoff, 1959(中译本:S. C. 克林,元数学导论,科学出版社,上册 1984, 下册 1985).

[A5] Strawson, P. F., Introduction to logical theory, Methuen, 1952. 别荣芳 译 罗里波 校

命题联结词[propositional connective; пропозициональная связка]

形式语言(formal language)中用于表示**逻辑运算**(logical operation)的符号,用它们可以从给定语句得到新语句.最重要的命题联结词是:合取 &(或∧),析取 ∨,蕴涵 ⊃(或→,或⇒),否定¬(或~)以及等价 ≡(或←→,或⟺).这些命题联结词在汉语中与词句"并且","或","蕴涵","不真"以及"等价于"相对应.有时考虑其他命题联结词,例如 **Sheffer 竖**(Sheffer stroke).

符号 ≡ 通常不作独立的命题联结词引入,而是作为缩写:

$$A\equiv B \Longleftrightarrow ((A\supset B)\&(B\supset A)). \qquad (1)$$

如果一个语言包含表示"不真"的命题常元 ⊥,那么否定可视为缩写:$\neg A \Longleftrightarrow (A\supset \bot)$.

在经典逻辑中命题联结词 &, ∨, ⊃ 和¬不是独立的,因为以下等价式成立:

$$A\&B\equiv\neg(\neg A\vee\neg B)\equiv\neg(A\supset\neg B) \qquad (2)$$

$$A\vee B\equiv\neg(\neg A\&\neg B)\equiv(\neg A\supset B)\equiv$$

$$\equiv((A\supset B)\supset B), \qquad (3)$$

$$A\supset B\equiv(\neg A\vee B)\equiv\neg(A\&\neg B). \qquad (4)$$

这样,命题联结词 &, ∨, ⊃ 中每一个都可以用 ¬ 和其余之一表示.因此,在确切地表达经典**命题演算**(propositional calculus)表达式时,可以选取两个命题联结词作为基本联结词:¬和 &, ∨, ⊃ 中之一;其他联结词据(1)-(4)视为缩写.在直觉主义逻辑中,&, ∨, ⊃ 和¬是独立的. C. K. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bell, J. and Machover, M., A course in mathematical logic, North-Holland, 1977.

别荣芳 译 罗里波 校

命题形式[propositional form; пропозициональная форма]

一种包含变元的语言表达式,可以用命题替换其中变元从而获得新的命题.在形式化语言中命题形式是包含命题变元自由出现的公式,该命题变元的取值在**真假值**(truth value)集中.

有时命题形式是类似于**命题公式**(propositional formula)构造的表达式,但使用**元语言**(meta-language)符号代替命题变元,并且表示**命题演算**(propositional calculus)的任何公式.

参考文献

[1] Mendelson, E., Introduction to mathematical logic, v. Nostrand, 1964.

В. Н. Гришин 撰 别荣芳 译 罗里波 校

命题公式[propositional formula; пропозициональная формула]

由**命题变元**(propositional variable))用**命题联结词**(propositional connective))&, ∨, ⊃, ¬, ≡(可能还有别的)根据下列法则构成的表示式:1)每一个命题变元是一个命题公式;2)如果 A, B 都是命题公式,那么 $(A\&B)$, $(A\vee B)$, $(A\supset B)$ 和 $(\neg A)$ 也都是命题公式.

如果 σ 是命题联结词的一个集合(片断),那么片断 σ 中的一个命题公式是指在构造法则 2)中仅仅使用 σ 中的联结词的命题公式. C. K. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ziembinski, Z., Practical logic, Reidel, 1976, Chapt. V, §5.

[A2] Wójcicki, R., Theory of logical calculi, Kluwer, 1988.

卢景波 译 罗里波 校

命题函数 [propositional function; пропозициональная функция]

一种自变数和值均为**真假值** (truth value) 的函数. 这一术语用于讨论形式化逻辑语言的解释.

如果 Ω 是给定语言中公式的真假值集, 那么命题函数是型为 $\Omega^n \to \Omega \ (n \geqslant 0)$ 的任何表达式. 这些函数解释成能构造新语句或公式的**命题联结词** (propositional connective). 在真假值集经典的二值解释中, 即当 $\Omega = \{0, 1\}$ 时, 这类函数亦称为逻辑代数函数 (function of the algebra of logic).

B. H. Гришин 撰

【补注】 命题函数亦称真假值函数 (truth function). 当 $\Omega = \{0, 1\}$ 时, 亦称 Boole 函数 (Boolean function).

多少有点等价地, 命题函数是自变数和值均为命题的函数.

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland & Noordhoff, 1959, P. 144; 226 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

别荣芳 译 罗里波 校

命题变元 [propositional variable; пропозициональная переменная]

形式语言 (formal language) 中用来表示任意语句的符号.

C. K. Соболев 撰 杜小杨 译

邻近点 [proximate point; прикосновения точка], 拓扑空间 X 中集合 A 的

一点 x, 其任何邻域均与集合 A 有非空的交集. 集合 A 的所有邻近点的集合是 A 的闭包 $[A]$ (或记为 $\bar{A}$) (见**集合的闭包** (closure of a set)).

M. И. Войцеховский 撰 胡师度 白苏华 译

邻近性 [proximity; близость]

见**邻近空间** (proximity space).

邻近空间 [proximity space; близости пространство]

一个集合 P, 在其所有子集的集合上给了一个二元关系 δ, 满足下述公理:

1) $A\delta B$ 等价于 $B\delta A$ (对称性);

2) $A\delta(B\cup C)$ 等价于 $A\delta B$ 或 $A\delta C$ (可加性);

3) $A\delta A$ 等价于 $A\neq\varnothing$ (自反性).

关系 δ 确定 P 上的一个邻近关系或简称邻近性 (proximity). 若 $A\bar{\delta}B$ ($\bar{\delta}$ 表示 δ 的否定), 则 A 和 B 称为疏远集 (remote sets). 邻近空间是 1936 年引进的 (发表于 1951 年, 见 [1]). 邻近空间的性质是**度量空间** (metric space) 的一致性质的推广, 类似于度量空间的连续性质对拓扑空间的推广. 在 [3] 中曾着手尝试引进某种有点类似于邻近性的结构, 那时**拓扑空间** (topological space) 的概念尚未完全定形, 所以没有考虑闭包而考虑**导出集** (derived set), 其中引进的集合之间的关系相当于它们有公共的 (可能是 "理想的") 接触点.

更具体的邻近性概念不仅满足公理 1) - 3), 而且也满足类似于分离公理的某些附加公理. 例如, Hausdorff 邻近性 (Hausdorff proximity) 满足下述公理: $\{x\}\delta\{y\}$ 等价于 $x=y$ (这时不用 3) 只需用它的推论 $\varnothing\bar{\delta}\varnothing$ 即可); 正规邻近性 (normal proximity) 满足下述公理: 若 $A\bar{\delta}B$, 则存在互不相交的集合 U 和 V, 使得 $A\bar{\delta}(P\setminus U)$ 和 $B\bar{\delta}(P\setminus V)$.

邻近空间诸公理是用闭包 (即集合与点的邻近) 表达的拓扑空间诸公理的自然对称化. 这些公理得以出现, 首先要证明度量空间之间的映射 $f: M_1\to M_2$ 的下述性质正好等价于它的**一致连续性** (uniform continuity): M_1 中距离为零的任何两个集合在 M_2 中的象也是无限接近的. (类似的拓扑性质 $f[K]\subset[fK]$, 这里 $[K]$ 是 K 的闭包, 有时也作为连续性的定义.) 因此, 集 P 上的任何度量 dist 产生 P 上的一个邻近关系 δ ($A\delta B$ 等价于 $\mathrm{dist}(A,B)=0$), 并且 δ 连续性等价于一致连续性 ([2]); 邻近空间如果能配备这样的度量则称为可度量化的 (metrizable). 邻近关系产生一个**拓扑结构** (**拓扑**) (topological structure (topology)): 集合 K 的闭包定义为 $[K]=\{x\,|\,\{x\}\delta K\}$. 映射的 δ 连续性蕴涵它在这种拓扑下的连续性. 产生同样拓扑结构的邻近空间不一定是 δ 同构的; 例如, Euclid 空间与 Лобачевский 空间不是 δ 同构的, 但却是同胚的 ([2]). Hausdorff 邻近关系产生 Hausdorff 拓扑结构; 相反, 正规邻近关系只产生完全正则的拓扑结构 (见**完全正则空间** (completely-regular space)): 互不相交的闭集不必是疏远集. 此外, 任何完全正则拓扑结构均可由正规邻近关系产生, 并且就紧空间而言, 这种邻近关系是唯一确定的. 由于邻近空间中任何两个疏远集均可由 δ 连续函数分离 ([2]), 所以疏远集在其拓扑结构意义下是函数分离的; 逆命题为真的邻近空间是已知的 Stone-Čech 邻近空间 (Stone-Čech proximity space).

由于邻近空间拓扑结构的出现, 随之产生了邻近

关系的某些推广．通常是把正规性公理换成某个较弱的公理．例如，Lodato 邻近性（Lodato proximity）：若 $A\bar{\delta}B$，则 $A\bar{\delta}[B]$；Федорчук 邻近性（Fedorchuk proximity）（θ 邻近性）：$A\bar{\delta}B$ 等价于存在开集 $C\supset A$，其闭包的内部 $\mathrm{Int}[C]$ 与 A 重合，并且 $A\bar{\delta}(X\setminus[C])$；等等．

邻近空间这个概念的自然性也表现在下述事实：任何邻近空间都有唯一的紧化（compactification）；因此，同胚的邻近空间和它们产生的拓扑空间的紧化之间存在一一对应关系．δ 连续映射（δ-continuous mapping）是一个映射 $f:P\to Q$，使得对任何 $A,B\subset P$，$A\delta B$ 蕴涵 $fA\delta fB$；只有这样的映射才能扩张为紧化之间的连续映射 $\bar{P}\to\bar{Q}$．这些结果是 Ю．М．Смирнов（[4]）首先用邻近空间的语言提出的，但实际上早在 1948 年就由 P．Samuel 证明了．Samuel 在研究一致空间的紧化时发现（[10]），并非任何而只是某些一致空间（即所谓准紧空间（pre-compact space），即具有紧完全化的空间）才能一致连续地嵌入紧统．但是每个一致空间均有唯一的紧化（S 反射）$r:P\to SP$（逆映射连续但不必一致连续），并且某种类型的所有邻域，例如，形如 $P\times P\setminus A\times B$ 的所有邻域，均可扩张到这个紧化上．这样一来，一致结构可以分成等价类：两个一致结构等价，如果它们有同样的 S 反射．**一致空间**（uniform space）中的邻近关系由下述条件给出：$A\delta B$，如果对任何邻域 Ω，关系 $(A\times B)\cap\Omega\neq\varnothing$ 成立；构造出来的嵌入映射，就象上述等价关系一样，是一个 δ 同构（δ-isomorphism），即 δ 连续的一一映射．

邻近空间与其紧化之间一一对应关系的发现，使得在其后相当长的时期内，人们竭力研究的主要是可以直接借助于紧化的这些空间的特殊性质，例如，维数 δd（不是 Δd）（[6]），邻近权，邻近连通性，等等．邻近连通性的一条简单性质，即 $A\times(P\setminus A)\neq\varnothing$ 蕴含 $A\delta P\setminus A$，是 G．Cantor 首先注意到的．Cantor 把连续统（不是后来引进的 Cantor 连续统！）定义为 E^n 中的邻近连通的完全子空间．原则上说，邻近空间 P 的所有性质尽管都包容到嵌入映射 $P\to\bar{P}$ 中，但是必须记住，这些性质绝对不一定都包容到 $\bar{P}$ 本身的性质中了；其次，还不知道例如可度量化性、完全性、正则性这样一些 P 的性质相当于嵌入映射 $P\to\bar{P}$ 的那些特殊性质．邻近空间的价值在于它可以用来研究紧化，但反之不然．邻近空间的性质如果不能直接用拓扑语言来说明，则称为一致（uniform）性质．邻近空间得到系统研究的第一个一致性质是完全性：借助于紧化引进 Cauchy 滤子或基本序列的尝试未能成功．

邻近空间 P 的覆盖（见覆盖（集合的）（covering (of a set)））ω 称为一致覆盖（uniform covering），如果它是某个星形加细的覆盖序列：$\omega\gg\omega_1\gg\omega_2\gg\cdots$（即是 $\mathrm{St}(x,\omega_{n-1})\subset U\in\omega_n$）之首，并且其中任何一个都不隔开邻近的集合，即是总有 $L\bar{\delta}P\setminus\mathrm{St}(L,\omega_n)$．

邻近空间的一致覆盖的集合重合于与该空间相容的所有一致结构的并集（[4]）．一致覆盖也可以定义为在映入度量空间的一切可能的 δ 连续映射下，Lebesgue 数为正的覆盖的逆象．

利用 Cauchy 滤子（Cauchy filters）（即是滤子 Φ，对任何一致覆盖 ω 有 $\Phi\cap\omega\neq\varnothing$）定义的完全性符合直观概念，并且就度量空间而言，与度量完全性一致．一个邻近空间是完全的，其充分条件是：与之相容的任何一致空间是完全的．这是否也是必要条件尚属未知；不管怎样，反例只能由不恰当邻近空间（见下）提供．在[5]中已经构造出邻近空间的一些完全化，即是最小（但不再是唯一的）完全化；同时，这些完全化也是下述意义下最大的完全化：任何一致覆盖均可完全扩张为一致覆盖，并且映入完全邻近空间的所有 δ 连续映射均可扩张（换言之，完全邻近空间的子范畴以及紧空间的子范畴都是**自反子范畴**（reflective subcategory）．具有紧完全化的空间（即准紧空间）的特点是：从其每个一致覆盖中可以选出有限的一致子覆盖．

邻近空间 P 和 Q 的积最初是从它们的紧化的拓扑积 $\bar{P}\times\bar{Q}$ 出发，在集合论意义下的积上引进邻近关系来定义的．这样的积，尽管重合于邻近空间范畴意义下的积，但在几何上却不方便，主要用来构造一些稀奇古怪的例子．例如，两个无限的离散空间的这种积（通常记为 $P\cdot Q$）并不是离散的，甚至不可度量化；两条直线的积是不可度量化的，并且是迷向平面："平面"的一个锐角旋转不是 δ 同构，等等．

两个（同样，任意多个）邻近空间 P 和 Q 的邻近积（proximity product）是满足下述条件的具有最粗糙邻近关系的积（[7]）：两个因子的一致覆盖的所有 Descartes 积，即是所有形如 $\omega(\times)\psi=\{U\times V:U\in\omega,V\in\psi\}$ 的覆盖，都是一致覆盖．要求两个投影 $P\times Q\to P$ 和 $P\times Q\to Q$ 都是 δ 连续的，这等价于对有限一致覆盖的相应条件．与邻近空间不同，就一致空间而言，这两个定义是等价的，因为在邻近空间的范畴中，度量空间的子范畴关于 Descartes 积不是闭合的，尽管在拓扑空间及一致空间的范畴中是闭合的．邻近积可以理解为积函子从可度量化邻近空间的子范畴到所有邻近空间的自然推广，即是说，积 $Q_1\times Q_2$ 的邻近关系是下述条件下最粗糙的邻近关系：如果 $M_i(i=1,2)$ 是度量空间，那么任何两个映射 $f_i:Q_i\to M_i(i=1,2)$ 的 δ 连续性蕴涵映射 $f_1\times f_2:Q_1\times Q_2\to M_1\times M_2$ 的 δ 连续性，其中 $M_1\times M_2$ 是指平

常的度量空间的积([7]).

度量空间的子范畴不闭合这个事实有一个别扭但不可避免的后果：一个"向量函数" $P \to A \times B$，即使其两个"坐标"函数都是 δ 连续的，本身也不必是 δ 连续的(不论 A 和 B 是指任意的邻近空间，还是只指可度量化的邻近空间)，这里度量空间的积是就平常意义而言．没有这种后果的邻近空间称为适当的(correct)，适当邻近空间也可以定义为使得 $P \dot{\times} \dot{P}$ 的对角线的投影是 δ 同构的空间．在适当邻近空间中，而且只在这样的空间中，两个一致覆盖的交 $\omega(\bigcap)\psi = \{U \bigcap V,\ U \in \omega,\ V \in \psi\}$ 仍然是一致覆盖，并且这些交的全体是一个一致结构([7]).

任何邻近空间 P 都有一个使 P 扩大的最粗糙的适当空间 $P!$，即所谓适当化(correction)．适当化 $P!$ 同时也是下述条件下最精致的邻近空间：形如 $M \to P$ 的任何映射，这里 M 是可度量化的，均可扩张到这个空间(即映射 $M \to P$ 的 δ 连续性蕴涵映射 $M \to P!$ 的 δ 连续性)．如果 M 换成任意的适当邻近空间 Q，上述结果仍然成立．因此，δ 连续映射 $Q \to P$ 的集合与 δ 连续映射 $Q \to P!$ 的集合成自然的一一对应，即是说，适当邻近空间的子范畴是余反射子范畴，而函子"!"是余反射子(coreflector)．可度量化的邻近空间是适当的(投影 $P! \to P$ 是一个同胚)．在适当空间的范畴中，度量空间的子范畴关于 Descartes 积是闭合的．不仅是度量空间，而且准紧空间也是适当的；此外，对所有的 Q，$Q! = P$ 蕴涵 $Q = P$ 这个断言等于是说 P 是准紧空间．

积"·"和"×"的适当性是一致的：$(P \cdot Q)! = (P \times Q)! = (P! \times Q!)!$．因此，积 $P \cdot Q$ 几乎总是不适当的，因为 $P \cdot Q = P \times Q$ 的充要条件是：有一个因子是准紧的；适当邻近空间的积是否适当尚属未知(1977).

邻近空间的**维数论**(dimension theory)表现出某些特色．首先，邻近空间有两个"覆盖"维数 δd 和 Δd(类似于拓扑维数 dim 的定义，但分别利用有限或任意的一致覆盖)，只有一个归纳维数 $\delta \mathrm{Ind}$，类似于维数 Ind，不过互不相交的集合换成了疏远集([11])．但是，分划的邻近类比则不很简单：集 H 把疏远集 A 和 B 隔开，如果 $H \bar{\delta} A \bigcup B$，并且 $H \bar{\delta} U \supset A \bigcup B$ 蕴涵 $U = V \bigcup W$ 且 $A \subset V \bar{\delta} W \supset B$．这三种维数各不相同的例子一个也未出现(1977)．维数 δd 是有限可加的，并且 $\delta d P = \dim P$；若 P 在 Q 中稠密，则 $\delta d P = \delta d Q$．维数 $\delta \mathrm{Ind}$ 不小于维数 δd，并且转移到稠密子空间时不减小，但是否增加尚属未知(1977)；转移到完全化时保持不变．对于可度量化空间而言，$\delta \mathrm{Ind}\, M \leqslant \Delta d M$，对于任意的空间 P，或者有 $\Delta d P = \delta d P$，或者有 $\Delta d P = \infty$．已经构造出若干一致空间的例子，各个维数并不相同，但是任何构造都不适用于邻近空间．就邻近积 $N \times N$ 而言，这里 N 是离散且可数的，维数 Δd 与 δd 相等的充要条件是该邻近空间是适当的([8])．同时，若 $N \times N$ 不适当，则 Δd 不再是单调的(因为 $\Delta d(N \times N) = 0$).

参考文献

[1] Ефремович, В. А., 《Докл. АН СССР》, 76 (1951), 341 – 343.

[2] Ефремович, В. А., 《Матем. сб.》, 31 (1952), 1, 189 – 200.

[3] Riesz, F., Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengen, in Internat. Congress Mathematicians IV, Rome, Vol. 2, R. Accad. Lincei, Rome, 1909, 18 – 24.

[4] Смирнов Ю. М., 《Матем. сб》, 31 (1952), 3, 543 – 574.

[5] Смирнов, Ю. М., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 3 (1954), 271 – 306; 4 (1955), 421 – 438.

[6] Смирнов, Ю. М., 《Матем. сб.》, 38 (1956), 3, 283 – 302.

[7] Поляков, В. З., 《Матем. сб.》, 67 (1965), 3, 428 – 439.

[8] Поляков, В. З., 《Матем. сб.》, 68 (1965), 2, 242 – 250.

[9] Поляков, В. З., 《Матем. сб.》, 76 (1968), 4, 593 – 604.

[10] Samuel, P., Ultrafilters and compactifications of uniform spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64 (1948), 100 – 132.

[11] Isbell, J. R., On finite-dimensional uniform spaces, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 107 – 121.

В. З. Поляков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Naimpally, S. A. and Warrack, B. D., Proximity Spaces, Cambridge Univ. Press, 1970.

胡师度 白苏华 译

邻近变换[proximity transformation; близкое преобразование]，切变换(tangent transformation)，切触变换(contact transformation)

平面中曲线的一种变换，使得彼此相切的两曲线仍映为彼此相切的两曲线．见**切触变换**(contact transformation).

沈一兵 译

Prüfer 曲面[Prüfer surface; Прюфера поверхность]

没有可数开集基的二维实解析流形(也见**解析流形**(analytic manifold))的一个例子．它是由 T. Radó 在一篇文章[1]中引进的．对任何偶维数，存在 Prüfer 曲面的一个推广(见[2])．然而，每个 **Riemann 曲面**(Riemann surface)都有可数的开集基(Radó 定

理 (Radó theorem)).

参考文献

[1] Radó, T., Ueber den Begriff der Riemannschen Flachen, *Acta Szeged*, 2(1925), 101 – 121.

[2] Calabi, E. and Rosenlicht, M., Complex analytic manifolds without countable base, *Proc. Amer. Math Soc.*, 4(1953), 335 – 340.

[3] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[4] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1953

Е. Д. Соломенцев 撰 薛春华 译

伪弧 [**pseudo-arc**; **псевдодуга**]

一个遗传不可分解的不止含有一个点的**蛇形连续统** (snake-like continuum). М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在英文文献中伪弧前带有定冠词"the", 这是因为任何两条伪弧都是同胚的([A2]). 和弧 $[0, 1]$ 一样, 伪弧同胚于它的每个非退化子连续统([A7]). 还有, 和圆一样, 伪弧是齐性的([A1]). 伪弧的独有特点(必然是独有的)是: "几乎所有的连续统都是伪弧"; 更确切地说, 在 n 维胞腔 $(n \geqslant 2)$ 的子连续统组成的**超空间** (hyperspace) 中, 伪弧组成一个剩余集([A3]). 所有非退化的齐性蛇形连续统都是伪弧([A4]). 这些基本性质的简单证明以及某些推广见[A5], [A6], [A8].

参考文献

[A1] Bing, R. H., A homogeneous indecomposable plane continuum, *Duke Math. J.*, 15(1948), 729 – 742.

[A2] Bing, R. H., On snake-like continua, *Duke Math. J.*, 18(1951), 853 – 863.

[A3] Bing, R. H., Concerning hereditarily indecomposable continua, *Pacific J. Math.*, 1(1951), 43 – 51.

[A4] Bing, R. H., Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10(1959), 345 – 346.

[A5] Krasinkiewicz, J., Mapping properties of hereditarily indecomposable continua, *Houston J. Math.*, 8(1982), 507 – 516.

[A6] Krasinkiewicz, J. and Minc, P., Mapping onto indecomposable continua, *Bull. Acad. Polon. Sci*, 25(1977), 675 – 680.

[A7] Moise, E. E., An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its non-degenerate subcontinua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63(1948), 581 – 594.

[A8] Oversteegen, L. and Tymchatyn, E., On hereditarily indecomposable compacta, in H. Toruńczyk, S. Jackowski and S. Spiez (eds.): Geometric & Algebraic Topology, Banach Center Publ. Vol. 18, P. W. N., 1986, 407 – 417.

胡师度 白苏华 译

伪基 [**pseudo-basis**; **псевдобаза**], 拓扑空间 X 的

X 中一族开集, 使得 X 的每一点都是族中含有该点的所有元素之交集. 伪基只存在于所有单点集均为闭集的空间(即 T_1 空间)中. 若基为 $\mathscr{B}$ 的 T_1 空间配置了一个更强的拓扑, 则 $\mathscr{B}$ 不再是这个新拓扑空间的基, 但仍然是它的一个伪基. 特别是, 具有连续统基数的离散空间, 尽管没有可数基, 但却具有可数伪基. 不过, 对 Hausdorff 紧统(即紧 Hausdorff 空间)而言, 可数伪基的存在蕴涵可数基的存在.

参考文献

[1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы топологии в задачах и упражнениях, М. 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

А. В. Архангельский 撰

【补注】 伪基(pseudo-basis)一词还有另外两个用途如下.

给了拓扑空间 X 的一族非空开集, 如果 X 的任何非空开集均含有其中之一, 则此集族有时也称为伪基, 尽管现在更多使用 π 基(π-basis)一词.

伪基也用来表示拓扑空间 X 的一个集族 $\mathscr{A}$: 对任何开集 O 以及 O 中任何一点 x, 均存在 $\mathscr{A}$ 的一个元素 A, 满足

$$x \in \operatorname{int} A \subset A \subset O.$$

因此, 在第二种概念之下, 拓扑空间正则(见**正则空间** (regular space))的充要条件是: 它具有由闭集组成的伪基. 胡师度 白苏华 译

伪 Boole 代数 [**pseudo-Boolean algebra**; **псевдобулева алгебра**]

包含最小元 0 的一个格 (lattice) $\mathbf{L} = (L, \leqslant)$, 并且对 L 的任意两个元素 a, b, 集合 $\{x \in L: a \wedge x \leqslant b\}$ 中存在一个用 $a \supset b$ 表示的最大元, 其中 $a \wedge x$ 表示 a 与 x 的最大下界. 称元素 $a \supset b$ 为 a 相对于 b 的伪补(pseudo-complement), 或从 a 到 b 的蕴涵(implication). 每一个伪 Boole 代数是一个具有最大元 1(每个元素 $a \supset a$ 是这样的元素)的**分配格** (distributive lattice).

伪 Boole 代数是 Heyting **直觉主义命题演算** (intuitionistic propositional calculus)的代数模型, 并且用 **Boole 代数** (Boolean algebra)刻画典型命题演算的方法来刻画它.

伪 Boole 代数也称 Heyting 代数 (Heyting algebras).

T. Skolem 1919 年考虑了相对伪余格([1]), 但是没涉及到逻辑. 首先出现与逻辑的联系是在对偶于

伪 Boole 代数的格的研究中(即由伪 Boole 代数颠倒关系 ≤ 而得到的格;见[2]).这样的格称为 Brouwer 代数(Brouwer algebra)(见 **Brouwer 格**(Brouwer lattice)).后来术语"Brouwer 代数"也被用于伪 Boole 代数.

把伪 Boole 代数类视为具有常元 0 和二元运算 ∧,∨,⊃ 的泛代数(L, 0, ∧, ∨, ⊃),可以用一组等式来描述.

一个伪 Boole 代数(L; 0, ∧, ∨, ⊃)的一个合同关系(见**合同(代数学中的)**(congruence (in algebra)))$R \subseteq L \times L$ 完全由包含 1 的等价类,即由集合

$$\nabla = \{x \in L: \langle x, 1 \rangle \in R\}, \qquad (1)$$

决定,这个合同关系由公式

$$\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow (x \supset y \in \nabla \text{ 并且 } y \supset x \in \nabla) \qquad (2)$$

决定.

集合(1)是一个**滤子**(filter),即它满足条件

$$(x \in \nabla \text{ 并且 } x \leqslant y) \Rightarrow y \in \nabla,$$
$$(x \in \nabla \text{ 并且 } y \in \nabla) \Rightarrow x \wedge y \in \nabla.$$

反之,任意伪 Boole 代数 L 的每一个非空滤子 ∇,由(2)定义代数(L; 0, ∧, ∨, ⊃)上一个合同关系,在此合同关系下 1 的等价类与给定的滤子 ∇ 相同.

在一个伪 Boole 代数(L, ≤)中,对任意 $a \in L$ 和在 L 中有最小上界 $\sup X$ 的任意集合 $X \subseteq L$,无限分配律

$$a \wedge \sup X = \sup\{a \wedge x: x \in X\} \qquad (3)$$

成立.如果(L, ≤)是一个完全格,即对任意 $X \subseteq L$, $\sup X$ 存在,那么,反过来,(3)在 L 中成立蕴涵它是一个伪 Boole 代数.而且运算 ⊃ 由

$$a \supset b = \sup\{x \in L: a \wedge x \leqslant b\}$$

定义.

完全伪 Boole 代数(即满足(3)的完全格)可以认为是具有一个常元 1,一个二元运算 ∧: $L \times L \to L$ 和一个"无限"运算 sup: $\{X: X \subseteq L\} \to L$ 的代数(L: 1, ∧, sup).还用这种方法定义完全伪 Boole 代数的同态、合同和子代数等概念.于是,一个合同 $R \subseteq L \times L$ 必须满足条件:如果 $X = \{x_i: i \in I\}$ 和 $Y = \{y_i: i \in I\}$ 是 L 的两个子集,使得对每一 $i \in I$, $\langle x_i, y_i \rangle \in R$,那么 $\langle \sup X, \sup Y \rangle \in R$.把一个完全伪 Boole 代数视为代数 $\langle L; 1, \wedge, \sup \rangle$,那么完全伪 Boole 代数的类可以由一个包含 1,∧,sup 的等式系统来描述.因此它关于取子代数,商代数和代数簇的直积封闭.在完全代数类中,存在具有任意生成元集合的自由代数.

如果 $J: L \to L$ 是一个完全伪 Boole 代数 $\mathbf{L} = (L, \leqslant)$ 上的一个**乘性闭包算子**(multiplicative closure operator),即一个使得

$$x \leqslant J(x) = J(J(x)),\ J(x \wedge y) = J(x) \wedge J(y)$$

成立的函数,那么关系

$$R_J = \{\langle x, y \rangle \in L \times L: J(x) = J(y)\} \qquad (4)$$

是代数 $\mathbf{A} = (L; 1, \wedge, \sup)$ 上的一个合同,并且具有由 $\mathbf{L}$ 导出的序 $\leqslant|_{JL}$ 的集合 $JL = \{x \in L: J(x) = x\}$ 是一个完全伪 Boole 代数,而且它同构于商代数 $\mathbf{A}/R_J$.反之,对任意一个合同 $\mathbf{R}$,由公式

$$J_R(x) = \sup\{y \in L: \langle y, x \rangle \in R\} \qquad (5)$$

决定一个乘法闭包算子 J_R: $\mathbf{L} \to \mathbf{L}$.由(4)和(5)定义的映射 $J \mapsto R_J$ 和 $R \mapsto J_R$ 是互逆的.

伪 Boole 代数的例子.1)对于任一集合 U,由包含关系 ⊆ 序化的集合 $\{X: X \subseteq U\}$ 是一个完全伪 Boole 代数.它的子代数恰是 U 上的拓扑.

2)如果完全伪 Boole 代数上的一个函数 $I: L \to L$ 满足条件

$$I(I(x)) = I(x) \leqslant x,\ I(x \wedge y) = I(x) \wedge I(y),$$
$$I(1) = 1, \qquad (6)$$

那么具有导出序关系的集合 $IL = \{X \in L, Ix = x\}$ 是代数(L; 1, ∧, sup)的一个子代数.每一个子代数 $A \subseteq L$ 可以用这种方法从唯一满足(6)的函数 I 得到,即

$$I(x) = \sup\{a \in A: a \leqslant x\}.$$

满足(6)的函数 I 称为**内算子**(interior operator).

3)如果在直觉主义命题演算语言所有公式的集 Φ 上定义关系 ≤: $A \leqslant B$,当且仅当 $A \supset B$ 在这个演算中可以导出,并且用等价关系 $x \leqslant y \,\&\, y \leqslant x$ 构成商集,那么就得到一个自由伪 Boole 代数.

参考文献

[1] Skolem, T., Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen, in Selected works in logic, Universitetsforlaget Oslo, 1970, 67 – 101.

[2] McKinsey, J. C. C., Tarski, A., On closed elements in closure algebras, *Ann. of Math.*, **47** (1946), 122 – 162.

[3] Rasiowa, H., Sikorski, R., The mathematics of metamathematics, PWN, 1963.

[4] Драгалин, А. Г., Математический интуиционизм Введение в теорию доказательств, М., 1979 (英译本: Dragalin, A. G., Mathematical intuitionism: an introduction to proof theory, Amer. Math. Soc., 1988).

[5] Fourman, M. P. and Scott, D. S., Sheaves and logic, in C. J. Mulvey, M. P. Fourman and D. S. Scott (eds.), Applications of sheaves, Lecture notes in math., Vol. 753, Springer, 1979, 302 − 401.

В. Н. Гришин 撰

【补注】 在近代英文文献中，伪 Boole 代数的最通用的称法是 Heyting 代数（上述的二元运算 ⊃ 通常记为 ⇒）. 上面提到的"完全伪 Boole 代数"称为标架或场所（locale）. 注意在标架的代数理论中，二元运算 ⊃ 不取作原始运算；于是子标架和标架合同一般说来不是 Heyting 子代数或 Heyting 代数合同（上面提到的自由标架也不是自由 Heyting 代数）. 对于自由 Heyting 代数见[A5].

参考文献

[A1] Balbes, R. and Dwinger, P., Distributive lattice, Univ. of Missouri Press, 1974.

[A2] Freyd, P. J., Aspects of topoi, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 7 (1972), 1 − 76.

[A3] Johnstone, P. T., Stone spaces, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A4] Rasiowa, H., An algebraic approach to non-classical logics, North-Holland, 1974.

[A5] Urguhart, A., Free Heyting algebras, *Algebra Universalis*, 3 (1973), 94 − 97.

[A6] Vickers, S., Topology via logic, Cambridge Univ. Press, 1989.

卢景波 译 王世强 校

伪特征标 [pseudo-character; псевдохарактер]，拓扑空间 X 中集合 A 的

满足下述条件的最小无限基数 τ：X 中存在基数为 τ 的一族开集，即 τ 个开集，其交集为 A. 伪特征标通常记为 $\psi(A,X)$. 只有在 X 中的单点集均为闭集时，伪特征标 $\psi(A,X)$ 才对 X 中所有子集 A 有定义. 拓扑空间 X 中点 x 的伪特征标 $\psi(x,X)$ 即是集 $\{x\}$ 在 X 中的伪特征标 $\psi(\{x\},X)$.

拓扑空间 X 的伪特征标 $\psi(X)$ 是满足下述条件的最小无限基数 τ：每一点都是 X 中基数 $\leq\tau$ 的一族开集之交. 具有可数伪特征标的空间就是每一点都是 G_δ 集（见 $F_\sigma(G_\delta)$ 型集 (set of type $F_\sigma(G_\delta)$)）的空间. 每个拓扑空间均可表为具有可数伪特征标的一个仿紧 Hausdorff 空间在连续开映射下的象. 就紧 Hausdorff 空间而言，伪特征标的可数性等价于第一可数公理（first axiom of countability）. 一般而言，紧 Hausdorff 空间中闭集 A 的伪特征标等于集合 A 在 X 中某个邻域定义系（defining system of neighbourhoods）的最小基数.

参考文献

[1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

[2] Архангельский А. В., 《Успехи матем. наук》, 36(1981), 3, 127 − 146.

А. В. Архангельский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[A2] Kunen, K. and Vaughan, J. E. (eds.): Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, 1984, Chapts, 1 − 2.

胡师度 白苏华 译

伪紧空间 [pseudo-compact space; псевдокомпактное пространство]

一个完全正则空间（completely-regular space），其上的任何连续实值函数都是有界的. 在正规空间类中，可数紧（见可数紧空间（countably-compact space））与伪紧这两个概念一致. М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Engelking, R. General topology, Heldermann, 1989.

[A2] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology. problems and exercises, Reidel, 1984, p.136 (译自俄文).

胡师度 白苏华 译

伪共形映射 [pseudo-conformal mapping; псевдоконформное отображение]

当 $n>1$ 时，$\mathbf{C}^n$ 空间的一区域 D 到一区域 $D'\subset\mathbf{C}^n$ 的双全纯映射（biholomorphic mapping）. 这个名词是由于这样的事实，当 $n>1$ 时，这个映射一般来说不是一个共形映射（conformal mapping）.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 这个术语在英文文献中十分不普遍. 关于进一步的信息和参考文献见双全纯映射（biholomorphic mapping）.

钟同德 译

伪凸与伪凹 [pseudo-convex and pseudo-concave; псевдовыпуклость и псевдовогнутость]，亦称伪凸性与伪凹性

在复空间中的区域的性质，同样也是复空间和复空间上函数的性质，类似于空间 $\mathbf{R}^n$ 中的区域和函数的凸性和凹性. 开集 $U\subset\mathbf{C}^n$ 上的一实值 C^2 类函数

φ 称为 p 伪凸的（p-pseudo-convex）（或 p 凸的（p-convex）），如果 Hermite 形式

$$H(\varphi)=\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}u_j\bar{u}_k$$

在 U 的每一点至少有 $n-p+1$ 个非负本征值．如果 $H(\varphi)$ 至少有 $n-p+1$ 个正本征值，那么可以认为 φ 是严格（或强）p 伪凸的（strictly（or strongly）p-pseudo-convex）．特别地，一个（严格）1 伪凸函数是一 C^2 类的（严格）**多重下调和函数**（plurisubharmonic function）．一解析集 $X\subset U$ 上的函数称（严格）p 凸的，如果它是一个在 U 上的（严格）p 伪凸函数的限制．最后，在任一复空间 X 上的（严格）p 凸函数是 X 上的一连续函数，且在每一点的一个邻域，是在相应模型上的一（严格）凸函数（见**解析空间**（analytic space））．

一**复空间**（complex space）X 称为 (p,q)-凸-凹的（(p,q)-convex-concave），如果存在一连续函数 φ: $X\to\mathbf{R}$ 和两个数 d_0，c_0（$-\infty\leqslant d_0\leqslant c_0\leqslant\infty$），使得对任何 $c\geqslant c_0$ 和 $d\leqslant d_0$ 集合

$$X_{c,d}=\{x\in X:\ d<\varphi(\pi)<c\}$$

在 X 中是相对紧的，而 φ 在 X_{x,c_0} 上是严格 p 凸的，在 $X_{d_0,\infty}$ 上是严格 q 凹的．如果 $d_0=-\infty$ 或 $c_0=\infty$，那么 X 分别称为强 p 伪凸（strongly p-pseudo-convex）或强 q 伪凹（strongly q-pseudo-concave）．如果 $d_0=c_0=-\infty$，则 X 称为 p 完全的（p-complete）．

例子　1）复流形 M 中的一具有光滑边界 ∂X 的开集 X 称为强 p 伪凸（strongly p-pseudo-convex）（强 p 伪凹（strongly p-pseudo-concave））的，如果每一点 $x_0\in\partial X$ 都有一邻域 U，在其中存在一严格 p 伪凸（严格 p 伪凹）函数 φ，使得 $X\cap U=\{x\in U:\ \varphi(x)<0\}$（相应地，$X\cap U=\{x\in U:\ \varphi(x)>0\}$）．每一强 p 伪凸（强 p 伪凹）相对紧开集是一强 p 凸（强 p 凹）流形．如果边界 ∂X 的某些分量满足 p 伪凸性的条件，而其余的满足 q 伪凹性的条件，那么就得到一 (p,q) 凸-凹流形的一个例子．

2）紧复空间自然是 0 凸的．

3）1 完全空间类和 **Stein 空间**（Stein space）类是一致的．

4）强 1 凸空间类和从 Stein 空间在有限点集上进行正规修改后得到的空间类一致．

5）命 X 为 n 维的紧复流形，又命 S 为它的闭子流形，其所有分量的维数都是 q．那么 $X\setminus S$ 是一强 $(q+1)$ 凹的，又如果 S 上的法丛是正的，那么 $X\setminus S$ 是一强 $(n-q)$ 凸空间．

6）如果 S 是 Stein 流形中余维为 p 的闭子流形，那么 $X\setminus S$ 是 p 完全的．

7）流形 X 上的一 r 阶全纯向量丛 E 称为 p 正的（p-positive）（q 负的（q-negative）），如果在 E 上存在一纤维化的 Hermite 度量 h，使得 $\chi(v)=-h(v,v)$ 在 E 的零截面外是一严格 $(p+r)$ 凸（相应地，$-\chi$ 是严格 q 凸）的函数（如果 $p=q=1$，就得到**正向量丛**（positive vector bundle）和**负向量丛**（negative vector bundle）的概念）．如果 X 是紧的，那么 p 正向量丛的空间 E 是强 $(p+r)$ 凹的，而 q 负向量丛的空间是强 q 凸的．p 完全空间上的全纯向量丛空间总是 p 完全的．

对 (p,q) 凸-凹空间已经证明了某些取值于凝聚解析层中的上同调空间的有限维数性和可分性的定理（见解析空间理论中的**有限性定理**（finiteness theorems））．对严格 (p,q) 凸-凹映射也证明了类似的有限性定理（见[1]，[2]）．一空间 X 是强 1 凸的，当且仅当对所有 r 和 X 上的任何**凝聚解析层**（coherent analytic sheaf）F，$\dim H^r(X,F)<\infty$．如果 X 是 p 完全的，那么对所有 $r\geqslant p$ 和任何 X 上的凝聚解析层 F，$H^r(X,F)=0$．

p 凸和 p 完全空间的同调群有下列性质．如果 X 是一 n 维约化强 p 凸（p 完全）复空间，那么对 $r\geqslant n+p$，$\dim H_r(X,\mathbf{C})<\infty$（相应地，$H_r(X,\mathbf{C})=0$）．对强 1 凸空间也已知当 $r\geqslant n+1$ 时，$H_r(X,\mathbf{Z})$ 是一有限生成群，而对 p 完全流形则当 $r\geqslant n+p$ 时，$H_r(X,\mathbf{Z})=0$ 又 $H_{n+p-1}(X,\mathbf{Z})$ 是自由的．

一复空间 X 称为伪凹的（pseudo-concave），如果存在 X 中的相对紧开集 U 与 X 的每一非退化分量相交并且满足下列条件：任一点 $x_0\in\partial U$ 都有 X 的一个邻域 V，使得任一充分接近 x_0 的 $x\in V$ 对 V 上的所有全纯函数有

$$|f(x)|\leqslant\sup_{y\in V\cap U}|f(y)|.$$

如果 X 是一 n 维流形，$n\geqslant 2$，那么取 U 是 X 中的一强 $(n-1)$ 伪凹集就足够了．任何紧空间都是伪凹的．对伪凹空间 X 下列有限性定理已经证明：X 上的任何全纯向量丛的全纯截面空间是有限维的；如果 X 是连通的，那么 X 的所有全纯函数是常数；X 上的亚纯函数域是一代数函数域，它的超越阶不超过 $\dim X$．后一定理在**自守函数**（automorphic function）有重要应用，它基于这种事实，即空间 D/Γ，在许多情形变为伪凹的，其中 Γ 是有界域 $D\subseteq\mathbf{C}^n$ 的一纯不连续自守群（在这种情形下称 Γ 是一伪凹群（pseudo-concave group））．例如，有界对称区域的自守群的算术子群是伪凹的．

参考文献

[1] Ermine, J., Cohérence de certaines images directs à supports propres dans le cas d'un morphisme fortement p-convexe, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 6 (1979), 1 – 18.

[2] Онищик, А. Л. Итоги науки и техники, Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15. М., 1977, 93 – 171.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 Hermite 形式 $H(\varphi)$ 通常称为 φ 的 Levi 形式 (Levi form).

$\mathbf{C}^n$ 中函数论的基本区域是伪凸域，因为它和全纯区域一致 (Levi 问题 (Levi problem) 的解). 特别地，十分了解的是强伪凸域 (一种具形式 $\{z\in\mathbf{C}^n: \rho(z)<0\}$ 的域，其中 ρ 是一严格多重下调和函数). [A13] – [A15] 是很好的参考文献.

在许多方面强 p 伪凸域比任意的 p 伪凸域有"更好"的性质. 为简单计，只讨论 $\mathbf{C}^n$ 中的 (1) 伪凸域. 因此，命 $D=\{r(z)<0\}$ 为一具光滑边界 M 的有界域，且 $p\in M$. 那么 D 称为在 p 是伪凸的 (pseudo-convex)，如果 Levi 形式 $H(r)\ (p)$ 当限制在 p 的复切空间时是半正定的，而 D 称为在 p 是强伪凸的 (strongly pseudo-convex)，如果 Levi 形式当限制在 p 的复切空间时是正定的. 一区域称为 (强) 伪凸的，如果它在每一边界点是 (强) 伪凸的. 一伪凸域它不是强伪凸的称为弱伪凸域 (weakly pseudo-convex domain).

$\mathbf{C}^n$ 中的弱伪凸域可以被强伪凸域所穷竭.

一些强伪凸域的性质常常不被任意的弱伪凸域所分享 (或者没有真正的类似) 的性质是:

a) 人们能够解非齐次 Cauchy-Riemann 方程得到: 如果 f 是一 $\bar\partial$ 闭 $(l, m+1)$ 形式，又 f 的系数属于某些 Hölder 空间 C^α，或 Соболев 空间 Λ^α，那么存在一 (l, m) 形式 u，其系数在 C^α 或 Λ^α，使得 $\bar\partial u=f$. 更精确地，人们对 $\bar\partial$-Neumann 问题有次椭圆估计. 这表示非齐次 Cauchy-Riemann 方程的具有极小 L_2 范数的 (唯一) 解 u 在上述 Соболев 范数中是十分规矩的，见 [A6]. 作为推论，Bergman 射影 (Bergman projection) 映光滑函数到光滑函数.

b) 强伪凸域局部双全纯等价于强凸域.

c) 一强伪凸域可以写成一族纯递减强伪凸域的交的内部.

显然 Levi 形式是正定的还是半正定的有很大的区别. 分析这个差别和 $\bar\partial$-Neumann 问题的次椭圆估计有联系，有限型区域 (domain of finite type) 的概念是 J. J. Kohn 对 $\mathbf{C}^2$ 中的区域引进的，见 [A9]. 紧密联系于 Kohn 的原始定义并在偏微分方程中很重要的 (见 [A6]) 是用迭代换位子 (iterated commutators) 表示的有限型定义. 命 T 表示 M 的复化切丛，$T^{1,0}$ 表示截面是 $(1, 0)$ 向量场的子丛，即复切向量丛，又命 $T^{0,1}$ 表示 $T^{1,0}$ 的复共轭丛. 现在取一零化 $T^{1,0}\oplus T^{0,1}$ 的实 1 型式 η. 令 L 为 $T^{1,0}$ 的一局部截面，$L(p)\neq 0$. L 和 $\bar L$ 的一个长度为 m 的迭代换位子是 T 的一局部截面 X 具形式

$$X=[\cdots[L_1, L_2]\cdots L_{m+1}], \qquad (A1)$$

其中 $L_i\in\{L, \bar L\}$. L 在 p 的型是最小整数 q，对于它存在 L 的一长度为 $q+1$ 的迭代换位子 X，使得 $\langle\eta, X\rangle(p)\neq 0$. 现在定义 M 在 p 的 1 型 (换位子) 为:

$$t_1(M, p)=\sup_{L\in T^{1,0}}\ \{L \text{ 在 } p \text{ 的型}\},$$

并且如果 M 的所有点都是有限型的，则 M 是有限型的. 一点的 q 型换位子 (commutator q-type of a point) $(q=1, \cdots, n-1)$ 是 T. Bloom 引进的 (见 [A4]). 然而，似乎只在 2 维的情形这些概念才和次椭圆估计有关系.

在高维的情形下面的方法是有用的. 仍然令 D 为一光滑有界域具有边界 M，定义函数为 r，p 为一边界点. (在定义中只需一超曲面 M.) 令 $z: (\mathbf{C}, 0)\to(\mathbf{C}^n, p)$ 为一映 0 到 p 的全纯映射的芽. 令 $v(z)$ 为 z 在 0 的重数又 $v(r\circ z)$ 为复合映射 $r\circ z$ 在 0 的重数. 点 p 称为有限 (1) 型的点 (point of finite (1)-type)，如果对上述全纯映射 z 的所有非常数的芽存在一 C，使得

$$\frac{v(r\circ z)}{v(z)}\leqslant C. \qquad (A2)$$

使 (A2) 成立的最小 C 称为 p 的型 (type) 并记为 $\Delta_1(M, p)$. 粗略地说，这表示 M 和在 p 的解析曲线有有限阶的接触. 区域 D 或超曲面 M 称为有限型的 (finite type)，如果它的所有点都是有限型的.

J. d'Angelo 定义了有限 q 型点 (point of finite q-type) 的概念，$q=1, \cdots, n-1$ (见 [A1], [A3], [A4]). 他证明有限型点的集合是超曲面 M 的一开子集 (见 [A3], [A4]).

这些定义有许多不同的和精细的形式. 如果不再要求伪凸性并且 $q<n-1$，那么 q 型换位子对接触阶不起作用. 从此，关于有限型都是在接触阶的意义下的.

得到了下列结果. Kohn 证明了如果 p 是 $\mathbf{C}^2$ 中一有限型的光滑伪凸域的一边界点，那么对 $\bar\partial$-Neumann 问题存在一次椭圆估计 (见 [A9]). P. Greiner 证明此结果之逆 (见 [A7]). D. Catlin 拓广这些结果到 $\mathbf{C}^n$ 中的伪凸域 (见 [A2]). 人们还得到了 $\mathbf{C}^2$ 中有限型域的相应 Hölder 估计 (见 [A5]). 有限型域也具有性质 c) (见 [A11]). 存在有限型域不具有性质 b) (见 [A10]).

最后，Catlin 发现"条件 P"（condition P），它比有限型弱并保证了 $\bar{\partial}$-Neumann 问题的紧性估计．这表示对 Соболев 范数估计没有增益，包括 Bergmann 射影的正则性以及条件 c)：条件 P 等价于所谓弱 B(remermann) 正则性（weak B (remermann) regularity）．这可表述为：$\dot{M}$ 上的每一连续函数是 D 上一多重下调和函数的边界值（见［A11］）．

亦见 **Bergman 核函数**（Bergman kernel function）；**双全纯映射**（biholomorphic mapping）．

［A12］是 p 凸性和 q 凹性的很好的参考文献．

参考文献

［A1］Catlin, D., Boundary invariants of pseudo-convex domains, *Ann. of Math.*, **120** (1984), 529 – 586.

［A2］Catlin, D., Subelliptic estimates for the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pseudo-convex domains, *Ann. of Math.*, **126** (1987), 131 – 191.

［A3］D'Angelo, J., Real hypersurfaces, orders of contact, and applications, *Ann. of Math.*, **115** (1982), 615 – 637.

［A4］D'Angelo, J., Finite type conditions for real hypersurfaces in $\mathbf{C}^n$, in S. G. Krantz (ed.), Complex Analysis, Lecture notes in math., Vol. 1268, Springer, 1987, 83 – 110.

［A5］Fefferman, C. L. and Kohn, J. J., Hölder estimates on domains of complex dimension two and on three dimensional CR manifolds, *Adv. in Math.*, **69** (1988), 223 – 303.

［A6］Folland, G. B. and Kohn, J. J., The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Ann. of Math. Studies, 75, Princeton Univ. Press, 1972.

［A7］Greiner, P., On subelliptic estimates of the $\bar{\partial}$-Neumann problem in $\mathbf{C}^2$, *J. Diff. Geometry*, **9** (1974), 239 – 250.

［A8］Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 3, Springer, 1985, Chapt. 22.

［A9］Kohn, J. J., Boundary behavior of $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex domains, *J. Diff. Geometry*, **6** (1972), 523 – 542.

［A10］Kohn, J. J. and Nirenberg, L., A pseudo-convex domain not admitting a holomorphic support function, *Math. Ann.*, **201** (1973), 265 – 268.

［A11］Sibony, N., Une classe de domaines pseudo-convexes, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 299 – 319.

［A12］Henkin, G. M. and Leiterer, J., Andreotti-Grauert theory by integral formulas, Akad. Verlag, 1988.

［A13］Henkin, G. M. and Leiterer, J., Theory of functions on complex manifolds, Birhäuser, 1983.

［A14］Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982.

［A15］Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

钟同德 译

伪微分算子［**pseudo-differential operator**；**псевдодифференциальный оператор**］

在微分流形上作用在函数空间上的算子，它可以利用通常称之为伪微分算子的象征的某个函数按确定的法则来局部地描述，这函数满足对导数的某种类型的估计，它类似于对是微分算子的象征的多项式的导数的估计．

令 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，且令 $C_0^\infty(\Omega)$ 是 Ω 上具有属于 Ω 的紧支集的无穷次可微函数空间．Ω 上最简单的伪微分算子是算子 $P: C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$，它由下式给出：

$$Pu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi, \quad (1)$$

这里，$u \in C_0^\infty(\Omega)$，$\xi \in \mathbf{R}^n$，$d\xi$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，$x\cdot\xi$ 是矢量 x 和 ξ 的通常的内积，$\hat{u}(\xi)$ 是函数 u 的 **Fourier 变换**（Fourier transform），即

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}u(x)dx$$

（积分是像（1）中那样的在整个 $\mathbf{R}^n$ 上的），$p(x,\xi)$ 是 $\Omega \times \mathbf{R}^n$ 上的满足某个条件的光滑函数，且称它为伪微分算子 P 的象征（亦见**算子的象征**（symbol of an operator））．(1) 形式的算子 P 记为 $p(x,D)$ 或 $p(x,D_x)$．如果

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} p_\alpha(x)\xi^\alpha$$

是具有系数 $p_\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ 的 ξ 的多项式（这里 α 是多指标，即 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$\alpha_j \geq 0$，$\alpha_j$ 是整数，$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$），那么 $p(x,D)$ 就与 $p(x,\xi)$ 的表达式中用 $D = \partial/i\partial x$ 代替 ξ 所得到的**微分算子**（differential operator）相一致．

通常使用满足条件

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\mathscr{K}}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \quad (2)$$

$$x \in \mathscr{K}, \ \xi \in \mathbf{R}^n$$

的象征 $p(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ 的类．这里 α, β 是多指标，$\partial_x = \partial/\partial x$，$\partial_\xi = \partial/\partial\xi$，$\mathscr{K}$ 是 Ω 中的紧集．这个类用 $S_{\rho,\delta}^m$（或 $S_{\rho,\delta}^m(\Omega \times \mathbf{R}^n)$）来表示．

通常假定 $0 \leq \rho, \delta \leq 1$．用 $L_{\rho,\delta}^m$（或 $L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$）表示形如 $p(x,D)+K$ 的算子的类，其中 $p \in S_{\rho,\delta}^m$，K 是具有 C^∞ 核的积分算子，即下面形式的算子：

$$Ku(x) = \int K(x,y)u(y)dy,$$

其中 $K(x,y) \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$．（这样的算子 $p(x,D)+K$ 亦称作 Ω 中的伪微分算子．）函数 $p(x,\xi)$，如前

一样，称作 $p(x,D)+K$ 的象征．虽然，在此情形下它不是唯一确定的，但是准确到一个属于 $S^{-\infty}=\bigcap_{m\in\mathbf{R}}S^m_{1,0}$ 中的象征．算子 $A\in L^m_{\rho,\delta}$ 称作不超过 m 阶的 ρ,δ 型的伪微分算子（pseudo-differential operator）．上面描述的微分算子是属于 $L^m_{1,0}$ 类的．m 的最小可能值称作伪微分算子的阶（order of the pseudo-differential operator）．$S^m_{\rho,\delta}$ 类和 $L^m_{\rho,\delta}$ 类通常称作 Hörmander 类（Hörmander classes）．

可以利用二重象征或振幅来给出 Ω 中的伪微分算子，即写成下面的形式：

$$Pu=\frac{1}{(2\pi)^n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,y,\xi)u(y)\,dy\,d\xi. \tag{3}$$

对 $a(x,y,\xi)=p(x,\xi)$ 这公式就变成（1）．通常假定 $a(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\Omega\times\mathbf{R}^n)$，即

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^{\beta'}\partial_y^{\beta''}a(x,y,\xi)|\leq$$
$$\leq C_{\alpha,\beta',\beta'',\mathscr{K}}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta'+\beta''|}, \tag{4}$$
$$x,y\in\mathscr{K},$$

这里 $\mathscr{K}$ 是 Ω 中的紧集．如果 $0\leq\delta<\rho\leq1$，那么算子（3）的类（对所有可能的函数 $a\in S^m_{\rho,\delta}$）和 $L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 重合．在此情形下象征 $p(x,\xi)$（确定到一个属于 $S^{-\infty}$ 的象征）有下面的渐近展开：

$$p(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)|_{y=x},$$

其中 $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$，且求和是对所有的多指标．这个公式指出 $p(x,\xi)$ 与对所有 $\alpha(|\alpha|\leq N)$ 的部分和之差是 $S^{m-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta}$ 中的一个象征，即是其阶至多等于余项的阶的最大者的象征．

伪微分算子 P 可以利用连续性或对偶性扩充到一个算子 $P:\mathscr{E}'(\Omega)\to D'(\Omega)$．这里 $D'(\Omega)$ 和 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 分别是广义函数空间和在 Ω 中具有紧支集的广义函数空间（见**广义函数空间**（generalized functions, space of））．如果 $\delta<1$，那么伪微分算子有下面的伪局部性质（pseudo-locality property）：如果 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)\cap C^\infty(\Omega')$，其中 $\Omega'\subset\Omega$，那么 $Pu\in C^\infty(\Omega')$．这个性质的另一公式是：P 的核 $K(x,y)$（在 L. Schwartz 意义下）对 $x,y(x\neq y)$ 是无穷次可微的．

Ω 中 m 阶的经典伪微分算子是算子 $P\in L^m_{1,0}$，它的象征 $p(x,\xi)$ 有渐近展开：

$$p(x,\xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\chi(\xi)p_{m-j}(x,\xi),$$

其中 $\chi(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，当 $|\xi|\geq1$ 时 $\chi(\xi)=1$，当 $|\xi|\leq1/2$ 时 $\chi(\xi)=0$，且 $p_{m-j}(x,\xi)\in C^\infty(\Omega\times(\mathbf{R}^n\setminus0))$ 对 ξ 是 $m-j$ 阶正齐次的：

$$p_{m-j}(x,t\xi)=t^{m-j}p_{m-j}(x,\xi),\quad x\in\Omega,$$
$$\xi\in\mathbf{R}^n\setminus0,\ t>0.$$

具有光滑系数的微分算子可以作为经典伪微分算子的一个例子．函数 $p_m(x,\xi)$ 被称作 m 阶经典伪微分算子的主象征（principal symbol）．

Ω 中一伪微分算子 P 被称作真支集的（properly supported），如果 $\Omega\times\Omega$ 到每个因子上的投影被限制于 P 的核的支集上时都是真映射（见**真态射**（proper morphism））．真支集的伪微分算子将 $C_0^\infty(\Omega)$ 映射到 $C_0^\infty(\Omega)$ 中，且可以利用连续性扩充到映射 $C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$，$\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{E}'(\Omega)$ 和 $D'(\Omega)\to D'(\Omega)$．它可以写成具有象征 $p(x,\xi)=e^{-ix\cdot\xi}P(e^{ix\cdot\xi})$ 的形式（1），其中指数了解为带有参数 ξ 的 x 的函数．

假设 A,B 都是 Ω 中的伪微分算子，其中之一是真支集的．于是，它们的乘积（复合）$C=AB$ 是有意义的．复合定理（composition theorem）在伪微分算子理论中起着重要的作用：如果 $A\in L^{m_1}_{\rho,\delta}$，$B\in L^{m_2}_{\rho,\delta}$，$0\leq\delta\leq\rho\leq1$，那么 $C\in L^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}$．又，如果 $\delta<\rho$ 且 $c(x,\xi)$，$a(x,\xi)$ 和 $b(x,\xi)$ 分别是 C,A 和 B 的象征，那么

$$c(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}[\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)][D_x^\alpha b(x,\xi)].$$

特别地，如果 A,B 分别是 m_1 阶和 m_2 阶的经典伪微分算子，那么 C 是具有主象征 $c_{m_1+m_2}(x,\xi)=a_{m_1}(x,\xi)b_{m_2}(x,\xi)$ 的 m_1+m_2 阶的经典伪微分算子，其中 $a_{m_1}(x,\xi)$ 和 $b_{m_2}(x,\xi)$ 分别是 A 和 B 的主象征．

如果 $P\in L^m_{\rho,\delta}(0\leq\delta\leq\rho\leq1)$，那么存在一个而且唯一的伴随伪微分算子 $P^*\in L^m_{\rho,\delta}$，对它有 $(Pu,v)=(u,P^*v)$，$u,v\in C_0^\infty(\Omega)$，这里 $(u,v)=\int u(x)v(x)dx$ 是 u 和 v 在 $L_2(\Omega)$ 中的内积．又，如果 $\delta<\rho$，$p^*(x,\xi)$ 是 P^* 的象征，$p(x,\xi)$ 是 P 的象征，那么

$$p^*(x,\xi)\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\overline{p(x,\xi)}.$$

这样，满足 $\delta\leq\rho$ 的真支集的伪微分算子组成一个代数，它具有由伴随算子的转置给出的对合．任意的伪微分算子组成这个代数上的模．

由 L_2 范中的 Hörmander 类到它最精确的形式的伪微分算子的有界性定理（theorem on the boundedness of pseudo-differential operators）可叙述如下（见[8]）：令 $\Omega=\mathbf{R}^n$，且令 P 是形式（3）的算子，它具有满足（4）的二重象征 $a(x,y,\xi)$，其中数 m,ρ,δ 满足条件

$$0\leq\rho\leq1,\ 0\leq\delta<1,\ m\leq0,\ \rho-\delta-\frac{m}{n}\geq0, \tag{5}$$

于是，P 可以扩充为一个有界算子 $P:L_2(\mathbf{R}^n)\to L_2(\mathbf{R}^n)$．特别地，在条件（5）之下，具有对 x 一致（即使得常数 $C_{\alpha,\beta,\mathscr{K}}=C_{\alpha,\beta}$ 不依赖于 $\mathscr{K}$）满足条件

(2) 的象征的. 形如 (1) 的伪微分算子在 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 中是有界的. 例如, 由此导出算子 $P\in L^0_{\rho,\delta}$ 在 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 中的有界性, 只要 $0\leqslant\delta\leqslant\rho<1$, 且如果 P 的核有紧支集 (当关于象征的估计对 x 也是一致的时). 对 $\rho<\delta$ 或对 $\delta=1$, 这样形式的算子不必要是有界的 ([19A]). 类似地, 一般, 如果 (5) 中后两个条件之一不满足, 那么就得到一类包含有无界算子的伪微分算子.

用关于象征的估计这个术语可以给出伪微分算子在 L_p 范 (同样在 Hölder 范和在 Gevrey 范) 中的有界性条件 (见 [8]).

如果算子 $P=p(x,D)$ 给在 $\mathbf{R}^n$ 上, 其中 $P\in S^m_{\rho,\delta}(0\leqslant\delta\leqslant\rho\leqslant 1)$, 且 (2) 对 $x\in\mathbf{R}^n$ 一致地成立, 那么这个算子可以扩展为有界算子 $P:H^s(\mathbf{R}^n)\to H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$ $(s\in\mathbf{R})$, 这里 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上通常的 Соболев 空间 (它有时亦用 $W^s_2(\mathbf{R}^n)$ 表示).

$L^m_{\rho,\delta}$ 中的伪微分算子类对 $1-\rho\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$ 在微分同胚下是自然不变的. 它的经典伪微分算子的子类有同样的性质. 这使得有可能去定义 $L^m_{\rho,\delta}(x)$ 类和在一任意光滑流形 X 上的经典伪微分算子. 在一微分同胚 $\kappa:\Omega\to\Omega_1$ (这里 Ω, Ω_1 都是 X 中的域) 下象征中的变量变换公式有下面的形式:

$$a_1(y,\eta)|_{y=\kappa(x)}\sim$$
$$\sim\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}a^{(\alpha)}(x,{}^t\kappa'(x)\eta)D^\alpha_z E^{i\kappa''_x(z)\cdot\eta}|_{z=x}.$$

这里 $a(x,\xi)$ 是 $A\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 的象征; $a_1(x,\xi)$ 是算子 $A_1\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega_1)$ 的象征, A_1 由 $A_1u=[A(u\circ\kappa)]\circ\kappa^{-1}$ 给出, 即它由 A 经变量变换 κ 而得到; $\kappa'(x)$ 表示 κ 的 Jacobi 式; ${}^t\kappa'(x)$ 是转置矩阵; 且

$$a^{(\alpha)}(x,\xi)=\partial^\alpha_\xi a(x,\xi),$$

$$\kappa''_x(z)=\kappa(z)-\kappa(x)-\kappa'(x)(z-x).$$

特别地, 这蕴涵着一经典伪微分算子在流形 X 上的主象征是在余切丛 T^*X 上定义的函数.

如果 X 是一 (无边界) 紧流形, 那么伪微分算子在 X 上形成一个具有对合的代数, 只要此对合是利用由一光滑正密度给出的内积来引进的. 如果一算子 $A\in L^0_{\rho,\delta}(X)$ 在 $L_2(X)$ 中是有界的, 且如果对 $m<0$, $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$, 那么它在 $L_2(X)$ 中是紧的. 对 X 上零阶的经典伪微分算子 A,

$$\inf\|A+K\|=\sup_{(x,\xi)\in T^*X}|a_0(x,\xi)|,$$

其中 $a_0(x,\xi)$ 是 A 的主象征, K 跑遍 $L_2(X)$ 中紧算子的集合. 算子 $A\in L^m_{\rho,\delta}(X)$ 可以用连续性扩展为从 $H^s(X)$ 到 $H^{s-m}(X)$ (对任意的 $s\in\mathbf{R}$) 中的有界线性算子.

伪微分算子 A 的拟基本解 (parametrix of a pseudo-differential operator) 是一伪微分算子 B, 使得 $I-AB$ 和 $I-BA$ 都是 $-\infty$ 阶的伪微分算子, 即是具有光滑核的积分算子. 假设 $A\in L^m_{\rho,\delta}(\Omega)(0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1)$, 且假设 $a(x,\xi)$ 是 A 的象征. 算子 A 有拟基本解的一个充分条件是满足条件:

$$\begin{cases}|a(x,\xi)|\geqslant\varepsilon|\xi|^{m_0},\ |\xi|\geqslant R,\ \varepsilon>0,\ m_0\in\mathbf{R};\\ |a^{-1}(x,\xi)\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x a(x,\xi)|\leqslant c_{\alpha,\beta,K}|\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\end{cases}$$

$$|\xi|\geqslant R,\ x\in K. \tag{6}$$

在此情形下拟基本解 $B\in L^{-m_0}_{\rho,\delta}(\Omega)$ 存在. 拟基本解的存在性的最简单的蕴涵是 A 是一亚椭圆型算子: 如果 $Au\in C^\infty(\Omega')$, 其中 $\Omega'\subset\Omega$, 那么 $u\in C^\infty(\Omega')$. 换句话说, sing supp Au = sing supp u (见**广义函数的支集** (support of a generalized function)). 下面的精确结果 (正则性定理 (regularity theorem)) 亦成立: 如果 $Au\in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega')$, 那么 $u\in H^{s+m_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega')$. 微局部正则性定理亦成立: $\mathrm{WF}(Au)=\mathrm{WF}(u)$, 其中 $\mathrm{WF}(u)$ 是广义函数 u 的**波前集** (wave front).

对于 $1-\rho\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$, 条件 (6) 在微分同胚之下是不变的. 所以一个流形 X 上对应的伪微分算子类是有意义的. 如果 X 是紧的, 那么这样的算子 A 在 $C^\infty(X)$ 中是 Fredholm 的 (见 **Fredholm 算子** (Fredholm operator)), 亦即在 $C^\infty(X)$ 中有有限维核和余核, 且有闭象.

一个具有光滑象征 $a_m(x,\xi)$ 的 m 阶经典伪微分算子 A 称作椭圆型的 (elliptic), 如果对于 $\xi\neq 0$ 有 $a_m(x,\xi)\neq 0$. 对这样的算子 A 条件 (6) 对 $m_0=m$ 成立, 且 A 有拟基本解, 它亦是 m 阶经典伪微分算子. 在紧流形 X 上这样的算子 A 成为 Fredholm 算子:

$$A:H^s(X)\to H^{s-m}(X),\ s\in\mathbf{R}.$$

所有这些定义和陈述都可以移用到作用在矢量函数上, 或更一般地, 作用在矢量丛的截面上的伪微分算子. 对在紧流形 X 上的椭圆型算子, 确定在截面的 Sobolev 类上的映射 $A:H^s(X)\to H^{s-m}(X)$ 的指标不依赖于 $s\in\mathbf{R}$, 且可以直接计算 (见**指标公式** (index formulas)).

伪微分算子的作用在于这样的事实: 有一些运算超出了微分算子类的范畴, 但仍保持伪微分算子类. 例如, 在一紧流形上的椭圆型微分算子的预解式和复幂次都是经典的伪微分算子; 它们出现在将椭圆边值问题化到边界上时 (例如, 见 [7], [8] 和 [1E]).

有伪微分算子理论的几种版本, 在分析和数学物理中解各种不同问题时被采用. 通常出现的是带有参数的伪微分算子; 它们是必需的, 例如, 在研究本征

值的预解式和渐近展开时是必需的. 伪微分算子理论在 $\mathbf{R}^n$ 中的不同版本起着一个重要作用, 这是由于考虑到与描述函数在无穷远处的性态有关的效果, 而且经常被经典系统量子化的研究中所出现的量子力学中的数学问题所影响(见[5], [11]). 在偏微分方程的局部可解性理论中和在谱理论中利用下述伪微分算子是方便的, 其行为可以用权函数替代(2)型估计中的 $|\xi|$ 来描述(见[8], [14]). 可以构造具有边界的流形上的伪微分算子的代数, 特别地, 它可包含椭圆边值问题的拟基本解(见[3], [13]).

伪微分算子的一个特别情形是多维奇异积分和积分微分算子, 它们的研究为伪微分算子理论的出现作了准备(见[12]以及**奇异积分**(singular integral)).

伪微分算子理论是研究 Fourier 积分算子的基础(见 **Fourier 积分算子**(Fourier integral operator); [7], [10]), 后者在双曲型方程理论中所起的作用, 正像伪微分算子在椭圆型方程理论中所起的作用那样.

参考文献

[1A] Kohn, J. J. and Nirenberg, L., An algebra of pseudo-differential operators, *Commun. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 1-2, 269-305.

[1B] Hörmander, L., Pseudo-differential operators, *Commun. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 3, 501-517.

[1C] Kohn, J. J. and Nirenberg, L., Non-coercive boundary value problems, *Commun. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 3, 443-492.

[1D] Hörmander, L., Pseudo-differential operators and nonelliptic boundary problems, *Ann. of Math.*, **83** (1966), 1, 129-209.

[1E] Hörmander, L., Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, in A. P. Calderòn (ed.), Singular Integrals, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 10, Amer. Math. Soc., 1966, pp. 138-183.

[2] Агранович, М. С., Вишик М. И., Псевдодифференциальные операторы, М., 1968.

[3] Эскин, Г. И., Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М., 1973 (英译本: Eskin, G. I., Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations, Amer. Math. Soc., 1981).

[4] Грушин, В. В., Псевдодифференциальные операторы, М., 1975.

[5] Шубин, М. А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., 1978 (英译本: Shubin, M. A., Pseudodifferential operators and spectral theory, Springer, 1987).

[6] Friedrichs, K. O., Pseudo-differential operators, Courant Inst., 1970.

[7] Trèves, F., Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, 1-2, Plenum, 1980.

[8] Taylor, M., Pseudo-differential operators, Springer, 1974.

[9] Kumanogo, H., Pseudo-differential operators, M. I. T., 1981.

[10] Duistermaat, J., Fourier integral operators, Courant Inst., 1973.

[11] Маслов, В. П., Федорюк, М. В., Квази-классическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976 (英译本: Maslov, V. P. and Fedoryuk, M. V., Quasi-classical approximation for the equations of quantum mechanics, Reidel, 1981).

[12] Агранович, М. С., 《Успехи матем. наук》, **20** (1965), 5, 3-120.

[13] Boutet de Monvel, L., Boundary value problems for pseudodifferential operators, *Acta Math.*, **126** (1971), 11-51.

[14] Hörmander, L., The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Commun. Pure Appl. Math.*, 32 (1979), 3, 359-443.

[15A] Cordes, H. O., Elliptic pseudo-differential operators — an abstract theory, Lecture notes in math., 756, Springer, 1979.

[15B] Cordes, H. O., Spectral theory of linear differential operators and comparison algebras, Cambridge Univ Press, 1986.

[16] Egorov, Yu. V., Linear differential equations of principal type, Consultants Bureau, 1986 (译自俄文).

[17] Grubb, G., Functional calculus of pseudo-differential boundary problems, Birkhäuser, 1986.

[18] Helffer, B., Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques, Astérisque 112 (1984).

[19A] Hormander, L., Pseudo-differential operators of type 1, 1, *Comm. Partial. Diff. Eq.*, **13** (1988), 9, 1085-1111.

[19B] Hörmander, L., Continuity of pseudo-differential operators of type 1, 1, *Comm. Part. Diff. Eq.*, **14** (1989), 2, 231-243.

[20] Ivrii, V., Precise spectral asymptotics for elliptic operators, Lecture notes in math., 1100, Springer, 1984.

[21] Rempel, S. and Schulze, B.-W., Index theory of elliptic boundary problems, Akad. Verlag, 1982.

М. А. Шубин 撰

【补注】"伪微分算子"这个词通常缩写为 ΨDO, 正如"偏微分算子"缩写为 PDO 一样. 对流形上具有奇性的 ΨDOS 的代数, 特别是具有不连续的象征的 ΨDOS 的代数, 见[A2].

参考文献

[A1] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1-4, Springer, 1983-1985.

[A2] Plamenevskiĭ, B. A., Algebras of pseudodifferential operators, Kluwer, 1989 (译自俄文).

[A3] Taylor, M., Pseudodifferential operators, Princeton Univ. Press, 1981.

[A4] Chazarain, J. and Piriou, A., Introduction to the

theory of linear partial differential equations, North-Holland, 1982(译自法文).

孙和生 译 陆柱家 校

伪椭圆积分 [pseudo-elliptic integral; псевдоэллиптический интеграл]

形式为

$$\int R(z, \sqrt{f(z)})dz$$

的积分，其中 R 是二元有理函数，$f(z)$ 是无重根的三次或四次多项式．这个积分可以通过初等函数来表示，即通过 z 的代数函数或这种函数的对数来表示．例如

$$\int \frac{z^3 dz}{\sqrt{z^4 - 1}}$$

是一个伪椭圆积分．见**椭圆积分**(elliptic integral)．

Е. Д. Соломенцев 撰 杜小杨 译

伪 Euclid 空间 [pseudo-Euclidean space; псевдоевклидово пространство]

一个实**仿射空间**(affine space)，其中任何向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 对应一个确定的数，称为标量积(scalar product) $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ (亦见**内积**(inner product))，满足

1) 标量积是交换的:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a});$$

2) 标量积关于向量加法是分配的:

$$(\mathbf{a},(\mathbf{b}+\mathbf{c})) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{c});$$

3) 数量因子能从标量积中移出:

$$(k\mathbf{a},\mathbf{b}) = k(\mathbf{a},\mathbf{b});$$

4) 存在 n 个向量 $\mathbf{a}_i$，使得

$$(\mathbf{a}_c,\mathbf{a}_c) > 0,\ c \leqslant l;\ (\mathbf{a}_d,\mathbf{a}_d) < 0,\ d > l;$$

$$(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j) = 0,\ i \neq j.$$

数 n 称为伪 Euclid 空间的维数，l 称为指标(index)，数偶 (l, p)，$p = n - l$，称为符号差(signature)．伪 Euclid 空间记为 $E_{(l,p)}$(或 ${}^{l}E_n$)．空间 $E_{(1,3)}$ 称为 **Minkowski 空间**(Minkowski space)．对 $E_{(l,p)}$ 中满足 $(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i) \neq 0$ 和 $(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j) = 0 (i \neq j)$ 的任意 n 个向量 $\mathbf{b}_i$ 的组，$(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i) > 0$ 的向量 $\mathbf{b}_i$ 的个数等于 l 且 $(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_i) < 0$ 的向量 $\mathbf{b}_i$ 的个数等于 $n - l$(二次型的惯性律(law of inertia for a quadratic form))．

伪 Euclid 空间中向量 $\mathbf{a}$ 的模(modulus) $|\mathbf{a}|$ 可定义为非负根 $\sqrt{|(\mathbf{a},\mathbf{a})|}$．标量平方等于 1 或 -1 的向量分别称为单位向量(unit vector)与伪单位向量(pseudo-unit vector)．满足 $(\mathbf{X},\mathbf{X}) = 0$ 的向量 $\mathbf{X}$ 有零模，称为迷向向量(isotropic vector)．迷向向量的方向是迷向方向(isotropic direction)．

伪 Euclid 空间中存在三种类型的直线: Euclid 的、有正标量平方($(\mathbf{a},\mathbf{a}) > 0$)的方向向量，伪 Euclid 的($(\mathbf{a},\mathbf{a}) < 0$)，与迷向的($(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$)．通过某一点的所有迷向直线的并集称为迷向锥(isotropic cone)．

伪 Euclid 空间中存在多种类型的平面: Euclid 平面 E^2，伪 Euclid 平面 $E_{(1,1)}$ 与包含迷向向量的平面，称之为具有符号差 $(0,1)$, $(1,0)$ 和亏量 1 的半 Euclid 平面(见**半 Euclid 空间**(semi-Euclidean space))以及所有向量都是迷向的迷向平面．

作为两点 $A(\mathbf{x})$ 与 $B(\mathbf{y})$ 之间的距离是取向量 $\overline{AB}$ 的模且由

$$\overline{AB}^2 = |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x})|$$

计算．伪 Euclid 空间不是度量空间，因为三角形不等式不满足．如果向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 属于一个 Euclid 平面(或一个指标为 0 的伪 Euclid 平面)，则它们满足三角形不等式，但是如果它们属于一个指标为 1 的伪 Euclid 平面，则它们满足所谓的逆三角形不等式:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

伪 Euclid 空间中存在三种类型的球面: 正半径平方的球面，$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \rho^2$，负半径平方的球面，$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\rho^2$，和零半径的球面，$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$，这恰好是迷向锥．

伪 Euclid 空间中的运动(motion)是**仿射变换**(affine transformation)且能写为

$$\mathbf{x}' = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{a}$$

的形式．算子 $\mathbf{U}$ 满足条件 $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$，即它保持点之间的距离．伪 Euclid 空间中的运动构成一个乘法群; 它依赖于 $n(n+1)/2$ 个独立参数．伪 Euclid 空间中的运动称为第一类或第二类运动，如果它们是相应类的仿射变换．

将每一个向量 $\mathbf{a}$ 变换为向量 $\mathbf{a}'$ 且使得 $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = -(\mathbf{a}',\mathbf{a}')$ 的几何变换称为反运动(anti-motion)．

向量与张量代数的基本运算可引入到伪 Euclid 空间中．基本微分几何的概念按照**伪 Riemann 空间**(pseudo-Riemannian space)几何学的规则建立．一个伪 Euclid 空间的**度量张量**(metric tensor)有形式(在 Galileo 坐标系中)

$$g_{ij}=\left\|\begin{matrix}\left.\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}\right\}l & 0\\ 0 & \left.\begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}\right\}p\end{matrix}\right\|.$$

伪 Euclid 空间是平坦的，即它的 **Riemann 张量**（Riemann tensor）是零．如果一个伪 Riemann 空间的 Riemann 张量恒等于零，那么它是一个局部伪 Euclid 空间（locally pseudo-Euclidean space）．

伪 Euclid 空间的子集可具有各种各样的度量：正定或负定的 Riemann 度量，伪 Riemann 度量或退化度量（见**不定度规**（indefinite metric）．例如，伪 Euclid 空间的球面具有一个（一般来说是不定的）常曲率度量．$E_{(1,n-1)}$ 中一个正半径平方的球面是一个与双曲空间等距的 $(n-1)$ 维空间．

伪 Euclid 空间 $E_{(l,p)}(l+p=n)$ 与 Euclid 空间 E^n 可看成具有形式 $ds^2=\sum_{i=1}^n dz_i^2$ 的复空间的子空间．如果 x^j 是伪 Euclid 空间中的坐标，y^j 与 z^j 分别是实与复 Euclid 空间中的坐标，那么子空间的方程有形式

$$x^j=\mathrm{Re}\, z^j,\ 0<j\leqslant l;$$

$$x^j=\mathrm{Im}\, z^j,\ y^j=\mathrm{Re}\, z^j,\ l<j\leqslant n.$$

伪 Euclid 空间的度量可由 Euclid 空间的度量通过代换 $x^j=iy^j\ (l<j\leqslant n)$ 形式地得到．

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., Розендорн, Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, М., 1970.

[2] Розенфельд, Б. А., Многомерные пространства М., 1966.

[3] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория поля, 6 изд. М., 1973 (英译本: Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., The classical theory of fields, Addison-Wesley, 1962).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 伪 Euclid 空间的概念是由 E. Witt 于 1937 年提出的，见[A1]－[A2].

参考文献

[A1] Witt, E., Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpen, *J. Reine Angew. Math.*, 176 (1937), 31－44.

[A2] Dieudonné, J., La géometrie des groupes classiques, Springer, 1955.

[A3] Hawking, S. and Ellis, G., The large scale structure of space-time, Cambridge Univ. Press, 1973.

[A4] Misner, C., Thorne, K. and Wheeler, J., Gravitation, Freeman, 1973.

[A5] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry, Acad. Press, 1983.

林向岩 译 陆珊年 校

伪 Galileo 空间［**pseudo-Galilean space**; **псевдогалилеево пространство**］

一个具有仿射 n 空间（见**仿射空间**（affine space））中的指定了的无穷远 $(n-1)$ 平面 T_0 的射影 n 空间（见**射影空间**（projective space）)，T_0 中也指定了**伪 Euclid 空间**（pseudo-Euclidean space）${}^lR_{n-1}$ 的一个无穷远 $(n-2)$ 平面 T_1，而 T_1 中又指定了一个 $(n-3)$ 二次曲面 Q_2，它是指标为 l 的双曲 $(n-1)$ 空间的绝对形．平面 T_0、T_1 与二次曲面 Q_2 的族组成伪 Galileo 空间的**绝对形**（absolute）（基）；后者记为 ${}^l\Gamma_n$．例如，3-空间 ${}^l\Gamma_3$ 有一个作为绝对形的 2-平面 T_0，T_0 中有一条直线 T_1，T_1 上有一对实点 Q_2．伪 Galileo 空间可定义为一个仿射 n 空间，在它的完全化射影 n 空间的无穷远双曲超平面中，定义了指标 l 的伪 Euclid$(n-1)$ 空间几何学．

点之间的距离类似于 **Galileo 空间**（Galilean space）中距离的定义．

${}^l\Gamma_n$ 的运动是它的将绝对形映到自身中的直射变换．运动构成一个群，它是一个 Lie 群．

其绝对形对偶于 ${}^l\Gamma_n$ 的绝对形的空间称为一个**余伪 Galileo 空间**（co-pseudo-Galilean space）．**旗空间**（flag space）是 ${}^l\Gamma_n$ 的极限情形．

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1968.

[A2] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

林向岩 译 陆珊年 校

伪群［**pseudo-group**; **псевдогруппа**］，微分流形 M 的变换的

由流形 M 的开子集到 M 之内的一族微分同胚且在映射的复合、取逆映射以及在映射的限制与粘合下为封闭的．更准确地说，流形 M 的变换之伪群 Γ 是由一些局部变换（local transformations）构成的，局部变换即一个形如 $p=(D_p,\bar{p})$ 的偶对，其中 D_p 是 M 的一个开子集，而 $\bar{p}$ 是一个**微分同胚**（diffeomorphism）$D_p\to M$，并且假设 1) $p,q\in\Gamma$ 蕴涵 $p\circ q=(\bar{q}^{-1}(D_p\cap\bar{q}(D_q)),\ \bar{p}\circ\bar{q})\in\Gamma$; 2) $p\in\Gamma$ 蕴涵 $p^{-1}=(\bar{p}(D_p),\ \bar{p}^{-1})\in\Gamma$; 3) $(M,\mathrm{id})\in\Gamma$; 4) 若 $\bar{p}$ 是开子集 $D\subset M$ 到 M 内的微分同胚，且 $D=\bigcup_\alpha D_\alpha$，其中 D_α 是 M 中的开子集，则 $(D,\bar{p})\in\Gamma\Longleftrightarrow$ 对任意 α, $(D_\alpha,\bar{p}|_{D_\alpha})\in\Gamma$．对 1)－4) 作必要的改变，就可以对任意拓扑空间（见[7]）甚至对任意集合，也定义其变换的伪群．变

换的伪群和变换群一样，在 M 上决定了一个等价关系；等价类就称为其轨道．流形 M 的变换之伪群 Γ 称为传递的（transitive）如果 M 即其仅有的轨道．若 M 没有非平凡的 Γ 不变的叶状结构，则 Γ 称为本原的（primitive）（否则，此伪群称为非本原的（imprimitive））．

微分流形的变换的一个伪群 Γ 称为由一个偏微分方程组 S 所定义的变换的 Lie 伪群（Lie pseudo-group of transformations），如果 Γ 恰好是由那些满足方程组 S 的 M 的局部变换组成的．例如平面的共形变换的伪群就是由 Cauchy-Riemann 方程组（见 **Cauchy-Riemann 条件**（Cauchy-Riemann conditions））所决定的变换的 Lie 伪群．变换的 Lie 伪群的阶，就是定义它的微分方程组之最低阶．

变换的 Lie 伪群之例．a）n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 之一切全纯局部变换所成的伪群．

b）所有具有常值 **Jacobi 行列式**（Jacobian）的 $\mathbf{C}^n$ 之全纯局部变换的伪群．

c）所有 Jacobi 行列式为 1 的 $\mathbf{C}^n$ 之全纯局部变换之伪群．

d）$\mathbf{C}^n$（n 为偶）的保持微分 2 形式

$$\omega = dz^1 \wedge dz^2 + dz^3 \wedge dz^4 + \cdots + dz^{n-1} \wedge dz^n$$

不变的一切全纯局部变换的 Hamilton 伪群（Hamilton pseudo-group）．

e）$\mathbf{C}^n$ 中一切保持 ω 到相差一个常数因子的全纯局部变换的伪群．

f）$\mathbf{C}^n$（$n=2m+1$，$m \geq 1$）中一切保持微分 1 形式

$$dz^n + \sum_{i=1}^{m}(z^i dz^{m+i} - z^{m+i} dz^i)$$

到相差一个因子（可以是函数）的全纯局部变换所成的切触伪群（contact pseudo-group）．

g）例 a）－f）中的复变换伪群的实的类比．

例 a），c）－f）中的 Lie 伪群之阶均为 1，而例 b）之阶为 2．

流形 M 的任意变换 Lie 群 G 通过其在 M 之开子集上的变换限制决定一个变换伪群 $\Gamma(G)$．形如 $\Gamma(G)$ 的变换伪群称为可整体化的（globalizable）．例如球面 S^n 上的局部共形变换的伪群当 $n>2$ 时是可整体化的，而当 $n=2$ 时则不能整体化．

变换的 Lie 伪群称为是有限型（finite type）的，如果存在一个自然数 d，使得每一个局部变换 $p \in \Gamma$ 均由它在某点 $x \in D_p$ 上的 d 节唯一决定；这种 d 中的最小者称为 Γ 的次数（degree）或型（type）；如果这样的 d 不存在，Γ 就称为无限型的变换伪群（pseudo-group of transformations of infinite type）．例 a）－f）中的伪群都是无限型的本原的变换 Lie 伪群．

令 Γ 是 n 维流形 M 上的一传递的变换 Lie 伪群，$G^r(\Gamma)$ 是 Γ 中一切保持一点 $O \in M$ 不变的局部变换之 r 节的族，这种变换即这样的 $p \in \Gamma$，使得 $O \in D_p$ 而且 $\bar{p}(O)=O$．对集合 $G^r(\Gamma)$ 赋予 Lie 群的自然结构后就称为 Γ 的 r 阶迷向群（r-th order isotropy group）．（$G^1(\Gamma)$ 也称为 Γ 的线性迷向群（linear isotropy group）．$G^r(\Gamma)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}^r(\Gamma)$ 自然地嵌入 M 在 O 处的向量场之 r 节的 Lie 代数中．若 Γ 是一阶的变换 Lie 伪群，则自然同态 $G^{r+1}(\Gamma) \to G^r(\Gamma)$ 的核 $G^{(r)}(\Gamma)$ 对任意的 $r \geq 1$，只依赖于线性迷向群 $G^1(\Gamma)$，并称为其 r 次扩张（extension）．一阶的变换 Lie 伪群为有限型 d，当且仅当

$$\dim G^{(d-1)}(\Gamma) \neq 0 \quad \text{而} \quad \dim G^{(d)}(\Gamma) = 0 .$$

此外，若 $G^1(\Gamma)$ 是不可约的，则 $d \leq 2$（见[5]）．一阶的变换 Lie 伪群 Γ 是有限型变换伪群仅当（在复情况下当且仅当）Lie 代数 $\mathfrak{g}^1$ 不包含秩为 1 的自同态（见[10]），这种线性 Lie 代数称为椭圆型的（elliptic）．

对于一阶的变换 Lie 伪群 Γ，可以用它的线性迷向代数计算出其一切扩张 $G^{(r)}(\Gamma)$ 的 Lie 代数，$r \geq 1$．准确些说，$G^{(r)}(\Gamma)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}^{(r)}(\Gamma)$ 由 M 上 O 点处的向量场之（$r+1$）节构成，它们在某个局部坐标（$x^1, \cdots, x^n$）中形如

$$\sum v^i_{i_0 \cdots i_r} x^{i_0} \cdots x^{i_r} \frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

这里 $v^i_{i_0 \cdots i_r}$ 是对下标为对称，且满足以下条件的任意张量，即对任意固定的 $i_1, \cdots, i_r$，矩阵

$$\left\| v^i_{j i_1 \cdots i_r} \right\|^n_{i,j=1}$$

关于此局部坐标系（x^i）属于 $\mathfrak{g}^1(\Gamma)$．

令 M 为域 $K=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上的 n 维微分流形．流形 M 上的每个 k 阶的传递的变换 Lie 伪群 Γ，均与 M 上的某个 k 阶 $G^{(k)}(\Gamma)$ 结构（见 **G 结构**（G-structure））的一切局部自同构所成的伪群重合（Cartan 第一基本定理（Cartan first fundamental theorem））．一切本原的无限型 Lie 伪群的分类首先是 E．Cartan 给出的（[2]）．按照他的定理，由全纯局部变换构成的每一个无限型的本原的变换 Lie 伪群，都局部同构于例 a）－f）的伪群之一．这个定理被多次证明过；它的现代的证明可用纯粹代数方法得到的，而传递的变换 Lie 伪群的局部研究导致某个滤过 Lie 代数的研究（见[9]）．这些滤过 Lie 代数的分类可以在分次单 Lie 代数分类的基础上给出（见[3]）．在实情况下也得到了本原的变换伪群的分类，而变换伪群作用的解析性条件，可以代之以较弱的无穷可微性条件（见[8]，

[9]). 也构作出了传递 Lie 伪群的某些抽象模型, 它在无限型变换伪群理论中的作用就如抽象 Lie 群在有限维情况下起的作用一样(见[6],[9]).

参考文献

[1] Sternberg, S., Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964.

[2A] Cartan, E., Sur la structure des groupes infinis de transformations, in Oeuvres complètes, Vol. 2, Gauthier-Villars, 1953, 571 — 624.

[2B] Cartan, E., Sur la structure des groupes infinis de transformations, in Oeuvres complètes, Vol. 2, Gauthier-Villars, 1953, 625 — 714.

[2C] Cartan, E., Les groupes de transformations continus, infinis, simples, in Oeuvres complètes, Vol. 2, Gauthier-Villars, 1953, 857 — 925.

[2D] Cartan, E., Les groupes de transformations continus, infinis, simples, in Oeuvres complètes, Vol. 2, Gauthier-Villars, 1953, 1335 — 1384.

[3] Guillemin, V., Infinite dimensional primitive Lie algebras, *J. Diff. Geom.*, 4 (1970), 3, 257 — 282.

[4] Kobayashi, S., Transformation groups in differential geometry, Springer, 1972.

[5A] Kobayashi, S. and Nagano, T., On filtered Lie algebras and geometric structures, I, *J. Math. Mech.*, 13 (1964), 5, 875 — 907.

[5B] Kobayashi, S. and Nagano, T., On filtered Lie algebras and geometric structures, Ⅲ, *J. Math. Mech.*, 14 (1965), 5, 679 — 706.

[6A] Kuranishi, M., On the local theory of continuous infinite pseudo groups, I, *Nagoya Math. J.*, 15 (1959), 225 — 260.

[6B] Kuranishi, M., On the local theory of continuous infinite pseudo groups, Ⅱ, *Nagoya Math. J.*, 19 (1961), 55 — 91.

[7] Libermann, P., Pseudogroupes infinitésimaux attachées aux pseudogroupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 4, 409 — 425.

[8] Shnider, S., The classification of real primitive infinite Lie algebras, *J. Diff. Geom.*, 4 (1970), 1, 81 — 89.

[9] Singer, I. M. and Sternberg, S., The infinite groups of Lie and Cartan, I. The transitive groups, *J. d'Anal. Math.*, 15 (1965), 1 — 114.

[10] Wilson, R. L., Irreducible Lie algebras of infinite type, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29 (1971), 2, 243 — 249.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】

参考文献

[A1] Albert, C. and Molino, P., Pseudogroupes de Lie transitifs, Ⅰ — Ⅱ, Hermann, 1984 — 1987.

[A2] Pommaret, J. F., Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups, Gordon & Breach, 1978.

齐民友 译

伪群结构 [**pseudo-group structure**; **псевдогрупповая структура**], 流形 M 上的

由 M 到一固定流形 V 的光滑局部**微分同胚**(diffeomorphism)的极大图册 A, 它们之间的所有转移函数属于 V 之局部变换的给定的伪群 Γ. 伪群 Γ 称为定义伪群(defining pseudo-group), V 称为模型空间. 具有定义伪群 Γ 的伪群结构也称为一 Γ 结构(Γ-structure). 准确些说, 流形 M 上的一个 V 值坐标卡(即由开子集 $U\subset M$ 到 V 的开子集 $\varphi(U)\subset V$ 上的微分同胚 $\varphi: U\to V$)之集合 A 称为一个伪群结构, 如果 a) 任意点 $x\in M$ 均属于 A 之一个卡 φ 的定义域; b) 对 A 中的任意卡 $\varphi: U\to V$ 和 $\psi: W\to V$ 的转移函数 $\psi\circ\varphi^{-1}: \varphi(U\cap W)\to\psi(U\cap W)$ 均为给定的伪群 Γ 的一个局部变换; c) A 是适合 b) 的卡之最大集合.

伪群结构之例. 1) 流形 V 上的变换的**伪群**(pseudo-group) Γ 给出 V 上一个伪群结构 (V, Γ), 其卡即 Γ 中之局部变换. 这个伪群结构称为标准平坦 Γ 结构(standard flat Γ-structure).

2) 令 $V=K^n$ 为 K 上的 n 维向量空间, $K=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, 或四元数除环 $K=\mathbf{H}$ 上之左模, 再令 Γ 为 V 之局部变换的伪群, 这些局部变换的线性主部属于群 $GL(n, K)$. 若 $K=\mathbf{R}$, 则流形 M 上的相应 Γ 结构是一光滑流形结构, 若 $K=\mathbf{C}$, 则是一复解析流形结构, 若 $K=\mathbf{H}$, 则是一特殊的四元数流形结构.

3) 令 Γ 是向量空间 V 上保持一已给定的张量 S 不变的局部变换伪群. 指定一个 Γ 结构等价于在流形 M 上指定一可积的(整体的) S 型张量场. 例如, 当 S 是一非退化的斜对称 2 形式时, Γ 结构就是一个**辛结构**(symplectic structure).

4) 令 Γ 是 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 上的保持微分 1 形式

$$dx^0+\sum_{i=1}^{n}x^{2i-1}dx^{2i}$$

至多相差一个函数乘子的局部变换伪群. 这时 Γ 结构是一**切触结构**(contact structure).

5) 令 $V=G/H$ 是 Lie 群 G 的**齐性空间**(homogeneous space), 令 Γ 是 V 上的可以提升为 G 之变换的局部变换之伪群. 这时 Γ 结构称为由齐性空间 V 决定的伪群结构. 这种结构的例子有常曲率空间结构(特别是局部 Euclid 空间结构)以及共形平坦与射影平坦结构.

令 Γ 为 $V=\mathbf{R}^n$ 上的变换之 l 阶传递的 Lie 伪群(见**伪群**(pseudo-group)). 流形 M 上的 Γ 结构 A 决定了 M 上任意阶 k 的余标架丛的主子丛 $\pi_k: B^k\to M$, 它由 A 中的卡的 k 节组成:

$$B^k=\{j_x^k\varphi:\ \varphi\in A,\ \varphi(x)=0\},\ \pi_x(j_x^k\varphi)=x.$$

π_k 的结构群是 Γ 的 k 阶迷向群 $G^k(\Gamma)$，它按下式作用在 B^k 上：

$$j_0^k(a)j_x^k\varphi = j_x^k(a\circ\varphi).$$

从 π_k 称为由伪群结构 A 决定的第 k 结构丛（k-th structure bundle）或称 $G^k(\Gamma)$ 结构（$G^k(\Gamma)$-structure）. 从 π_l（其中 l 是 Γ 之阶）反过来又唯一地决定了伪群结构 A 为这样的卡 $\varphi: U \to V$ 之集合，它们适合

$$j_x^l(a\circ\varphi)\in B^l \text{ 若 } a\in\Gamma,\quad a\circ\varphi(x)=0.$$

π_k 的几何特性是存在一典则的 $G^k(\Gamma)$ 同变 1 形式 θ^k: $TB^k \to V+\mathfrak{g}^k(V)$，它对投影 $B^k \to B^{k-1}$ 为水平的. 这里 $\mathfrak{g}^k(V)$ 是迷向群 $G^k(\Gamma)$ 的 Lie 代数. 1 形式 θ^k 由下式给出：

$$\theta_{b^k}^k(\dot{b}^k) = \frac{d}{dt}\, j_0^{k-1}(\varphi_t\circ\varphi_0^{-1})|_{t=0},$$

这里

$$b^k = j_{x_0}^k(\varphi_0),\quad \dot{b}^k = \frac{d}{dt}\, j_{x_t}^k(\varphi_t),$$

$$\varphi_t\in A,\quad \varphi_t(x_t)=0,\ t\in[0,\varepsilon],$$

且适合某个 Maurer-Cartan 结构方程（亦见 **Maurer-Cartan 形式**（Maurer-Cartan form））. Γ 结构的无穷小自同构的 Lie 代数可以刻画为 B^l 上的保持典则 1 形式 θ^l 的可投影向量场之 Lie 代数.

伪群结构理论的基本问题就是描述流形上具有定义伪群 Γ 的伪群结构的等价类. 流形上两个伪群结构称为等价的（equivalent），就是指其中的一个可以通过流形的微分同胚化为另一个.

令 Γ 为单连通流形 V 上的变换的一个整体化传递伪群. 任一个具有 Γ 结构 A 的单连通流形 M 都允许有一映射 $\rho: M\to V$，称为 Cartan 展开，它局部地是 Γ 结构的同构. 若 A 有某种完全性质，则 ρ 是 Γ 结构的同构，而所考虑类型的所有 Γ 结构都是标准 Γ 结构 V 的形式，即可由自由作用的离散自同构群（V, Γ）作因子分解而由 V 得出. 例如常曲率的（伪）Riemann 结构和 $n>2$ 的紧流形 M^n 的共形平坦结构都是这种情况.

原来对于复结构发展起来的形变理论在伪群结构理论中占有重要的位置. 其中研究如何描述 Γ 结构 A 的非平凡形变，即包含已给定的 Γ 结构且按模平凡形变光滑地依赖于参数 t 的一族 Γ 结构 A_t. 一个已给定的 Γ 结构的形式无穷小非平凡形变的空间是由 M 的一维上同调空间 $H^1(M,\Theta)$ 来描述的，其系数在 A 的无穷小自同构的芽层 Θ 中. 若此空间是平凡的，就称此 Γ 结构是刚性的. 若二维上同调空间是平凡的，即 $H^2(M,\Theta)=0$，则在一定假设下可以证明存在 Γ 结构的非平凡形变，相应于 $H^1(M,\Theta)$ 中给定的无穷小形变.

参考文献

[1] Cartan, E., La géométrie des espaces Riemanniennes, Gauthier-Villars, 1925.

[2] Guillemin, V., and Sternberg, S., Deformation theory of pseudogroup structures, Mem. Amer. Math. Soc., **64**, Amer. Math. Soc., 1966.

[3] Pollack, A. S. The integrability of pseudogroup structures, *J. Diff. Geom.*, 9 (1974), 3, 355 – 390.

[4A] Griffiths, P. A., Deformations of G-structures, Part A. General theory of deformations, *Math. Ann.*, **155** (1964), 4, 292 – 315.

[4B] Griffiths, P. A., Deformations of G-structures, Part B: Deformations of geometric G-structures, *Math. Ann.*, **158** (1965), 5, 326 – 351.

[5] Pommaret, J. F., Théorie des déformations des structures, *Ann. Inst. H. Poincaré, Nouvelle Sér.*, **18** (1973), 285 – 352（英文摘要）.

[6] Berard Bergery, L., Bourguignon, J. P. and Lafontaine, J., Déformations localement triviales des variétés Riemanniennes, in Differential Geometry, Proc. Symp. Pure Math., Vol 27, Amer. Math. Soc., 1975, 3 – 32.

[7A] Spencer, D. C., Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups, I. Infinitesimal deformations of structures, *Ann. of Math.*, **76** (1962), 2, 306 – 398.

[7B] Spencer, D. C., Deformation of structures on manifolds defined by transitive, continuous pseudogroups, II. Deformations of structures. *Ann. of Math.*, **76** (1962), 3, 399 – 445.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 关于 Γ 结构的分类空间（classifying space of Γ-structures）见 [A2].

参考文献

[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Interscience, 1963, Chapt. 1.

[A2] Haefliger, A., Homotopy and integrability, in J. N. Mordeson, et al. (ed.); Structure of arbitrary purely inseparable extension fields, Lecture notes in math., Vol. 173, Springer, 1971, 133 – 163.

[A3] Pommaret, J. F., Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups, Gordon & Breach, 1978.

[A4] Hazewinkel, M. and Gerstenhaber, M., (eds.), Deformation theory of algebras and structures and applications, Kluwer, 1988.

齐民友 译

伪流形 [pseudo-manifold; псевдомногообразие]，n 维的和闭的（或带边缘的）

一个具有下列性质的有限单纯复形（simplicial complex）：

a）它是无分支的（non-branching）：每个（$n-1$）维单形恰好是二个（分别是一个或两个）n 维单形的面；

b) 它是强连通的 (strongly connected): 任何两个 n 维单形可用 n 维单形的一个"链"连接起来．在该"链"中，每一对相邻的单形有一个公共的 $(n-1)$ 维面，

c) 它有维数的齐性 (dimensional homogeneity): 每一个单形是某个 n 维单形的一个面．

如果一个拓扑空间的某个**三角剖分** (triangulation) 是伪流形，那么，它的任何一个三角剖分是伪流形．因此，人们可以论及拓扑空间是 (或不是) 伪流形的性质．

伪流形的例子：可三角剖分的 Z 上的紧连通**同调流形** (homology manifold)；复代数簇 (甚至有奇点的) 及可三角剖分的紧流形上的向量丛的 **Thom 空间** (Thom space)．直观地，一个伪流形可以当作一个具有奇点的流形的一般思想的组合实现，后者组成一个余维数 2 的集合．可定向性、定向和映射的度的概念对伪流形有意义，然而，在组合方法范围内，伪流形形成了这些概念的自然定义域 (尤其形式上伪流形的定义比组合流形的定义更简单)．流形中的一个闭链在某种意义下可以通过伪流形来实现 (见 **Steenrod 问题** (Steenrod problem))．

参考文献

[1] Seifert, H. and Threlfall, W., A textbook of topology, Acad. Press, 1980 (译自德文).

[2] Spanier, E., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966 (中译本: E. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

Д. В. Аносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Munkres, J., Elements of algebraic topology, Addison-Wesley, 1984.

[A2] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology: 1900-1960, Birkhäuser, 1989.

薛春华 译

伪度量 [pseudo-metric; псевдометрика]，集合 X 上的一个非负实值函数 ρ，定义在 X 的所有元素对的集合上 (即定义在 $X\times X$ 上)，满足下列三个条件，即所谓的伪度量公理 (axioms for a pseudo-metric):

a) 若 $x=y$，则 $\rho(x,y)=0$;

b) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

c) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$，其中 x,y,z 是 X 的任意元素．

并未要求 $\rho(x,y)=0$ 蕴涵 $x=y$．X 上的伪度量 ρ 确定 X 上一个拓扑结构如下：点 x 属于集 $A\subset X$ 的闭包，如果 $\rho(x,A)=0$，这里

$$\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,y): y\in A\}.$$

这个拓扑结构是完全正则的，但不一定是 Hausdorff 拓扑：单点集可以是非闭集．任何完全正则的拓扑结构均可由一族伪度量给出，即是相应伪度量拓扑的格论意义下的并集．同样，伪度量族可以用来定义、说明以及研究一致结构．

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982)

А. В. Архангельский 撰

【补注】 亦见**度量** (metric).

参考文献

[A1] Čech, E., Topological spaces, Interscience, 1966.

胡师度　白苏华 译

伪度量空间 [pseudo-metric space; псевдометрическое пространство]

配备了一个**伪度量** (pseudo-metric) 的集合．每个伪度量空间都是**正规空间** (normal space)，且满足**第一可数公理** (first axiom of countability)．伪度量空间满足**第二可数公理** (second axiom of countability) 的充要条件是：它是可分空间．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Čech, E., Topological spaces, Interscience, 1966.

胡师度　白苏华 译

伪范数 [pseudo-norm; псевдонормирование]

绝对值 (absolute value) 或**域上的范数** (norm on a field) 的概念的推广，它含有一条减弱的公理：代替条件 $w(ab)=w(a)w(b)$，仅要求 $w(ab)\leqslant w(a)w(b)$．伪范数的一个例子：区间 $[0,1]$ 上的全体实值连续函数 f 构成的环中，一个不是范数的伪范数由下述公式定义：

$$p(f)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

每个实有限维代数可以被赋予一个伪范数．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (英译本: Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963).

О. А. Иванова 撰　赵春来 译

伪开映射 [pseudo-open mapping; псевдооткрытое отображение]

一个**连续映射** (continuous mapping) $f: X\to Y$，使得对任何一点 $y\in Y$ 以及集 $f^{-1}y$ 在 X 中的任何邻

域 U、总有 $y \in \mathrm{Int} fU$（这里 $\mathrm{Int} fU$ 是 fU 关于 Y 的所有内点的集合）. М. И. Войцеховский 撰

【补注】 伪开映射亦称遗传商映射（hereditarily quotient mapping），因为映射 $f: X \to Y$ 为伪开映射的充要条件是：对任何 $B \subseteq Y$，余限制映射 $f_B: f^{-1}[B] \to B$ 是一个**商映射**（quotient mapping）.

参考文献

[A1] Engeling, R., General topology, Heldermann, 1989.

胡师度 白苏华 译

伪周期函数 [**pseudo-periodic function; псевдопериодическая функция**]，具有周期 $\omega_0, \cdots, \omega_r$ 的满足下列条件的 $r+1$ 元函数 $f(t, u_1, \cdots, u_r)$：

$$f(t, u_1, \cdots, u_i + \omega_i, \cdots, u_r) =$$
$$= f(t, u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_r),\ i = 1, \cdots, r;$$
$$f(t + \omega_0, u_1, \cdots, u_r) =$$
$$= f(t, u_1 + \omega_0, \cdots, u_r + \omega_0).$$

例：如果 $f_0(t)$ 和 $f_1(t)$ 是分别具有周期 ω_0 和 ω_1 的连续周期函数，则 $f(t, u_1) = f_0(t) + f_1(t + u_1)$ 是一个伪周期函数.

伪周期函数与**拟周期函数**（quasi-periodic function）密切相关，并且可由它唯一地确定：函数 $F(t)$ 是周期为 $\omega_0, \cdots, \omega_r$ 的拟周期函数，当且仅当存在周期为 $\omega_0, \cdots, \omega_r$ 的连续伪周期函数 $f(t, u_1, \cdots, u_r)$，使得 $F(t) = f(t, 0, \cdots, 0)$.

Ю. В. Комленко 撰

【补注】 也用"伪周期函数"一词表示具有伪 p 周期（pseudo-p-period）的函数 $g(t+p) = e^{i\theta} w(t)$，其中 θ 取某一值，t 取一切值．对于这样一个函数 $g(t)$，函数 $h(t, u) = e^{ip^{-1}\theta u} g(t)$ 是上述意义下的伪周期函数.

参考文献

[A1] Urabe, M., Green functions of pseudo-periodic differential operators, in M. Urabe (ed.), Japan-United States Sem. Ordinary Differential and Functional Eq., Springer, 1971, 106 – 122.

[A2] Goldstein, J. A., Asymptotics for bounded semigroups on Hilbert space, in R. Nagel, et al. (ed.), Aspects of Positivity in Funct. Anal., North-Holland, 1986, 49 – 62.

杜小杨 译

伪二次型 [**pseudo-quadratic form; псевдоквадратичная форма**]

【补注】 令 D 是一个中心为 k 的除环（见**可除代数**（division algebra）），V 是 D 上一个右向量空间．令 σ 是 D 的一个自同构，$\varepsilon \in D$ 满足条件 $\varepsilon\sigma(\varepsilon) = 1$，$\sigma^2(x) = \varepsilon x \varepsilon^{-1}$ 对一切 $x \in D$．又假设 $\varepsilon \neq -1$，若 $\sigma = \mathrm{id}$ 且 $\mathrm{char}(D) \neq 2$．令

$$D(\sigma, \varepsilon) = \{x - \sigma(x)\varepsilon : x \in D\}.$$

这是 D 的一个加法子群．令 $\bar{D}$ 是商 $\bar{D} = D / D(\sigma, \varepsilon)$，而 $x \mapsto \bar{x}$ 表示商映射 $D \to \bar{D}$．V 上一个伪二次型是这样一个函数 $q: V \to \bar{D}$，存在一个迹值（$\sigma - \varepsilon$）Hermite 型（见**半双线性型**（sesquilinear form））$f: V \times V \to D$ 使得 $q(v + w) = q(v) + q(w) + \overline{f(v, w)}$．型 f 是由这个性质唯一确定的，称为 q 的**半双线性化**（sesquilinearization）.

一个 $(\mathrm{id}, 1)$ 伪二次型就是通常意义下的**二次型**（quadratic form）．一个伪二次型的 Witt 指数就是相关的半双线性型的 Witt 指数.

参考文献

[A1] Tits, J., Building and BN-pairs of spherical type, Springer, 1974, Sect. 8.2.

[A2] Bourbaki, N., Eléments de mathématique. Algèbre, Hermann, 1959, Chap. 9. Formes sesquilinéaires et formes quadratiques.

[A3] Dieudonné, J., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1963.

郝炳新 译

伪随机数 [**pseudo-random numbers; псевдослучайные числа**]

见**随机数和伪随机数**（random and pseudo-random numbers）.

伪 Riemann 几何学 [**pseudo-Riemannian geometry; псевдориманова геометрия**]

伪 Riemann 空间（pseudo-Riemannian space）${}^lV_n$ 中曲面和曲线几何性质的总体．这些性质起因于这个空间上伪 Riemann 度量的性质，它是指标为 l 的不定二次型：

$$ds^2 = g_{ij}(X) dx^i dx^j.$$

曲线 l 的弧长由公式

$$s = \int_l \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

表达；它可能是实数，纯虚数或零（**迷向曲线**（isotropic curve））．${}^lV_n$ 中的一条测地曲线失去，即使局部地，其为极值的性质，但保持其为具有平稳长度的曲线．弧 l 的长度可以大于或小于连接 l 两端点的测地线段的长度．如果人们考虑空间 ${}^{n-1}V_n$，则具有实长度的测地线段 AB 给出点 A 和点 B 之间的最长距离（假定其弧可嵌入一个半测地坐标系作为一个坐标曲线，并且为了比较，假定具有实长度的平滑曲线取自这个坐标系的定义区域）．如果考虑伪 Riemann 空间 ${}^{n-1}\mathbf{R}_n$，则可取具有实长度的任一直线作为正交

坐标系的 x^n 轴，在此坐标系中向量 $\mathbf{x}$ 的标量平方具有形式

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -\sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2 + (x^n)^2 .$$

这里（沿 x^n 轴）具有实长度的任一直线段给出其两端点间的最长距离．在空间 ${}^1V_n$（或 ${}^1\mathbf{R}_n$）的情况，具有虚长度的测地线段，和两端点与测地线段两端点相重合的具虚长度的一切可能平滑曲线相比，将给出最长距离．

应用伪 Riemann 度量，可以发展伪 Riemann 空间中曲面和曲线的微分几何学，可以定义曲线和曲面的曲率，等等．

伪 Riemann 几何学也出现在双曲空间中的曲面上．伪 Riemann 几何学的最简单情况是**伪 Euclid 空间**（pseudo-Euclidean space）${}^l\mathbf{R}_n$ 的几何学和，特别是 **Minkowski 空间**（Minkowski space）的几何学．

关于参考文献和更多信息，见**伪 Riemann 空间**（pseudo-Riemannian space）．

Л．А．Сидоров 撰　徐锡申 译

伪 Riemann 空间 [pseudo-Riemannian space; псевдориманово пространство]

具有（无挠）**仿射联络**（affine connection）的空间，其上每点处的切空间是**伪 Euclid 空间**（pseudo-Euclidean space）．

设 A_n 为具有（无挠）仿射联络的 n 维空间，并设 ${}^l\mathbf{R}_n$ 是在 A_n 每点处的切伪 Euclid 空间；在这种情况下，伪 Riemann 空间用 ${}^lV_n$ 表示．如同在正常 Riemann 空间中那样，${}^lV_n$ 的度量张量是非退化的，具有消失的共变导数，但 ${}^lV_n$ 的度量张量是一个指标 l 的二次型：

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \quad i, j = 1, \cdots, n,$$

g_{ij} 是 ${}^lV_n$ 的度量张量，$\det\|g_{ij}\| \neq 0$．空间 ${}^lV_n$ 也可定义为其上给定一指标 l 的不变二次微分形式的 n 维流形．

伪 Riemann 空间的最简单例子是空间 ${}^l\mathbf{R}_n$．

伪 Riemann 空间 ${}^lV_n$ 被称为可约的，如果在每点的一个邻域内存在坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$，使得坐标 x^i 能分成若干组 x^{i_α}，仅对属于同一组的那些指标 i_α 和 j_α 才有 $g_{i_\alpha j_\alpha} \neq 0$，且 $g_{i_\alpha j_\alpha}$ 仅是这个组的坐标的函数．

在伪 Riemann 空间中，**截面曲率**（sectional curvature）仅对每个非退化的二维方向有定义．它可解释为过给定点沿给定二维方向引出的（非迷向）测地二维曲面的曲率．如果在每一点对所有二维方向的曲率的值都相同，则在所有点它是常数（Schur 定理（Schur theorem）），此时空间称为常曲率伪 Riemann 空间（$n \geq 3$）．常负曲率伪 Riemann 空间的一个例子是负曲率的双曲空间 ${}^lS_n$——它是一个伪 Riemann 空间 ${}^lV_n$；空间 ${}^l\mathbf{R}_n$ 是零曲率的伪 Riemann 空间．

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967（中译本：П. К. 洛薛夫斯基，黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，1955．上、下册）．

[2] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

[3] Einstein, A. Collected scientific works, 1, M., 1965（俄译本，译自英文）．

Л．А．Сидоров 撰

【补注】

指标为 1 的情况对于物理应用是重要的．对任何 n，${}^1V_n$ 称为 Lorentz 流形（Lorentzian manifold）．这里，具有纯虚的、或等于零的、或非零实的长度的切向量分别称为类时、类光、或类空向量．若 $n=4$ 且 ${}^1V_n$ 有一整体的类时向量场，则 ${}^1V_n$ 称为**时空**（space-time），并且将来与过去之间有差别．这样的时空是描述广义相对论现象的一般几何模型．例如，物质或类光粒子的来历可用只具有非类空切向的世界线来描述．几何模型与物理数据之间的耦合由 Einstein 的场方程（见 **Einstein 方程**（Einstein equations））给出．

近十年间关于整体 Lorentz 几何已作出了许多进展．这是由 R．Penrose 所开创，尤其被 S．W．Hawking 所推进（见 [A2]）．在这发展中，主要的精采部分是 Hawking-Penrose 奇异性定理（Hawking-Penrose singularity theorems），它证明在特殊的几何条件下（例如，沿类时方向的非负 Ricci 曲率和正平均曲率的紧类空超曲面的存在性，或沿类光方向的非负 Ricci 曲率和非紧的 Cauchy 超曲面及诱惑曲面的存在性）时空有将来的奇异性，即存在将来的非完全的因果测地线．不计时间的定向，这些奇异性的标准模型是 Schwarzschild 模型（黑洞）和 Robertson-Walker-Friedman 模型（大爆炸）．也见**宇宙模型**（cosmological models）．对应的理论可在 [A1]－[A4] 中找到．

参考文献

[A1] Beem, J. K. & Ehrlich, P. E., Global Lorentzian geometry, M. Dekker, 1981.

[A2] Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R., The large scale structure of space-time, cambridge Univ. Press, 1973.

[A3] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Acad. Press, 1983.

[A4] Sachs, R. K. & Wu, H., General relativity for mathematicians, Springer, 1977.

[A5] Misner, C., Thorne, K. & Wheeler, J., Gravitation, Freeman, 1973.

沈一兵 译

伪标量 [pseudo-scalar; псевдоскаляр]

在坐标轴的平移或旋转下不变，但当每个轴的方向反向时改变其符号的量．作为伪标量的一个例子，可取三个向量的混合三重标量积（见**混合积**（mixed product）），或者**内积**（inner product）$(\mathbf{a},\mathbf{b})$，其中 $\mathbf{a}$ 是**轴向量**（axial vector）而 $\mathbf{b}$ 是一般向量（基点在原点）． БСЭ-3

【补注】

例如，伪标量在作为几何和物理基本方法的 Clifford 代数的内容中被用到；如见[A1]和[A2]中的各种文章．在[A3]的术语中，上面定义的伪标量是 W 标量（W-scalar）（价为 0 的 W 张量）．

参考文献

[A1] Chisholm, J. S. R. & Common, A. K., Clifford algebras and their applications in mathematical physics, Reidel, 1986.

[A2] Hestenes, D., New foundations for classical mechanics, Reidel, 1986.

[A3] Schouten, J. A., Ricci-calculus, Springer, 1954, p. 11 ff（译自德文）.

沈一兵 译

伪标量积[**pseudo-scalar product; псевдоскалярное произведение**]，斜积（skew product），$\mathbf{a}\vee\mathbf{b}$，非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的

它们的模的乘积再乘以由 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$ 正向（逆时针方向）旋转的角 φ 的正弦：

$$\mathbf{a}\vee\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\varphi .$$

如果 $\mathbf{a}=0$ 或 $\mathbf{b}=0$，则约定伪标量积是零．

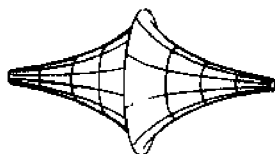
见**向量代数**（vector algebra）．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 两个向量的伪标量积给出这两个向量的向量积（vector product）的长度． 郝钢新 译

伪球面[**pseudo-sphere; псевдосфера**]

曳物线（tractrix）$(x=u-\tanh u,\ y=\operatorname{sech} u)$ 绕其渐近线（$y=0$，见图）旋转所构成的常负曲率曲面．



在**半测地坐标**（semi-geodesic coordinates）中线素有形式：

$$ds^2=du^2+\cosh^2\frac{u}{a}\,dv^2,\ a=\text{常数}$$

（直线 $u=0$ 是一测地线）；而在**等温坐标**（isothermal coordinates）中有形式：

$$ds^2=a^2\,\frac{dx^2+dy^2}{y^2},\ a=\text{常数}.$$

每个常负曲率曲面可局部嵌入于伪球面．伪球面的内蕴几何学局部地与双曲几何学一致．（见 **Beltrami 解释**（Beltrami interpretation））．

参考文献

[1] Выгодский, М. Я., Дифференциальная геометрия, М.-Л., 1949.

[2] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.-Л. 1948.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988（译自法文）.

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, 320, 378.

[A3] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1957.

[A4] Greenberg, M. J., Euclidean and non-Euclidean geometries, Freeman, 1974

[A5] Rosenfeld, B., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988（译自俄文）.

林向岩 译 陆珊年 校

伪张量[**pseudo-tensor; псевдотензор**]

至多相差乘以一个任意函数的张量（见**向量空间上的张量**（tensor on a vector space））．

【补注】

更确切地，伪张量（也称相对张量（relative tensor））是一个量 $p^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}$，它在坐标变换下变成

$$\overline{p}^{i_1\cdots i_m}_{j_1\cdots j_n}=\tau(\overline{x})\,p^{l_1\cdots l_m}_{k_1\cdots k_n}\frac{\partial\overline{x}^{i_1}}{\partial x^{l_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{i_m}}{\partial x^{l_m}}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial\overline{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{k_n}}{\partial\overline{x}^{j_n}},$$

其中 τ 是标量值的函数．（应用中）最经常的情况是函数 τ 以简单方式依赖于坐标变换的 Jacobi 行列式 $\Delta=\det(\partial\overline{x^i}/\partial x^j)$．在[A1]中分为下列情况：

i) $\tau=\Delta^{-w}\overline{\Delta}^{-w'}$，权 w 和反权 w' 的张量 Δ 密度；

ii) $\tau=|\Delta|^{w}$，权 w 的张量密度；

iii) $\tau=\Delta/|\Delta|$，W 张量．

这里 $\overline{\Delta}$ 是 Δ 的复共轭．权零的张量密度就是普通张量（见**向量空间上的张量**（tensor on a vector space））．

在[A2]中，权 1 和反权 0 的张量 Δ 密度称为张量密度（tensor density），而权 -1 和反权 0 的张量 Δ 密度称为张量容量（tensor capacity）．

参考文献

[A1] Schouten, J. A., Ricci-calculus, Springer, 1954, p. 11 ff（译自德文）.

[A2] Saver, R. & Szabó, I. (eds), Mathematische Hilfsmi-

ttel des Ingenieurs, III. Springer, 1968. p. Sect. G. II. 6

沈一兵 译

伪向量 [**pseudo-vector**; **псевдовектор**]

同轴向量 (axial vector).

ψ 函数 [**psi-function**; **ψ-функция**], Gauss ψ 函数 (Gauss ψ-function), 从 Γ 函数 (digamma-function)

Γ 函数 (gamma-function) 的对数的一阶导数.

Ptolemeus 定理 [**Ptolemeus theorem**; **Птолемея теорема**]

内接于圆的每一个凸四边形中，对角线长度的乘积等于其对边长度的乘积的和. Claudius Ptolemeus (2 世纪) 用此性质推演某些三角关系，故以他的名字记之.

П. С. Моденов 撰

【补注】 人们也遇到 Ptolemy (即 Ptolemeus) 定理 (Ptolemy theorem). Ptolemy 定理等价于关于 $\sin(\alpha+\beta)$ 的公式.

Ptolemy 定理的逆也真. 若在一个凸四边形中，对角线长度的乘积等于其对边长度乘积的和，则四个顶点在一个圆上.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S., Geometry revisited, Math. Assoc. Amer., 1967.

[A2] Maxwell, E. A., Geometry by transformations, Cambridge Univ. Press, 1975.

[A3] Berger, M., Geometry, 1 − 2, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一 — 五卷, 科学出版社, 1987 − 1991).

林向岩 译 陆珊年 校

Puiseux 级数 [**Puiseux series**; **Пюизе ряд**]

见分支点 (branch point).

纯子群 [**pure subgroup**; **чистая подгруппа**], 服务子群 (serving subgroup)

Abel 群 (Abelian group) G 的子群 C，使得对任何 $c\in C$ 方程 $nx=c$ 在 G 中有解时在 C 中也有解. 零子群，G 本身，G 的挠部分以及直和项都是纯子群的例子. 并非每个纯子群都是直和项，即使对 p 群 (p-group) 也是如此. 但是若 C 是 Abel 群 G 的挠纯子群并且其元素的阶是一致有界的，C 就是直和项. 对于在其中每个纯子群都是直和项的 Abel 群有一个完整的描述 (见 [1]). 对有关 Abel 群中纯子群集合的基数问题也已经彻底地研究过.

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 1982)

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1982.

李慧陵 译

纯子模 [**pure submodule**; **чистый подмодуль**], Cohn 意义下的

右 R 模 B 的子模 A 使得: 对于任一左 R 模 C，Abel 群的自然同态

$$A\otimes_R C\to B\otimes_R C$$

是单射. 这等价于下述条件: 如果方程组

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_{ij}=a_j,\ 1\leqslant j\leqslant m,\ \lambda_{ij}\in R,\ a_j\in A$$

在 B 中有解，则它在 A 中有解 (见**平坦模** (flat module)). 任一直和因子是纯子模. 任一右 R 模是纯模当且仅当 R 是**正则环** (**von Neumann 意义下的**) (regular ring (in the sence of von Neumann)).

在 Abel 群的情形 (即 $R=\mathbf{Z}$) 下述论断是等价的: 1) A 是 B 的纯 (pure 或 serving) 子群 (见**纯子群** (pure subgroup)); 2) 对任一自然数 n, $nA=A\cap nB$; 3) 对任一自然数 n, A/nA 是 B/nB 的直和因子; 4) 如果 $C\subseteq A$ 且 A/C 是有限生成群，则 A/C 是 B/C 的直和因子; 5) 商群 B/A 中的任一剩余类中含有阶与此剩余类的阶相同的元素; 以及 6) 如果 $A\subseteq C\subseteq B$ 且 C/A 是有限生成的，则 A 是 C 的直和因子. 如果性质 2) 只要求对素数 n 成立，则称 A 为弱纯子群 (weakly-pure-subgroup).

对于纯性的概念的公理处理方法基于对符合下述条件的单同态的类 $\mathfrak{K}_\omega$ 的考虑 (这里 $A\subseteq_\omega B$ 意为 A 是 B 的子模且自然嵌入属于类 $\mathfrak{K}_\omega$): P0′) 如果 A 是 B 的直和因子，则 $A\subseteq_\omega B$; P1′) 如果 $A\subseteq_\omega B$ 且 $B\subseteq_\omega C$，则 $A\subseteq_\omega C$; P2′) 如果 $A\subseteq B\subseteq C$ 且 $A\subseteq_\omega C$，则 $A\subseteq_\omega B$; P3′) 如果 $A\subseteq_\omega B$ 且 $K\subseteq A$，则 $A/K\subseteq_\omega B/K$; 以及 P4′) 如果 $K\subseteq A\subseteq B$, $K\subseteq_\omega B$ 且 $A/K\subseteq_\omega B/K$，则 $A\subseteq_\omega B$. 取类 $\mathfrak{K}_\omega$ 来代替所有单同态的类导致了**相对同调代数** (ralative homological algebra). 例如，一个模 Q 称作 ω 内射的 (ω-injective)，如果 $A\subseteq_\omega B$ 蕴含着由 A 到 Q 的任一同态可被扩张为 B 到 Q 的同态 (见**内射模** (injective module)). 纯内射 Abel 群被称为代数紧的 (algebraically compact). 在 Abel 群 Q 上下述条件等价: α) Q 是代数紧的; β) Q 是包含它作为纯子群的任一群的直和因子; γ) Q 是容许有紧拓扑的群的直和因子; δ) 如果 Q 上的方程组的每个有限子组可解，则原方程组可解.

参考文献

[1] Мишина, А. П., Скорняков Л. А., Абелевы группы и модули, М., 1969.

[2] Скляренко, Е. Г., 《Успехи матем. наук》, 33 (1978), 85 – 120.

[3] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1. Springer, 1973.

[4] Fuchs, L., Infinite abelian groups, 1 – 2, Acad. Press, 1970 – 1973.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rotman, J., Introduction to homological algebra, Acad. Press, 1979

赵春来 译

追踪对策 [pursuit game; преследования игра]

追踪者(搜索者)P 和逃逸者(被捕食者)E 的二人零和微分对策(见**微分对策**(differential games)),其运动由下列微分方程来描述:

$$P:\dot{x}=f(x,u),\ E:\dot{y}=g(y,v).$$

这里,x,y 分别为确定局中人 P 和 E 的状态的相向量,u,v 为由局中人在每个时刻在给定的 Euclid 空间的紧集 U,V 中选取的控制参数. P 的目标例如可以是追近 E 到一个确定的距离,形式上,它意味着 x 落入 y 的某个 l 邻域 ($l\geq 0$) 中. 这里要区别极小时间追近(追逃对策(pursuit-evasion game))、给定时间内追近(具有预定持续时间的追踪对策(pursuit game with prescribed duration))以及在 E 达到某个集合的时刻以前追近(具有"生命线"的对策). 全信息对策已经得到相当好的研究;这里两个局中人都互相知道对方在每个时刻的相状态. 求解追踪对策意味着求一个均衡(见**对策论中的鞍点**(saddle point in game theory)).

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., 《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 4, 219 – 274.

[2] Красовский, Н. Н., Субботин, А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974 (英译本: Krasovskiĭ, N. N. and Subbotin, A. I., Game-theoretical control problems, Springer, 1988).

[3] Isaacs, R., Differential games, Wiley, 1965.

[4] Петросян, Л. А., Дифференциальные игры преследования, Л., 1977.

Л. А. Петросян 撰

【补注】 追踪对策也称为追踪的对策(game of pursuit)或追逃对策(game of pursuit-evasion).

与追踪对策相关的是具有移(不)动隐藏者的搜索对策(search games with (im-)mobile hider). 这样的对策通常由于不完全信息而是随机的.

参考文献

[A1] Gal, S., Search games with mobile and immobile hider, *SIAM J. Control Optim.*, 17 (1979), 332 – 349.

[A2] Olsder, G. J. and Papavassilopoulos, G. P., About when to use the searchlight, *J. Math. Anal. Appl.*, 136 (1988), 466 – 478.

[A3] Friedman, A., Differential games, Wiley, 1971.

[A4] Hajek, O., Pursuit games, Acad. Press, 1975.

[A5] Basar, T. and Olsder, G. J., Dynamic noncooperative game theory, Acad. Press, 1982.

史树中 译

棱锥 [pyramid; пирамида]

一个**多面体**(polyhedron),它的一个面(底(base))是多边形,其余的面(侧面(lateral faces))都是三角形并且具有一个公共顶点(棱锥的顶点(vertex of the pyramid))(见图 1 和图 2).

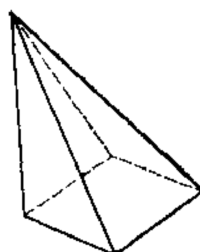


图 1

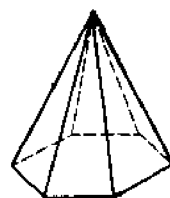


图 2

根据侧面的数目,棱锥分为三棱锥、四棱锥,等等. 从棱锥的顶点向底平面所引的垂直线段及其长度称为棱锥的高(height of the pyramid). 棱锥的体积(volume of a pyramid)等于

$$V=\frac{1}{3}HS,$$

其中 H 是高,S 是底的面积. 一个棱锥称为正的(regular)(图 2),如果它的底是正多边形,高通过底的中心. 正棱锥的侧面是全等的等腰三角形,其中每一个三角形的高称为正棱锥的斜高(apothem)(正棱锥底的边心距(apothem)是斜高在底平面上的投影).

用一个平行于底的平面截割棱锥,得到两个立体:一个与原棱锥相似的棱锥和一个截棱锥(truncated pyramid)(图 3). 该平面与棱锥相交得到的多边形

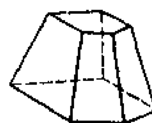


图 3

称为截棱锥的上底(upper base),而原棱锥的底称为截棱锥的下底(lower base). 上底与下底之间的距离称为截棱锥的高(height). 截棱锥的体积等于

$$V=\frac{1}{3}h(s+S+\sqrt{sS}),$$

其中 h 是高，s 和 S 是上底和下底的面积．

БСЭ-3

【补注】 关于任意维的棱锥，见[A1]，[A2]．

参考文献

[A1] Grünbaum, B., Convex polytopes, Wiley, 1967.

[A2] McMullen, P. and Shephard, G. C., Convex polytopes and the upper bound conjecture, Cambridge Univ. Press, 1971.

杜小杨 译

Pythagoras 定理[Pythagoras theorem; Пифагора теорема]，亦称勾股定理

几何学中给出直角三角形三边之间的关系的一个定理．在 Pythagoras(公元前 6 世纪)以前，这个定理显然已为人知，但是一般形式的证明应归功于 Pythagoras．原来，这个定理确立了在一个直角三角形三边上画出的正方形的面积之间的关系：斜边上的正方形的面积等于两直角边上的正方形的面积之和．有时 Pythagoras 定理简单地叙述为：直角三角形斜边的平方等于两直角边的平方和．Pythagoras 定理的逆定理也成立：如果一个三角形的一边的平方等于另外两边的平方和，则这个三角形是直角三角形．

БСЭ-3

【补注】 Pythagoras 定理是**余弦定理**(cosine theorem)的一个特殊情况；(在 **Hilbert 空间**(Hilbert space)中)这个定理的无限维类似是 **Parseval 等式**(Parseval equality)(即关于规范正交系的完全性定理)．

解 Pythagoras 方程(Pythagoras equation) $a^2+b^2=c^2$(其中 a、b、c 为整数)的问题，导致 **Pythagoras 数**(Pythagorean numbers)．解推广的 Pythagoras 方程——Diophantus 方程 $a^n+b^n=c^n\ (n\geq 3)$ 的问题，称为 Fermat 最后(或大)定理，见 **Fermat 大定理**(Fermat great theorem)．

边长为整数的直角三角形称为 Pythagoras 三角形(Pythagorean triangle)．

参考文献

[A1] Greub, W. H., Linear algebra, Springer, 1967.

杜小杨 张鸿林 译

Pythagoras 数[Pythagorean numbers; Пифагоровы числа]

正整数 x，y，z 的三数组，x，y，z 满足方程 $x^2+y^2=z^2$．这个方程的任何解 x，y，z，因而一切 Pythagoras 数，都能表示成 $x=a^2-b^2$，$y=2ab$，$z=a^2+b^2$，其中 a 和 b 是正整数($a>b$)．Pythagoras 数可以解释为直角三角形的三个边(**Pythagoras 定理**(Pythagoras theorem))．

БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

杜小杨 译

Q

四角形 [quadrangle ; четырехугольник]

【补注】 在初等几何学中，四角形是由四条相交于四个（角）点的线段构成的图形.



注意：四角形中每个点与两条线相关联，每条线与两个点相关联，使得至多有一条线通过两不同的点，两条线至多交于一个点，并且对于一个点和一条不与此点相关联的线，存在通过这一点且与给定的线相交的唯一的一条线.

这些性质提供了广义四角形（generalized quadrangle）最简单情形的例子. 广义四角形是满足下述条件的一个**关联系统**（incidence system）(P, B, I)，即一些点（集合 P）与一些线（或区组，即集合 B）之间的一个（对称）关联关系 $I \subset P \times B$：

i）对于每个点 M 和每条不通过 M 的线 p，恰存在一个偶 (N, n)，其中 M 在 n 上，且 N 在 n 和 p 上.

广义四角形可看作非常特殊类型的**二部图**（graph, bipartite），即取二部图的顶点集为不相交并 $P \cup B$，且 $M \in P$ 与 $m \in B$ 相连结，当且仅当 M 在 m 上.

交换 P 和 B 即得对偶广义四角形（dual generalized quadrangle）.

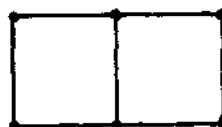
一个广义四角形是非退化的，如果没有点与满足下述条件的所有其他点共线：这些点中如果两个点在一条公共线上，则此两点共线.

(s, t) 阶有限广义四角形（finite generalized quadrangle of order (s, t)）是满足上述条件 i）和下列两条件的广义四角形：

ii）每个点恰与 $t+1$ 条线相关联且至多有一条线通过两不同的点；

iii）每条线有 $s+1$ 个点且两条线至多交于一个点.

$(1, 2)$ 阶有限广义四角形的一个最简单的例子可描绘如下图：



还有一个例子是网格（grid），它是一个关联结构 (P, B, I)，其中 $P = \{x_{ij}: i = 1, \cdots, s_1, j = 1, \cdots, s_2\}$，$B = \{l_1, \cdots, l_{s_1}; m_1, \cdots, m_{s_2}\}$，且 x_{ij} 在 l_k 上当且仅当 $i = k$，x_{ij} 在 m_k 上当且仅当 $j = k$.

广义四角形有三个已知的族同经典群相联结，它们称为经典广义四角形（classical generalized quadrangle）. 也有其他的广义四角形，例如来自**卵形体**（ovoid）的广义四角形.

广义四角形是由 J. Tits 在[A1]中引入的，他还描述了经典广义四角形和第一批非经典广义四角形. 更一般地，可考虑广义 m 角形（[A4]）.

参考文献

[A1] Tits, J., Sur la trialité et certain groupes qui s'en déduisent, *Publ. Math. IHES*, 2 (1959), 14 – 60.

[A2] Dembowski, P., Finite geometries, Springer, 1968.

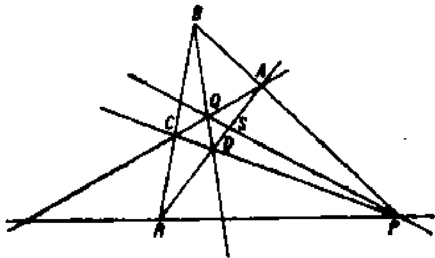
[A3] Payne, S. E., Thas, J. A., Finite generalized quadrangles, Pitman, 1984.

[A4] Shult, E. E., Characterizations of the Lie incidence geometries, 载于 K. Lloyd (ed.), Surveys in com-

binatorics, Cambridge Univ. Press, 1983, pp. 157 – 186. 沈永欢 译

完全四角形 [quadrangle, complete; четырехвершинник]

处于平面上的四个点 A, B, C, D（其中任何三点都不处于同一直线上）以及连接这些点的六条直线的集合（见图）.



点 A, B, C, D 称为完全四角形的顶点（vertices），直线 AB, CD, AC, BD, BC, AD 称为它的边（edges）. 不含公共顶点的两边称为对边（opposite edges）；对边的交点 P, Q, R 称为对角点（diagonal points）.

如果点 S 和 T 是直线 PQ 与直线 AD 和 BC 的交点，则四点 P, Q, S, T 构成点的**调和四元组**（harmonic quadruple）.（完全）四角形的对偶图形称为（完全）四边形（quadrilateral）——平面上的四条直线（其中任何三条都不含公共点）.

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Projective geometry, Springer, 1987.

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A3] Berger, M., Geometry, 1 – 2, Springer, 1987（中译本：M. 贝尔热，几何，第一 – 五卷，科学出版社，1987 – 1991）.

杜小杨 译

象限 [quadrant; квадрант]

由两条相互垂直的直线把平面划分成的四个区域（角）中的任何一个. БСЭ-3

根方偏差 [quadratic deviation; квадратичное отклонение]，根方差（quadratic variance），标准差（standard deviation），量 $x_1,\cdots,x_n$ 相对于 a 的

算式

$$\frac{(x_1-a)^2+\cdots+(x_n-a)^2}{n} \qquad (*)$$

的平方根. 当 $a=\overline{x}$ 时根方偏差达到其最小值，其中 $\overline{x}$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的算术平均值

$$\overline{x}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

这时根方偏差可以作为量 x_1, $\cdots$, x_n 散布程度的度量（见方差（dispersion））. 亦常使用更一般的概念——加权根方偏差

$$\sqrt{\frac{p_1(x_1-a)^2+\cdots+p_n(x_n-a)^2}{p_1+\cdots+p_n}}$$

其中 p_1, $\cdots$, p_n 是称为赋于 x_1, $\cdots$, x_n 的权. 当 a 为加权均值

$$\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}$$

时，加权根方偏差达到最小值.

在概率论中，随机变量 X（相对其数学期望）的根方偏差 σ_X，是其方差的平方根：$\sqrt{DX}$.

根方偏差常用作统计估计量优劣的度量，在这种情形下称为根方误差（quadratic error）. БСЭ-3

【补注】 公式 $(*)$ 有时称为均方误差（mean-square error），而其平方根称为根均方误差（root mean-square error）. 对加权均方误差（weighted mean-square error）等有类似定义.

参考文献

[A1] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969, p. 1318.

[A2] Mood, A. M. and Graybill, F. A., Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, 1963, p. 166, 176（中译本：A. M. 穆德、F. A. 格雷比尔，统计学导论，科学出版社，1978）.

周概容 译

二次微分 [quadratic differential; квадратичный дифференциал]，Riemann 曲面 R 上的

使每个把一个参数邻域 $U\subset R$ 映射到扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的局部参数 $z(z:U\to\overline{\mathbf{C}})$（见**局部单值化参数**（local uniformizing parameter））对应到一个函数 Q_z: $z(U)\to\overline{\mathbf{C}}$ 的满足下述条件的一个规则：对任何局部参数 z_1: $U_1\to\overline{\mathbf{C}}$ 和 z_2: $U_2\to\overline{\mathbf{C}}$（$U_1\cap U_2$ 非空），在交 $U_1\cap U_2$ 内下式成立：

$$\frac{Q_{z_2}(z_2(p))}{Q_{z_1}(z_1(p))}=\left[\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right]^2,\ p\in U_1\cap U_2; \qquad (1)$$

此处 $z(U)$ 是 U 在映射 z 下在 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的象. 二次微分通常记为 $Q(z)dz^2$，这是基于如（1）所指明的它关于局部参数 z 的选取的不变性. 换言之，二次微分是 Riemann 曲面上的（2, 0）型非线性微分.

通常假定二次微分定义中的函数 $Q_z(\cdot)$ 是可测的或甚至是解析的；在后面情形此二次微分称为解析的（analytic）. 点 $p\in R$ 称为 $Q(z)dz^2$ 的 k 阶零点

(或极点)，如果对每个局部参数 z，函数 $Q_z(\cdot)$ 在 p 处有 k 阶零点(或极点)．二次微分的零点和极点合称为它的临界点(critical point)．零点和单极点合称为有限临界点，其全体记为 C．所有阶 $k\geqslant 2$ 的极点组成的集合记为 H．如果曲线 $\gamma\subset R$ 在其每一点 q 处关于参数 z 具有切线，其切向量为 $a_z(q)$，且有

$$Q_z(z(q))(a_z(q))^2>0,\ q\in\gamma,\qquad(2)$$

则称 $Q(z)dz^2$ 在曲线 γ 上是正的(positive)，记作 $Q(z)dz^2>0$．如果当 $>$ 号代以 $<$ 号时(2)式成立，则称 $Q(z)dz^2$ 在 γ 上是负的(negative)，记作 $Q(z)dz^2<0$．R 上每条具有性质 $Q(z)dz^2>0$(或 $Q(z)dz^2<0$)的极大正则曲线称为二次微分 $Q(z)dz^2$ 的轨道(trajectory)(或正交轨道(orthogonal trajectory))．

定义于有限 Riemann 曲面 R 上的二次微分 $Q(z)dz^2$ 属于 R，如果 R 的边界 ∂R 或为空，或由有限个点 $p\notin H$ 以及有限条在其上 $Q(z)dz^2$ 为正则且正或负的弧 γ 所组成．此外，如果 ∂R 为空或 $Q(z)dz^2$ 在 ∂R 上为正则且正的，则 $Q(z)dz^2$ 称为 Riemann 曲面 R 上的正二次微分(positive quadratic differential)．度量 $|Q(z)|^{1/2}|dz|$ 称为 Q 度量(Q-metric)，它在 R 上是单值的且关于局部参数 z 的选取是不变的．

在任一点 $p\in R\setminus(C\cup H)$ 的某个邻域 U 内，函数

$$\zeta(q)=\int_{z(p)}^{z(q)}Q(z)^{1/2}dz$$

对被积函数符号的每种选取都是正则的、单值的和单叶的；此外，U 的一个轨道(或正交轨道)的每个极大弧在 $\zeta(q)$ 下映为水平(或垂直)线段．因此，每个点 $p\in R\setminus(C\cup H)$ 都有一或为 R 上的开弧或为 R 上的 Jordan 曲线的轨道所通过．每个临界点 r 的一个小邻域内轨道族的拓扑和共形结构可依赖于临界点 r 的阶并(当 r 是 2 阶极点且 $z(r)=0$ 时)依赖于

$$\arg\lim_{q\to r}Q_z(z(q))z(q)^2$$

完全地进行分类(见**轨道的局部结构**(local structure of trajectories))．对于有限 Riemann 曲面，已经知道**轨道的整体结构**(global structure of trajectories)的一种描述并有许多重要应用(亦见[1])．

O．Teichmüller 研究了二次微分在极值共形和拟共形映射理论以及解 Riemann 曲面模问题中的作用(见[1]－[3])．他表述了一个原理，据此可使某些二次微分同几何函数论中的一些极值问题相联结，每种类型的极值问题对应二次微分的一些特殊奇点(极点)，而解的几何性质以适当的方式同二次微分的轨道结构相联系．关于**单叶函数**(univalent function)系数的一些不等式已通过二次微分得到证明．关于分布在有限 Riemann 曲面上区域族中的单叶函数系数的一个更一般的不等式称为一般系数定理(general coefficient theorem)，它是 Teichmüller 原理对于广泛一类问题的具体实现(见[1]，[4])．应用 Teichmuller 原理还能建立一条特殊的系数定理并解决大量具体的极值问题(见[1]，[5])．

参考文献

[1] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer. 1958.

[2] Schiffer, M., Spencer, D. C., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1954.

[3A] Bers, L., Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem, 载于 R. Nevanlinna, et al. (ed.), Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 89－119.

[3B] Ahlfors, L., The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, 载于 R. Nevanlinna, et al. (ed.), Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 45－66.

[3C] Bers, L., Spaces of Riemann surfaces, 载于 J. Todd, (ed.), Proc. Internat. Congress Mathematicians Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 1958, 349－361.

[3D] Bers, L., Simultaneous uniformization, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 (1960), 94－97.

[3E] Bers, L., Holomorphic differentials as functions of moduli, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67 (1961), 206－210.

[3F] Ahlfors, L., On quasiconformal mappings, *J. d'Anal. Math.*, 3 (1954), 1－58; 207－208.

[4] Тамразов, П. М., 《Матем. сб.》, 72 (1967), 1, 59－71.

[5] Jenkins, J. A., Some area theorems and a special coefficient theorem, *Illinois J. Math.*, 8 (1964), 1, 80－99.

П. М. Тамразов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Strebel, K., Quadratic differentials, Springer, 1984.

沈永欢 译

二次方程[quadratic equation; квадратное уравнение]

二次的**代数方程**(algebraic equation)．二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$$

在复数域中二次方程有两个解，可通过方程的系数用根式来表示：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (*)$$

当 $b^2>4ac$ 时，两个解是不同的实数；当 $b^2<4ac$ 时，两个解是（共轭的）复数；当 $b^2=4ac$ 时，这个方程具有重根 $x_1=x_2=-b/(2a)$.

对于简化二次方程（reduced quadratic equation）

$$x^2+px+q=0,$$

公式(*)具有形式

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

二次方程的根与系数具有下列关系（见 **Viète 定理**（Viète theorem））：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{2},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

О. А. Иванова 撰

【补注】 表达式 b^2-4ac 称为二次方程的判别式（discriminant）. 根据上述事实不难证明：$b^2-4ac=(x_1-x_2)^2$；当且仅当 b^2-4ac 时，二次方程具有重根. 亦见判别式（discriminant）. 当系数属于特征不为 2 的域时，公式(*)也成立.

把方程的左边写成 $a(x+b/2a)^2+(c-b^2/4a)$（配方（splitting of the square）），便可得到公式(*).

参考文献

[1] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969.

杜小杨 译

二次误差 [**quadratic error**; **квадратичная ошибка**]，亦称均方根差

见**二次偏差**（quadratic deviation）.

二次域 [**quadratic field**; **квадратичное поле**]

有理数域 $\mathbf{Q}$ 的次数为 2 的扩张（见**域的扩张**（extension of a field））. 任一二次扩张都形如 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$，其中 $d\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{d}\notin\mathbf{Q}$，即它由添加 $\sqrt{d}$ 到 $\mathbf{Q}$ 而得到. $\mathbf{Q}(\sqrt{d_1})=\mathbf{Q}(\sqrt{d_2})$，当且仅当 $d_1=c^2d_2$，这里 $c\in\mathbf{Q}$. 于是任一二次域形如 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$，d 是无平方因子整数，它可由域唯一确定. 下面，d 总是取为这样的数.

当 $d>0$，$\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 称为实二次域（real quadratic field）；$d<0$，$\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 称为虚二次域（imaginary quadratic field）.

称域 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 中的整数环在有理整数环上的基底为基本基，基本基可取为

$$\left\{1,\quad\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right\}\qquad 当\ d\equiv 1\pmod 4$$

和

$$\{1,\quad\sqrt{d}\}\qquad 当\ d\equiv 2,3\pmod 4.$$

$\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 的判别式（discriminant）D 等于 d，当 $d\equiv 1\pmod 4$；等于 $4d$，当 $d\equiv 2,3\pmod 4$.

虚二次域是除了 $\mathbf{Q}$ 之外仅有的有有限单位群的域. 这群的阶在 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ 中为 4（生成元为 $\sqrt{-1}$），在 $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ 中为 6（生成元为 $(1+\sqrt{-3})/2$），在所有其他虚二次域中为 2（生成元为 -1）.

实二次域的单位群同构于直接积 $\{\pm1\}\times\{\varepsilon\}$，这里 $\{\pm1\}$ 是由 -1 生成的二阶群，$\{\varepsilon\}$ 为由基本单位元 ε 生成的无限循环群. 例如，对 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$，$\varepsilon=1+\sqrt{2}$. 有理素除子在二次域中分解有一简单公式：在 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 中作一 $\mathbf{Z}$ 的 $\mathrm{mod}\,|D|$ 的二次特征 χ，设 p 为与 D 互素的素数，则当 $\chi(P)=-1$ 时，除子 (p) 在 $\mathbf{Q}(\sqrt{\alpha})$ 中仍为素，当 $\chi(p)=1$ 时，(p) 有两个素因子.

对二次域的除子类群的研究比其他域都深入得多. 对虚二次域由 Brauer-Siegel 定理（该定理为：对于次数固定的代数数域，下列渐近公式成立

$$\frac{\ln(hR)}{\ln\sqrt{|D|}}\to 1,\quad 当\ |D|\to\infty\ 时,$$

其中 h 为类数，R 为正则子（见**代数数域的正则子**（regulator of an algebraic number field））D 为域的判别式）可知，当 $d\to-\infty$ 时，类数趋于无穷. 恰有 9 个虚二次域类数为 1，它们是 $d=-1,-2,-3,-7,-11,-19,-43,-67,-163$（见[2]）. 对于实二次域，尚还不知道类数为 1 的域是否有无限多个. 有无限多个（实或虚）二次域其类数被给定自然数整除（见[3]，[4]）. 关于类群的 2 分量的类似性质可由 Gauss 的亏数理论得到.

很多二次域的算术性质可用**二元二次型**（binary quadratic form）的理论来复述.

参考文献

[1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2. изд., М., 1972（英译本：Borevich, Z. I and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1987）.

[2] Stark, H. M., A complete determination of the complex quadratic fields with class number one, *Michigan Math. J.*, 14(1967), 1 – 27.

[3] Ankeny, N. C. and Chowla, S., On the divisibility of the class number of quadratic fields, *Pacific J. Math.*, 5(1955), 321 – 324.

[4] Yamamoto, Y, On unramified Galois extensions of quadratic fields, *Osaka J. Math.*, 7(1970), 57 – 76.

[5] Cassels, J. W. S. and Fröhlich, A. (eds), Algebraic

number theory, Acad. Press, 1986. Chapt. 13.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 关于 $\lim_{D\to\infty} h(D)=\infty$ 这一结果的一种有效形式最近由 B. H. Gross 和 D. B. Zagier ([A1]) 证明.

参考文献

[A1] Gross, B. H. and Zagier, D. B., Heegner points and derivatives of L-series. *Invet. Math*. 84 (1986), 225 - 320.

冯绪宁 译

二次型 [**quadratic form**; **квадратичная форма**], 亦称二次形式, 有恒等元的交换环 R 上的 $n=n(q)$ 个变量且系数 $q_{ij}\in R$ 的齐次多项式

$$q=q(x)=q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i\leq j} q_{ij}x_ix_j,$$
$$1\leq i\leq j\leq n.$$

通常 R 是域 $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{Q}$, 要不然就是环 $\mathbf{Z}$, 一个代数数域中整元的环, 或者一个代数数域对于非 Archimedes 范数的完全化的整数环.

n 阶对称方阵 $A=A(q)=(a_{ij})$ (其中 $a_{ii}=2q_{ii}$, $a_{ij}=a_{ji}=q_{ij}$, $1\leq i\leq j\leq n$) 称为二次型 $q(x)$ 的 Kronecker 矩阵 (Kronecker matrix); 用 Siegel 的记号表为 $q(x)=(1/2)A[x]$. 如果二次型 q 的判别式 (discriminant) $D(q)$ 不为零, 那么 q 称为非退化二次型 (non-degenerate quadratic form), 如果它为零, 那么 q 称为退化的 (degenerate).

二次型 $q(x)$ 称为 Gauss 型 (Gaussian form), 如果它能用对称的记法表示为

$$q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j,\ b_{ij}=b_{ji}\in R,$$

这就是说, 存在 $b_{ij}=b_{ji}\in R$ 使有 $q_{ij}=2b_{ij}(1\leq i\leq j\leq n)$. 对称方阵 $B=B(q)=(b_{ij})$ 称为二次型 $q(x)$ 的矩阵 (matrix) 或 Gauss 矩阵 (Gaussian matrix). 量 $d=d(q)=\det B$ 称为 $q(x)$ 的行列式 (determinant); 对此有

$$D(q)=(-1)^{n/2}2^n d(q),\ 若\ n(q)\ 是偶数;$$

$$D(q)=(-1)^{(n-1)/2}2^{n-1}d(q),\ 若\ n(q)\ 是奇数.$$

若 R 是特征不为 2 的域, 则每个 R 上的二次型都是 Gauss 型. 如果 R 能嵌入到一个特征不为 2 的域 F 中, 那么 R 上的二次型 $q(x)$ 可以看成是 Gauss 型, 但具有 F 上的矩阵 $B=B(q)$ 且 $d(q)\in F$.

两个二次型 q_1 和 q_2 是 R 上等价的 (equivalent) ($q_1\simeq q_2(R)$), 如果其中一个可以通过变量的 (对于 R) 可逆线性齐次变换由另一个得到, 这就是说, 存在 R 上的可逆方阵 U 使 $A(q_1)=U^{\mathrm{T}}A(q_2)U$. 在 R 上等价于一个给定二次型的 R 上的二次型的全体称为该二次型的类 (class). 二次型的判别式除去一个 R 中的可逆元的平方的因子外, 是类的不变量.

考察二次型的另一个方法如下: 设 V 是一个单位 R 模; 映射 $q: V\to R$ 称为模 V 上的二次映射 (quadratic mapping) 或二次型 (quadratic form), 如果 1) $q(ax)=a^2q(x)$, $a\in R$, $x\in V$; 2) 由

$$b_q(x,y)=q(x+y)-q(x)-q(y)$$

给出的映射 $b_q: V\times V\to R$ 是 V 上的**双线性型** (bilinear form). 对 (V,q) 称为二次模 (quadratic module). 型 b_q 总是对称的.

对于每个 V 上的双线性型 $b(x,y)$ 有二次型 $q(x)=q_b(x)=b(x,x)$ 与之对应; 此处 $b_{q_b}(x,y)=b(x,y)+b(y,x)$.

如果在环 R 中元素 2 有逆, 那么 $q\Leftrightarrow b_q/2$ 是 V 上二次型和对称型间的一一对应. 如果 V 是秩为 n 的自由 R 模, 而 q 是 V 上二次型, 那么 V 的每组基底 $e_1,\cdots,e_n$ 对应于经典意义下的二次型

$$q(x_1,\cdots,x_n)=q(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=$$
$$=\sum_{1\leq i\leq j\leq n} q_{ij}x_ix_j,$$

其中 $q_{ii}=q(e_i)$, $q_{ij}=b_q(e_i,e_j)$, $1\leq i\leq j\leq n$. 每个 R 上的二次型 $q(x_1,\cdots,x_n)$ 都可用这种方式从某个二次模 (R^n,q) 得到, 反之亦然. 在基底变换下二次型 $q(x_1,\cdots,x_n)$ 变为它的等价型.

元素 $\gamma\in R$ 称为用二次型 q 可表示的 (representable) (或者说型 q 表示 γ), 如果 γ 是这个型当变量取某个值时的值. 等价二次型表示相同的元素. 有序域 R 上的二次型 $q(x)$ 称为不定的 (indefinite), 如果它既表示正元素也表示负元素; 称为正 (或负) 定的 (positive (negative) definite), 如果对于所有 $x\neq 0$ 有 $q(x)>0$ ($q(x)<0$). 非退化二次型若可非平凡地表示 0, 则称为迷向的 (isotropic), 不然称作非迷向的 (anisotropic). 类似地, 二次型 $r(y_1,\cdots,y_m)$ 称为用二次型 q 可表示的 (representable), 如果 q 可以通过某些 $y_1,\cdots,y_m$ 的线性型在 q 中作变量代换变成 r; 这就是说, 存在 R 上 $m\times n$ 矩阵 S 使 $A(r)=S^{\mathrm{T}}A(q)S$ (此处右上角 T 表示转置).

二次型的代数理论. 这是域上二次型的理论.

设 F 是一个任意的特征不为 2 的域. 在 F 上用型 q 表示型 r 的问题归结为型的等价问题, 因为根据 Pall 定理 (Pall theorem), 为了在 F 上非退化型 r 是用非退化型 q 可表示的, 必须且只须存在型 $h=h(x_{m+1},\cdots,x_n)$ 使得 $r\dotplus h$ 和 q 在 F 上等价. 此处 $r\dotplus h$ 是型的正交直和 (direct sum), 亦即 r 和 h 没有公共变量.

Witt 消去定理 (Witt cancellation theorem). 如

果 $h\dot{+}q_1\simeq h\dot{+}q_2$，那么 $q_1\simeq q_2$.

每个 F 上的二次型等价于一个对角型

$$a_1x_1^2+\cdots+a_rx_r^2+\cdots+a_nx_n^2.$$

可以假定 $a_1,\cdots,a_r\neq 0$ 和 $a_{r+1}=\cdots=a_n=0$. 数 r 称为 q 的秩(rank)，它与矩阵 $A(q)$ 的秩(rank)相等. 如果 F 的每个元素都有平方根，那么 F 上的二次型等价于型 $x_1^2+\cdots+x_r^2$（二次型的正规形式(normal form of a quadratic form)).

每个非退化的二次型 q 等价于型

$$q'=q_0+\sum_{i=1}^{k}(x_i^2-y_i^2),$$

其中 q_0 是非迷向的；这里 q 唯一确定 k 及型 q_0 在 F 上的类，这个类称为 q 的非迷向核(anisotropic kernel)（亦见 **Witt 分解**(Witt decomposition)). 两个具有相同非迷向核的型 q_1 和 q_2 称为在 Witt 意义下相似的(similar in the sense of Witt). 可以在相似型的类上定义环的结构（见 **Witt 环**(Witt ring)).

设 F 是一个有序域（特别，是域 $\mathbf{R}$），并设 F 的每个正元素都是平方. 那么每个二次型 q 可以化简为型

$$x_1^2+\cdots+x_s^2-x_{s+1}^2-\cdots-x_r^2,$$

其中数 s 和 $r-s$（正和负惯性指数(positive and negative indices of inertia)）由这个型唯一确定（见**惯性律**(law of inertia)). 因此，对于这种域二次型的等价性问题已经解决.

域 $\mathbf{Q}$ 上的等价性问题归结为 p 进数域的类似问题：为了 q_1 和 q_2 在 $\mathbf{Q}$ 上等价，必须且只须在 $\mathbf{Q}_p$ 上（对所有素数 p）以及在 $\mathbf{Q}_\infty=\mathbf{R}$ 上 q_1 和 q_2 等价（Minkowski-Hasse 定理(Minkowski-Hasse theorem)). 类似的结论对 A 域(A-fields)（即代数数域，及常数有限域上的单变量代数函数域）也成立. 这是 **Hasse 原理**(Hasse principle) 的特殊情形. 在域 $\mathbf{Q}_p(p\neq\infty)$ 中等价性问题可用 **Hasse 不变量**(Hasse invariant) 解决.

域 F 上二次型 q 称为乘性的(multiplicative)，如果

$$q(x_1,\cdots,x_n)q(y_1,\cdots,y_n)=q(z_1,\cdots,z_n),$$

其中 z_i 是 F 上 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ 的有理函数. 另外，如果 z_i 是双线性函数，那么型称为具有合成(have a composition). 仅当 $n=2,4,8$ 时才可能有合成（Hurwitz 定理(Hurwitz theorem)). 这是积性型的一个简单刻画([16]).

二次型的代数理论已被推广到特征为 2 的域的情形([7]).

二次型的算术理论. 这是环上二次型的理论. 这个理论的产生与解二次 Diophantus 方程问题有关. 解这种方程的问题归结为用整二次型 q 表示整数的问题，亦即在 $\mathbf{Z}$ 中解方程 $b=q(x_1,\cdots,x_n)$ 的问题. 已经知道一些算法，把确定（或刻画）这个方程所有解归结为 $\mathbf{Z}$ 上二次型的等价性问题，亦即对于给定的二次型 $q(x)=(1/2)A[x]$ 及 $q_1(x)=(1/2)A_1[x]$，求 $\mathbf{Z}$ 上可逆矩阵 U 使 $U^TAU=A_1$ 的问题. 对于 $n=2$ 这种算法是 J. L. Lagrange 和 C. F. Gauss 构造的，他们创立了**二元二次型**(binary quadratic form) 的一般性理论. 这些算法被 H. Smith 和 H. Minkowski 推广到任意的 n.

算术理论的中心问题之一是求型 $r(x)=(1/2)B[x]$ 通过型 $q(x)=(1/2)A[x]$ 的表示 S 的存在性的简单的判据，亦即矩阵方程

$$S^TAS=B \tag{1}$$

的解的判据，以及建立这种表示的个数 $R(q,r)=R(A,B)$ 的公式的问题. 在此，如果表示数是无穷的，那么它就变为求"本质不同"的表示数 $R'(q,r)$ 的问题.（两个表示 S 和 S' 是恒同的，如果 $S'=SV$，其中 V 是 q 的整自同构(integral automorphism)，亦即 $V^TAV=A$）. 表示存在的一个必要条件是 (1) 在 $\mathbf{R}$ 上的可解性及对于任何 g 矩阵同余式

$$S^TAS\equiv B(\mathrm{mod}\,g) \tag{2}$$

在 $\mathbf{Z}$ 上的可解性.（为了所有的同余式 (2) 可解，只需要 (2) 对 $g=g_0=8D(q)D(r)$ 可解就够了）. 这些必要条件称为"一般"(generic) 条件，等价于 (1) 在 $\mathbf{Z}_p$（对每个素数 p）及 $\mathbf{Z}_\infty=\mathbf{R}$ 上的可解性. 它们也等价于 (1) 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的"无本质分母"的可解性，这就是说，存在有理解 S 其公分母与任何予先指定的整数 g 互素（只需限于 $g=g_0$ 即可）. (2) 的可解性条件可以通过 q 和 r 的一般不变量表示出来. (2) 的解数是借助于 Gauss 和求出的.

$\mathbf{Z}$ 上二次型的亏格(genus of a quadratic form) 是 $\mathbf{Z}$ 上二次型的集合，这些型在 $\mathbf{Z}_p$ 上（对一切素数 p）以及 $\mathbf{Z}_\infty=\mathbf{R}$ 上等价于另一个二次型. 一个二次型的亏格由有限多个具有相同判别式的类组成. 二次型 $q(x)=(1/2)A[x]$ 的亏格可以通过有限多个一般不变量（即通过 A 的初等因子表示的阶不变量）及型的特征 $\chi(q)=\pm1$ 给出. 亏格也可以由 Gauss 和的值给出. 旋量亏格概念在二次型理论中也起着重要作用，并且要比亏格概念更为精致.

型 r 用型 q 本质不同的表示的个数 $R'(q,r)$ 以简单的方式与本质不同的本原表示(primitive representations) 的个数 $R_0'(q,r)$ 相联系，后者是这种表示 S，

其矩阵的 m 阶子式（minor）的最大公因子是 1．对于量

$$S_0(q,r)=\sum_{i=1}^{l}R_0^{\cdot}(q_i,r)$$

（$R_0^{\cdot}(q,r)$ 在 q 的亏格上的平均函数），其中 $q_1,\cdots,q_l$ 是 q 的亏格中所有类的代表（每类中取一个），有一些通过某些同余式的解数来表示 $S_0(q,r)$ 的公式（见[11]，[15]）．在 q 的亏格由单个类组成的情形下，这些公式完全解决了表示个数的问题．当亏格中含有几个类时，只知道 $R(q,r)$ 的一些渐近公式，以及对某些具体的二次型的"精确"公式．

二次型的解析理论．解析方法是 P．G．Lejeune Dirichlet 引进二次型理论中的．C．L．Siegel 发展了这些方法，得到通过型的亏格表达型的表示个数的一般性公式．

设 $q(x_1,\cdots,x_n)=(1/2)A[x]$ 及 $r(x_1,\cdots,x_m)=(1/2)B[x]$ 是 $\mathbf{Z}$ 上的正定二次型．

数

$$\widetilde{R}(q,r)=\frac{1}{M(q)}\sum_{i=1}^{l}\frac{R(q_i,r)}{E(q_i)}$$

称为型 r 用型 q 的表示个数 $R(q,r)$ 关于亏格的 Siegel 平均值，此处 $E(q_i)$ 是 q_i 的自同构的个数，而

$$M(q)=\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{E(q_i)}$$

是 q 的亏格的权．令

$$\chi_\infty(q,r)=\lim_{\theta\to r}\frac{V(\theta')}{V(\theta)},$$

其中 θ 是 $\mathbf{R}$ 上 m 元二次型的 $m(m+1)/2$ 维空间中 $r=r(x)$ 的邻域，θ' 是 $\mathbf{R}$ 上矩阵方程（1）的解 S_1 的相应的区域，$V(\theta)$ 和 $V(\theta')$ 是它们的体积．

二次型 q 和 r 的 Siegel 公式（Siegel formula）是

$$\widetilde{R}(q,r)=\tau\chi_\infty(q,r)H(q,r), \qquad (3)$$

其中当 $n=m>1$ 或 $n=m+1$ 时 $\tau=1/2$，其他情形 $\tau=1$．这里

$$H(q,r)=\lim_{g\to\infty}\frac{R_g(q,r)}{2^{\omega_{n-m}(g)}g^{nm-m(m+1)/2}},$$

其中极限取自这种 g 的序列，任何自然数都是几乎所有的项 g 的因子，$\omega_0(g)$ 是 g 的不同素因子的个数，当 $n>m$ 时 $\omega_{n-m}(g)=0$，而 $R_g(q,r)$ 是 r 用 q 的表示个数，亦即矩阵同余式

$$S^T\left(\frac{1}{2}A\right)S\equiv\frac{1}{2}B(\bmod g)$$

的解数．下列公式成立

$$H(q,r)=\frac{R_{g_0}(q,r)}{2^{\omega_{n-m}(g_0)}g_0^{nm-m(m+1)/2}},$$

$$g_0=8D(q)D(r).$$

$H(q,r)$ 有几个等价定义以及一个通过广义 Gauss 和的表达式（见[17]）．作为特殊情形，公式（3）包括了关于亏格的权的 Minkowski 公式（Minkowski formula）：

$$M(q)=\frac{2(d(q))^{(n+1)/2}}{\pi^{n(n+1)/4}}\frac{\prod_{k=1}^{n}\Gamma(k/2)}{\prod_p\chi_p(q,q)},\ n>1,$$

对于 $n=2$，后者给出了类数的 Dirichlet 公式．

与（3）类似的公式也对不定型及代数整系数型成立（见[17]，[18]）．

E．Hecke（[10]）给出了用偶数多个变量的正二次型的表示个数理论的应用．由**模形式**（modular form）理论可以得到 $R(q,b)$ 的公式（见概述[5]）．

圆法（circle method）（见[4]）已被用于用四个或多于四个变量的二次型来表示数的问题．如果 q 是 $\mathbf{Z}$ 上正定二次型，那么当 $n\geqslant4$ 时应用圆法可得渐近公式

$$R(q,b)=\frac{\pi^{n/2}b^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)d(q)}H(q,b)+$$
$$+O(b^{(n-1)/4+\varepsilon}).$$

应用圆法也可对 $n\geqslant4$ 的不定二次型得到类似的渐近公式．

***Линник* 离散偏历法**（Linnik discrete ergodic method）被应用于 $n=3$ 时 $R(q,b)$ 的研究（见[3]，[4]）．它基于下面的事实：在一些用三元二次型的数的表示的集合上可以构造这种表示的偏历流，它被与数的用四元二次型表示的问题有关的算子正则化．偏历方法（在某些必要条件下）导致

$$R(q,b)>ch(-\Delta b),\ c=c(q)>0$$

类型的估计，并且在一些情况下得到渐近公式．

H．Iwaniec（[22]）的一些与 Kloosterman 和有关的最近结果导致渐近公式（[23]）

$$R(q,b)=\frac{\pi^{n/2}b^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)d(q)}H(q,b)+$$
$$+O(b^{(n-1)/4-1/28+\varepsilon}),$$

其中 b 是非平方数（或 b 的平方因子部分是有界的）．这个公式当 $n\geqslant3$ 时已不是平凡结果，并且提供了探讨 H．Petersson 的一个猜想的途径．（Petersson 猜想（Petersson conjecture）当 n 为偶数时已被 P．Deligne 证明，见[24]）．

二次型的几何理论．为了研究二次型理论中诸如约化理论、自同构以及二次型的算术极小等问题，Ch．

Hermite 发展了连续参数方法，它随即成为二次型理论中一个庞大的分支，即二次型的几何理论（geometric theory of quadratic forms）或二次型的几何（geometry of quadratic forms）（它也被看作数的几何（geometry of numbers）的一个部分）．这个方法的思想如下：使某种算术量 $a=a(\Lambda)$ 与给定的 n 维点格 Λ 相联系，并且在 Λ 的参数的小的变化之下研究函数 $a=a(\Lambda)$ 的性状．二次型的几何的特色就是系统地应用 $n(n+1)/2$ 维系数（参数）空间，而在这个空间中格 Λ 表示为一个点．设

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

是实系数 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i, j=1, \cdots, n)$ 二次型．与 f 相关可得 N 维 Euclid 空间（这里 $N=n(n+1)/2$）（称为系数空间（coefficient space））中的点 $f=(a_{11}, \cdots, a_{nn}, a_{12}, \cdots, a_{n-1,n})$．于是与正定型 f 对应的是顶点在原点的开凸锥 $\mathfrak{P}$，它称做正性锥（cone of positivity）．格 Λ 与等价 n 元正定二次型的类有关；借助于 Λ 的基底 $[\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_n]$，型

$$f=\sum_{i,j=1}^{n}(\overline{a}_i\overline{a}_j)x_i x_j$$

与它相联系．于是伴随 Λ 有一个 $\mathfrak{P}$ 的点的无穷离散集．如果选取正定二次型的恰当的约化域 $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{P}$，那么每个格唯一地由系数空间的一个点 $\widetilde{f}\in\mathfrak{F}$ 相伴随．点 $\widetilde{f}$ 的小的变化对应于 Λ 的参数的小的变化．

二次型的几何理论依据它的单个研究方法被分为几个相当独立的理论．其基础是正二次型的约化理论．这个理论通过约化域 $\mathfrak{F}$ 的研究解决正二次型的等价性问题，这是二次型的算术理论中的中心问题之一（见**二次型的约化**（quadratic forms, reduction of））．

Вороной 格型（Voronoї lattice types）理论起着本质性作用．它在平行多面体理论中有重要应用．型的理论在 n 维空间的用球的最经济的格覆盖问题的求解中找到了应用．

二次型的几何理论的另一个传统分支是完满型理论，它也是 Вороной 创立的．这个理论可以解决正二次型的算术极小的 **Hermite 问题**（Hermite problem）；它等价于 n 维空间中球的最密格填装（packing）问题．球的最密格填装问题及用球的最经济格覆盖问题是极值问题中最著名的例子，它们构成二次型的几何的引人注目的部分．

连分数算法的某些推广也与二次型的几何理论有关；例如计算三次域的单位的 Вороной 算法，还有不定二次型的自同构的基本域理论．

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 第 2 版, М., 1972（英译本：Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1966）.

[2] Делоне, Б. Н., 《Успехи матем. наук.》, 3 (1937), 16 – 62; 4 (1938), 102 – 164.

[3] Линник, Ю. В., Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967.（英译本：Linnik, Yu. V., Ergodic properties of algebraic fields, Springer, 1968）.

[4] Малышев, А. В., О представлении целых чисел положительными квадратичными формами, М.-Л., 1962.

[5] Малышев, А. В., Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974, 119 – 137.

[6] Serre, J.-P., A course in arithmetic, Springer, 1973（译自法文）.（中译本：J.-P. 塞尔，数论教程，上海科学技术出版社，1980）.

[7] Arf, C., Untersuchungen über quadratischen Formen in Körpern der Characteristik 2, I, *J. Reine Angew. Math.*, **183** (1941), 148 – 167.

[8] Eichler, M., Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Springer, 1952.

[9A] Hasse, H., Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* **152** (1923), 129 – 148.

[9B] Hasse, H., Über die Aequivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **152** (1923), 205 – 224;

[9C] Hasse, H., Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, **153** (1924), 12 – 43;

[9D] Hasse, H., Zur Theorie des quadratischen Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Körper, *J. Reine Angew. Math.*, **153** (1924), 76 – 93;

[9E] Hasse, H., Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *J. Reine Angew. Math.*, **153** (1924), 113 – 130;

[9F] Hasse, H., Aequivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *J. Reine Angew. Math.*, **153** (1924), 158 – 162;

[9G] Hasse, H., Zur Theorie des Hilbertschen Normenrestsymbols in algebraischen Zahlkörpern, *J. Reine Angew. Math.*, **153** (1924), 184 – 191;

[9H] Hasse, H., Das allgemeine Reziprocitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen Zahlkörpern für gewisse nichtprimäre Zahler, *J. Reine Angew. Math.*, **153** (1924), 192 – 207.

[10] Hecke, E., Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959.

[11] Jones, B. W., The arithmetic theory of quadratic

forms, Math. Assoc Amer., 1950

[12] Lam, T. Y.. The algebraic theory of quadratic forms, Benjamin, 1973

[13] Minkowski, H., Gesammelte Abhandlungen, 1 – 2, Teubner, 1911.

[14] O'meara, O. T., Introduction to quadratic forms. Springer, 1963.

[15] Pall, G., Representation by quadratic forms, *Canad. J. Math.*, 1 (1949), 344 – 364.

[16] Pfister, A., Multiplikative quadratische Formen, *Arch. Math.*, 16 (1965), 363 – 370.

[17] Siegel, C. L., Lectures on quadratic forms, Tata Inst. Fundam. Res., 1963.

[18] Siegel, C. L., Gesammelte Abhandlungen, 1 – 4, Springer, 1966 – 1979.

[19] Smith, H. J. S., The collected mathematical papers, 1 – 2, Chelsea, 1965 – 1979.

[20] Watson, G. L., Integral quadratic forms, Cambridge Univ. Press, 1960.

[21] Фоменко, О. М., 《Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия》, М., 15 (1977), 5 – 91.

[22] Iwaniec, H., Fourier coefficients of modular forms of halfintegral weight, *Invent. Math.*, 87 (1987), 385 – 401.

[23] Duke, W., Sém. Théorie des Nombres de Bordeaux, 37 (1987 – 1988), 1 – 7.

[24] Freitag, E. and Kiehl, R., Etale cohomology and the Weil conjecture, Springer, 1988 (译自德文).

A. B. Малышев 撰

【补注】 二次型的几何理论的近期报告包含在 [A4] 中. 文中详细讨论了 Dirichlet-Вороной 胞腔 (Dirichlet-Voronoï cells), 平行多面体, 约化理论, 以及与最密格填装和 Euclid 球的最稀格覆盖问题的关系.

参考文献

[A1] Делоне, Б. Н., Рышков, С. С., 《Труды. мат. инст. Стеклов》, 112 (1971), 203 – 223.

[A2] Erdős, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., Lattice points, Longman, 1989.

[A3] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A4] Siegel, C. L., Lectures on the geometry of numbers, Springer, 1989

[A5] Рышков, С. С., Барановский, Е. П., 《Труды мат. инст. Стеклов》, 137 (1976), 4, 1 – 131.

[A6] Cassels, J. W. S., Rational quadratic forms, Acad. Press, 1978.

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

二次型的约化 [quadratic forms, reduction of; квадратичных Форм приведение]

在给定环 R 上的二次型的每个类中分离出"约化"型, 亦即每个类中的 (一个或几个) "标准"型. 二次型约化的主要目的是为了解决二次型的等价性问题: 确定两个给定的二次型 q 和 r 是否在 R 上等价, 并且在它们等价时求出 (或描述) 所有 R 上的将 q 变换为 r 的可逆矩阵 U (见**二次型** (quadratic form)). 为解决后一问题, 只需知道一个那样的矩阵 U_0 以及型 q 的全部自同构 V, 因为由此可有 $U = VU_1$. 通常侧重 $\mathbf{Z}$ 上二次型的等价性, 并且常常考察 $\mathbf{R}$ 上的二次型的总体以及它们在 $\mathbf{Z}$ 上的类. 正定和不定二次型的约化理论存在基本性差别.

正定二次型的约化. 存在实正定二次型在 $\mathbf{Z}$ 上约化的不同方法. 其中使用最广泛而且被充分研究的是 Minkowski (或 Hermite-Minkowski) 约化方法. 最一般性的方法是 Венков 方法. 其他流行的约化方法是 E. Selling ($n=3$) 和 H. F. Charve ($n=4$) 的方法.

确定一个约化二次型

$$q(x) = B[x] = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

$$b_{ij} \in \mathbf{R}, (b_{ij}) = B,$$

意味着在系数空间 $\mathbf{R}^N (N = n(n+1)/2)$ 中的正性锥 $\mathfrak{P}$ 中定义一个约化域 $\mathfrak{G}$, 使得当且仅当 $q = (b_{11}, \cdots, b_{n-1,n}) \in \mathfrak{G}$ 时 $q(x)$ 是约化的. 若 $\mathfrak{G}$ 具有好的几何性质 (例如单连通性, 凸性, 等等), 并且是行列式为 ± 1 的整数变换群 Γ 的基本域, 即可合乎要求. 一个区域 $F \subset \mathfrak{P}$ 称为正定二次型的基本约化域 (fundamental domain of reduction), 如果 F 是 $\mathbf{R}^N$ 中的开域, 并且还满足: 1) 对每个 $q \in \mathfrak{P}$ 存在一个等价二次型 $h \simeq q(\mathbf{Z}), h \in \overline{F}$; 2) 若 $h_1, h_2 \in F$, 且 $h_1 \simeq h_2(\mathbf{Z})$, 则 $h_1 = h_2$.

a) 二次型的 Minkowski 约化 (Minkowski reduction of a quadratic form). 一个正定二次型 $q(x)$ 是 Minkowski 约化的, 如果对于任何 $k = 1, \cdots, n$ 及任何一组最大公约数 $(l_1, \cdots, l_n) = 1$ 的整数 $l_1, \cdots, l_n$,

$$q(l_1, \cdots, l_n) \geqslant b_{kk}. \tag{1}$$

从无穷多个关于系数 b_{ij} 的不等式 (1) 中可以选取出有限多个, 使得其余的不等式可以由它们推出. 在系数空间 $\mathbf{R}^N$ 中, Minkowski 约化型的集合是一个有有限多个面的无限凸棱锥, 称作 Minkowski 约化域 (domain of Minkowski reduction) 或 Hermite-Minkowski 凸棱锥 (Hermite-Minkowski gonohedron) $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_n$; $\mathfrak{S}$ 是一个闭集, $\mathfrak{S} \subset \overline{\mathfrak{P}}$. 对于 $n \leqslant 7$, $\mathfrak{S}_n$ 的面都已经算出 (见 [9]).

存在一个常数 λ_n, 使得当二次型 $q(x)$ 是 Minkowski 约化型时有

$$\prod_{i=1}^{n} b_{ii} \leqslant \lambda_n d(q),$$

其中 $d(q) = \det(b_{ij})$ 是 $q(x)$ 的行列式.

每个实正定二次型在 $\mathbf{Z}$ 上等价于一个 Minkowski 约化二次型．有一个约化算法（用来求等价于给定型的约化型）（见[8]，[15]）．

对于 $n=2$，型 $q=q(x,y)=(a,b,c)=ax^2+2bxy+cy^2$ $(a,b,c\in\mathbf{R},a>0,d(q)>0)$ 的约化条件可表为

$$0\leqslant 2b\leqslant a\leqslant c.$$

如果限于真等价（即只允许行列式为 $+1$ 的整值变换），那么约化域可表为 $0\leqslant 2|b|\leqslant a\leqslant c$（Lagrange-Gauss 约化条件（Lagrange-Gauss reduction conditions））．所有（真）不等价的约化二次型组成的集合可以写成并 $F\cup F_1\cup F_2$，其中

$$F:2|b|<a<c;\ F_1:0\leqslant 2b<a=c;$$

$$F_2:0<2b=a\leqslant c.$$

对 $n=2$ 有 Gauss 约化算法．依据此算法可以从一个不满足 Lagrange-Gauss 条件的型得到一个与它"邻近"的型

$$(a',b',c')=(a,b,c)\begin{pmatrix}0&-1\\1&k\end{pmatrix},\ a'=c,$$

其中选取整数 k 使得 $|b'|\leqslant c/2$．对任何实二次型 (a,b,c) 这个算法分解为有限多步．

如果 $q=(a,b,c)$，$a,b,c\in\mathbf{Z}$ 且最大公约数 $(a,b,c)=1$，那么当 $d(q)=ac-b^2>3$ 时仅有两个（行列式为 1 的）自同构；当 $d(q)=3$ 时有六个自同构；而当 $d(q)=1$ 时有四个自同构．

b）二次型的 Венков 约化（Venkov reduction of a quadratic form）．这是对任意 n 元实正定二次型 q 的依赖于参数 φ 的一种约化方法（$\mathfrak{P}_\varphi$）（见[3]）．二次型 q 称为 φ 可约的（φ-reducible），如果对于所有行列式为 1 的整值 $n\times n$ 矩阵 S 有

$$(q,\overline{\varphi})\leqslant(q,\overline{\varphi}S),$$

此处 $\overline{\varphi}=d(\varphi)\varphi^{-1}$ 是 φ 的反型，$\overline{\varphi}S$ 是由变换 S 从 $\overline{\varphi}$ 得到的二次型，而 (q_1,q_2) 是 Вороной 半不变量（Voronoï semi-invariant），其定义如下：如果 $q_1=B_1[x]$，$B_1=(b_{ij}^{(1)})$，$q_2=B_2[x]$，$B_2=(b_{ij}^{(2)})$，那么

$$(q_1,q_2)=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}^{(1)}b_{ij}^{(2)}.$$

在系数空间 $\mathbf{R}^N$ 中，φ 可约二次型的集合是具有有限个位于 $\mathfrak{P}$ 中的面的凸棱锥 $\mathfrak{B}_\varphi$．如果 $\varphi=x_1^2+\cdots+x_n^2$ 并且 $n\leqslant 6$，那么 $\mathfrak{B}_\varphi$ 与 Minkowski 约化域相同．

c）二次型的 Selling 和 Charve 约化（Selling and Charve reduction of a quadratic form）．若在 Венков 约化中令 $\varphi=\varphi_n^{(0)}=\sum_{i\leqslant j}x_ix_j$，其中 $\varphi_n^{(0)}$ 是 Вороной 第一完满型，则当 $n=3$ 可得 Selling 约化，当 $n=4$ 得到 Charve 约化（见[5]，[6]）．

不定二次型的约化．原则上它比正二次型的约化更复杂．对它们不存在基本域．仅当 $n=2$ 时才有一个关于 $\mathbf{Z}$ 上二次型约化的确定的理论．

a）二元二次不定型的约化（reduction of indefinite binary quadratic forms）．设

$$q=q(x,y)=(a,b,c)=ax^2+2bxy+cy^2,$$

$$a,b,c\in\mathbf{Z}$$

是行列式 $d=ac-b^2=-|d|$ 的二次型，此处 $|d|$ 不是完全平方．伴随着 q 有二次方程 $az^2+2bz+c=0$ 及其互异的无理根

$$\Omega=\Omega(q)=\frac{-b-\sqrt{|d|}}{d},$$

$$\omega=\omega(q)=\frac{-b+\sqrt{|d|}}{d}.$$

如果 $|\Omega|>1$，$|\omega|<1$，$\Omega\omega<0$，那么称 q 是约化的（reduced）．这些条件等价于条件

$$0<\sqrt{|d|}-b<|a|<\sqrt{|d|}+b$$

（而且也等价于条件 $0<\sqrt{|d|}-b<|c|<\sqrt{|d|}+b$）．具有给定行列式的约化整值二次型的个数是有限的．每个二次型等价于一个约化型．有一个应用连分数的约化算法（见[1]）．

对于一个约化二次型恰好分别存在一个"右邻近"和一个"左邻近"约化二次型（见[1]）．借助由一个约化二次型达到它的"邻近"的约化型，得到一个二重无穷的约化型的链．这个链是周期的．这个链中不等价型的有限节称为一个周期（period）．两个约化型是真等价的，当且仅当它们中的一个在另一个的周期中．

如果 $\Omega(q)$ 和 $\omega(q)$ 是不同的无理根，那么上面的理论对于实系数 a,b,c 的型也是有效的；但在此情形约化型的链不一定是周期的．

对于最大公因子 $(a,b,c)=1$，$(a,2b,c)=\sigma$ 并且 $d=ac-b^2<0$ 的二次型，它的所有真自同构（行列式为 1）有形式

$$\begin{pmatrix}\dfrac{t-bu}{\sigma}&-\dfrac{cu}{\sigma}\\\dfrac{au}{\sigma}&\dfrac{t+bu}{\sigma}\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\dfrac{T-bU}{\sigma}&-\dfrac{cU}{\sigma}\\\dfrac{aU}{\sigma}&\dfrac{T+bU}{\sigma}\end{pmatrix}^n,$$

$$n=0,\pm 1,\cdots,$$

其中 (t,u) 遍取 **Pell 方程**（Pell equation）$t^2+du^2=\sigma^2$ 的所有解，而 (T,U) 是此方程的基本解即最小正

解．只有双边型（two-sided form）或歧义型（ambiguous form），亦即该型所属的类与它的逆的类相重时，才有非真自同构（行列式为 −1）（见[1]）．双边型的真自同构子群在全部自同构的群中有指数 2．

行列式 $d=-s^2(s>0,\ s\in\mathbf{Z})$ 的不定整值二次型约化为型 $(0,\ -s,\ r)$，其中 $r\in\mathbf{Z}$，$0\leqslant r\leqslant 2s$．当且仅当 $r_1=r_2$ 时两个二次型 $(0,\ s,\ r_1)$ 和 $(0,\ -s,\ r_2)$ $(0\leqslant r_1,\ r_2<2s)$ 真等价．这种型的所有自同构是

$$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

（见[1]）．

b）n 元二次不定型的约化（reduction of indefinite n-ary quadratic forms）．设 $q(x)=B[x]=x^TBx$ 是这种实系数型且 $d(q)\neq 0$．那么存在（$\mathbf{R}$ 上）变量变换 $x=Sy$ 使得

$$q(x)=y_1^2+\cdots+y_t^2-y_{t+1}^2-\cdots-y_n^2,$$

其中 $(t,\ n-t)$ 是 q 的符号差．令

$$D=\begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & -1\end{pmatrix}$$

（t 行中含 1，$n-t$ 行中含 −1），及 $B=S^TDS$．伴随二次型 $q(x)$，有正定二次型

$$h_S(x)=y_1^2+\cdots+y_t^2+y_{t+1}^2+\cdots+y_n^2=S^TS[x].$$

型 q 称为（Hermite）可约的，如果存在变换 S 把型 q 变为平方和，使得 $h_S(x)$ 是约化的（例如是 Minkowski 约化的）．

与这个约化二次型定义等价的一个定义如下（[13]，[14]）：设 $\Phi(q)$ 是满足方程 $HB^{-1}H=B$ 的正 n 元二次型的 $\mathbf{R}$ 上矩阵 H 的集合．它是正性锥 $\mathfrak{P}\subset\mathbf{R}^N$ 中的连通 $t(n-1)$ 维流形（它可以用明显形式写出）．设 $F\subset\mathfrak{P}$ 是正定二次型的约化域．若 $\Phi(q)\cap F$ 非空，则型 q 称为可约的．

具有给定行列式 d 的 n 元整不定二次型的类数是有限的（这对正定二次型也正确）．在给定类中约化型的个数也有限．如果两个整二次型 q_1 和 q_2 等价，那么存在一个整变换 S，其元素的绝对值以一个仅与 n 和 d 有关的常数为界，且把 q_1 变为 q_2．于是确定两个整不定二次型是否等价的问题可通过有限多步骤解决．

c）不定二次型的自同构（automorphism of indefinite quadratic form）．刻画一个整不定二次型的所有自同构的问题有两个方面：1）构造自同构群的基本域；2）描述自同构的一般形式（类似于借助 Pell 方程描述自同构）．

二次型的自同构的一般形式是 Ch．Hermite（当 $n=3$ 时）及 A．Cayley（对任意 n）描述的（见[10]）．

在以有限多个代数曲面为边界的流形 $\Phi(q)$ 中整不定二次型 $q(x)$ 的自同构群的基本域已被构造并且算出了它的体积（[13]）．对于 $t=1$ 的情形，在 n 维空间中二次型 $q(x)$ 的自同构群的基本域被构造为以有限多个平面为表面的无穷棱锥（见[2]，[4]）．

还有代数数域中二次型的约化理论（见[11]）．

参考文献

[1] Венков，Б．А．，Элементарная теория чисел，М．-Л．，1937（英译本：Venkov，B．A．，Elementary number theory，Wolters-Noordhoff，1970）．

[2] Венков，Б．А．，《Изв．АН СССР．Сер．матем．》，1（1937），139－170．

[3] Венков，Б．А．，《Изв．АН СССР．Сер．матем．》，4（1940），37－52．

[4] Венков，Б．А．，《Тр．Матем．ин-та АН СССР》，38（1951），30－41．

[5] Делоне，Б．Н．，《Успехи матем наук》，1937，3，16－62；1938，4，104－164．

[6] Делоне，Б．Н．，Галиулин，Р．В．，Штогрин，М．И．，в кн．Современные проблемы математики，т．2，М．，1973，119－254．

[7] Lejeune Dirichlet，P．G．，Vorlesungen über Zahlentheorie，Vieweg，1894．

[8] Рышков，С．С．，《Зап．науч．семинаров ЛОМИ》，33（1973），37－64．

[9] Таммела，П．П．，《Зап．науч．семинаров ЛОМИ》，50（1975），6－96；67（1977），108－143．

[10] Bachmann，P．，Zahlentheorie，Die Arithmetik der quadratischen Formen，1－2，Teubner，1923－1925．

[11] Humbert，P．，Réduction de formes quadratiques dans un corps algébrique fini，*Comm．Math．Helv．*，23（1949），50－63．

[12] Minkowski，H．，Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz，*J．Reine．Angew．Math．*，129（1905），220－274．

[13] Siegel，C．L．，Einheiten quadratischer Formen，*Abh．Math．Sem．Univ．Hamburg*，13（1939），209－239．

[14] Siegel，C．L．，Zur Theorie der quadratischen Formen，*Nachr．Akad．Wiss．Göttingen Math．-Phys．Kl．*，（1972），21－46．

[15] Waerden，B．L．van der，Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen，*Acta Math．*，96（1956），265－309．

А．В．Малышев 撰　朱尧辰 译　戚鸣皋 校

二次无理数［quadratic irrationality；квадратическая иррациональность］

系数为有理数且在有理数域上不可约的二次三项式的根．二次无理数可以表成 $a+b\sqrt{d}$ 的形式，其中 a 和 b 是有理数，$b\neq 0$．d 是非完全平方整数．实数 α 当且仅当它有无穷周期的**连分数**(continued fraction)展开式时，它是二次无理数．

А．И．Галочкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Khinchin，A．Ya．，Continued fractions，Phoenix Sci．Press，1964，Chapt．II，§10(译自俄文)．

贼鸣皋 译 潘承彪 校

二次平均值 [quadratic mean；квадратичное среднее]

给定诸数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的平方的**算术平均值**(arithmetic mean)的平方根 s：

$$s=\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}\ .$$

БСЭ-3

【补注】 二次平均值又称为均方根(root mean square)．

王斯雷 译

二次规划 [quadratic programming；квадратичное программирование]

凸规划(convex programming)的分支．它研究在由线性不等式和等式组所确定的集合上的凸二次函数的极小化问题的求解理论和方法．存在相当完善的二次规划理论；求解二次规划问题的数值方法也已得到发展；其中，**单纯形法**(simplex method)型的方法可在有限步(迭代)中导得解．

在有经济或技术内容的实际问题中，其数学模型是二次规划问题的很少．然而，二次规划问题常作为解各种**数学规划**(mathematical programming)问题的辅助问题而出现．例如，在**非线性规划**(non-linear programming)问题的数值解的可行方向法的变种之一中，每次迭代中的下降方向的选择问题归结为解二次规划问题．二次函数的无条件极小化问题，以至具有简单类型约束的二次规划问题(例如，变量要求非负)，可作为求解**线性规划**(linear programming)的不稳定(不适定)问题的正则化方法以及求解线性规划问题的**罚函数法**(penalty functions，method of)的应用的结果而提出．

参考文献

[1] Пшеничный，Б．Н．，Данилин，Ю．М．，Численные методы в экстремальных задачах，М．，1975．

[2] Hadley，J．，Nonlinear and dynamical programming，Addison-Wesley，1964．

[3] Zangwill，U．I．，Nonlinear programming．A unified approach．Prentice-Hall，1969．

[4] Krelle，W．and Künzi，H．P．，Nonlinear programming，Blaisdell，1966(译自德文)．

[5] Демьянов，В．Ф．，Малоземов，В．Н．，Введение в минимакс，М．，1972

В．Г．Карманов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Minoux，M．，Mathematical programming．theory and algorithms，Wiley，1986．

史树中 译

二次互反律 [quadratic reciprocity law；квадратичный закон взаимности]

对于不同的奇素数 p 和 q，联系 **Legendre 符号**(Legendre symbol)

$$\left(\frac{p}{q}\right) 和 \left(\frac{q}{p}\right)$$

的关系式

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2\cdot(q-1)/2}.$$

对这个二次互反律，还有两个补充关系式，即：

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2}$$

和

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}.$$

C．F．Gauss 给出了二次互反律的第一个完整的证明，由于这一原因，因而也称为 **Gauss 互反律**(Gauss reciprocity law)．

由此互反律立即可知，对于给定的无平方因子数 d，使其成为模 p 的二次剩余的素数 p，必在某些公差为 $2|d|$ 或 $4|d|$ 的算术级数中．这些级数的个数是 $\varphi(2|d|)/2$ 或 $\varphi(4|d|)/2$，其中 $\varphi(n)$ 是 **Euler 函数**(Euler function)．二次互反律使有可能在有理数域的二次扩张 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 中建立因子分解定律，因为除不尽 d 的素数在 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 中的素因子分解依赖于是否 x^2-d 是模 p 可约的．

参考文献

[1] Виноградов，И．М．，Основы теории чисел，8 изд．，М．，1972(中译本：И．М．维诺格拉陀夫，数论基础，高等教育出版社，1952)．

[2] Боревич，З．И．，Шафаревич，И．Р．，Теория чисел，2 изд．，М．，1972(英译本：Borevich，Z．I．and Shafarevich，I．R．，Number theory，Acad．Press，1966)．

С．А．Степанов 撰

【补注】 亦见**二次剩余**(quadratic residue)；**Dirichlet 特征标**(Dirichlet character)．

参考文献

[A1] Hardy，G．H．and Wright，E．M．，An introduction to the theory of numbers，Oxford Univ．Press，

1979.　　　　　　　　　　臧鸣皋 译　潘承彪 校

二次剩余[quadratic residue; квадратичный вычет]. 模 m 的

使同余式(congruence)

$$x^2 \equiv a \pmod m$$

可解的整数 a. 如果上述同余方程不可解,则称 a 为模 m 的二次非剩余(quadratic non-residue). Euler 准则(Euler criterion):设 $P>2$ 是素数. 则与 p 互素的整数 a 是模 p 的二次剩余,当且仅当

$$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p.$$

而 a 是模 p 的二次非剩余,当且仅当

$$a^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p.$$

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972(中译本:И. М. 维诺格拉陀夫, 数论基础, 高等教育出版社, 1952).

C. A. Степанов 撰

【补注】 下面是一个有趣而又未解决的问题:设 p 是满足 $p \equiv 3 \pmod 4$ 的素数, 又设 N 是在 0 与 p 之间的所有二次非剩余之和, Q 是所有二次剩余之和. 已知 $N>Q$. 请给出一个初等证明.

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.　　　　臧鸣皋 译　潘承彪 校

二次曲面形式[quadratic surface forms; квадратичные формы поверхности]

曲面的第一二次形式(first quadratic form)、第二二次形式(second quadratic form)、第三二次形式(third quadratic form)是第一、第二、第三**曲面的基本形式**(fundamental forms of a surface)的另一种称呼,不常使用.

割圆曲线[quadratrix; квадратриса]

用于求解**化圆为方问题**(quadrature of the circle)的平面曲线. 例如: **Dinostratus 割圆曲线**(Dinostratus quadratrix)、**蜗牛线**(cochleoid)、Tschirnhaus 割圆曲线(Tschirnhaus quadratrix):

$$y = a\sin\frac{\pi x}{2a},$$

和 Ozanam 割圆曲线(Ozanam quadratix):

$$x = 2a\sin^2\frac{y}{2a}.$$

А. Б. Иванов 撰

【补注】 Dinostratus 割圆曲线亦称为 Hippias 割圆曲线(Hippias quadratrix).

参考文献

[A1] Heath, Th. L., A history of Greek mathematics, 1-2, Dover, reprint, 1981.
[A2] Kline, M., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford Univ. Press, 1972(中译本: M. 克莱因, 古今数学思想, 上海科学技术出版社, 1982).
[A3] Waerden, B. L. van der, Science awakening, 1, Noordhoff, 1975.
[A4] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, Chelsea, reprint, 1971.　　　　潘养廉 译

求面积,求积分[quadrature; квадратура]

1) 作一个正方形,使其面积与给定图形的面积相等(例如,见**化圆为方问题**(quadrature of the circle)).

2) 计算一个(单变量函数的)积分(integral).

杜小杨 译

求积公式[quadrature formula; квадратурная формула]

计算定积分的近似公式

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \cong \sum_{i=1}^N C_i f(x_i), \qquad (1)$$

其左端为需要计算的积分,被积函数写成两个函数的乘积形式,其中第一个为 $p(x)$,对于所给的求积公式来说它是不变的,并称之为权函数(weight function);而函数 $f(x)$ 则属于相当广泛的函数类,例如连续函数,对这种函数(1)式左端的积分存在.(1)的右端的和称为求积和(quadrature sum),数 x_j 称为求积公式的结点(nodes of the quadrature formula),数 C_j 称为权(weights). 应用公式(1)来确定积分的近似值归结为求积和的计算;结点和权的值一般都取自表(例如可见[3]).

最广泛使用的求积公式都是基于代数插值的. 设 $x_1,\cdots,x_N$ 为不同的点(一般 $x_i\in[a,b]$,尽管这个要求并非本质的),$P(x)$ 为由函数 $f(x)$ 在这些点上的值所构造的 $f(x)$ 的插值多项式

$$P(x)=\sum_{i=1}^N L_i(x)f(x_i),$$

其中 $L_i(x)$ 是 i 结点的 Lagrange 基函数(见 **Lagrange 插值公式**(Lagrange interpolation formula)): $L_i(x_j)=\delta_{ij}$ (δ_{ij} 是 **Kronecker 符号**(Kronecker symbol)). $p(x)f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分由 $p(x)P(x)$ 的积分近似地替代;于是有形式为(1)的近似式,其中

$$C_i=\int_a^b p(x)L_i(x)dx,\ i=1,\cdots,N. \qquad (2)$$

(2) 中积分的存在性等价于权函数的诸矩的存在性,

$$\mu_k = \int_a^b p(x) x^k dx, \ k = 0, 1, \cdots, N.$$

(这里和下文都假设所要求的 $p(x)$ 的矩存在; 特别, 在 $p(x) = 1$ 时, 区间 $[a, b]$ 取为有限的情况, 见**矩问题** (moment problem)).

使用由 (2) 式所定义的权的求积公式 (1) 称为插值求积公式 (interpolatory quadrature formula). 若当 $f(x)$ 为任一次数不超过 d 的多项式时, (1) 式精确地成立; 而当 $f(x) = x^{d+1}$ 时该式并非精确地成立, 则 $d \geq 0$ 称为 (1) 式的代数精度 (algebraic degree of accuracy). 欲使 (1) 式为插值求积公式, 其充分必要条件是它的代数精度 d 满足不等式 $d \geq N - 1$.

令 $p(x) = 1$ 且 $[a, b]$ 为有限区间, 则具有如下等距结点的插值求积公式称为 **Newton-Cotes 求积公式** (Newton-Cotes quadrature formula)

$$x_j = a + jh, \ j = 0, \ \cdots, \ n, \qquad h = (b - a)/n, \tag{3}$$

其中 n 为正整数, $N = n + 1$; 当 n 为奇数时该求积公式具有代数精度 $d = n$, 当 n 为偶数时, $d = n + 1$. 具有单个结点的插值求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \cong (b - a) f(\xi), \ a \leqslant \xi \leqslant b,$$

称为**矩形法则** (rectangle rule) 或中点法则 (midpoint rule); 当 $\xi = (a + b)/2$ 时其代数精度 $d = 1$, 其余情况下 $d = 0$.

令在 $[a, b]$ 上

$$p(x) \geqslant 0, \ \mu_0 > 0. \tag{4}$$

当插值求积公式 (1) 以 $[a, b]$ 上某 n 次正交多项式的根为其结点, 以 $p(x)$ 为权函数时, 则称它为 Gauss 型求积公式 (quadrature formula of Gauss type); 亦称最高代数精度的求积公式 (quadrature formula of highest algebraic degree of accuracy), 这是因为在条件 (4) 下不存在 N 结点求积公式使得对于 x^{2N} 是精确的. Gauss 型求积公式应用最广的是由如下几种权函数 $p(x)$ 和区间 $[a, b]$ 所确定的特殊情况:

在 $[-1, 1]$ 上具有下列参数值的 Jacobi 权 $(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta (\alpha, \beta > -1)$: a) $\alpha = \beta = 0$ (**Gauss 求积公式** (Gauss quadrature formula)); b) $\alpha = \beta = -1/2$ (**Mehler 求积公式** (Mehler quadrature formula)); c) $\alpha = \beta = 1/2$ 和 d) $\alpha = -\beta = 1/2$; 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的 Hermite 权 $\exp(-x^2)$; 以及在 $(0, +\infty)$ 上的 Laguerre 权 $x^\alpha \exp(-x)$ $(\alpha > -1)$.

有一些求积公式, 预先取定一些结点, 可以选取其余结点使公式具有最高的代数精度. 例如, 计算 $[-1, 1]$ 上具有权函数 1 的 **Lobatto 求积公式** (Lobatto quadrature formula) 和 **Radau 求积公式** (Radau quadrature formula) 就是这类求积公式. 其中前者固定的结点为 $-1, 1$, 而后者只有一个结点是固定的.

称具有权函数 1 的两个求积公式

$$\int_c^d f(t) dt \cong \sum_{j=1}^m C_j f(t_j),$$

$$\int_\gamma^\delta \varphi(\tau) d\tau \cong \sum_{j=1}^m \Gamma_j \varphi(\tau_j)$$

是相似的, 如果 $t_j - c = s(\tau_j - \gamma)$, $C_j = s\Gamma_j$, $j = 1, \cdots, m$, 其中 s 由方程 $d - c = s(\delta - \gamma)$ 确定. 考虑有限区间 $[a, b]$ 的情况,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \tag{5}$$

其中 x_i 由 (3) 定义. 如果诸区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的积分计算都使用和同一个求积公式相似的求积公式, 则 (5) 式成为左端积分计算的合成求积公式 (composite quadrature formula). 例如, 下面就是一个合成矩形规则的公式:

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \sum_{j=1}^n f(\xi + (j - 1)h),$$

$$\xi \in [a, a + h].$$

当 $b - a = 2\pi$ 时, 该求积公式对于 $\cos kx$, $\sin kx$ 是精确的, $k = 0, \cdots, n - 1$.

可以考虑对函数 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式积分得到的插值公式. 在这种求积公式的求积和中不只是用到结点上函数本身的值, 而且还需要直至某阶的函数各阶导数之值. 在 **Euler-MacLaurin 公式** (Euler-MacLaurin formula) 中还用到了积分区域端点处被积函数诸导数之值.

求积公式 (1) 的误差

$$R(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{j=1}^N C_j f(x_j),$$

有一些含有诸导数 $f^{(r)}(x)$ 的表达式, 这些表达式对于 $R(f)$ 的实际估计用处很小, 这是因为还需要估计诸导数 $f^{(r)}(x)$. 误差 $R(f)$ 是函数所在向量空间上的可加齐次泛函.

构造求积公式的另一条途径是建立在误差泛函 $R(f)$ 范数极小化基础上的.

设 $R(f)$ 为求积公式的误差, 该公式对于次数不超过 $r - 1$ 的所有多项式都是精确的, 其中 $[a, b] =$

$[0,1]$ 且 $p(x)=1$. 今设 $W_q^{(r)}(q>1$, r 为正整数）为函数 $f(x)$ 的向量空间，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 具有绝对连续的 $r-1$ 阶导数，其 r 阶导数的 q 次幂函数可和. 当 $W_q^{(r)}$ 中两个函数的差是一个次数不超过 $r-1$ 的多项式时则认为它们是等价的. 等价类（由次数不超过 $r-1$ 的多项式所形成的向量空间生成的 $W_q^{(r)}$ 的商空间）的集合是一个向量空间，以 $L_q^{(r)}$ 表示. 对 $L_q^{(r)}$ 可引入范数，为此只要对类 $\psi\in L_q^{(r)}$ 令

$$\|\psi\|=\|f^{(r)}\|_{L_q}=\left\{\int_0^1|f^{(r)}(x)|^q dx\right\}^{1/q}.$$

其中 $f(x)$ 是属于 ψ 的任一函数. 若设 $R(\psi)=R(f)$, $f\in\psi$, 则求积公式的误差泛函可认为是在 $L_q^{(r)}$ 上的泛函. 误差泛函 $R(\psi)$ 在赋范线性空间 $L_q^{(r)}$ 上是连续的，其范数 $\|R\|$ 表征 $W_q^{(r)}$ 中所有函数的求积公式的精度：对任意 $f\in W_q^{(r)}$, 不等式

$$|R(f)|\leqslant\|R\|\cdot\|f^{(r)}\|_{L_q}$$

成立，并且这是最佳的. 显然 $\|R\|$ 是求积公式中参数 x_k, C_k, $k=1,\cdots,N$ 的函数，自然应尽量选取它们使得 $\|R\|$ 取最小值. 于是（由所考虑的类）得到了对于空间 $W_q^{(r)}$ 中所有函数其误差可达到最小估计的求积公式. 这样，求积公式的构造转化为求解极值问题. 这个问题，甚至对于上述特殊情形都是极端复杂的、仅对 $r=1$ 和 $r=2$, 已经得出它的解.

参考文献

[1] Крылов, В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967 (英译本 Krylov, V. I., Approximate calculation of integrals, Macmillan, 1962).

[2] Никольский, С. М., Квадратурные формулы, 2 изд., М., 1974 (英译本：Nikol'skii, S. M., Quadrature formulas, Hindushtan Publ. Comp., 1974).

[3] Крылов, В. И., Шульгина, Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966.

И. П. Мысовских 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davis, P. J. and Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1975 (中译本：Davis, P. J., Rabinowitz, P., 数值积分法，高等教育出版社，1986).

张宝琳 袁国兴 译

最高代数精度的求积公式 [quadrature formula of highest algebraic accuracy; наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула]

如下类型的公式

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\approx\sum_{j=1}^N C_jf(x_j), \qquad (1)$$

其中权函数 $p(x)$ 为 $[a,b]$ 上给定的非负函数，诸积分

$$\mu_k=\int_a^b p(x)x^k dx,\ k=0,1,\cdots,$$

存在而且 $\mu_0>0$. 公式 (1) 的结点 x_j 是在 $[a,b]$ 上关于权函数 $p(x)$ 的 N 次正交多项式的根，其权重由 (1) 是插值公式这个条件来确定. 这类求积公式的代数精度为 $2N-1$, 即它对于所有次数 $\leqslant 2N-1$ 的代数多项式都是精确的，而且对 x^{2N} 不精确；这就是熟知的 Gauss 型求积公式 (quadrature formula of Gaussian type).

这个概念可作如下推广. 考虑求积公式

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\approx\sum_{j=1}^m A_jf(a_j)+\sum_{j=1}^n C_jf(x_j) \qquad (2)$$

具有 $N=m+n$ 个结点，其中结点 $a_1,\cdots,a_m$ 预先给出（固定），而选取 $x_1,\cdots,x_n$ 使得 (2) 是具有最高代数精度的求积公式. 令

$$\sigma(x)=\prod_{j=1}^m(x-a_j),$$

$$\omega(x)=\prod_{j=1}^n(x-x_j).$$

公式 (2) 对于次数 $\leqslant m+2n-1$ 的所有多项式是精确的，当且仅当它是一个插值求积公式而且对于次数 $\leqslant n-1$ 的所有多项式，多项式 $\omega(x)$ 是在 $[a,b]$ 上关于权函数 $\sigma(x)p(x)$ 正交的. 这样就把对于次数 $\leqslant 2n-1$ 的所有多项式都精确成立的求积公式的存在性问题，化为确定一个 n 次多项式 $\omega(x)$ 和估计它的根的性质的问题，其中 $\omega(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权函数 $\sigma(x)p(x)$ 正交. 若 $\omega(x)$ 的根是实的，单的、位于 $[a,b]$ 之内，并且这些根均不是固定结点，则所求的求积公式存在. 再若

$$\int_a^b p(x)\sigma(x)\omega^2(x)dx\neq 0,$$

则公式的代数精度是 $m+2n-1$.

在关于权函数 $p(x)$ 的上述假定下，在 $[a,b]$ 上关于权函数 $\sigma(x)p(x)$ 正交的 n 次多项式 $\omega(x)$, 在下面特殊情形下是唯一地（不计一个非零常数因子）确定的.

1) $m=1$, n 任意. 单个的固定结点是区间 $[a,b]$ 的一个端点，仅需附加一个条件，即区间 $[a,b]$ 是有限的.

2) $m=2$, n 任意. 两个固定结点是区间 $[a,b]$ 的端点，而且它们都是有限的.

3) m 任意，$n=m+1$. 固定结点是在 $[a,b]$ 上

关于权函数 $p(x)$ 正交的多项式 $P_m(x)$ 的根．

在情况 1) 和 2) 中，多项式 $\omega(x)$ 关于权函数 $\sigma(x)p(x)$ 正交，在 $[a,b]$ 上不变号，其根是实的、单的，位于 (a,b) 之中，而不同于 a、b．求积公式 (2) 存在，它的系数是正的，其代数精度为 $m+2n-1$．相应于情况 1) 和 2) 的求积公式称为 Марков 公式 (Markov formula).

在情况 3) 中，权函数 $\sigma(x)p(x)$ 在 $[a,b]$ 上变号，于是使 $\omega(x)$ 的根的检查复杂化了．如果 $[a,b]=[-1,1]$，$p(x)=(1-x^2)^\alpha$，其中 $-1/2<\alpha\leqslant 3/2$，则 $\omega(x)$ 的根位于 $(-1,1)$ 之内而且分割 $P_m(x)$ 的根：在 $\omega(x)$ 的任何两相邻根之间有且只有 $P_m(x)$ 的一个根 (见 [2])．关于这个权函数，求积公式 (2) 存在，并且对次数 $\leqslant 3m+1$ 的所有多项式都是精确的；但不能说它的代数精度是 $3m+1$．对于 $\alpha=-1/2$ 和 $\alpha=1/2$，求积公式的结点和系数可具体的列出来 (见 [3])；前种情况的代数精度增加到 $4m-1$，而第二种情况则增加到 $4m+1$．对 $p(x)=1$ 和区间 $[0,1]$，求积公式 (2)(以 3) 型的固定结点) 当 $m=1(1)40$ (亦即 m 以步长 1 从 1 变到 40) 时结点和系数已被计算出来了 (见 [4])；当 m 为偶数时其代数精度是 $3m+1$，m 为奇数时代数精度是 $3m+2$．对于区间 $[-1,1]$ 和权函数 $(1-x)^\alpha(1+x)^{-\alpha}$ $(\alpha=\pm 1/2)$, 3) 型的固定结点下的求积公式 (2) 也存在，其结点和系数也可以具体的列出来 (见 [3]).

参考文献

[1] Крылов, В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967 (英译本：Krylov, V. I., Approximate calculation of integrals, Macmillan, 1962).

[2] Szegö, G., Ueber gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehören, *Math. Ann.*, **110** (1934), 4, 501 – 513.

[3] Мысовских, И. П., 《Изв. АН БССР Сер. фiз.-тэхнiч. навук》, 4 (1964), 125 – 127.

[4] Кронрод, А. С., Узлы и веса квадратурных формул. Шестнадцатизначные таблицы, М., 1964 (英译本：Kronrod, A. S., Nodes and weights of quadrature formulas, Consultants Bureau, 1965).

И. П. Мысовских 撰

【补注】

参考文献

[A1] Davis, P. J. and Rabinowitz, P., Methods of numerical integration, Acad. Press, 1975 (中译本：Davis, P. J., Rabinowitz, P., 数值积分法，高等教育出版社，1986).

张宝琳 袁国兴 译

化圆为方问题 [quadrature of the circle; квадратура круга]

下述问题：作一正方形，使其面积与给定圆的面积相等；古代三大经典尺规作图问题之一．与半径为 r 的圆面积相等的正方形的边长为 $r\sqrt{\pi}$．因此，化圆为方问题可以归结为下述问题：作一长度等于 $\sqrt{\pi}$ 的线段．这种作图是不可能用直尺和圆规来完成的，因为 π 是一个**超越数** (transcendental number)，已由 F. Lindemann 于 1882 年证明．然而，如果扩充作图工具，例如使用某些超越曲线——称为**割圆曲线** (quadratrix)，化圆为方问题就成为可解的．

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, Геометрия, М., 1963, 205 – 227.

Е. Г. Соболевская 撰

【补注】 古代的化圆为方问题导致一个测度论问题：一个圆盘与一面积相等的正方形是否为等度可分解的 (equi-decomposable)，即该圆盘是否能够分成有限个不相交的子集，而由这些子集可以重新拼成一个正方形 ([A6])．关于这个问题的一些结果，见 **Tarski 问题** (Tarski problem).

参考文献

[A1] Bieberbach, L., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Birkhäuser, 1952.

[A2] Klein, F., et al., Famous problems and other monographs, Chelsea, reprint, 1962 (译自德文).

[A3] Stewart, I., Galois theory, Chapman & Hall, 1973.

[A4] Waerden, B. L. van der, Science awakening, I, Noordhoff, 1975.

[A5] Dudley, U., A budget of trisections, Springer, 1987.

[A6] Wagon, S., Circle squaring in the twentieth century, *Math. Intelligencer*, **3** (1981), 4, 176 – 181.

[A7] Hobson, E. W., Squaring the circle, in Squaring the circle and other monographs, Chelsea, reprint, 1953.

[A8] Perron, O., Irrationalzahlen, de Gruyter, 1960.

[A9] Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M., Mathematical recreations and essays, Dover, reprint, 347 – 359.

杜小杨 张鸿林 译

求积和方法 [quadrature-sum method; квадратурных сумм метод]

在构造求解积分方程数值方法时逼近**积分算子** (integral operator) 的一种方法．最简单的求积和方法，例如，**积分方程** (integral equation)

$$\lambda\varphi(x)+\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=f(x)$$

中的积分算子

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

按照下面规则由有限维值域的算子逼近

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds\approx\sum_{i=1}^N a_i^{(N)}K(x,s_i)\varphi(s_i). \quad (1)$$

接着，积分方程由下面的线性代数方程

$$\lambda\widetilde{\varphi}(s_j)+\sum_{i=1}^{N}a_i^{(N)}K(s_j,s_i)\widetilde{\varphi}(s_i)$$

$$=f(s_j),\ j=1,\cdots,N,$$

来逼近．逼近式(1)的右端是关于 s 的积分的求积公式(quadrature formula)．(1)式可有许多推广

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds\approx\sum_{i=1}^{N}a_i^{(N)}(x)\varphi(s_i),\qquad(2)$$

其中 $a_i^{(N)}(x)$ 为由核 $K(x,s)$ 构造的某些函数．由推广的形式(2)所给出的求积和方法能够用来逼近具有奇异性的核的积分算子甚至奇异积分算子．

参考文献

[1] Канторович, Л. В., Крылов, В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.-Л., 1962 (英译本：Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958)

А. Б. Бахушинский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Baker, C. T. H., The numerical treatment of integral equations, Clarendon Press, 1977.

张宝琳 袁国兴 译

二次超曲面[**quadric**; **квадрика**]

1) 三维空间的二次超曲面是**二次曲面**(surface of the second order)．在三维(射影、仿射或 Euclid)空间里，一个二次曲面是齐次坐标 x_0,x_1,x_2,x_3(关于射影、仿射或 Descartes 坐标系)满足下列 2 次齐次方程的点的集合：

$$F(x)\equiv\sum_{i,j=0}^{3}a_{ij}x_ix_j=0,\ a_{ij}=a_{ji}.$$

双线性对称形式

$$\Phi(x,\widetilde{x})=\sum_{i,j=0}^{3}a_{ij}x_i\widetilde{x}_j$$

被称为相对于 $F(x)$ 的极形式(polar form)．两个满足 $\Phi(x',x'')=0$ 的点 $M'(x_0',x_1',x_2',x_3')$，$M''(x_0'',x_1'',x_2'',x_3'')$ 称为关于此二次曲面的共轭点(conjugate points)．如果直线 $M'M''$ 与二次曲面相交于点 N_1，N_2，且点 M'，M'' 关于此二次曲面互相共轭，则 N_1，N_2 和 M'，M'' 构成**调和四元组**(harmonic quadruple)．二次曲面上的点而且仅有这些点是自共轭的．其上所有点都位于一个二次曲面上的直线被称为二次曲面的生成元(generator)．已给平面关于一个二次曲面的极点(pole)是指与这个平面的每一个点都共轭的点．空间内与一个给定的点 M' 关于二次曲面共轭的点的集合称为 M' 关于这个二次曲面的极面(polar)．二次曲面的切平面是切点的极面．点 M' 的极面是由关于坐标 x_0,x_1,x_2,x_3 的线性方程 $\Phi(x,x')=0$ 确定的．如果 $\Phi(x,x')\not\equiv0$，则 M' 的极面是一个平面；如果 $\Phi(x,x')\equiv0$，则 M' 的极面是整个空间．在这种情形下，M' 属于二次曲面且被称为它的奇点(singular point)．如果 $R=\mathrm{rank}(a_{ij})=4$，则二次曲面没有奇点且被称为非退化二次曲面(non-degenerate quadric)．在射影空间里，这是虚卵形面、实卵形面或直纹二次曲面．一个非退化二次曲面确定一个对射变换(correlation)(或配极(polarity))，即从射影空间的点集到平面集上的一一映射．一个直纹非退化二次曲面有两个不同的生成元族，它们分布在二次曲面上使得同一族的两条直线互不相交而不同族的两条直线交于一点．如果 $R=3$，则此二次曲面是一个(实或虚的)锥面，其顶点是唯一的奇点．实锥面只有一个过顶点的生成元族．如果 $R=2$，则二次曲面分裂成一对(实或虚的)平面，相交于一条由奇点组成的直线．如果 $R=1$，则二次曲面是由奇点组成的二重实平面．二次曲面的仿射性质是由它关于无穷远平面 $x_0=0$ 的性状来区分的．例如椭球面(ellipsoid)(双曲面(hyperboloid)抛物面(paraboloid))就是与无穷远平面不相交(相交，相切)的非退化二次曲面．二次曲面的中心(centre of a quadric)是无穷远平面的极，直径(diameter)就是过中心的直线．

参考文献

[1] Фиников, С. П., Аналитическая геометрия, 2 изд., М., 1952

[2] Ефимов, Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 5 изд., М., 1960.

В. С. Малаховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965, 65-94.

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A3] Berger, M., Geometry, I-2, Springer, 1987 (译自法文).

[A4] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. E., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (译自德文).

[A5] Baker, H. F., Principles of geometry, 3. Solid geometry, Cambridge. Univ. Press, 1961.

2) 代数几何里的二次超曲面(quadric in algebraic geometry)是基域 k 上射影空间 P^n 里由二次齐次方程

$$\sum_{i,j=0}^{n}a_{ij}x_ix_j=0$$

定义的射影**代数簇**(algebraic variety).

进一步假设基域是代数闭的而且特征数不等于 2. 设 Q 是 P^n 内二次超曲面且设 $s(Q)$ 是它的奇点集. 则 $s(Q)$ 是空集当且仅当 $\mathrm{rk}(Q)=n+1$. 这里 $\mathrm{rk}(Q)$ 是相应**二次型**(quadratic form)的秩. 如果 $s(Q)$ 非空, 则 Q 是在 $\mathrm{rk}(Q)-1$ 维非退化二次超曲面上的**锥面**(cone), 其顶点是 P^n 内 n-$\mathrm{rk}(Q)$ 维射影子空间 $s(Q)$. 所有的秩 $\mathrm{rk}(Q)=r$ 的二次超曲面射影等价于二次超曲面

$$\sum_{i=0}^{r-1} x_i^2=0.$$

设 $s(Q)$ 空且设 $E\subset Q$ 是极大维数的线性子空间(称为二次超曲面的生成元(generator of the quadric Q)). 则

a) 若 $\dim Q=2m$, 则 $\dim E=m$;

b) 若 $\dim Q=2m+1$, 则 $\dim E=m$.

此外, Q 上所有极大维数子空间 E 的族是 P^n 内 $\dim E$ 维子空间的 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold)中的非奇异闭子集 G. 当 $\dim Q=2m$ 时, $G=G_1\cup G_2$, 这里 $G_i(i=1,2)$ 是具有相同维数

$$\binom{m+1}{2}$$

的互不相交的非奇异不可约有理簇, E 和 E' 属于同一个分支当且仅当

$$\dim(E\cap E')\equiv\dim E(\mathrm{mod}\,2).$$

当 $\dim Q=2m+1$ 时, G 是非奇异不可约有理簇, 维数为

$$\binom{m+2}{2}.$$

当 $s(Q)$ 为空且 $\dim Q=2$ 时, $Q\cong P^1\times P^1$; 如果 $\dim Q\neq 2$, 则 $\mathrm{Pic}(Q)\cong\mathbf{Z}$(这里 Pic 表示 **Picard 群**(Picard group).

二次超曲面都是有理的: 二次超曲面 Q 与射影空间的双有理同构可通过从某个点 $q\in Q$, $q\notin s(Q)$, 作二次超曲面 Q 的球极平面投影而得到. 作为二次超曲面的完全交的簇已从双有理几何的观点被研究([3]). 两个二次超曲面的交在[2]中被研究, 三个的交在[4]中研究.

任何射影簇 X 可被嵌入一个射影空间 P^N(对充分大的 N), 使得它的象是包含它的二次超曲面的交(一般不是完全交)([1]).

非闭域上二次超曲面的研究是与二次型的算术紧密相连的.

参考文献

[1] Mumford, D., Varieties defined by quadratic equations, in Questions on algebraic varieties, C. I. M. E. Varenna, 1969, Cremonese, 1970, 29–100.

[2] Reid, M., The complete intersection of two or more quadrics, 1972, Ph. D. Thesis.

[3] Rjabenki, V. S. and Filipov, A. F., Über die stabilität von Differenzgleichungen, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1960.

[4] Тюрин, А. Н., 《Успехи матем. наук》, 30 (1975), 6, 51–99.

В. А. Исковских 撰

【补注】

参考文献

[A1] Griffiths, P. and Harris, S., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[A2] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, II, Cambridge Univ. Press, 1952.

[A3] Lenz, H., Vorlesungen über projektive Geometrie, Geest u. Portig, 1965.

[A4] Pickert, G., Analytische Geometrie, Geest u. Portig, 1953.

[A5] Donagi, R., Group law on the intersection of two quadrics, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Ser.* IV, 7 (1980), 217–240.

[A6] Mérindol, J. Y., Théorème de Torelli affine pour les intersections de deux quadriques, *Invent. Math.*, **80** (1985), 375–416.

陈志杰 译

四边形 [**quadrilateral**; **четырехсторонник**]

见**完全四角形**(quadrangle, complete).

微分方程定性理论 [**qualitative theory of differential equations**; **качественная теория дифференциальных уравнений**]

不求出常微分方程的解而研究解的性质的数学分支.

微分方程定性理论的基础是在 19 世纪末由 H. Poincaré(见[1],[2])和 A. M. Ляпунов(见[3],[4])奠定的. Poincaré 把微分方程组的解看成适当空间中的曲线而广泛地使用了几何方法. 在此基础上, 他创立了二阶微分方程解的性态的一般理论, 解决了解对参数的依赖性的许多基本问题(见下文). Ляпунов 研究了解在一**平衡位置**(equilibrium position)附近的性态, 他创立了运动稳定性的现代理论(见**稳定性理论**(stability theory)).

George Birkhoff 在本世纪 20 年代发展了 Poincaré 的几何方法, 他发现了高维微分方程组定性理论的许多重要事实(见[5],[6]).

线性方程组. 考虑微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y,\quad y\in\mathbf{R}^n,\tag{1}$$

这里 $P(x)$ 是一 $n\times n$ 方阵. 设 $P(x)$ 是有界的. ($P(x)$ 无界的情况只有少数很特殊的研究.) 在微

分方程的定性理论中要研究当 $x \to \infty$ 时（1）的解的渐近性态（asymptotic behaviour）.

解 $y(x)$ 的特征指数（characteristic index）就是

$$\lambda = \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{1}{x} \ln|y(x)|,$$

它与指数函数相比较而刻画了解的增长性.（亦见 **Ляпунов 特征指数**（Lyapunov characteristic exponent））.（1）的每个非零解都具有限的特征指数. 非零解的诸特征指数也称为方程组的特征指数（characteristic indices of the system）. 线性方程组不会有多于 n 个不同的特征指数. 变量的线性变换

$$z = U(x)y \qquad (2)$$

不会改变方程组的特征指数, 只要矩阵 $U(x)$, dU/dx 和 U^{-1} 为有界. 这种变换称为 Ляпунов 变换（Lyapunov transformation）.

若 $P(x)$ 是常数元矩阵,（1）的特征指数就是 P 的本征值的实部.

一个线性方程组若有一个 Ляпунов 变换（2）把它化为具有常数元矩阵 P 的方程组（1）, 就称为可约化的（reducible）（见 [7], [8]）.

若 $P(x)$ 有周期 ω, 则按 Floquet 定理（见 [9]）,（1）的基本矩阵（fundamental matrix）$\Phi(x)$（即由线性无关解构成的矩阵）可以写为

$$\Phi(x) = Q(x)e^{Ax}, \qquad (3)$$

其中 $Q(x)$ 具有周期 ω 而 A 为一常数元矩阵. 进一步, 当 $P(x)$ 为实时, A 和 $Q(x)$ 不一定必可选为实的; 然而这时（3）中的 $Q(x)$ 可以选为以 2ω 为周期. 由（3）可知, 具有周期的 $P(x)$ 的方程组（1）必为可化约的（Ляпунов 定理（Lyapunov theorem））.（3）式表明, 要计算特征指标, 只需知道 $\Phi(\omega)$, 即只需在区间 $0 \leqslant x \leqslant \omega$ 上计算 n 个线性无关的解即可. 对于**周期系数的线性微分方程组**（linear system of differential equations with periodic coefficients）, 已有很详尽的研究（见 [8]）.

Ляпунов 证明了, 一个正则的方程组对于解析的非线性扰动是稳定的（此即其稳定性理论之第一方法的实质）.

线性微分方程的定性理论中的一个有趣的问题是这种方程的解的振动性质（见**振动解**（oscillating solution））问题, 即解的零点分布的问题. 例如, 若对一切 x 均有 $p(x) > \alpha > 0$, 则方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)y = 0$$

的每个解在区间 $0 < x < +\infty$ 上有无穷多个零点; 此外, 两个线性无关解的零点互相交错（见 [10]）.

非线性方程组. 一般非线性微分方程组都可在其范式

$$\frac{dy}{dx} = Y(y, x), \quad y \in \mathbf{R}^n \qquad (4)$$

之下来考虑. 研究得最详尽的是**自治系统**（autonomous system）

$$\frac{dy}{dx} = Y(y). \qquad (5)$$

（5）中的向量 y 的空间称为相空间（phase space）. 方程组（4）只要增加一阶就可以化为形（5）的自治系统. 一个形（5）的自治系统如果一切解都可以延拓到整个数轴 $-\infty < x < +\infty$ 上去, 就说是定义了一个**动力系统**（dynamical system）.

令 $y = y(x, y_0)$ 是（5）的具有初值 $x = 0$, $y = y_0$ 的解. 相空间中的曲线 $y = y(x, y_0)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 称为一个轨道（trajectory）, 而其相应于 $x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$ 的部分称为半轨（semi-trajectory）. 退化为一点 $y(x, y_0) \equiv y_0$ 的轨道起着特殊的作用, 若 $Y(y_0) = 0$ 就发生这种情况. 这种点称为平衡状态（equilibrium state）或平衡位置（equilibrium position）. 另一种重要类型的轨道是周期解的轨道, 它是相空间中的闭曲线. 一个闭轨, 若至少有一个其他轨道趋向它, 就称为**极限环**（limit cycle）.

非线性微分方程定性理论的一个重要问题是研究所有的解当 $x \to \pm\infty$ 时的渐近性态. 对于（5）这样的自治系统, 这个问题可以归结为研究所有半轨的极限集的构造以及这些轨道趋向极限集的方式. 每个半轨的极限集都是闭集且为不变的.（相空间的子集合若全由整个的轨道构成, 就称为不变的（invariant））. 若一半轨是有界的, 则其极限集必为连通的.

当 $n = 2$, 即当相空间为平面时, Poincaré（见 [1]）和 I. Bendixson（见 [11]）对轨道的一切可能的安排, 作了无遗漏的描述. 在方程 $Y(y) = 0$ 在平面的任意有界部分中只有有限多个解这一假设下, 他们证明了任一有界半轨的极限集都只能是以下三种类型之一: 1）单个平衡状态; 2）单个闭轨; 3）有限多个平衡状态以及当 $x \to \pm\infty$ 时都趋于这些平衡状态的轨道. Poincaré（[1]）和 A. Denjoy（[12]）考虑了（4）那样类型的一阶方程而其右方对变元 y 和 x 均为周期的. 这种方程在环面上考虑很方便（见**环面上的微分方程**（differential equations on a torus））. 这时, 解的构造本质地依赖于旋转数（rotation number）, 其定义为

$$\mu = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x, y_0)}{x}.$$

若 μ 为有理数, 则存在周期解; 若 μ 是无理数, 则所有解都是具有两个频率的拟周期函数.

对于 $n>2$，对轨道的性态不能给出这样清楚的描述．然而，关于高维自治系统的极限状况，却有大量的信息．例如有以下的 Birkhoff 的结果．若相空间的一个闭的有界不变集没有任何一个真子集具有同样的性质，则称它为极小的（minimal）．然后可知每个极小集均为一回复轨道的闭包．于是，每个有界半轨的极限集都包含一个回复闭轨．

在系统具有**不变测度**（invariant measure）这一重要的特例中，对解的性态的一般正则性，作了很多很详尽的研究（见[5]，[22]）．

结构稳定系统（见**粗系**（rough system））在应用上有特殊意义，粗系即当右方有 C^1 意义下的小扰动时仍为稳定的系统．当 $n=2$ 时，A．A．Андронов 和 Л．C．Понтрягин（[13]）提出了结构稳定性的必要充分条件．特别地，他们证明了在平面的任一有界部分中，只有有限多个周期解．$n>2$ 时，结构稳定系统的性态要复杂得多．S．Smale 给出了一个结构稳定系统的例子（[14]），它在相空间的一个有界部分中有无穷多个周期解．

关于具体的微分方程组的整体性质，做过大量的研究．与自动控制理论的研究相联系，在 50年代出现了微分方程定性理论的一个新的分支，就是大范围运动稳定性理论．**耗散系统**（dissipative systems）在振动理论中起重要的作用；这就是形状如（4）而其所有解当时间增长时均落入某个有界区域中的系统．对耗散系统的性质进行过很仔细的研究．建立了相对可靠的方法，使得能够确定具体系统的耗散性（见[15]）．

微分方程定性理论中的一个问题是周期解的存在问题．证明这种解的存在常要用拓扑的办法，特别是关于不动点存在的种种判据．许多这类定理是应用 Poincaré-Birkhoff 的几何原理（的推广）来证明的．

只对于很特殊的非线性微分方程组做到了完全的定性研究．例如证明了（见[16]）**Liénard 方程**（Liénard equation）

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+q(x)=0$$

在很自然的假设下有唯一周期解，而其所有其他解均收敛于它．

关于具有扰动的 **van der Pol 方程**（van der Pol equation）

$$\ddot{x}+k(x^2-1)\dot{x}+x=kb\lambda\sin\lambda t,$$

对于参数 k 的很大的值，证明了以下的有趣的事实（还有许多其他结果，见[17]）．对于特别选定的参数 b，此方程有两个渐近稳定解，其周期各为 $(2n+1)\cdot 2\pi/\lambda$ 和 $(2n-1)2\pi/\lambda$，n 是充分大的整数，而"大部分"其余的解收敛于二者．此外还有可数多个不稳定周期解以及构成一连续统的回复的非周期解．

局部理论．非线性方程组（4）的定性研究，如果只需在某已知解的附近而不是在整个 x，y 空间中进行，就会有明显的简化．这时，作简单的变量变换就可以把问题化为研究以下形状

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Y(y,x),\ y\in\mathbf{R}^n \qquad (6)$$

的微分方程组，这里向量函数 Y 在某种意义下与 y 相比是一小量．研究（6）的解在平衡状态 $y=0$ 附近的性态就是微分方程定性理论的局部理论的主题．

（6）的零解的稳定性问题是这个理论的中心问题．如果解 $y=y(x,y_0)$ 对于 y_0 在 $y_0=0$ 处连续，对 $x\geqslant 0$ 一致连续，就可认为零解是*稳定的*（stable）．

在微分方程定性理论的局部理论中，研究得最充分的是矩阵 $P(x)$ 为常数矩阵的情况．研究一自治系统的平衡状态和周期解的邻域的问题就可归结于此情况．

若 P 为常数矩阵且其所有本征值均有非零实部，描述（6）在 $y=0$ 邻域中解的性态就比较简单．这时，问题化为以下的 *Ляпунов-Perron 的基本结果*（fundamental result of Lyapunov-Perron）（见[1]，[18]）．设常数矩阵 P 有 k 个本征值有负实部而其余 $n-k$ 个有正实部，则在 y 空间中存在两个维数各为 k 和 $n-k$ 的流形 M 和 N，若 $y_0\in M$，则当 $x\to+\infty$ 时 $y(x,y_0)\to 0$，若 $y_0\in N$，则当 $x\to-\infty$ 时 $y(x,y_0)\to 0$；其余的解则当 x 增加或 x 减少时离开原点的邻域．P 具有零实部本征值的情况称为*临界的*（critical）情况．

当常数矩阵 P 有一个零本征值或两个纯虚本征值而其余本征值均有负实部，而且向量函数 Y 不依赖于 x 且为解析时，Ляпунов 对（6）之解在原点邻域中的性态作了完全的描述（见[3]）．二阶自治系统的局部定性理论的基本结果归于 Poincaré（[1]），Ляпунов（[3]，[4]），Bendixson（[11]）和 M．Frommer（[19]）．

考虑微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=P_m(y,z)+Y(y,z),$$
$$\frac{dz}{dx}=Q_m(y,z)+Z(y,z), \qquad (7)$$

其中 P_m 和 Q_m 是 m 次形式，而 Y、Z 比之 $(y^2+z^2)^{m/2}$ 是小量．设位于原点的平衡态是孤立的．这时方程组（7）或有解趋向于原点，或在原点的每个邻域中均有闭轨道存在．在第二个情况下，或者在原点邻域中所有轨道均为闭的（称为**中心**（centre）型配置）或者在原点的每个邻域都既有闭轨道又有非闭轨道（*中心-焦点型*（centre-focus type）配置）．还

证明了对于解析的 Y 和 Z 不可能有中心 - 焦点型配置（见[20]）.

此外，若一轨道收敛于原点，则或者它在原点处有切线，或者极角沿轨道为无界. 后一情况的配置是焦点（focus）型的. 只有在某些直线上 $Q_m y - P_m z$ 等于零时，这些直线才可能是趋向原点的轨道在原点处的切线. 这些直线称为例外方向（exceptional directions）. 对于充分光滑的 Y 与 Z，还建立了一些算法，使我们能确定沿一已给例外方向进入原点的轨道之存在性与个数. 这使得有可能在下述情况下，即有这样的轨道沿着适当确定的切线进入原点，在这时原点邻域中轨道的性态已得到了完全的刻画.

如果没有例外方向，或者所有的解都"避过了"这些例外方向（即没有沿适当确定切线进入原点的轨道），就产生了**中心和焦点问题**（centre and focus problem）.

解的性态对系统的参数之依赖性. 微分方程定性理论的中心问题之一是在一给定解附近系统的解性态如何的问题，这里假设给定解的性质是已知的. 考虑方程组

$$\frac{dy}{dx} = Y(y, x) + \mu R(y, x, \mu), \qquad (8)$$

μ 是一参数. 设生成方程组（generating system），即 $\mu = 0$ 时的方程组（8），具有某种性质. 可以提出此性质是否对于小的 μ 仍能保持的问题. 关于周期解存在性的 Poincaré 问题（Poincaré problem）就是这类问题的一个经典的例子（见[2]）. 设向量 Y 和 R 对 x 具有周期 ω，而且生成方程组有一 ω 周期解. 这时问题化为研究拟线性方程组

$$\frac{dy}{dx} = Ay + \mu R(y, x, \mu), \qquad (9)$$

其中 A 是一个常数矩阵，是否有周期解的问题. 结果是，若 A 的本征值不等于 $2\pi ki/\omega$，k 是整数，则当 μ 充分小时，(9)有唯一 ω 周期解 $\varphi(x, \mu)$，对 μ 连续，而且 $\varphi(x, 0) = 0$. 若 A 有形如 $2\pi ki/\omega$ 的本征值，则周期解的存在与个数问题，本质地依赖于扰动项 $R(y, x, \mu)$ 之形状. 这时，为解决周期解的存在问题，平均方法极为有用（见 **Крылов-Боголюбов 平均方法**（Krylov-Bogolyubov method of averaging）.

对于其他类型的解：如有界解，回复解，殆周期解等等，都可以提出类似问题. 例如，若向量 R 对于 x 是一致殆周期的，且 A 的所有本征值均有非零实部，则对充分小的 μ，(9)有唯一殆周期解（见[21]）.

小参数方法（**small parameter, method of the**）也用于研究（8）的具有特定性质的积分集的存在问题. Н. Н. Боголюбов 从这个观点出发考虑了下述在应用上很重要的方程组（见[21]）：

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= a + \mu\Phi(x, \varphi, t, \mu),\\ \frac{dx}{dt} &= Ax + \mu R(x, \varphi, t, \mu).\end{aligned} \qquad (10)$$

φ 为 k 维向量，x 为 n 维向量而 a 也是 k 维常数向量，常数矩阵 A 的一切本征值均有非零实部. 向量 R 和 Φ 对于向量 φ 的分量有周期 2π. $\mu = 0$ 时，方程组（10）有积分曲面 $x = 0$. Боголюбов 证明了对于充分小的 μ，(10) 也有一个积分曲面

$$x = f(t, \varphi, \mu),$$

且 f 对 φ 之分量有周期 2π，$f(t, \varphi, 0) = 0$. 此外，若 Φ 与 R 对 t 为 ω 周期，则 f 亦然. 若 A 的所有本征值均有负实部，则积分曲面 $x = f$ 为渐近稳定的. 由此特别可知，若在方程组（8）中 Y 与 x 无关，且当 $\mu = 0$ 时此方程组有一阶近似为渐近稳定的周期解，则对充分小的 μ，方程组（8）在 y、x 空间中有一个 2 维的渐近稳定的柱面积分流形（integral manifold）.

参考文献

[1A] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation différentielle, *J. de Math.*, 7 (1881), 375 – 422.

[1B] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation différentielle, *J. de Math.*, **8** (1882), 251 – 296.

[1C] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation différentielle, *J. de Math.*, **1** (1885), 167 – 244.

[1D] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équations différentielle, *J. de Math.*, **2** (1886), 151 – 217.

[2] Poincaré, H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1 – 3, Blanchard, 1987.

[3] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.-Л., 1950（英译本 Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.

[4] Ляпунов, А. М., 《Матем. сб.》, **17** (1893), 2, 253 – 333.

[5] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927.

[6] Birkhoff, G. D., Surface transformations and their dynamical applications, *Acta Math.*, **43** (1920), 1 – 119.

[7] Еругин, Н. П., Приводимые системы, М.-Л. 1946.

[8] Еругин, Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963（英译本：Erugin, N. P., Linear systems of ordinary differential equations with periodic and quasi-periodic coefficients, Acad. Press, 1966）.

[9] Floquet, M. G., Sur les équations différentielles linéaires à coëfficients périodiques, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup Sér.* 2, 12 (1883), 47 – 89.

[10] Sturm, J. Ch., Sur les équations linéaires du second ordre, *J. Math. Pures et Appl.*, 1 (1836), 106 – 186.

[11] Bendixson, I., Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, **24** (1901), 1 – 88.

[12] Denjoy, A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math Pures et Appl. Sér.* 9, **11** (1932), 3. 333 – 375.

[13] Андронов, А. А., Понтрягин, Л., С. 《Докл. АН. СССР》, **14** (1937), 5, 247 – 250

[14] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747 – 817.

[15] Плисс, В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М.-Л. 1964 (英译本: Pliss, V. A., Nonlocal problems of the theory of oscillations, Acad. Press, 1966).

[16] Levinson, N. and Smith, O. K., A general equation for relaxation oscillations, *Duke Math. J*, **9** (1942), 2, 382 – 403.

[17] Littlewood, J. E., On nonlinear differential equations of the second order Ⅲ. The equation $y - k(1 - y^2)\cdot \dot{y} + y = b\mu k\cos(\mu t + \alpha)$ for large k and its generalizations, *Acta Math.*, **97** (1957), 3 – 4, 267 – 308.

[18] Perron, O., Ueber Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungenssysteme, *Math. Z.*, **29** (1928), 129 – 160.

[19] Фроммер, М., 《Успехи матем. наук》, **9** (1941), 212 – 253.

[20] Dulac, H., Sur les cycles limites, *Bull. Soc. Math. France*, **51** (1923), 45 – 188.

[21] Боголюбов, Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945.

[22] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М. 1949 (中译本: B. B. 涅梅茨基, B. B. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性理论, 上、下, 科学出版社, 1956, 1959).

[23] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I., Maier, A. G., Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973).

[24] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[25] Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory Interscience, 1957 (中译本: S. 莱夫谢茨, 微分方程几何理论, 上海科学技术出版社, 1965).

B. A. Плисс 撰

【补注】 对于依赖于向量参数 μ 的非线性系统

$$\frac{dy}{dx} = Y(y, \mu),$$

极限集的出现及其作为 μ 的函数的类型, 是在**分歧**(bifurcation) 理论中研究的. 除了研究定常方程的(平衡)**解的分支**(branching of solutions) 以外, 也可以分析周期解, 拟周期解和浑沌解. 在分歧点有可能分支出新的极限集, 而极限集也可能由稳定的变成不稳定的或相反, 见[A1]. 微分方程定性理论的一个新的发展是化为**法式**(normal form). 可以在平衡位置或周期解附近把方程的右方展为幂级数. 在作了截断以后就可以把系统化为许多标准形式之一, 而对这些标准形式则可以如同对初等突变那样进行分类, 见[A2]. 此外, 对平衡位置附近的轨道的分析, 又可以仅限于那些构成一个流形的轨道, 而这个流形则在平衡位置处切于零实部本征值的本征空间. 这种处理方法称为中心流形理论 (centre manifold theory), 见[A3]. 非线性系统的浑沌动力学的发现给微分方程理论带来了新的因素. 关于具有周期强迫力的 van der Pol 类型方程的非周期解的存在性, 见[A4]. 对于耗散系统, 有称为**奇怪吸引子**(strange attractor) 的稳定的非周期极限集存在, 见[A5]. 关于常微分方程定性理论的一般介绍见[A6].

参考文献

[A1] Chow, S. N. and Hale, J. K., Methods of bifurcation theory, Springer, 1982.

[A2] Арнольд, В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М, 1978 (中译本: B. И. 阿诺尔德, 常微分方程续论——常微分方程的几何方法, 科学出版社, 1989).

[A3] Carr, J., Applications of centre manifold theory, Springer, 1981.

[A4] Levi, M., Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations, *Memoires Amer. Math. Soc.*, **244** (1981).

[A5] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer, 1983.

[A6] Verhulst, F., Nonlinear differential equations and dynamical systems, Springer, 1989.

[A7] Anosov, D. V. and Arnol'd, V. I., Dynamical systems, I: Ordinary differential equations and smooth dynamical systems, Springer, 1988 (译自俄文).

[A8] Arnol'd, V. I., Dynamical systems, Ⅲ, Springer, 1988 (译自俄文).

[A9] Hale, J. K., Ordinary differential equations, Wiley, 1969.

【译注】 补注中提及的**奇怪吸引子**(strange attractor) 等问题, 亦见浑沌 (chaos), **通向浑沌的道路**(routes to chaos).

参考文献

[B1] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1985.

[B2] 叶彦谦. 极限环论. 上海科学技术出版社. 1965.

齐民友 译

微分方程定性理论(Banach 空间中的)[qualitative theory of differential equations in Banach spaces; качественная теория дифференциальных уравнений]

泛函分析(functional analysis)的一个分支. 它研究在 Banach 空间中**发展方程**(evolution equation)的解在实轴 J 或正(或负)半轴 J^+(或 J^-)上的性态. 考虑方程

Ⅰ. $\dot{u}=A(t)u$;

Ⅱ. $\dot{u}=A(t)u+f(t)$;

Ⅲ. $\dot{u}=A(t)u+f(t,u)$,

其中 $u(t)$ 是要求的未知函数而 $f(t)$ 是给定的函数, 都在一个复 Banach 空间 E 中取值; $A(t)$ 是 E 上线性算子而 $f(t,u)$ 是 E 上非线性算子. 导数 $\dot{u}$ 是指 $\Delta u/\Delta t$ 当 $\Delta t\to 0$ 时按 E 的范数的极限.

对方程 Ⅰ **一致稳定性**(uniform stability)成立, 如果存在常数 M 使得对任何解 $\|u(t)\|\leqslant M\|u(s)\|$, 当 $t\geqslant s$; 又称 Ⅰ 有**指数稳定性**(exponential stability), 如果对任一解存在某个 M 和 $\alpha>0$, 使 $\|u(t)\|\leqslant M\exp(-\alpha(t-s))\|u(s)\|$.

当方程 Ⅰ 中算子 $A(t)\equiv A$ 时, 其中 A 是有界算子, Cauchy 问题($u(s)$ 给定)的解有形式 $u(t)=\exp((t-s)A)u(s)$. 估计式 $\|\exp(At)\|\leqslant M\exp(\sigma t)$ 成立, 其中 σ 是大于 A 的谱的所有点的实部的一个数. 这样, 对指数稳定性的必要充分条件是 A 的谱在左半平面的内部. 在 Hilbert 空间中这条件成立, 当且仅当存在一个正定型 (Wx,y) 使得对该方程的每个解 u, $(d/dt)(Wu,u)/2=\mathrm{Re}(Wu,Au)\leqslant-\alpha(u,u)$ (Ляпунов 定理(Lyapunov theorem)). 如果 A 的谱分布在虚轴的两边且不与它相交, 则 E 可以分解成子空间 E_+ 和 E_- 的直和, 它们关于 A 是不变的, 且所有的解在 $E_+(E_-)$ 中是指数地增加(减小)的, 当 $t\to\infty$. 在这种情形, **指数二分性**(exponential dichotomy)对该方程成立.

如果 A 是闭的, 无界的且定义域在 E 中是稠的, 则带有 $u(0)=u_0$ 的 Cauchy 问题一般地不是适定的. 解的存在性和性质不只是取决于 A 的谱的分布; 它的预解式 $(A-\lambda I)^{-1}$ 的性态也必须明确说明. 保证在 J^+ 上 Cauchy 问题一致适定性的通常用的条件由不等式

$$\|(A-\lambda I)^{-m}\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\sigma)^m},\ \lambda>\sigma,\ m=1,2,\cdots$$

提供, 使其实现的一个充分条件是 **Hille-吉田条件**(Hille-Yosida condition)

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\lambda-\sigma},\ \lambda>\sigma,$$

或不等式

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{|\lambda-\sigma|},\ \mathrm{Re}\,\lambda>\sigma.$$

当这些条件成立时, Cauchy 问题的解有形式 $u(t)=T(t-s)u(s)$, 其中对 $t\geqslant 0$, $T(t)$ 是算子的**强连续半群**(strongly-continuous semi-group). 对一致(或指数)稳定性, 只需 $\sigma=0$ (相应地 $\sigma<0$) 就足够了. 如果 A 生成一个 Hilbert 空间上的强连续半群, 则 Ляпунов 定理的充分部分对它成立; 而如果它生成一个群, 则必要部分也成立. 在 Hilbert 空间中指数稳定性等价于 L_2 稳定性, 即对所有解 $\|T(t)u_0\|\in L_2(0,\infty)$ 这一性质.

对应用重要的是解 $u(t)$ 的**殆周期性**(almost periodicity)或**弱殆周期性**(weak almost-periodicity)(即对所有的 $\varphi\in E^*$ 标量函数 $\langle u(t),\varphi\rangle$ 的殆周期性). 如果一个殆周期解的所有的值都在一紧集中, 则该解是紧的. 紧性和弱殆周期性蕴涵殆周期性. 对方程 $\dot{u}=Au$, 该解的殆周期性的问题是和 A 的谱与虚轴之交的结构有关的. 如果 A 是一个有界强连续半群的生成算子且上述的交是可数的, 则定义在整个轴上的有界解的殆周期性的必要充分条件是在虚轴上谱的每一极限点 λ 处极限 $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(A-\lambda+\varepsilon)^{-1}u(0)$ 存在. 此外, 每一个一致连续解是弱殆周期的; 它是殆周期的, 如果它是弱紧的, 或者如果 E 不包含同构于 c_0 的子空间, 其中 c_0 是赋予最大值范数的收敛于零的序列空间. 如果 A 是一个强连续半群 $T(t)$ 的生成算子, 而 $T(t)$ 具有这样的性质: 对一个在 E^* 上稠密的泛函 φ 的集合, 函数 $\|T^*(t)\varphi\|$ 在 J^+ 上有界, 则一个解的紧性蕴涵殆周期性.

对具有关于 t 连续的有界算子 $A(t)$ 的方程 Ⅰ, Cauchy 问题的解定义在整个轴上, 且借助于**发展算子**(evolution operator) $U(t,s)$, 可写成形式 $u(t)=U(t,s)u(s)$. 一致稳定性的性质等价于要求 $\|U(t,s)\|\leqslant M$; 指数稳定性的性质等价于 $\|U(t,s)\|\leqslant M\exp(-\alpha(t-s))$. 如果 $A(t)$ 按积分范数是有界的, 即 $\sup_t\int_t^{t+1}\|A(\tau)\|d\tau<\infty$, 则**总指标**(general index)

$$\kappa=\lim_{t,s\to\infty}\frac{\ln\|U(t+s,s)\|}{t}$$

是有限的. 如果 $\kappa<0$, 则有指数稳定性. 对具有常算子或周期算子的方程, 公式 $\kappa=\overline{\lim}_{t\to\infty}(\ln\|u(t,0)\|)/t$ 成立. 在一般情形下它不成立. 如果 $A(t)$ 由加一项 $B(t)$ 而扰动, 其中当 $t\to\infty$ 时 $B(t)\to 0$, 或者积分 $\int\|B(t)\|dt$ 在无穷远收敛, 则总指标不改变. 总指标的大小依赖于 $A(t)$ 在无穷远的性态. 如果极限 $A_\infty=\lim_{t\to\infty}A(t)$ 存在且 A_∞ 的谱在左半平面内部, 则 $\kappa<0$. 如果算子 $A(t)$ $(\alpha\leqslant t<\infty)$ 构

成有界算子空间的一个紧集．如果所有极限算子的谱属于一个半平面 $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\nu < 0$，且如果算子函数 $A(t)$ 有小振动，例如，对充分小的 ε 它有形式 $B(\varepsilon t)$，或者如果对充分大的 t 它满足带有充分小 ε 的 Lipschitz 条件 $\|A(t)-A(\tau)\| \leqslant \varepsilon|t-\tau|$，则 $\kappa < 0$．在 Hilbert 空间中，条件 $\kappa < 0$ 等价于存在一个 Hermite 型 $(W(t)x, y)$ 使得 $0 < \alpha_1(x, x) \leqslant (W(t)x, x) \leqslant \alpha_2(x, x)$ 且对每一个解 $u(t)$，$(d/dt)(W(t)u, u) \leqslant -\alpha(u, u)$．

如果 $A(t)$ 是周期的，具有周期 ω，即如果 $A(t+\omega)=A(t)$，则 $U(t+\omega, 0)=U(t, 0)U(\omega, 0)$．算子 $U(\omega)=U(\omega, 0)$ 称为方程 I 的**单值算子**（monodromy operator）．它的**谱半径**（spectral radius）$r_{U(\omega)}$ 由公式 $\kappa=(1/\omega)\ln r_{U(\omega)}$ 与总指标有关．该方程有周期解，当且仅当 1 是 $U(\omega)$ 的一个本征值．如果算子 $U(\omega)$ 有对数，则 **Floquet 表示**（Floquet representation）$U(t, 0)=\Omega(t)\exp U(t\Gamma)$ 成立，其中 $\Omega(t)$ 是周期的，具有周期 ω，而 $\Gamma=(1/\omega)\ln U(\omega)$．特别地，如果 $U(\omega)$ 的谱不围绕原点，则 Floquet 表示成立；为此只需 $(1/\omega)\int_0^\infty \|A(t)\|\, dt$ 小于某一常数，该常数依赖于 E 中球面的几何性质且不小于 $\ln 4$．对 Hilbert 空间这常数是 π．Floquet 表示把该方程解的性态问题化成具有常算子 Γ 的方程 $\dot v=\Gamma v$ 的同样问题．

如果对某 s 该空间分解成子空间 $E_+(s)$ 与 $E_-(s)$ 的和，使得当 $x\in E_-(s)$，$t\geqslant s$ 时，

$$\|U(t, s)x\| \leqslant N_1 e^{-\nu_1(t-s)}\|x\|,\ \nu_1>0,$$

且当 $x\in E_+(s)$，$t\leqslant s$ 时

$$\|U(t, s)x\| \leqslant N_2 e^{-\nu_2(t-s)}\|x\|,\ \nu_2>0,$$

则**指数二分性**（exponential dichotomy）对方程 I 成立．这里假设子空间 $U(t, s)E_+(s)$ 和 $U(t, s)E_-(s)$ 在一定意义下不是相互接近的．如果总指标有限，则上述最后的要求自动成立．对带有周期的 $A(t)$ 的一个方程，指数二分性成立的一个必要充分条件是单值算子的谱分布在单位圆盘的外部和内部而与单位圆周不相交．

对带有不依赖于 t 的定义域的无界算子 $A(t)$ 且对每一 t 满足 Cauchy 问题适定性条件（见上）的方程 I，在补充的光滑性条件下，已经证明对 $t\geqslant s$ 有定义且关于 t 和 s 强连续的发展算子 $U(t, s)$ 的存在性．这使得上面描述的许多概念和结果在这情形下继续存在．然而，将遇到某些困难．例如，仅在 Hilbert 空间中，当 $A(t)=A+B(t)$，其中 A 是负定自伴算子且 $B(t)$ 是满足某些额外条件的有界周期算子时才能得到 Floquet 表示．

设 $A(t)$ 是周期的且对方程 I 的 Cauchy 问题一致地适定．如果单值算子 $U(\omega)$ 的谱与单位圆周之交是可数的，则 J 上每一个有界一致连续的解是弱殆周期的．在弱紧性情形或者如果 E 不包含 c_0，它是殆周期的．自反空间 E 可以有一个直和分解 E_1+E_2，使得 E_1 和 E_2 关于 $U(\omega)$ 是不变的且所有在 E_1 中出发的解都是殆周期的，而那些 E_2 中出发的解在一定意义下是递减的：对 $u_2(0)\in E_2$，$\varphi\in E^*$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}|\langle u_2(k\omega), \varphi\rangle|^2=0.$$

对非齐次方程 II，以下公式成立：

$$u(t)=U(t, s)u(s)+\int_s^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

对具有有界算子的方程，这个等式等价于原微分方程．在无界算子的情形，一般不是如此，而认为这方程给出了（广义）解的定义．对方程 II 的基本问题是在右边的指定性质下研究解的性质．这些性质通常借助于属于定义在 J 或 J^+ 上取值在 E 中的函数的某 Banach 空间的函数 f 来描述．如果对应于每一有界连续函数 $f\in C(E)$ 至少存在一个有界解，则算子 $L=d/dt-A(t)$ 称为弱正则的（weakly regular）．如果对应于每个 $f\in C(E)$ 存在唯一解 $u\in C(E)$，则 L 称为**正则的**（regular）．对有界常算子 A，弱正则性蕴涵正则性．对无界的 A 或对有界周期的 $A(t)$，即使在 Hilbert 空间中这个结论不再为真．如果方程 $\dot u=A(t)u$ 的总指标是有限的，则这方程的指数二分性等价于 L 在 J 上的正则性．为了在 J^+ 上指数二分性成立，其必要充分条件是 L 在 J^+ 上为弱正则的，且与方程 I 的有界解与其对应的那些初始值 $u(0)$ 的集合是 E 的一个补子空间．如果对 II 的所有解，不等式

$$\|u(t)\| \leqslant k\sup_t\left\{\int_0^1 \|f(t+s)\|^2 ds\right\}^{1/2}$$

成立，又如果对形式伴随方程 $-dv/dt=A^*(t)v+g(t)$ 的解，不等式 $\|v(t)\| \leqslant k\sup\|g(t)\|$ 成立，则算子 L 和 $L^*=-d/dt-A^*(t)$ 是正则的．还不知道（1990）第一个不等式的右端换成 $k\sup_t\|f(t)\|$ 的情况下正则性是否保持．对 L 和 L^* 两者的正则性，先验估计是必要的．

如果 $A(t)$ 是周期的，则对每个周期的 f，周期解存在性的一个必要充分条件为映射 $I-U(\omega)$ 是满射，而为了这样的解是唯一的，其必要充分条件为算子 $I-U(\omega)$ 是可逆的．

在已知条件下正则性的验证可化成带常系数算子的正则性的验证．当 $A(t)$ 是强振动的情形（例如 $A(t)=B(\omega t)$ 带有大的 ω），假设平均值

$$\bar{A}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{T+\alpha}^{T+\alpha}A(t)dt$$

关于 $\alpha\in J$ 一致地存在，则算子 $A(t)$ 是正则的，当且仅当算子 $d/dt-\bar{A}$ 是正则的．

对殆周期解，在关于殆周期函数的有界积分的殆周期性，即关于最简微分方程 $\dot{u}=f(t)$ 的解的殆周期性的著名的 Bohl-Bohr 定理（Bohl-Bohr theorem）的推广中，已经遇到无穷维空间的特性．如果在 E 中取值的一个殆周期函数的不定积分在 E 中有界且 E 不包含 c_0，则该函数是殆周期的．Bohl-Bohr 定理在 c_0 中不成立．如果 $A(t)$ 是周期的，$f(t)$ 是殆周期的且单值算子 $U(\omega)$ 的谱与单位圆周之交是可数的，则与前面叙述的关于齐次方程解的殆周期性的同样结论在这种情形下成立．如果 $A(t)$ 是殆周期的（作为取值于 E 上有界算子空间的一个函数），则为了对每个殆周期函数 f 存在唯一的殆周期解，其必要充分条件为 L 是正则的．如果方程 II 对 $t>0$ 有（弱）紧解，且齐次方程 $\dot{u}=A(t)u$ 的非平凡（弱）紧解有性质 $\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|>0$，则方程 II 有（弱）殆周期解．

在非线性方程 $\dot{z}=F(t,z)$ 的定性研究中，通常预先假设保证解在 J 或在 J^+ 上存在的条件成立；这在 $F(t,z)$ 的非线性形式上加了一个本质的约束．J^+ 上的解 $z_0(t)$ 称为一致稳定的（uniformly stable），如果对每个 $\varepsilon>0$，存在 δ 使得对每一个其他解 $z(t)$ 不等式 $\|z(s)-z_0(s)\|\leqslant\delta$, $s\geqslant0$，蕴涵 $z(t)$ 对 $t\geqslant s$ 有定义且 $\|z(t)-z_0(t)\|\leqslant\varepsilon$．一个解称为渐近稳定的（asymptotically stable），如果它是一致稳定的且如果对某个 δ，不等式 $\|z(s)-z_0(s)\|\leqslant\delta$ 蕴涵 $\lim_{t\to\infty}\|z(t)-z_0(t)\|=0$．如果在方程中作代换 $u=z-z_0$，则线性化后（如果这是可能的）它取形式 III，其中 $A(t)=F_z'(t,z_0(t))$，且非线性项有性质 $f(t,0)\equiv0$．这样，解 $z_0(t)$ 的一致（渐近）稳定性问题化成 III 的零解的一致（或渐近）稳定性问题．在这种关系下，方程 $\dot{\tilde{u}}=A(t)\tilde{u}$ 称为原方程关于解 $z_0(t)$ 的线性化方程（linearization equation）（或变分方程（variational equation））．

如果非线性部分 $f(t,u)$ 充分小，则解的性质由其线性化方程解的性质所决定．如果线性化方程的总指标是负的且不等式 $\|f(t,u)\|\leqslant q\|u\|$, $t\geqslant0$, $\|u\|\leqslant\rho$ 成立，则对充分小的 q，III 的零解是渐近稳定的．如果 $A(t)\equiv A$ 而 A 的谱与虚轴不相交，且在右半平面有一点，则对充分小的 q 零解是不稳定的．如果不等式

$$\|f(t,u)\|\leqslant c\|u\|^{1+p},\ p>0,\ t\geqslant0,\ \|u\|\leqslant\rho,$$

成立，则在虚轴上没有谱的点这个要求可去掉．

如果对线性化方程在 J 上指数二分性成立，则对每一个 $\rho>0$ 存在 M 和 c，依赖于 $A(t)$ 和 ρ，使得不等式

$$\|f(t,u)\|\leqslant M$$

和

$$\|f(t,u)-f(t,v)\|\leqslant c\|u-v\|,$$

$$t\in J,\ \|u\|,\ \|v\|\leqslant\rho$$

蕴涵在原点的某邻域中存在两流形 M_+ 和 M_-，相交于单独的一点 u_0，使得在 u_0 出发的解在整个轴上有界且 $\|u_0(t)\|\leqslant\rho$；在 $M_-(M_+)$ 上出发的解当 $t\to\infty$ $(t\to-\infty)$ 时指数地趋于 $u_0(t)$ 且当 t 以相反方向趋于无穷时从 $u_0(t)$ 离去．此外，$M_+(M_-)$ 同胚于空间 $E_+(0)(E_-(0))$ 的邻域，后者出现在指数二分性的定义中．如果在上述的条件下，$A(t)\equiv A$ 及 $g(t,u)$ 对具有 $\|u\|\leqslant\rho$ 的每一个 u 关于 t 是殆周期的，则解 $u_0(t)$ 是殆周期的．

设自治方程 $\dot{z}=F(z)$ 有一个 ω 周期解 $z_0(t)$；则线性化方程 $\dot{\tilde{u}}=F_{z_0}'(z_0(t))\tilde{u}$ 有一个单周期解 $\dot{z}_0(t)$，且因而其单值算子 $U(\omega)$ 有 1 作为本征值．如果这个本征值是单的且 $U(\omega)$ 的其余的谱在单位圆盘内部且不围绕原点，则存在数 μ, τ_0 和 N，使得对原方程的所有其他解 $\|z(t-z_0)-z(t)\|\leqslant N\exp(-\mu t)$．这性质称为周期解的渐近轨道稳定性（asymptotic orbital stability）．对非线性方程的其他稳定不变流形也已经作了研究．

带有无界算子 $A(t)$ 的 III 型方程在应用中对应于抛物型或双曲型的拟线性方程．一种特殊类型的"真"非线性方程的理论已经有所发展．这样，如果 B 是一个连续的处处有定义的**耗散算子**（dissipative operator），则 Cauchy 问题 $\dot{u}=Bu$, $u(0)=u_0$ 在半轴 J^+ 上对任何 $u_0\in E$ 是唯一地可解的．耗散算子的定义以自然方式扩大到多值算子的情形；对这样一些算子，考虑微分包含 $\dot{u}\in Bu$ 而不是微分方程．如果在自反空间 E 上，算子 B 是闭和耗散的，且如果 $I-B$ 的值覆盖整个空间 E，则 Cauchy 问题在 J^+ 上对 B 的定义域中每一个 u_0 是唯一地可解的．最后这一论述有很多不同的变形形式．该解由公式 $u(t)=S(t)u_0$ 给出，其中 $S(t)$ 是非线性算子半群，$S(t+\tau)x=S(t)(S(\tau)x)$, $t,\tau\geqslant0$．对带耗散算子的方程也有周期解和殆周期解的存在定理．

参考文献

[1] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970（英译本：Daletskii, Yu. L. and Krein, M. G., Stability of solutions of

differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974).

[2] Massera, J.-L. and Schaefer, H. H., Linear differential equations and function spaces, Acad. Press, 1966.

[3] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1968 (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980)

[4] Крейн, С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, М., 1967 (英译本: Krein, S. G., Linear differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1971).

[5] Barbu, V., Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Ed. Academici, 1976 (译自罗马尼亚文).

[6] Баскаков, А. Г., 《Тр. матем. ф-та Воронеж ун-та》, 10 (1973), 96 – 101.

[7] Жиков, В. В., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 40 (1976), 6, 1380 – 1408.

[8] Жиков, В. В., Левитан, Б. М., 《Успехи матем. наук》, 32 (1977), 2, 123 – 171.

[9] Милославский, А. И., 《Функц. анализ и его прилож.》, 10 (1976), 2, 80 – 81.

[10] Тюрин, В. М., в кн., 《Функциональный анализ》, в. 1, Ульяновск, 1973.

[11] Левитан, Б. М., Жиков, В. В., Почти периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1977 (英译本: Levitan, B. M. and Zhikov, V. V., Almost-periodic functions and differential equations, Cambridge Univ. Press, 1982).

С. Г. Крейн 撰

【补注】 关于对抽象微分方程的定性理论的一些不同观点见[A1], [A2].

参考文献

[A1] Hale, J. K., Asymptotic behavior of dissipative systems, Amer. Math. Soc., 1988.

[A2] Hale, J. K., Magalhes, L. T. and Oliva, W. M., An introduction to infinite dimensional dynamical systems, Springer, 1984.

葛显良 译 吴绍平 校

量词 [quantifier; квантор]

一种逻辑运算的一般名称, 该逻辑运算利用谓词 $P(x)$ 构造刻划 $P(x)$ 的有效域的语句. 在数理逻辑中, 最广泛使用的量词是全称量词 (universal quantifier) $\forall$ 和存在量词 (existential quantifier) $\exists$. 语句 $\forall x P(x)$ 意思是 $P(x)$ 的有效域与变元 x 的值域相同, 语句 $\exists x P(x)$ 意思是 $P(x)$ 的有效域非空. 如果只对 $P(x)$ 在由谓词 $R(x)$ 挑选出的 x 的部分值域 (而不是 x 的整个值域) 上的行为感兴趣, 通常使用限制量词 (restricted quantifier) $(\exists x)_{R(x)}$ 和 $(\forall x)_{R(x)}$. 在这种情况下, 语句 $(\exists x)_{R(x)} P(x)$ 与 $\exists x (R(x) \& P(x))$ 表示相同的意思, 而 $(\forall x)_{R(x)} P(x)$ 与 $\forall x (R(x) \supset P(x))$ 表示相同的意思, 其中 & 是合取 (conjunction) 符号, $\supset$ 是蕴涵 (implication) 符号.

В. Е. Плиско 撰

【补注】 当今量词的主题远比上述提及的多, 因为有比上述讨论的两 (或四) 种量词更多的量词 (例如, 对策量词, 概率量词).

更一般地, 任意量词 Q (与 $\forall$ 和 $\exists$ 有相同的语法行为) 的模型论解释可以 (据 A. Mostowski) 由一个映射给出, 该映射把每个模型 $(A, \cdots)$ 映到 A 的一个子集类 $\tilde{Q}$. 然后规定 Q 的真假值定义, 例如, 语句 $Qx\Phi(x)$ 在 $(A, \cdots)$ 中为真, 当且仅当集合 $\{a \in A: \Phi(a)$ 在 $(A, \cdots)$ 中为真$\}$ 在 $\tilde{Q}$ 中. 因此, 存在量词 $\exists$ 对应于 A 的非空子集类, 全称量词 $\forall$ 对应于类 $\{A\}$. 然而, 有很多可能的量词, 例如分别由 $\{B \subset A: B$ 有限$\}$, $\{B \subset A: B$ 与 A 有同样的基数$\}$ (张 (辰中) 量词 (Chang quantifier)), $\{B \subset A: B$ 不可数$\}$ 等给出的量词. 这种结构可以推广到约束出现在多个公式中的多个变元的量词 (例如, 等基数量词 (equi-cardinality quantifier) Q 约束出现在两个公式 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 中的两个变元 x 和 y, 产生公式 $Qxy(\Phi(x), \Psi(y))$, 由 $\{(B, C): B$ 和 C 有相同基数$\}$ 解释). 更一般的是 Lindström 量词 (Lindström quantifier). 每个量词都有自己的逻辑.

参考文献

[A1] Barwise, J. and Feferman, S. (eds.), Model-theoretic logics, Springer, 1985.

别荣芳 译 罗里波 校

分位数 [quantile; квантиль]

概率分布 (probability distribution) 的数字特征之一. 对于分布函数为 F 的实随机变量 X, $p(0 < p < 1)$ 阶分位数 (quantile of order p) 指满足

$$F(K_p) \leqslant p, \ F(K_p + 0) \geqslant p$$

的数 K_p. 如果 F 是连续严格单调函数, 则 K_p 是方程 $F(x) = p$ 的唯一解, 即 K_p 作为 p 的函数是 $F(x)$ 的反函数. 如果 $F(x)$ 是连续型的且 $p' > p$, 则不等式 $K_p < X < K_{p'}$ 的概率等于 $p' - p$. 分位数 $K_{1/2}$ 是随机变量 X 的**中位数 (统计学中的)** (median (in statistics)). $K_{1/4}$ 和 $K_{3/4}$ 称为四分位数 (quartiles), 而 $K_{0.1}, \cdots, K_{0.9}$ 称为十分位数 (deciles). 对适当选定的 p 值, 由分位数的值可以得到关于分布函数形状的印象.

例如, 对于**正态分布** (normal distribution)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt,$$

分布函数 $\Phi(x)$ 的图形 (见图) 可利用十分位数来绘

制：$K_{0.1}=-1.28$；$K_{0.2}=-0.84$；$K_{0.3}=-0.52$；$K_{0.4}=-0.25$；$K_{0.5}=0$；$K_{0.6}=0.25$；$K_{0.7}=0.52$；$K_{0.8}=0.84$，$K_{0.9}=1.28$.



正态分布 Φ 的四分位数为 $K_{1/4}=-0.67$，$K_{3/4}=0.67$.

B. B. Сенатов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Breiman, L., Statistics, Houghton Mifflin, 1973, p. 231 ff.

[A2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946, p. 181, 367（中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）.

周概容 译

量 [quantity；величина]

基本数学概念，其含义在数学发展进程中屡屡推广.

Ⅰ. Euclid 的《几何原本》意义上的“量”相当于现在所称的正标量（positive scalar）. 它是诸如长度、面积、体积、质量等较具体的概念的一般化. 每个确定类型的量都以某种比较方式与物体或物理对象发生联系. 例如，在几何学中用叠置方法比较线段，这种比较方法引出长度的概念：两线段叠置时，若它们完全叠合，就说它们具有相等的长度；若一线段只叠合上另一线段的一部分而非全部，则说前一线段的长度小于后一线段的长度. 还有关于平面图形面积和三维图形体积的比较方法都是众所周知的.

于是，可以在同类量的系统中（即对所有长度，或所有面积，或所有体积）建立起不等式关系：两个同类量 a 和 b 可能相等（$a=b$），可能第一个较第二个小（$a<b$），也可能第一个较第二个大（$a>b$）. 每类量（如长度、面积、体积）中加法运算的含义也是普通常识. 在每个这种同类量系中，不等式 $a<b$ 和等式 $a+b=c$ 具有下列性质：

1）对 a 的所有值和 b 的所有值，下列关系有一个且仅有一个成立：$a=b$ 或 $a<b$ 或 $a>b$；

2）若 $a<b$ 且 $b<c$，则 $a<c$（“大于”和“小于”概念的传递性）；

3）对任意二量 a 和 b，存在唯一的量 $c=a+b$；

4）$a+b=b+a$（加法是交换的）；

5）$a+(b+c)=(a+b)+c$（加法是结合的）；

6）$a+b>a$（加法是单调的）；

7）若 $a>b$，则有一个且仅有一个量 c，使得 $b+c=a$（减法的可能性）；

8）对任一量 a 和任一自然数 n，存在量 b，使得 $nb=a$（除法的可能性）；

9）对任何量 a 和 b，存在自然数 n，使得 $a<nb$. 此性质称为 Eudoxus 性质（property of Eudoxus）或 Archimedes 公理（axiom of Archimedes）. 它和更为基本的性质 1）－8）一起，内含于古希腊数学家们形成的度量这些量的理论之中.

取某一长度 l 作单位，则与 l 存在有理关系的所有长度所成的系 s' 满足要求 1）－9）. 互相不可公度线段的存在（其发现通常归于公元前 5 世纪的 Pythagoras 学派）表明系 s' 并不包含所有可能长度所成的系 s.

为了得到量的最终理论，要求 1）－9）之外必须添加上某一连续性公理，例如：

10）若一列量 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1$，对任何量 c 和充分大的 n，$b_n-a_n<c$ 成立，则存在唯一的量 x，它大于全部 a_n、小于全部 b_n.

性质 1）－10）也定义了最现代的正标量系概念. 若在此系中采用某一量 l 作为度量单位，则系中所有其他的量可唯一地表示为 $a=l$，其中 α 是正实数.

Ⅱ. 直线上的有向线段，可能具有两个相反方向的速度以及一些类似量的研究，自然引出标量概念的推广，它是力学和物理学的基础. 这样标量系不仅包含正量，也包含负量和零. 如在此系中选定某一正量 l 作度量单位，则系中所有其他的量可表示为 $a=\alpha l$，其中 α 是一实数，可能是正的，可能是负的，或者是零. 这种意义下的标量系显然也可以用公理刻画和定义，而并不基于数的概念之上. 这样做，定义正标量系的要求 1）－10）必须作一定的修改.

Ⅲ. 在更广泛的意义上，向量、张量以及其他的“非标量”也可称为“量”（见向量（vector）；**向量空间上的张量**（tensor on a vector space））. 这些量可以相加，但不等式关系 $a<b$ 却变成无意义的.

Ⅳ. 在某些较抽象的数学研究中也考虑“非 Archimedes”量. 它们类似于普通的标量，满足通常的不等式要求，但不满足公理 9）（此公理对上述 Ⅱ 型标量满足，只要 $b>0$）.

Ⅴ. 因为正实数系满足上述要求 1）－10），而全体实数系显示了标量的所有性质，所以赋予实数自身以“量”的名称是完全适当的. 特别，当考虑变量（variable quantity）时，这是很普通的做法. 如果给定某一具体的量，譬如说热金属棒的长度 l，它随时间变化，那么测得的数 $x=l/l_0$ 也随时间变化（l_0 保

持常数）．此时间变数 x 称为变量，习惯上说成 x 在一系列时刻 $t_1, t_2, \cdots$ 取"数值" $x_1, x_2, \cdots$．在传统数学术语中，不常说"变数"，但下列观点看来是合乎逻辑的：数，正如长度、体积等等，是量的特殊情况，像所有的量那样，既可以是变数，也可以是常数．顺着这条思路，考虑变向量，变张量等等也是完全合理的．　　А. Н. Колмогоров 撰

【补注】 性质 1) 也称三分律 (trichotomy law)．性质 7) 实际上是 $a > b$ 的定义，8) 是同类量的定义（见 Euclid 的《几何原本》第五卷定义 4)．

关于互相不可公度线段的存在性，也常提到梅塔蓬都的 Hippasus 这位数学家．

参考文献

[A1] Heiberg, J. L., and Stamatis, E. S. (eds.), Euclid, The Elements, Ⅰ－Ⅳ, Teubner, 1969－1973

[A2] Heath, Th. L., The thirteen books of Euclid's elements, Cambridge Univ. Press. 1926; Dover, reprint, 1956 （中译本：欧几里得，几何原本，陕西科学技术出版社，1990）．

[A3] Knorr, W. R., The evolution of the Euclidean elements, Reidel, 1975.

沈海玉 译

量子通信信道 [quantum communication channel; канал связи квантовый]

以量子力学观点下的物体作为信息载体的信息传输（转化）系统．

经典的信息是通过信号空间 X 上的概率分布来描述的，而量子信息是由与给定的量子力学物体相对应的 Hilbert 空间 H 上的密度算子（状态）来刻画的．每个通信信道都被看做为由输入信号集（凸的）到输出信号集的仿射映射（即保持凸组合关系不变的映射）．具体来讲，量子编码 (quantum encoding) 是一个仿射映射 C，它从输入信号空间 X 上的概率分布集 $S(X)$ 映射到空间 H 上的所有密度算子的集合 $\Sigma(H)$ 中．恰当地说，量子通信信道是从 $\Sigma(H)$ 到 $\Sigma(H')$ 中的仿射映射 L，其中 H 和 H' 均为 Hilbert 空间，分别刻画信道的输入和输出．至于量子译码 (quantum decoding)，它是从 $\Sigma(H')$ 到 $S(Y)$ 中的仿射映射 D，其中 Y 是输出信号空间．像经典信息理论一样，信息的传输概形是这样的：

$$S(X) \xrightarrow{C} \Sigma(H) \xrightarrow{L} \Sigma(H') \xrightarrow{D} S(Y). \quad (1)$$

一个重要的问题是确定一种在给定的量子信道 L 上传输信息的最优方法．在给定的 L 和已知输入信号的条件下，输出信号的条件分布 $P_{C,D}(dy/x)$ 是编码 C 和译码 D 的函数．然后，我们给出某个泛函 $Q\{P_{C,D}(dy/x)\}$，求它关于 C 和 D 的极值．经常研究的情形是：当 C 固定时，寻找最优的 D．这时，概形 (1) 可简化为：

$$S(X) \xrightarrow{C} \Sigma(H) \xrightarrow{D} S(Y). \quad (2)$$

通常，只要给出 X 空间中集中于各点 x 上的概率分布之象 ρ_x，就可以确定一种编码．译码可由 Y 度量 (Y-measurement) 方便地进行刻画，这是一个定义在 Y 上的测度 $M(dy)$，并在 H 上的非负 Hermite 算子集中取值；这里，$M(Y)$ 为恒等算子．译码和度量之间的一一对应关系由下式给出：

$$D_\rho(dy) = \mathrm{Tr}\,\rho M(dy),$$

相应地，已知输入信号的情况下，概形 (2) 中输出信号的条件分布为：

$$P(dy/x) = \mathrm{Tr}\,\rho_x M(dy).$$

若 X 和 Y 为有限集，则度量 $\{M(y)\}$ 最优的一个必要条件为算子

$$\Lambda = \sum_y F(y) M(y)$$

为 Hermite 的，且满足条件

$$(F(y) - \Lambda) M(y) = 0,\ y \in Y, \quad (3)$$

其中

$$F(y) = \sum_x \rho_x \frac{\partial Q}{\partial P(y/x)}.$$

如果 Q 是一个仿射函数（例如 Bayes 风险函数），那么（Q 最小意义下）度量为最优的充要条件为算子 Λ 满足 (3) 式且 $\Lambda \leqslant F(y),\ y \in Y$．若 X 和 Y 为一定范围内的任意集，则将有类似的结果．

量子度量与经典统计决策理论的决策过程之间有一个平行对应关系，这里由射影值测度 $M(dy)$ 定义的简单度量对应于确定性过程．值得指出的是：经典统计学中最优过程可简化为确定性过程，而量子情形中，即使是对有限决策 Bayes 问题，最优度量一般也不是简单度量．用几何观点可以这样解释：最优解应在所有度量所成凸集的极端点上达到，而在量子情形中，简单度量类为所有极端点所成集合的真子集．

类似经典统计决策理论，可以用不变性或无偏性来约束量子度量类．量子度量情形下的 **Rao-Cramér 不等式** (Rao-Cramér inequality) 已经被人们发现，它给出了一个关于量子度量的均方误差的下界．在这一理论的应用领域，玻色子 Gauss 通信信道（见 **Gauss 信道** (Gaussian channel)）受到普遍重视，并在一些情况下得到了最优度量的明显描述．

参考文献

[1] Helstrom, C. W., Quantum detection and estimation theory, New York, 1976.

[2] Холево, А. С., Исследования по общей теории статистических решений, М., 1976

[3] Холево, А. С., 《Repts Math. Phys》, 12 (1977), 273 – 278

А. С. Холево 撰

【译注】

参考文献

[B1] Gudder, S. P., Quantum probability, Academic Press, 1988.

骆 滁 符方伟 沈世镒 译

量子场论 [**quantum field theory**; **квантовая теория поля**]

相对论性量子系统的理论. 量子场论的起源与物质和辐射的相互作用问题有关, 以及与构造相对论性量子力学的试图(P. A. M. Dirac (1927), W. Heisenberg, W. Pauli, 和其他人)有关. 在相对论性(即高)能量下, 不能有粒子的相恰量子力学, 因为相对论性量子粒子能够产生新的(相同或不同)粒子和能够自身消失. 结果人们不能辨认出与这个粒子联系的一定数目力学自由度, 而不得不论及具有可变, 一般为无穷自由度的系统. 量子场论统一了场和粒子的描述, 它们在经典物理学中呈现为两种截然不同的实体.

量子场的概念在理论中起中心作用. 方便的是用电磁场的例子来解释它是如何引进的, 因为这是在经典和量子情形中都具有明确内容的唯一场.

经典电磁场满足 **Maxwell 方程组** (Maxwell equations). 这些方程可以写成 Hamilton 正则方程的形式. 因此, 电磁势起坐标的作用而其对时间的导数是相应相空间中的动量. 场被表示为具有无穷自由度的正则系统, 因为每一点的势是一独立坐标. 这个系统可以像寻常力学系统那样以相同方式予以量子化. 在量子情况, 基本概念是态和可观察量, 前者由 **Hilbert 空间** (Hilbert space) 中的向量描述, 而后者则由作用于此空间的**自伴算子** (self-adjoint operator) 描述. 量子化在于将正则坐标和动量用算子来代替, 结果 **Poisson 括号** (Poisson brackets) 则以相应算子的对易式来代替. 一个量子场变成作用于态向量的一个算子, 它引起具有不同数目量子粒子(光子)的态之间的跃迁, 即算子描述场量子的产生和消灭(辐射和吸收).

同样, 人们可以对任何其他类别基本粒子联系一个量子场. 自由场算子的方程根据相对论的基本要求, 即相对于 **Poincaré 群** (Poincaré group) 的不变性条件而获得. 粒子类型由静质量 m, 自旋, 即内禀角动量 s, 它可取整数或半整数值包括零在内, 以及各种荷(电荷, 重子数, 轻子数, 等等)予以表征. 前两个数 (m, s) 定义 Poincaré 群的一个**不可约表示** (irreducible representation), 场通过它进行变换, 因而场的方程同样通过它进行变换.

一个自由经典标量场 $u(x)$ 遵循方程 ($x=(x^0, \mathbf{x})\in\mathbf{R}^4$)

$$(\Box + m^2)u(x) = 0,$$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2. \qquad (1)$$

这是对作用量泛函

$$A = \int dx \mathscr{L}_0(u(x))$$

的变分 Euler 方程, 具有 Lagrange 密度

$$\mathscr{L}_0(u(x)) = \frac{1}{2}\partial_\mu u \partial^\mu u - \frac{m^2}{2}u^2.$$

如果认为 $u(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}\in\mathbf{R}^3$) 是正则坐标, 则共轭动量是 $p(\mathbf{x}) = \partial\mathscr{L}_0/\partial\dot{u}(\mathbf{x}) = \dot{u}(\mathbf{x})$ (点表示对 t 求导数). 量子化通过将函数 $u(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$ 与算子赋值函数 $\varphi(\mathbf{x})$, $\pi(\mathbf{x})$ 相联系而实现, 后者满足对易关系(量子 Poisson 括号)

$$[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

其中 $\hbar$ 是 Planck 常数(下面令 $\hbar$ 等于 1). Hamilton 算子具有形式

$$H_0 = \int d\mathbf{x} H_0(\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})) =$$

$$= \int d\mathbf{x}\left\{:\frac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\nabla\varphi(\mathbf{x}))^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2(\mathbf{x}):\right\},$$

即, H_0 像经典 Hamilton 量那样是量子算子 φ 和 π 的同样函数, 但要注意(非对易)算子的次序. 正规乘积的符号 :: 使这个次序明确化. Hamilton 运动方程

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}) = i[H_0, \varphi(\mathbf{x})],$$

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}) = i[H_0, \pi(\mathbf{x})],$$

等价于方程

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0. \qquad (2)$$

四维时空中的量子场必然是广义的, 而不是寻常的, 算子赋值函数; 因此 $\varphi(x)$ 必须理解为仅仅是符号描述.

在 **Фок 空间** (Fock space) 的表述中, 这些符号附有数学意义; Фок 空间代表量子场论中态空间的一种体现. 一个粒子在给定瞬间的态由相对于相对论性不变测度

$$d\sigma(\mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}, \ \mathbf{p}\in\mathbf{R}^3$$

为平方可积的复函数 $\Psi(\mathbf{p})$ 予以描述, 其中 $\omega(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2}$ 是具有质量为 m 的粒子的相对论性能量. 这些函数形成一个 Hilbert 空间 $\mathscr{H} = L_2(d\sigma)$. n 个全同粒子的系统由一平方可积函数 $\Psi_n(\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n)$ 予以描述, 它相对于任何两个坐标的置换是对称的(对于 Bose 子, 即具有整数自旋的粒子)或反对称

的（对于 Fermi 子，即具有半整数自旋的粒子）．这些函数（对于 Bose 子）属于 Hilbert 空间 $\mathscr{S}_n$．它是 n 个 $\mathscr{H}$ 的对称张量积．为了描述粒子数可变系统，引进空间 $\mathscr{S}_n$ 的直和即 Фок 空间 $\mathscr{S}=\oplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{S}_n$，$\mathscr{S}_0=\mathbf{C}$．向量 $\Omega_0=(1,0,0,\cdots)$ 称为真空（vacuum），解释为无粒子系统的态，形式为 $(0,\cdots,0,\Psi_n,0,\cdots)$ 的向量称为部分向量，并证认为它与 Ψ_n 一样．方便的是把 $\mathscr{H}$ 的函数 $\Psi(\mathbf{p})$ 看作四维向量 $p=(p_0,\mathbf{p})$ 的函数，其中 $p_0=\omega(\mathbf{p})$．于是，Poincaré 群 $U(a,\Lambda)$ 的表示由公式

$$(U(a,\Lambda)\Psi)(p)=e^{-i(p,a)}\Psi(\Lambda^{-1}p)$$

给出，其中 $(p,a)=p_\mu a^\mu=p^0a^0-\mathbf{pa}$ 是 Lorentz 不变的（见 **Lorentz 变换**（Lorentz transformation））双线性型．$\mathscr{H}$ 中所定义的表示自然导致整个 Фок 空间 $\mathscr{S}$ 中的一个表示．沿 p_0 轴推移的生成元与 Hamilton 量 H_0 相同．这里所描述过的 Poincaré 群的最简单表示对应于自旋 $s=0$．

Фок 空间上的各种算子用**产生算子**（creation operators）和**湮没算子**（annihilation operators）予以表达．令 $f(\mathbf{p})$ 为一单粒子波函数（即，$f\in\mathscr{H}$）．于是，湮没算子 $a(f):\mathscr{S}_n\to\mathscr{S}_{n-1}$ 由公式

$$(a(f)\Psi_n)(\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_{n-1})=$$
$$=\sqrt{n}\int\Psi_n(\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_n)\overline{f(\mathbf{p}_n)}\,d\sigma(\mathbf{p}_n)$$

予以定义，而产生算子 $a^*(f):\mathscr{S}_{n-1}\to\mathscr{S}_n$ 是其伴随算子．特别是，$a^*(f)\Omega_0=(0,f(\mathbf{p}),0,\cdots)$，即算子 $a^*(f)$ 从真空产生一个具有波函数为 $f(\mathbf{p})$ 的粒子，而 $a(f)\Omega_0=0$．产生和湮没算子通常用符号形式写成

$$a(f)=\int a(\mathbf{p})\,\overline{f(\mathbf{p})}\,d\sigma(\mathbf{p}),$$

$$a^*(f)=\int a^*(\mathbf{p})f(\mathbf{p})d\sigma(\mathbf{p}).$$

产生和湮没算子之和的 Fourier 变换 $\varphi(f)=a(\tilde{f})+a^*(\tilde{\bar{f}})$ 对实 $f\in L_2(\mathbf{R}_x^3)$ 是一对称算子，称为在零时刻的自由（标量）量子场．在时刻 x^0 的量子场具有形式

$$\varphi(x^0,f)=e^{ix^0H_0}\varphi(f)e^{-ix^0H_0},$$

而作为一个算子赋值的广义函数 $\varphi(x)$，它在其定义域满足方程（2）和正则对易关系

$$[\varphi(f),\pi(g)]=i\int f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}.\qquad(3)$$

因而，在 Фок 空间中实现了如上面所描述的正则量子化．

自由量子场的理论可以以数学严格性和相容性的方式予以陈述．对于相互作用场，情况有所不同．虽然量子场论中关于容许正确数学表述的问题确实有许多重要结果，但是相互作用场理论之基础的主要问题迄今仍未解决：尚未曾构造出在四维时空中能满足全部物理要求的任何一个非平凡例子．具体物理计算依靠量子场论的启发式方案，绝大多数情况下以微扰理论为基础（[5]，[21]）．相互作用场的方程有一非线性项 $j(\Phi(x))$：

$$(\Box+m^2)\Phi(x)=j(\Phi(x)).\qquad(4)$$

这个方程像（1）一样也可作为对 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{int}$ 的变分方程而获得，其中

$$j(\Phi(x))=\frac{\partial\mathscr{L}_{int}}{\partial\Phi(x)}.$$

选择相互作用 Lagrange 量 $\mathscr{L}_{int}$ 为参与相互作用的场及其导数的非线性不变组合的形式．在标量场与其自身相互作用的最简单情况，$\mathscr{L}_{int}=-\lambda\Phi^4(x)$．当 $\lambda=0$ 时得到自由场．量子场 $\Phi(\mathbf{x})$ 的相互作用可以用初始数据 $\Phi(\mathbf{x})$ 和 $\Pi(\mathbf{x})=\dot{\Phi}(\mathbf{x})$ 由公式

$$\Phi(x)=e^{ix^0H}\Phi(\mathbf{x})e^{-ix^0H}$$

予以明确表达；然而，现在指数包含完全的 Hamilton 量

$$H=H_0+H_{int}=\int d\mathbf{x}\{H_0(\Phi(\mathbf{x}),$$
$$\Pi(\mathbf{x}))+\lambda:\Phi^4(\mathbf{x}):\}.$$

通过选取自由场的值 $\varphi(\mathbf{x})$ 和 $\pi(\mathbf{x})$ 作为初始数据，人们可以将非线性方程（4）的解用自由粒子的**产生算子**（creation operators）$a^*(\mathbf{p})$ 和**湮没算子**（annihilation operators）$a(\mathbf{p})$ 予以表达．

在这个方案中有必要在讨论中引进无互作用粒子并把相互作用认为是一额外因素，在随后的讨论中人们必须借助于一特殊浸渐步骤将它"包含在内"和"排除在外"（见[5]）．同时，对于这些相互作用，人们可以相当大地改变考虑之中的场的谱和其他特性．在标准方法中，所取场 Φ 对应于线性方程中出现的那些粒子．仅对类型 $\lambda\Phi^4$ 的相当弱的相互作用方能证明情况是这样．然而，微扰论中一般使谱改变．对应于 H（更确切地说应该谈论有关质量算子）的最小本征值的本征向量 Ω 称为重正化真空并解释为没有粒子的态．对应于离散谱的其余点的本征值称为重正化单粒子态．它不同于态 $a^*(f)\Omega_0$，并且具有质量 M 不同于质量 m．

微扰论的直接应用给出无意义的发散表达式（所谓紫外发散），如果实现这些发散性的正则化合乎物理原理（主要条件经证明是整个步骤的相对论性不变性和规范不变性），则（电动力学中）一切任意性导致电子的质量和电荷形式上为无穷的重正化，如由 J．Schwinger，R．P．Feynman 和 F．G．Dyson 于

1948 年所证明的.

量子场论在微扰论框架内的最后严密数学分析是由 Н. Н. Боголюбов (1951 — 1955) 给出的. 他指出微扰论中紫外发散的出现是由于互乘广义函数在那些点其支撑相交, 并阐述了使它们互乘中满足相对论性不变性、因果性等等物理要求的方法. 实际计算中, 不是将微扰论直接应用于方程 (4), 而是将它应用于由方程 (4) 能获得的各种其他对象, 例如 S 矩阵 (见**散射矩阵** (scattering matrix)) 或 **Green 函数** (Green function). S 矩阵的计算是基本粒子物理学的主要问题之一. 利用场 $\Phi(x)$ 的 Green 函数, 其矩阵元具有一简单表达式:

$$G_n(x_1, \cdots, x_n) = (\Omega, T(\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n))\Omega),$$

其中 $T(\cdot)$是编时序符号:

$$T(\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)) = \Phi(x_{i_1})\cdots\Phi(x_{i_n}),$$

$$\text{若 } x^0_{i_1} \geqslant \cdots \geqslant x^0_{i_n}.$$

通过将 G_n 展开为 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 的幂级数, 并应用, 例如, G_n 的泛函积分形式的表示,

$$G_n(x_1, \cdots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{C}\int u(x_1)\cdots u(x_n) e^{i\int(\mathscr{L}_0(u(x)) + \mathscr{L}_{\text{int}}(u(x)))dx} \prod_x du(x), \quad (5)$$

人们可以利用自由场的最简单 Green 函数

$$D(x_1 - x_2) = (\Omega_0, T(\varphi(x_1)\varphi(x_2))\Omega_0) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{i(p, x_1 - x_2)}}{(p, p) - m^2 + i0}\, dp$$

之乘积的积分将上式的各级微扰表达出来. 对于通过微扰论的计算, 已经发展了 Feynman 图技术, 这里出现 Green 函数 $D(x)$ 在重合点的乘积. 例如, 对于模型 $\mathscr{L}_{\text{int}} = -\lambda\Phi^4$, 函数 $G_2(x_1, x_2)$ 正比于表达式

$$\int dy_1 dy_2 D(x_1 - y_1) D^3(y_1 - y_2) D(y_2 - x_2) \quad (6)$$

直至 λ 的二次方. 这个积分是发散的, 但可予以正则化, 即可给予它一个切合实际的意义. 首先必须对广义函数乘积 $D^3(x)$ 赋予意义. 这可按如下方式来完成. 考虑光滑函数

$$D_{\kappa,\varepsilon}(x) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{i(p,x)}\rho_\kappa((p, p))}{(p, p) - m^2 + i\varepsilon}\, dp,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 而 $\rho_\kappa(\xi)$ 是使 $D_{\kappa,\varepsilon}(x)$ 充分光滑的一个函数, 例如, $\rho_\kappa(\xi) = (1 + \xi/\kappa)^{-N}$, $N > 2$, 和当 $\kappa \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ (κ 称为紫外截断) 时 $D_{\kappa,\varepsilon}(x) \to D(x)$. 可以假定 (5) 中 Lagrange $\mathscr{L}$ 可用

$$\mathscr{L}^{(\kappa)} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu u\,\rho(\square)\,\partial^\mu u - \frac{m^2}{2}u^2 - \lambda u^4$$

替代. 存在常数 a_κ 和 b_κ (当 $\kappa \to \infty$ 时无界地增长) 使得在广义函数意义上极限

$$D^3_{\text{reg}}(x) =$$

$$= \lim_{\kappa\to\infty}\{\lim_{\varepsilon\to 0} D^3_{\kappa,\varepsilon}(x) - a_\kappa\square\delta(x) - b_\kappa\delta(x)\}$$

存在. 函数 D^3_{reg} 是 $D^3(x)$ 的正则化. 它被定义到相差项 $a\square\delta(x) + b\delta(x)$, 其中 a 和 b 是任意常数. 整个表达式 (6) 以同样方式予以正则化, 没有新的任意性出现. 类似地, 微扰论按 λ 每个方次的所有 Green 函数被正则化. 对 $\mathscr{L}_{\text{int}}$ 可以执行类似步骤. 像对任何多项式那样, 对 $\mathscr{L}_{\text{int}} = -\lambda\Phi^4$ 可以以自洽方式在下列意义上完成 λ 所有方次微扰的正则化步骤. 存在常数 A_κ, B_κ, C_κ (表示为 λ 的 2 次或以上的幂级数; 已经发展了计算它们的简单规则) 使得在将 (5) 中 Lagrange 量 $\mathscr{L}^{(\kappa)}$ 用重正化 Lagrange 量

$$\mathscr{L}^{(\kappa)}_{\text{ren}} = \mathscr{L}^{(\kappa)} + :A_\kappa\partial_\mu u\partial^\mu u + B_\kappa u^2 + C_\kappa u^4:$$

替代后, 人们获得当 $\lambda \to \infty$ 时在 λ 幂级数展开每个方次的有限表达式. $\mathscr{L}^{(\kappa)}_{\text{ren}}$ 称为重正化 Lagrange 量, 一般认为对原 Lagrange 量加上了发散抵消项. 这些抵消项与原 Lagrange 量具有相同结构 (即, 它们是表达式 $\partial_\mu u\partial^\mu u$, u^2, u^4 的线性组合). 因此, 如果认为系统的质量和电荷为给定, 则量 A_κ, B_κ, C_κ 可予以确定. (质量可定义为使 $G_2(p^2)$ 有一极点的 p^2 值, 而电荷为 G_4 在某个特定点的值.) 不唯一性的分析导致**重正化群** (renormalization group) 的重要概念 ([5]).

如果在给定模型中有可能通过加进与原 Lagrange 量有相同结构的抵消项来消除紫外发散, 则这种模型称为可重正化的, 否则是不可重正化的. 所有标量场模型, 其中相互作用为超过 4 次的多项式者, 是不可重正化的. 这个仅涉及微扰论. 由于微扰论中奇异广义函数相乘至各次方引起的"无穷大", 将它们分出去的上述方法, 其相容表述是所谓关于 R 运算的定理的内容, 这个定理是由 Н. Н. Боголюбов 和 О. С. Парасюк (1956) 得到的 ([5], [19]). 这样就证明了微扰论中各级量子场的存在性定理. 随后的研究曾经证明, 许多微扰理论充其量不过是渐近理论, 而以此为基础的估计仅当参与过程的粒子能量不太高时才适用. 仅在微扰论框架内成功地实现了紫外发散的消除.

上述一切与实四维时空有关. 在三维时空中, 相互作用变得较少奇异性, 有可能仅仅加上一个抵消项 $B_\kappa:u^2:$, 其中 B_κ 是 λ 的二次. 在二维时空中, 抵消项则是不必要的.

这里仅描述了具有相互作用为 $\lambda\Phi^4$ 的标量场这个最简单模型. 在量子场论中人们必须处理相互作用

Fermi 子和 Bose 子场的更加复杂的多组分系统. 例如, 手征场, 即使在经典级别, 要在不一定是线性的某个齐性空间 (例如, 球上) 取值; 规范场是某些向量丛中的联络, 这些与电磁场、引力场和杨 (振宁) - Mills 场有关 (见 [11], [15]).

当相互作用常数 (展开的基本参数) 明知大于 1 时, 如介子与核子的强相互作用, 这些情况下微扰方法是不适用的. 对于强相互作用要应用其他方法, 其中对 S 矩阵的全面考虑以及对其矩阵元一般性质的研究起重要作用, 它们直接描述实验上感兴趣的量, 即产生过程和散射过程的振幅. 在这方面, 能用 S 矩阵表达的量子场 (或流) 起重要作用, 因为因果性的中心条件是作为对 S 矩阵特定矩阵元支撑上的限制而强加于 S 矩阵的 (Боголюбов, 1955). 与其他物理要求, 诸如相对论不变性和能谱特性一起, 因果性条件使人们能确立广义函数, 特别是散射振幅, 作为多复变函数的全纯性质. 这些解析性质对于推导散射振幅的特定类型积分表示, 即"色散关系", 经证明是充分的. 色散关系的严格证明 ([4]) 需要特殊数学方法的发展, 这种方法处于广义函数理论与多复变函数理论, 以及特别是 Н. Н. Боголюбов 的楔棱定理和 В. С. Владимиров 的 C 凸包定理 ([8]) 的证明的接合处. 色散关系已经变成强相互作用理论中许多具体计算方法的基础 (А. А. Логунов, S. Mandelstam 和其他人). 他们论及所谓公理化场论, 其中解释了涉及量子场的存在性和性质问题的公理及其系的相容性.

微扰论方法预先假定对于方程 (4), 量子场 $\Phi(x)$ 是其解, 人们选择自由粒子 Фок 空间中所定义的最简单初始数据 φ, π. 关于对易关系 (3), 存在许多酉不等价实现 (表示); 这里在量子场论 (作为具有无穷自由度的系统) 与量子力学之间有一差别, 量子力学中有关于这些表示的唯一性的 von Neumann 定理. 对于物理上感兴趣的初始数据的任何实现, 方程 (4) 有一解 $\Phi(x)$ 而 Hamilton 量是下有界的. 在其中实现这种表示的 Hilbert 空间称为扇形 (sector). 有些模型可以在几个相出现 (一个相 (phase) 是具有一唯一真空的一个扇形), 例如, 充分大 λ 的 $\lambda\Phi^4$ 模型有二相, 由于相变而产生. 构造相时应用**拟平均法** (quasi-averages, method of). 相变的概念以及与之相关的对称性自发破缺现象起重要作用, 特别是在弱和电磁相互作用的统一理论中. 1974 年曾经证明在某些二维模型中有所谓孤立子扇形, 其中没有真空, 但它们具有丰富的粒子谱, 类似于对应经典模型的粒子谱 (Л. Д. Фаддеев 和其他人).

量子场论中有许多问题的求解需要数学不同领域的方法, 目前正深入细致地进行研究. 按惯例, 它们被划分为下列几组.

1) 对量子场和 S 矩阵的公理及其系的分析. 除泛函分析, 诸如自伴算子理论, 广义函数和群表示, 这类工具之外, 人们这里还应用多复变函数理论, C^* 代数和 von Neumann 代数这些方法, 近来还应用概率论方法. 基本量, Green 函数或 Wightman 函数 $w_n(x_1, \cdots x_n)$, 是在某些区域 $D_n \subset \mathbf{C}^{4n}$ 为全纯函数的边值. 这里未解决的问题是全纯包 $\mathscr{H}(D_n)$ 的构造. 区域 D_n 包含形式为 $(ix_1^0, \mathbf{x}_1, ix_2^0, \mathbf{x}_2, \cdots)$ 的 Euclid 点. 对于二维和三维时空的一些模型, 曾经证明 Wightman 函数在这些点的值是概率测度的矩. 根据概率论观点对量子场论的这个 Euclid 处理方法的进一步分析值得注意.

对于场论有一般代数处理方法, 其基础是可观察量代数, 即, C^* 代数或 von Neumann 代数, 具有某些从物理观点看起来很自然的结构性质. 这里基本问题之一是代数场与代数可观察量之间的联系, 以及还有在这个处理方法框架内动力学的描述问题.

2) 构造性量子场论有一个很重要问题, 证明四维时空中量子场论模型的存在性. 在二维和三维情况, 曾经依据 Euclid (概率) 处理证明了若干模型的存在性, 证明中运用的方法类似于统计力学中所发展的: 这里像 Hamilton 量的谱, 相变, S 矩阵的性质, 等等这样一类问题需要进一步的数学分析 ([13]).

3) 形式量子场论, 其存在性在各级微扰理论中为已知, 也有好些问题容许数学处理. 在这方面有, 例如, 微扰级数的分析 (特别是, Feynman 图的解析性质), 场论的经典方程及对它的准经典修正的研究: 这里出现椭圆型和双曲型非线性方程, 对它们的分析人们特别使用逆散射法, 微分几何和代数几何以及拓扑学方法, 等等.

参考文献

[1] Ахиезер, А. И., Берестецкий, В. Б., Квантовая электродинамика, 3 изд., М., 1969 (中译本: А. И. 阿希叶泽尔, В. Б. 别列斯捷茨基, 量子电动力学, 科学出版社, 1964).

[2] Березин, Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965 (英译本: Berezin, F. A., The method of second quantization, Acad. Press, 1966).

[3] Боголюбов, Н. Н., Логунов, А. А., Тодоров, И. Т., Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля, М., 1969 (英译本: Bogolyubov, N. N., Logunov, A. A. and Todorov, I. T., Introduction to axiomatic quantum field theory, Benjamin, 1975).

[4] Боголюбов, Н. Н., Медведев, Б. В., Поливанов, М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958.

[5] Боголюбов, Н. Н., Ширков, Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976.

[6] Wightman, A., Problems in relativistic dynamics of quantized fields, Moscow, 1968.

[7] Васильев, А. Н., Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике, Л., 1976.

[8] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

[9] Jost, R., The general theory of quantized fields, Amer. Math. Soc., 1965.

[10] Constructive quantum field theory, Lecture notes in physics, 25, Springer, 1973.

[11] Попов, В. Н., Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, М., 1976.

[12] Reed, M. and Simon, B., Methods of modern mathematical physics, 1 – 4, Acad. Press, 1972 – 1978.

[13] Simon, B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.

[14] Segal, I., Mathematical problems of relativistic physics, Amer. Math. Soc., 1963.

[15] Славнов, А. А., Фаддеев, Л. Д., Введение в теорию калибровочных полей, М., 1978.

[16] Streater, R. and Wightman, A., PCT, Spin, statistics and all that, Benjamin, 1964.

[17] Pham, F., Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau, Gauthier-Villars, 1967.

[18] Friedrichs, K., Perturbation of spectra of operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1965.

[19] Hepp, K., Théorie de la renormalisation, Springer, 1969.

[20] Шварц, А. С., Математические основы квантовой теории поля, М., 1975.

[21] Schweber, S., Introduction to relativistic quantum field theory, Harper & Row, 1961.

[22] Quantum theory of gauge fields, Moscow, 1977.

И. В. Волович, М. К. Поливанов 撰

【补注】 关于二维和三维时空中特定量子场的存在性，现在有大量文献．这些发展的一部分和若干观点的新近评述见[13]，[A1]，[A2]和[A4]．

关于记号：·；见 **Wick 积**(Wick product)．

参考文献

[A1] Glimm, J. and Jaffe, A., Quantum physics, a functional integral point of view, Springer, 1987.

[A2] Seiler, E., Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics, Lecture notes in physics, 159, Springer, 1982.

[A3] Itzykson, C. and Zuber, J., Quantum field theory, McGraw-Hill, 1988.

[A4] Baez, J. C., Segal, I. E. and Zhou, Z., Introduction to algebraic and constractive quantum field theory, Princeton Univ. Press, 1990.

[A5] Ajörken, J. D. and Drell, S., Relativistic quantum mechanics, McGraw-Hill, 1964.

[A6] Ajörken, J. D. and Drell, S., Relativistic quantum fields, McGraw-Hill, 1965.

[A7] Zavialov, O. I., Renormalized quantum field theory, Kluwer, 1990 (译自俄文)．

[A8] Horuzhy, S. S., Introduction to algebraic quantum field theory, Kluwer, 1990 (译自俄文)

[A9] Bogolyubov, N. N., Logunov, A. A., Oksak, A. I. and Todorov, I. T., General principles of quantum field theory, Kluwer, 1990 (译自俄文)．

【译注】 上述全纯包 $\mathscr{H}(D_n)$ 的构造问题，即所谓扩充未来光管猜想，已由中国数学家周向宇解决，见[B1]，[B2]．

参考文献

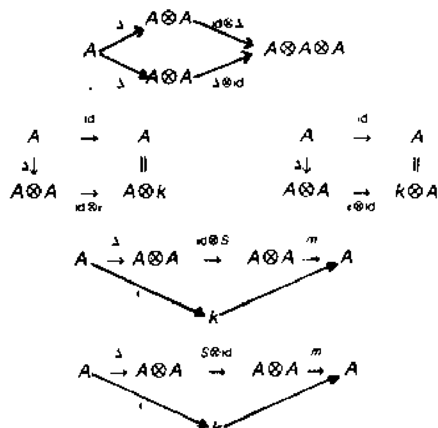
[B1] Zhou Xiangyu, A proof of the extended future tube conjecture, *Izvestiya. Russian Academy of Sciences, Ser. Math.*, **62** (1998), 1, 211 – 224.

[B2] Zhou Xiangyu, The extended future tube conjecture is a domain of holomorphy, *Mathematical Research Letters*, 1998, 5, 185 – 190

徐锡申 译

量子群 [quantum groups; квантовые групп]

【补注】 "量子群"一词差不多是"**Hopf 代数**"(Hopf algebra)的同义词．更确切地，量子群范畴在[A1]中定义为 Hopf 代数范畴的对偶范畴．下述原因表明，这是自然的．存在一般性原理：函子 $X \mapsto \{X$ 上的函数代数$\}$是"空间"范畴和交换结合的也许带有某些附加结构或性质的幺代数范畴之间的反等价(若将"空间"理解为"仿射概形"或"紧拓扑空间"，将"代数"理解为"C^* 代数"，则这个原理则成为一个定理．)这样可以把群的定义翻译成代数语言：取代带有结合运算 $G \times G \to G$ 的空间 G，得到交换环 k 上的交换代数 A，带有一个同态 $\Delta: A \to A \otimes A$，称为上乘法(comultiplication)；单位元 $e \in G$ 导致一个同态 $\varepsilon: A \to k$，称为上单位(co-unit)；映射 $g \mapsto g^{-1}$，$g \in G$，导致一个 k 线性双射 $S: A \to A \otimes A$，称为对映体(antipode)．群公理等价于下图的交换性：



这里 $m(a\otimes b)=ab$, $i(c)=c\cdot 1_A$. 这些图的交换性意味着 (A,Δ,ε,S) 是一个交换 Hopf 代数. 由于群范畴同交换 Hopf 代数范畴反等价, 自然地可以将量子群定义为 Hopf 代数(不一定是交换的)范畴的对偶范畴中的对象.

非交换群的群代数构成一类简单的非交换 Hopf 代数. 这些 Hopf 代数是上交换的, 即 $\Delta(A)$ 含于 $A\otimes A$ 的对称部分之中. 实质上, 所有的上交换 Hopf 代数都是群代数.

这里有一个既非交换又非上交换的 Hopf 代数的例子. 固定 $n\in\mathbf{N}$, $q\in k$, 这里 k 是一个交换环. 记 A 为一个结合 k 代数, 其生成元为 $x_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$, 定义关系为 $x_{ij}x_{il}=qx_{il}x_{ij}$, 若 $j<l$; $x_{ij}x_{kj}=qx_{kj}x_{ij}$, 若 $i<k$; $x_{il}x_{kj}=x_{kj}x_{il}$, 若 $i<k$, $l>j$; $[x_{ij}, x_{kl}]=(q^{-1}-q)\,x_{il}x_{kj}$; 若 $i>k$, $l>j$; $\sum_{i_1,\cdots,i_n}x_{1i_1}\cdots x_{ni_n}\cdot(-q)^{l(i_1,\cdots,i_n)}=1$, 这里 $l(i_1,\cdots,i_n)$ 是置换 $(i_1,\cdots,i_n)$ 的反演数. 则 A 有一个由 $\Delta(x_{ij})=\sum_k x_{ik}\otimes x_{kj}$ 定义的 Hopf 代数结构. 若 $q=1$, 则 A 是 $\mathrm{SL}(n)$ 上的多项式函数代数. 因此, 在一般情形下, 自然把 A 的元素视为"在量子化了的 $\mathrm{SL}(n)$ 上的函数".

量子化的 $\mathrm{SL}(n)$ 是最简单的量子群, 它自然地出现于量子可积系统的理论, 特别是量子反散射方法中([A2]). 这一方法的发展导致下述量子化技巧以构造非交换非余交换的 Hopf 代数. 将它们构造成交换 Hopf 代数的变形是很自然的. 如果给出交换 Hopf 代数 A_0 的非交换变形 A, 则 A_0 上的 Poisson 括号定义为 $\{a,b\}=\lim_{h\to 0}h^{-1}(ab-ba)$, 这里 h 是变形参数, ab 是变形积, 它不是交换的. 这个 Poisson 括号具有通常的性质(反称性, Jacobi 恒等式, $\{a, bc\}=\{a,b\}c+\{a,c\}b$), 并且和上乘法相容. 换言之, A_0 是一个 Poisson-Hopf 代数(Poisson-Hopf algebra). 因此自然地从 Poisson-Hopf 代数 A_0 出发, 力求将它量子化, 即构造 A_0 的 Hopf 代数变形, 使其能导出 A_0 上给定的 Poisson 括号.

不去变形交换 Hopf 代数而是变形上交换 Hopf 代数, 不从 Poisson-Hopf 代数(或 Poisson-Lie 群([A1]), 这几乎是相同的)出发, 而是从它的无穷小形式所谓 Lie 双代数(Lie bi-algebra)出发, 这在技术上更为方便([A1]). Lie 双代数(Lie bi-algebra)是一个 **Lie 代数**(Lie algebra) $\mathfrak{g}$, 带有一个线性映射 φ: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, 使得: 1) φ^*: $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 定义 $\mathfrak{g}^*$ 上的 Lie 代数结构; 2) φ 是一个 1 上闭链($\mathfrak{g}$ 通过伴随表示作用在 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 上). 由定义, $(\mathfrak{g}, \varphi)$ 的量子化是**泛包络代数**(universal enveloping algebra) $U_{\mathfrak{g}}$ 的 Hopf 代数变形, 使得 $\delta|_{\mathfrak{g}}=\varphi$, 这里 $\delta: U_{\mathfrak{g}}\to U_{\mathfrak{g}}\otimes U_{\mathfrak{g}}$ 是 Poisson 上括号(Poisson cobracket). 定义为 $\delta(a)=\lim_{h\to 0}h^{-1}(\Delta(a)-\Delta'(a))$, 其中 h 是变形参数, Δ 是变形上乘法, Δ' 是反上乘法.

不知道是否每个 Lie 双代数都可以量子化, 通常量子化不是唯一的. 但在一些重要情形(见[A1], §3, §6)存在典范量子化. 特别地, 在带有确定的标量积$(\,,\,)$的 **Kac-Moody 代数**(Kac-Moody algebra) $\mathfrak{g}$ 上, 有一个典范 Lie 双代数结构, 并且这个双代数有一个典范量子化 $U_h\mathfrak{g}$, 如[A3], [A4], [A5]中所述. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, $H_i\in\mathfrak{g}$ 是单根 $\alpha_i\in\mathfrak{h}^*$ 的像. 则 $U_h\mathfrak{g}$ 由 $\mathfrak{h}$ 和 X_i^+, X_i^- 生成, 带有下述定义关系:

$$[a_1,a_2]=0 \text{ 对 } a_1,a_2\in\mathfrak{h};$$

$$[a,X_i^{\pm}]=\pm\alpha_i(a)X_i^{\pm} \text{ 对 } a\in\mathfrak{h};$$

$$[X_i^+,X_j^-]=2\delta_{ij}h^{-1}\sinh(hH_i/2).$$

令 $n=1-A_{ij}$, $q=\exp h(H_i,H_i)/2$, 也有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q q^{-k(n-k)/2}(X_i^{\pm})^k\cdot$$

$$\cdot\ X_j^{\pm}\cdot(X_i^{\pm})^{n-k}=0.$$

这里 (A_{ij}) 是 **Cartan 矩阵**(Cartan matrix), $\binom{n}{k}_q$ 是 Gauss 多项式(Gauss polynomial), 即

$$\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q=\frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\cdots(q-1)}.$$

$U_h\mathfrak{g}$ 中的上乘法对 $a\in\mathfrak{h}$ 是 $\Delta(a)=a\otimes 1+1\otimes a$, 并且

$$\Delta(X_i^{\pm})=X_i^{\pm}\otimes\exp\left[\frac{hH_i}{4}\right]+\exp\left[\frac{-hH_i}{4}\right]\otimes X_i^{\pm}.$$

如果 $\mathfrak{g}$ 是有限维单 Lie 代数(见**半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple)), 则对应的单连通代数群 G 上的正则函数代数同构于 $(U_{\mathfrak{g}})^*$ 的由 $U_{\mathfrak{g}}$ 的有限维表示的矩阵元素生成的子代数. 因此, $(U_h\mathfrak{g})^*$ 的由 $U_{\mathfrak{g}}$ 的有限维表示的矩阵元素生成的子代数可以视为在 G 的某个量子化上的函数代数. 例如, 量子化的 $\mathrm{SL}(n)$(见前面所述)可由此法获得.

拟三角 Hopf 代数(quasitriangular Hopf algebra)是一个重要的概念. 这是一个对 (A,R), 其中 A 是 Hopf 代数, R 是 $A\otimes A$ 的一个可逆元, 使得 $(\Delta\otimes\mathrm{id})(R)=R^{13}R^{23}$, $(\mathrm{id}\otimes\Delta)(R)=R^{13}R^{12}$, 对 $a\in A$, $\Delta'(a)=R\cdot\Delta(a)\cdot R^{-1}$. 这是 Δ' 是反上乘法, R^{12},R^{13},R^{23} 定义如下: 如果 $R=\sum_i x_i\otimes y_i$, 其中 $x_i,y_i\in A$, 则 $R^{12}=\sum_i x_i\otimes y_i\otimes 1$, $R^{13}=\sum_i x_i\otimes 1\otimes y_i$, $R^{23}=\sum_i 1\otimes x_i\otimes y_i$. 如果 (A,R) 是拟三角

Hopf 代数，则 R 满足量子 Yang-Baxter 方程 (quantum Yang-Baxter equation) (亦见 **Yang-Baxter 方程** (Yang-Baxter equation))，即 $R^{12}R^{13}R^{23}=R^{23}R^{13}R^{12}$. 已经知道 (见 [A1]，§13)，若 $\mathfrak{g}$ 是有限维单 Lie 代数，则 $U_h\mathfrak{g}$ 有典范拟三角结构，而当 $\mathfrak{g}$ 是无限维 Kac-Moody 代数时，$U_h\mathfrak{g}$ 有"几乎拟三角"结构.

如果 (A,R) 是 k 上的拟三角 Hopf 代数，ρ 是一个表示 $A\to \mathrm{Mat}(n,k)$，则 $\mathscr{R}=(\rho\otimes\rho)(R)\in \mathrm{End}(k^n\otimes k^n)$ 满足量子 Yang-Baxter 方程. 存在一个逆向构造 (见 [A6]，[A7])，返回到量子反散射方法：对于量子 Yang-Baxter 方程的满足非退化条件的矩阵解，有一个对应的 Hopf 代数. 没有非退化条件，仅能构造结合双代数 (associative bi-algebra) (Hopf 代数与结合双代数的区别是后者可能没有对映体). 这个双代数由元素 t_{ij} 生成，$1\leqslant i,j\leqslant n$，带有定义关系 $\mathscr{R}T_1T_2=T_2T_1\mathscr{R}$，其中 $T_1=T\otimes 1\in\mathrm{End}(k^n\otimes k^n)$，$T_2=1\otimes T\in\mathrm{End}(k^n\otimes k^n)$，$T$ 是矩阵 (t_{ij})，Δ 定义为 $\Delta(t_{ij})=\sum_k t_{ik}\otimes t_{kj}$.

拟三角 Hopf 代数是量子反散射方法的天然工具 ([A1]，§11). 另一方面，可以用它们 (见 [A8]) 来构造纽结 (及更一般的对象，例如链环和缠结) 的不变量，推广 Jones 多项式 ([A9]). 更确切地，对于一个定向纽结 $\gamma\subset\mathbf{R}^3$ 和一个拟三角 Hopf 代数 (A,R)，存在对应的一个中心元素 $z_\gamma\in A$.

常见的几种类型的群概念有：抽象群，Lie 群，拓扑群，等等. 量子群同样如此. 在 [A10] 中引入了紧群概念的量子化类似 (其思想是用 C^* 代数来取代抽象代数). 量子化的 SU(2) (见 [A11]，[A12]) 是一个典型的例子. 作为定义局部紧量子群的一个尝试，引入了环群的概念 (见 [A13]，[A14]) 和 Kac 代数的等价概念 (见 [A15]，[A16]). 然而，这些概念缺乏普遍性 ([A13]，[A14]，[A15] 的公理蕴涵对映体的平方是恒等映射，因此量子化的 SU(2) 不是环群).

参考文献

[A1] Drinfel'd, V. G., Quantum groups, in Proc. Internat. Congres Mathematicians, Berkeley 1986, Vol. 1, Amer. Math. Soc., 1987, 798 – 820.

[A2] Faddeev, L. D., Integrable models in (1 + 1)-dimensional quantum field theory, in Lectures in Les Houches, 1982, Elsevier, 1984.

[A3] Jimbo, M., Quantum R-matrix for the generalized Toda system, *Comm. Math. Phys.*, **102** (1986), 537 – 547.

[A4] Jimbo, M., A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Letters Math. Phys.*, 10 (1985), 63 – 69.

[A5] Drinfel'd, V. G., Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Soviet Math. Dokl.*, **32** (1985), 254 – 258. (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **283** (1985), 5, 1060 – 1064)

[A6] Lyubashenko, V. V., Hopf algebras and vector symmetries, *Russian Math. Surveys*, **41** (1986), 5, 153 – 154 (*Uspekhi Mat. Nauk.*, **41** (1986), 5, 185 – 186)

[A7] Faddeev, L. D., Reshetikhin, N. Yu. and Takhtayan, L. A., Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Algebra and Analysis*, **1** (1989), 1, 178 – 206 (俄文).

[A8] Reshetikhin, N. Yu., Quasitriangular Hopf algebras and invariants of tangles, *Algebra and Analysis*, **1** (1989), 2, 169 – 188 (俄文).

[A9] Jones, V. F. R., A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **12** (1985), 103 – 112.

[A10] Woronowich, S. L., Compact matrix pseudogroups, *Comm. Math. Phys.*, **111** (1987), 613 – 665.

[A11] Woronowich, S. L., Twisted SU(2) group. An example of a noncommutative differential calculus, *Publ. RIMS*, **23** (1987), 117 – 181.

[A12] Vaksman, L. L. and Soĭbelman, Ya. S., Function algebra on the quantum group SU(2), *Funct. Anal. Appl.* **22** (1988), 3, 170 – 181. (*Funksional. Anal. Prilozhen.*, **22** (1988), 3, 1 – 14)

[A13A] Kac, G. L., Ring groups and the duality principle Ⅰ, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 291 – 339. (*Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, **12** (1963), 295 – 301).

[A13B] Kac, G. L., Ring groups and the duality principle Ⅱ, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **13** (1965), 94 – 126. (*Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, **13** (1965), 84 – 113).

[A14] Kac, G. I. and Vaĭnerman, L. I., Nonunimodular ring groups and Hopf-von Neumann algebras, *Math. USSR Sb.*, **23** (1974), 185 – 214. (*Mat. Sb.*, **94** (1974), 2, 194 – 225; 335).

[A15] Enock, M. and Schwartz, J.-M., Une dualité dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. Math. France*, **44** (1975), 1 – 44.

[A16] Schwartz, J.-M., Relations entre "ring groups" et algèbras de Kac, *Bull. Sci. Math.* (2), **100** (1976), 289 – 300.

V. G. Drinfel'd 撰
蔡传仁 译

量子概率 [quantum probability; квантвая вероятность]

【补注】 量子概率论是**概率论** (probability theory) 的推广，其中不假设随机变量可交换. 另一个名称是非交换概率论 (non-commutative probability theory). 它在 20 世纪 70 年代由于要应用"独立性"，"噪声"和"过程"这些概率论概念到量子力学的迫切需要而发展起来. 量子概率论的数学要素来源于算子代

数理论，它是由 J. von Neumann 奠基而由 M. A. Наймарк, J. Dixmier, R. V. Kadison ([A1])，富田稔，竹崎正道 ([A2]) 及其他人发展起来的．

古典概率论．Колмогоров 的概率论的基本对象是三元系 $(\Omega, \mathscr{S}, \mathrm{P})$，其中 Ω 是某试验的可能结果的集合，$\mathscr{S}$ 是称为"事件"的 Ω 的子集的一个 σ 代数，而 P 是测度空间 $(\Omega, \mathscr{S})$ 上的一个概率测度．一个**随机变量**（random variable）是 $(\Omega, \mathscr{S})$ 上的可测函数 X，取值于某测度空间 $(\Omega', \mathscr{S}')$，典型的情况是带有其 Borel 集的实直线：$(\mathbf{R}, \mathscr{B})$．一个事件 $S' \in \mathscr{S}'$ 变成事件 $S \in \mathscr{S}$，当看成"关于"X 的一个陈述时，即 $S = [X \in S'] = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in S'\}$．这样，随机变量 X 对应于一个嵌入 $j_X\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}, S' \mapsto S$．

现在可以稍微转移一下看法，用它的特征函数 1_S 来代替事件 $S \in \mathscr{S}$．这是一个有界可测函数 $(\Omega, \mathscr{S}, \mathrm{P}) \to \mathbf{C}$．所有有界可测函数 $(\Omega, \mathscr{S}, \mathrm{P}) \to \mathbf{C}$ 的集合是 **von Neumann 代数**（von Neumann algebra）$L_\infty(\Omega, \mathscr{S}, \mathrm{P})$．概率测度 P 扩张成这代数上的一个正线性泛函，积分 $f \mapsto \int_\Omega f dP$．如果 P' 是 X 的概率分布，则上述的嵌入 j_X 扩张成偶对 $(L_\infty(\Omega', \mathscr{S}', \mathrm{P}'), \mathrm{P}')$ 到偶对 $(L_\infty(\Omega, \mathscr{S}, \mathrm{P}), \mathrm{P})$ 中的嵌入 j_X，由 $j_X(f) = f \circ X$ 给出．

然后可以走更远的一步，将一个函数 $f \in L_\infty(\Omega, \mathscr{S}, \mathrm{P})$ 看成 Hilbert 空间 $L_2(\Omega, \mathscr{S}, \mathrm{P})$ 上以乘法运算 $M_f\colon L_2 \to L_2, \psi \to f \cdot \psi$ 确定的一个线性算子．有界线性算子 M_f 来自一个事件，当且仅当它是一个正交投影．

推广．一个**量子概率空间**（quantum probability space）是指任一偶对 $(\mathscr{A}, \varphi)$，其中 $\mathscr{A}$ 是某 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上算子的 von Neumann 代数（可能非交换），而 φ 是 $\mathscr{A}$ 上一个弱 * 连续正线性泛函（状态）．$(\mathscr{A}, \varphi)$ 的事件是正交投影 $p \in \mathscr{A}$．p 发生的概率是 $\varphi(p)$．一个**量子随机变量**（quantum random variable）是一量子概率空间到另一量子概率空间中的一个嵌入 $j\colon (\mathscr{A}', \varphi') \to (\mathscr{A}, \varphi)$．如果 $\mathscr{A}'$ 具有形式 $L_\infty(\Omega', \mathscr{S}', \mathrm{P}')$，则 j 代表一个取值在 Ω' 中的随机变量 X．特别地，投影 $P(S') = j(1_{S'})$ 代表事件 $[X \in S']$．当 $\Omega' = \mathbf{R}$ 的情形，投影值测度 P 以

$$\hat{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x P(dx)$$

确定一个自伴算子 $\hat{X}$（通常认为等同于随机变量 X）．这样，实值量子随机变量对应于与 $\mathscr{A}$ 紧密联系的自伴算子，如量子力学中所假设的．

一个量子概率空间带有一种经典情形中没有的结构 ([A2])：如果 φ 是忠实的（faithful）（即如果对 $a \in \mathscr{A}$，$\varphi(a^* a) = 0$ 蕴涵 $a = 0$），$(\mathscr{A}, \varphi)$ 的自同构的一个单参数群 σ_t^φ，$t \in \mathbf{R}$，被典型地用二次型 $(a, b) \mapsto \varphi(a^* b)$ 和 $(a, b) \mapsto \varphi(b a^*)$ 之间的错配确定．这个在交换情况是平凡的群称为 $(\mathscr{A}, \varphi)$ 的**模群**（modular group）且在其概率性质中起着支配作用；例如，它决定条件期望的存在性问题．一个随机变量 j 称为**条件的**（conditioned），如果存在一个完全正映射 $E\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ 使得 $\varphi' \circ E = \varphi$ 且 $E \circ j = \mathrm{id}_{\mathscr{A}'}$．在这种情形下，$j \circ E$ 是范数为 1 的投影（**条件期望**（conditional expectation））$\mathscr{A} \to j(\mathscr{A}')$．这样一个映射 E 存在，当且仅当 $j(A')$ 是对 $(\mathscr{A}, \varphi)$ 的模群左整体不变的．

量子力学．量子力学提供上述结构的很多例子．例如，空间中 n 个（可区别的）质点的状况对应于由 $\mathscr{H} = L_2(\mathbf{R}^{3n})$ 上所有有界算子组成的代数 $\mathscr{A}$．状态 φ 有形式 $\varphi(a) = \mathrm{Tr}(\rho a)$，其中 ρ 跑遍 $\mathscr{H}$ 上所有迹为 1 的正算子．一些有兴趣的随机变量是该质点组的位置和矩，和它们的总能量．

其他的例子可在**量子场论**（quantum field theory）和量子统计力学中找到．

然而，当相关的自由度的数目成为无穷时，概率思想的应用更有成果，且某个**中心极限定理**（central limit theorem）是有效的．特别地，如果一个量子系统在与外部世界中大量对象弱相互作用下进行研究，则来自外部的这种影响可用一种量子"噪声"来描述．这种噪声的例子是：热辐射，与热浴质点的热碰撞，激光场和原子束．所考虑的系统在时间中的演变则用一个量子随机过程来描述．

量子随机过程．一个**量子随机过程**（[A3]）是以时间为指标的一族量子随机变量 $(j_t\colon (\mathscr{A}', \varphi') \to (\mathscr{A}, \varphi))_{t \in \mathbf{T}}$（时间 $\mathbf{T}$ 可以是 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}_+$，或 $\mathbf{R}$．）如果该过程是条件的，它确定一族**转移概率**（transition probabilities）$(T_{s,t})_{s \leqslant t}$，即由 $T_{s,t}(a) = E_s(j_s(a))$ 给出的完全正映射 $\mathscr{A}' \to \mathscr{A}'$．一个**量子 Марков 过程**（quantum Markov process）是一个量子随机过程，其中由过去和现在给定的未来的条件期望完全由现在决定．在这些过程中有经典的 Chapman-Колмогоров 方程的类似：$T_{t,u} \circ T_{s,t} = T_{s,u}$．量子随机过程 $(j_t)_{t \in \mathbf{T}}$ 称为**平稳的**（stationary），如果 $\mathbf{T}$ 是一个群且存在一个 $(\mathscr{A}, \varphi)$ 的自同构的群 $(\alpha_t)_{t \in \mathbf{T}}$ 使得 $j_t = \alpha_t \circ j_0$．该过程称为处于**热平衡**（thermal equilibrium）中，如果 $\mathbf{T} = \mathbf{R}$ 且 $\alpha_t = \sigma_t^\varphi$ $(t \in \mathbf{R})$．

平稳量子 Марков 过程理论是在**膨胀理论**（dilation theory）名称下发展的（[A4]）．它与**随机微分方程**（见 **Langevin 方程**（Langevin equation））密切联系着．关于量子概率论的一大部分文献集中于一系列汇编文集（[A5]）．

参考文献

[A1] Kadison, R. V. and Ringrose, J. E., Fundamentals of the theory of operator algebras, I – II, Acad. Press, 1983, 1986

[A2] Takesaki, M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture notes in math., 128, Springer, 1970.

[A3] Accardi, L., Frigerio, A. and Lewis, J. T., Quantum stochastic processes, *Pub RIMS Kyoto*, **18** (1982), 97 – 133.

[A4] Kümmerer, B., Markov dilations on W^*-algebras, *J. Funct. Anal.*, **63** (1985), 139 – 177.

[A5] Accardi, L. and Waldenfels, W. von (eds.), Quantum probability and applications I – IV, Lecture notes in math., 1055, 1136, 1303, 1396, Springer, 1984, 1985, 1988, 1989.

H. Maassen 撰 葛显良 译 吴绍平 校

量子随机过程 [quantum stochastic processes; квантовые случайные процессы]

【补注】

古典概率和量子概率基础. 量子论作为新力学出现，但不久就认识到它也是新的**概率论** (probability theory). 古典概率和**量子概率** (quantum probability) 之间的差别，通常认为事实上是这样的：对于前者，不相容事件的概率相加 (probabilities of disjoint events add)，而对于后者，不相容事件的振幅相加 (amplitudes of disjoint events add)，一个事件的振幅 (amplitude of an event) 为一复数，其平方是该事件的概率. 更精确的说法是，古典复合概率定理 (theorem of composite probabilities)

$$\sum_j \mathrm{P}(a|b_j)\mathrm{P}(b_j)=\mathrm{P}(a), \tag{A1}$$

在量子情况要代之以复合振幅定理 (theorem of composite amplitudes)

$$\sum_j \psi(a|b_j)\psi(b_j)=\psi(a); \tag{A2}$$

其中两个恒等式必须作如下解释：给定振幅 $\psi(a|b_j)$, $\psi(b_j)$ 和相应古典概率 $\mathrm{P}(a|b_j)=|\psi(a|b_j)|^2$, $\mathrm{P}(b_j)=|\psi(b_j)|^2$，值 $\mathrm{P}(a)$ 的古典预报是 $A(1)$ 的左端，而量子预报则是 $A(2)$ 左端的模平方 (b_j 是互不相容不可分解事件，它们当中至少一件肯定发生). 两个预报之间的差别是称为干涉项 (interference terms) 的诸项之和.

可以证明，复合概率定理的有效性等价于 Bayes 的古典概率定义 (见 **Bayes 方法** (Bayesian approach)) 的有效性. 可以认为这个定义是定义古典概率模型的公理 (axioms) 之一. 因为这个公理在量子概率模型中不会正确，自然引起下列问题:

i) 从哪一些物理上似乎有理的公理可以推导出量子概率模型?

ii) 人们能根据实验可测数据提出统计不变量 (statistical invariants)、而它们就会唯一地区别不同概率模型 (正像几何不变量区别不同空间模型那样) 吗?

通过按测量的概念而不是按事件的概念来构造概率的公理系统，这样可以给出对于 i) 的一个答案. J. Schwinger 曾证明 ([A13])，根据人们对基元测量所能进行的自然操作，可以定义很特殊类型的 * 代数结构 (Schwinger 代数 (Schwinger algebras)). 一个著名的分类定理描述 Schwinger 代数的结构，因此描述对于这些公理的模型的结构. 这些包括通常的量子模型，但也出现新的引起兴趣的模型.

不像对于几何不变量的情况，这里没有单一的普适方法用来计算统计不变量. 然而，在具有直接物理意义的某些特殊情况，对这些不变量曾经进行过计算并且与实验所测得概率进行过比较，表明量子模型是非 Колмогоров 型. 应用这个方法，量子模型中使用实或复 Hilbert 空间之间的差别也已经归纳为一个实验上可予以证实的事实.

几位物理学家把不存在会描述一组给定统计数据的单一古典概率模型与某些物理性质例如定域性或因果性的破缺相联系.

代数概率论. 某些概率结果 (像**大数律** (law of large numbers)，**中心极限定理** (central limit theorem)，De Finetti 定理 (De Finetti theorem)，等等) 起源于统计**独立性** (independence) 概念的很一般的代数和组合性质. 随机过程 (特别是 Марков 和 Gauss 过程) 的某些基本性质是纯代数的. 最后，概率论中的某些基本方法和结果 (Doob-Meyer 分解，互平方变差概念，**随机微分方程** (stochastic differential equation) 和 **Langevin 方程** (Langevin equation，等等)，当将其代数内容与其解析内容予以分开时，可以得到最好的理解. 代数性质的研究是代数概率论 (algebraic probability theory) 的对象.

一个代数概率空间 (algebraic probability space) 是一个偶 $\{\mathscr{A},\varphi\}$，其中 $\mathscr{A}$ 是一个 * 代数而 φ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个状态. 一个代数概率空间 $\{\mathscr{A},\varphi\}$，如果 $\mathscr{A}$ 是一个对易代数，则称为古典的 (classical)；而如果 $\mathscr{A}$ 是非对易的，则称为量子的 (quantum). 一个非古典代数概率空间的主要例子是一个偶 $\{\mathscr{B}(H),\varphi\}$，其中 φ 是 Hilbert 空间 H 上有界算子的代数 $\mathscr{B}(H)$ 上的一个正规状态. 任何这种状态具有形式

$$\varphi(b)=\mathrm{Tr}(wb),\ b\in\mathscr{B}(H), \tag{A3}$$

其中 Tr 是 $\mathscr{B}(H)$ 上的迹，而 w 是具有迹为 1 的正算子，称为密度算子 (density-operator) (见 C^* 代数上的迹 (trace on C^*-algebra)). 其他例子可通过用一

个表示的量子场中的多项式代数来代替 $\mathscr{B}(H)$ 而获得.

一个随机变量和一个随机过程的概念可以与古典情形类似地予以引进(见**量子概率**(quantum probability)).

一族随机变量的独立性的概念,在古典概率中是用联合相关函数的因子分解来表达的,在量子概率中更加复杂得多,因为可能出现随机变量的各种形式的非对易性. Bose 子独立性(boson independence)和 Fermi 子独立性(fermion independence)的概念,它们在**量子场论**(quantum field theory)和量子统计力学(见**统计力学中的数学问题**(statistical mechanics, mathematical problems in))中具有关键重要性,和(近来由 Voiculescu 所引进的)自由独立性(free independence)是种种可能性的例子.

大数律和中心极限定理. 令 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 为 * 代数. 对于每个 $n\in\mathbf{N}$, 假设这里给定一个随机变量 $j_n:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ (见**量子概率**(quantum probability)). 最初 N 个随机变量之和是

$$S_N(b)=\sum_{k=1}^{N}j_k(b),\ b\in\mathscr{B},\ N\in\mathbf{N}.$$

在大数律和量子中心极限定理中,人们感兴趣的是形式为

$$\mathsf{E}\left[P\left[\frac{S_N(b_1)}{N^\alpha},\ \cdots,\ \frac{S_N(b_h)}{N^\alpha}\right]\right]$$

的表达式当 $N\to\infty$ 时的极限,其中 $\alpha>0$ 是一标量,$b_1,\cdots,b_h\in\mathscr{B}$ 和 P 是 h 个非对易未定元 $X_1,\cdots,X_h$ 的一个多项式. 在古典情况,人们考虑更一般形式的函数 P(连续,有界,等等),但是如果 b_j 并非可对易的,则这类表达式不具有自然意义,除非 P 是一多项式. 大数律对应于 $\alpha=1$ 的情形,而中心极限定理对应于 $\alpha=1/2$ 的情形. 量子中心极限定理的这个表述,应归于 W. von Waldenfels, 它具有的优点是不依赖于随机变量间的对易关系. 在(Bose 子, Fermi 子或自由)独立性或弱相依性的假设下,人们可以证明大数律和量子中心极限定理.

特别是可以证明,量子场论的准自由状态(Bose 子和 Fermi 子二者)起因于量子中心极限定理,正像通常 Gauss 测度起因于古典中心极限定理一样. 由于这个缘故,这些准自由状态也称为量子 Gauss 状态(quantum Gaussian state). 在与一个 Gauss 状态相联系的循环表示为具有也许是退化双线性型的一个 CCR 表示(在 Fermi 子情形是 CAR 表示,见**对易和反对易关系的表示**(commutation and anti-commutation relationships, representation of))这样的意义上, Heisenberg 对易关系也是一种量子中心极限效应.

最后,不变性原理(泛函中心极限定理)的量子类似原理导致 20 世纪 60 年代激光理论中所引进的量子 Brown 运动([A9]).

条件作用. 在 von Neumann 对于古典和量子概率的统一方案中缺少一个重要成分: 条件作用(conditioning). 为了研究非平凡统计相依性,特别是,为了构造 Марков 链,必须填补上这个空隙. 这个方向的最初尝试导致梅坦寿春条件期望(Umegaki conditional expectation)的概念,它指从一个 * 代数 $\mathscr{A}$ 映上一个 * 子代数 $\mathscr{A}_0$ 作为一个全正线性映射 $E:\mathscr{A}\to\mathscr{A}_0$, 使得

$$a\geqslant 0\Rightarrow E(a)\geqslant 0,\ a\in\mathscr{A};$$

$$E(a_0a)=a_0E(a),\ a_0\in\mathscr{A}_0,\ a\in\mathscr{A};$$

$$E(1)=1;$$

$$E(a)^*E(a)\leqslant E(a^*a),\ a\in\mathscr{A}.$$

如果 $\varphi\circ E=\varphi$, 则人们说梅坦寿春条件期望与状态 φ 是相容的(compatible). 在古典情形, **von Neumann 代数**(von Neumann algebra) $\mathscr{A}$ 的任何子代数是梅坦寿春条件期望 E 的值域,而如果 φ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个状态,则可选择 E 使之与 φ 相容. 在量子情形,这些性质中没有一个正确(而梅坦寿春期望的值域的子代数称为期望的(expected)). 可以引进条件作用的一个更加普遍的概念,而相应的广义条件期望(generalized conditional expectation)的概念在算子理论中某些未解决的问题(分裂运算性质, Stone-Weierstrass 因子猜想,局部代数的典范态射,等等)的求解方面经证明是有价值的工具. 与这些问题深刻相关的是状态扩张(state extensions)的 Cecchini-Petz 理论,以及 Cecchini 对 von Neumann 代数中 Марков 性各种概念的分析.

Марков 链. 令 $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{B}_1$ 为 C^* 代数. 从 $\mathscr{B}_0\otimes\mathscr{B}_1$ 至 $\mathscr{B}_0$ 的一个转移期望(transition expectation)是一全正映射 $E:\mathscr{B}_0\otimes\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_0$, 满足

$$E(1\otimes 1)=1.$$

若 $\mathscr{B}_0=\mathscr{B}_1=\mathscr{B}$, 人们说 E 是 $\mathscr{B}$ 上的一个转移期望.

给定从 $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}_0$ 至 $\mathscr{B}_0$ 的转移期望 E 和 $\mathscr{B}_0$ 上的状态 φ_0, 与偶 $\{\varphi,E\}$ 相联系的(齐次)广义 **Марков 链**(Markov chain, generalized)是 $\otimes_{\mathbf{N}}\mathscr{B}$ 上的状态 φ, 由下列性质表征: 对每个整数 n 和全部 $a_0,\cdots,a_n\in\mathscr{B}$ 有

$$\varphi_0(a_0\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1\otimes\cdots)=$$

$$=\varphi_0(a_0\otimes E(a_1\otimes\cdots\otimes E(a_n\otimes 1))).$$

M. Fannes, B. Nachtergaele 和 R. F. Werner ([A10])了解到, Anderson 试图解释高温超导电性现象时所引进,并被很多作者详细研究过的价键态,是量子 Марков 链的特殊类. 这使他们能应用量子

Марков 链的一般理论来将这些状态的构造推广到任意维数，极端地简化证明并获得新结果．

具有连续参量的量子 Марков 过程．令 $\mathscr{A}$ 为 C^* 代数．$\mathscr{A}$ 上一个过去 σ 域流（past filtration）是包含于 $\mathscr{A}$ 中 C^* 代数的一族 $\{\mathscr{A}_{t]}\}$，以致 $\mathscr{A}_{s]}\subset\mathscr{A}_{t]}$，如果 $s\leqslant t$．类似地定义未来 σ 域流（future filtration）．对于每个闭区间 $[s,t]$，定义局部代数 $\mathscr{A}_{[s,t]}$ 为 $\mathscr{A}_{[s}\cap\mathscr{A}_{t]}$；代数 $\mathscr{A}_{[t,t]}$ 称为在时刻 t 的现在代数（present algebra），并用 $\mathscr{A}_{\{t\}}$ 表示．

σ 域流的一个时间推移（time shift）是 $\mathscr{A}$ 的单参数自同态群 μ_t，以致 $\mu_t(\mathscr{A}_{t]})\subset\mathscr{A}_{t+s]}$（和类似地对于未来和现在代数），以及 μ_t 具有左逆，用 μ_t^* 表示．一个全正映射 $E_{t]}:\mathscr{A}_{t]}\to\mathscr{A}_{s]}$ 称为 Марков 映射（Markovian mapping），如果

$$E_{s]}(\mathscr{A}_{[s,t]})\subset\mathscr{A}_{\{s\}}.$$

它称为射影映射（projective mapping），如果

$$E_{s]}\cdot E_{t]}=E_{s]},\ s<t.$$

映射 $E_{t]}$ 称为相对于时间推移为共变的（covariant），如果

$$\mu_\tau\circ E_{t]}=E_{t+\tau]}\circ\mu_\tau .$$

这些假设蕴涵在一固定时刻所有代数 $\mathscr{A}_t$ 同构于一固定代数 $\mathscr{B}$，不取决于 $t\in T$；$\mathscr{B}$ 常称为初始代数（initial algebra）．在上述假设下，全正映射

$$P_t^0=E_{0]}\circ\mu_t|\mathscr{A}_0$$

形成 $\mathscr{A}_0$ 上全正保么单参数半群，称为 Марков 半群（Markovian semi-group），或者，当 $\mathscr{B}$ 是不可对易的，称为量子动力学演化（quantum dynamical evolution）．三合 $\{\mathscr{B},(\mu_t),j_0\}$，其中 j_0 是 $\mathscr{B}$ 嵌入 $\mathscr{A}_0$，称为对 $\{\mathscr{B},(P_t^0)\}$ 的膨胀（dilation）．如果映射 $E_{0]}$ 是梅坦寿春条件期望，则人们论及 Kümmerer 意义上的膨胀．

从 $\mathscr{A}_0$ 映入自身的全正映射二参数族，对全部 $r<s<t$ 满足条件

$$m_{r,s}\circ m_{s,t}=m_{r,t},$$

$$m_{s,t}(\mathscr{A}_{[s,u]})\subset\mathscr{A}_{[s,u]},$$

$$m_{r,s}\circ E_{t]}=E_{t]}\circ m_{r,s},$$

$$m_{s,t}(1)=1,$$

$$\mu_r\circ m_{s,t}=m_{s+r,t+r}\circ\mu_r;$$

称为齐次乘性泛函（homogeneous multiplicative functional），与古典概率类似．特别是，单参数族

$$P^t=E_{0]}\circ m_{0,t}$$

是半群，称为半群 P_t^0 的 Feynman - Kac 微扰（Feynman - Kac perturbation）．这个微扰方法称为 Feynman - Kac 公式（Feynman - Kac formula）．它处于连续时间量子 Марков 过程所有已知结构的基础之中．满足随机微分方程的齐次乘性泛函称为随机流（stochastic flows），或 Evans - Hudson 流（Evans - Hudson flows）．

量子随机分析．标准实 Wiener 过程（Wiener process）W_t 的随机变量，被过程空间 L_2 上的乘法作用，并产生自伴乘法算子 $Q_t(Q_tf(\omega)=W_t(\omega)\cdot f(\omega)$，$f\in L_2)$．用酉算子 U 旋转这个过程 Q_t，认为是一算子赋值过程，给出一新过程 $U^*Q_tU=P_t$，它与原 Wiener 过程是酉同构的．如果适当选择 U（作为 Wiener 和 Segal 所考虑过的 Gauss - Fourier 变换的无穷维类似物），这对过程 Q_t，P_t 满足 Heisenberg 对易关系：$[Q_s,P_t]=is\wedge t$．具有上述性质的一对算子赋值过程 Q_s，P_t 称为标准量子 Brown 运动（standard quantum Brown motion）（亦见 **Brown 运动**（Brownian motion））．它是 20 世纪 60 年代在耗散量子系统和量子光学的研究中引进的，与激光理论有关（[A9]）．R．L．Hudson 和 K．R．Parthasarathy（[A12]）将古典随机分析推广到这个过程，导致量子物理学中许多重要应用．他们还引进数过程（number process）或规范过程（gauge process）作为通常 Poisson 过程的量子推广．

量子 Brown 运动在物理学中作为自由量子电磁场的或热库的自然近似出现．更确切地说：在一个系统与一个 Gauss 量子场相互作用的弱耦合极限，通常 Heisenberg 方程用由量子 Brown 运动所驱动的量子随机微分方程来近似．这个近似的一些基本特征在二级微扰论级别已经呈现出来（更确切地说，这些效应是在 20 世纪 60 年代由激光理论家发现的）．

对于量子 Poisson 过程，它作为与极稀薄气体（低密度极限）相互作用的系统的描述，没有什么类似的可说．然而，在这个近似，与量子 Poisson 过程有关的任何效应都接受到来自整个微扰级数的贡献；而没有量子随机分析所提供的直观指引就不可能分出去这些贡献．

在概率类比中，弱耦合极限近似起因于一致无穷小量子场之和——使人强烈地联想起古典中心极限定理的情况；而低密度极限近似对应于稀少个别事件（低密度），然而，它们每个具有有限强度，使人联想起古典 Poisson 极限定理．

目前，已经创立了种种量子随机分析，它们对应于不同量子场．这些分析在古典概率和量子概率之间架设了一座桥梁，越来越多的古典概率学者正运用着它．

好多古典概率结果都有量子推广．例如，Lévy 映表示定理，Kunita - Watanabe 和 Doob - Meyer 定理，关于乘性泛函结构的定理，停时，等等．

参考文献

[A1] Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes (Proc. Arco Felice (1978)).

[A2] Accardi, L., et al (eds.), Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes (Proc. Villa Mondragone (1982)), Lecture notes in math., 1055, Springer, 1984.

[A3] Accardi, L., et al. (eds.), Quantum probability and applications II (Proc. Heidelberg (1984)), Lecture notes in math., 1136, Springer, 1985.

[A4] Accardi, L., et al. (eds.), Quantum probability and applications III (Proc. Oberwolfach (1986)), Lecture notes in math., 1303, Springer, 1988.

[A5] Accardi, L., et al. (eds.), Quantum probability and applications IV (Proc. Rome (1987)). Lecture notes in math., 1396, Springer, 1989.

[A6] Accardi, L., et al. (eds.), Quantum probability and applications V (Proc. Heidelberg (1988)), Lecture notes in math., 1442, Springer, 1990.

[A7] Quantum probability and applications VI (Proc. Trento (1989)), in Quantum Probability and Related Fields, World Sci., 1991.

[A8] Quantum probability and applications VII (Proc. New Delhi (1990)), in Quantum Probability and Related Fields, World Sci., 1991.

[A9] Haken, H., Laser theory, Springer, 1984.

[A10] Fannes, M., Nachtergaele, B. and Werner, R. F., Finitely correlated states on quantum spin chains, Preprint.

[A11] Feynman, R. P., Lectures on physics, III, Addison-Wesley, 1966.

[A12] Hudson, R. L. and Parthasarathy, K. R., Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, *Comm Math. Phys.*, **93** (1984), 301 – 323.

[A13] Schwinger, J., Quantum kinematics and dynamics, Acad. Press, 1970.

[A14] Neumann, J. von, Mathematical foundations of quantum dynamics, Princeton Univ. Press, 1955.

L. Accardi 撰 徐锡申 译

四分位数 [quartile; квартиль]，概率论中的

分位数 (quantile) 的特殊情形．四分位数是分位数 K_p，对应的 p 值为 $1/4$ (下四分位数 (lower quartile)) 和 $3/4$ (上四分位数 (upper quartile))．

周概容 译

拟 Abel 函数 [quasi-Abelian function; квазиабелева функция]

Abel 函数 (Abelian function) 的一个拓广．在复空间 $\mathbf{C}^n(n>1)$ 中的一亚纯函数 (meromorphic function) $f(z)$，$z=(z_1,\cdots,z_n)$，称为一拟 Abel 函数 (quasi-Abelian function)，如果它有 $m(0<m\leqslant 2n)$ 个线性独立的周期；在 Abel 函数的情形下是 $m=2n$．拟 Abel 函数可以看成是 Abel 函数当某些周期无限制地增加的极限情形．

参考文献

[1] Severi, F., Funzioni quasi abeliane, Città del Vaticano, 1947

Е. Д. Соломенцев 撰 钟同德 译

拟仿射概形 [quasi-affine scheme; квазиаффинная схема]

与**仿射概形** (affine scheme) 的开紧子概形同构的概形．紧概形 X 为拟仿射，当且仅当以下等价条件之一成立：1) 典范态射 $X \to \operatorname{Spec}\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ 是开嵌入；2) $\mathcal{O}_X$ 模的**拟凝聚层** (quasi-coherent sheaf) 都由整体截面生成．概形的态射 $f: X \to Y$ 被称为拟仿射的 (quasi-affine)，如果对 Y 的任意开仿射子概形 U，其逆象 $f^{-1}(U)$ 是拟仿射概形．

В. И. Данилов 撰

【补注】 拟仿射簇是仿射代数簇的开子簇．(作为 **Noether 空间** (Noetherian space) 的开子空间，它自动地成为紧集)．非仿射的拟仿射簇的例子是 $\mathbf{C}^2\setminus\{(0,0)\}$．

参考文献

[A1] Grothendieck, A., Étude globale élémentaire de quelques classes de morphisms, *Publ. Math. IHES*, **8** (1961), Sect. 5. 1.

[A2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977, p. 3, 21.

陈志杰 译

拟解析类 [quasi-analytic class; квазианалитический класс]，函数的

由某种唯一性性质刻画的一个函数类：如果此类中两个函数"局部"相同，则它们恒等．最简单的拟解析类是实轴的一个区间 $[a,b]$ 上的解析函数类 (此类中的函数在该区间的每个点的充分小邻域中表示为 Taylor 级数)：如果 $[a,b]$ 上的两个解析函数在一个区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ 中相等，则它们恒等 ("局部"相同在此处意味着函数在 (α,β) 内部相等)．对于解析函数，"局部"相同也可意味着函数及其各阶导数在某个点 $x_0(a\leqslant x_0\leqslant b)$ 相等．这种新意义下的"局部"相同也蕴涵函数在整个区间上相等．

E. Borel 发现上述唯一性性质不仅对解析函数成立．在这方面，J. Hadamard 于 1912 年提出了下述问题．设 $\{M_n\}$ 是一个正数列，$[a,b]$ 是实轴上的一个区间．令 $C\{M_n\}$ 是 $[a,b]$ 上满足下述条件的无穷次可微函数 f 的集合：

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant K^n M_n,\ a\leqslant x\leqslant b,\ n=0,1,\cdots,$$

其中 $K=K(f)$ 是不依赖于 n 的常数．函数 f 在区间 $[a,b]$ 上解析当且仅当对某个 $K=K(f)$，有

$$|f^{(n)}(x)|<K^n n!,\ a\leqslant x\leqslant b,\ n=0,1,\cdots.\quad(1)$$

这样，$[a, b]$ 上的解析函数类是类 $C\{n!\}$. Hadamard 问题是要确定置于诸数 M_n 上的条件，使得类 $C\{M_n\}$ 中的每个连同其各阶导数在某点 $\alpha_0(a \leqslant \alpha_0 \leqslant b)$ 等于零的函数必恒等于零（或等价地，类 $C\{M_n\}$ 中的两个连同其各阶导数在点 α_0 相等的函数必处处相等）. 具有这一性质的类 $C\{M_n\}$ 称为在 $[a, b]$ 上是拟解析的（quasi-analytic）. 据上所述，类 $C\{n!\}$ 在 $[a, b]$ 上是拟解析的.

A. Denjoy 于 1921 年给出了拟解析性的充分条件. 他指出，如果

$$M_n = n!(\ln n)^n,\ M_n = n!(\ln n)^n(\ln\ln n)^n,\ \cdots,$$

则 $C\{M_n\}$ 是拟解析的（由（1）可知这些类广于解析函数类）.

T. Carlemen 给出了拟解析性的必要充分条件，完全解决了 Hadamard 问题. 这些条件后来又得到改进. Denjoy-Carleman 拟解析性定理（Denjoy-Carleman quasi-analyticity theorem）可陈述如下：下列每个条件对类 $C\{M_n\}$ 的拟解析性都是必要充分的：

a）如果令

$$\beta_n = \inf_{k \geqslant n} M_k^{1/k},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty;$$

b）如果令

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n},$$

则

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = \infty;$$

c）$\varliminf_{n \to \infty} M_n^{1/n} < \infty$

或

$$\lim_{n \to \infty} M_n^{1/n} = \infty$$

以及

$$\sum^{\infty} \frac{M_n'}{M_{n+1}'} = \infty,$$

这里 $\{M_n'\}$ 是由序列 $\{M_n\}$ 的对数所作的凸正则化. 条件 a）称为 Carlemen 条件（Carlemen condition）；b）称为 Ostrowski 条件（Ostrowski condition）；c）称为 Bang-Mandelbrojt 条件（Bang-Mendelbrojt condition）.

对于情形 $M_n = n! = n^n/(e+\varepsilon_n)^n$（当 $n \to \infty$ 时 $\varepsilon_n \to 0$），有 $\beta_n \approx n/e$，故条件 a）成立，从而又得 $C\{n!\}$ 是拟解析类. 对于情形 $M_n = n!(\ln n)^n$，有 $\beta_n \approx (n\ln n)/e$，条件 a）成立，从而 Denjoy 类（Denjoy class）$C\{n(\ln n)^n\}$ 是拟解析的. 在情形 $M_n = n!(\ln^{1+\varepsilon} n)^n$ $(\varepsilon > 0)$ 中，有

$$\beta_n \approx \frac{n\ln^{1+\varepsilon} n}{e},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} < \infty,$$

从而得到 $C\{M_n\}$ 不是拟解析的.

С. Н. Бернштейн 引进了另一种拟解析函数类. 他证明函数 f 在区间 $[a, b]$ 上解析当且仅当

$$E_n(f) < M\rho^n,\ n = 0, 1, \cdots, \rho < 1,$$

其中 $M = M(f)$ 和 $\rho = \rho(f)$ 不依赖于 n，而 $E_n(f)$ 是 f 在 $[a, b]$ 上由 n 次多项式逼近时的最佳逼近误差. 由此他考虑 $[a, b]$ 上满足下述条件的函数 f 构成的类：

$$E_n(f) < M\rho^n,\ \rho < 1,\ n = n_1, n_2, \cdots, \qquad (2)$$

其中 $n_1, n_2, \cdots$ 是整数的一个无穷递增序列；他证明，如果该类中的一个函数在某个区间 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ 上等于零，则它恒等于零. 定义在 $[a, b]$ 上的函数的一个类 C 称为（Бернштейн）拟解析的（（Bernshtein）quasi-analytic），如果此类中两个函数在某个区间 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ 上相等蕴涵它们在整个区间 $[a, b]$ 上相等. 类（2）在这种意义下是拟解析的. 应注意（2）并不蕴涵 f 是无穷次可微的（已有适当的例子）.

拟解析性的其他一些问题也已得到研究. 例如，涉及级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

中系数 a_n, b_n 的递减速率致使这种函数的类为拟解析的问题已经解决；置于诸数 M_n 上使得在圆盘 $|z| < 1$ 内解析、在闭圆盘 $|z| \leqslant 1$ 上无穷次可微并满足

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant K^n M_n,\ n = 0, 1, \cdots, |z| \leqslant 1$$

的函数构成拟解析类的条件已经求得；等等.

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954.

[2] Mandelbrojt, S., Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Gauthier-Villars, 1935.

[3] Mandelbrojt, S., Séries adherents, regularisation des suites. Applications, Gauthier-Villars, 1952.

А. Ф. Леонтьев 撰

【补注】 Denjoy 的原始论文是 [A4]，关于 Carleman 的工作亦见 [A5]. Denjoy-Carleman 定理的一个简洁证明见 [A1].

也已在 **C** 中某些弧上引进拟解析类，此时 Denjoy-Carleman 定理的充分性部分仍可保留，见 [A3].

参考文献

[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1987（中译本：W. 卢丁，实分析和复分析，

人民教育出版社，1981）.

[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1, Springer, 1983, Chapt. 1.

[A3] Zeinstra, R., Müntz-Szász approximation on curves and area problems for zero sets, Univ. Amsterdam, 1985. Thesis.

[A4] Denjoy, A., Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 173(1921), 1329 – 1331.

[A5] Carleman, T., Les fonctions quasi-analytiques, Gauthier-Villars, 1926.

[A6] Mandelbrojt, S., Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions, Pamphlet, 29, Rice Institute, 1942.

[A7] Beurling, A., Quasi-analyticity, 载于其 Collected works, Vol. 1, Birkhäuser, 1989, 396 – 431.

【译注】 J. Hadamard 1912 年提出条中所说问题的原始论文是[B1]. 关于条件 b)，见[B2]；关于条件 c)，见[B3].

参考文献

[B1] Hadamard, J., Sur la généralisation de la notion de fonction analytique, *Bull. Soc. Math. France*, **40** (1912), 28 – 29.

[B2] Ostrowski, A., Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelungen, *Acta Math.*, **53** (1929), 181 – 266.

[B3] Bang, T., Om quasi-analytiske Funktioner, Thesis, Univ. of Copenhagen, 1946.

沈永欢 译

拟平均法 [quasi-averages, method of; квазисредних метод]

基于拟平均的基本概念，研究具有对称性自发破缺的系统的构造性方案（Н. Н. Боголюбов [1]，1961）.

拟平均（quasi-average）是一种经特殊修正的求平均步骤中动力学量的热力学平均（统计力学中）或真空平均（量子场论中），使得人们能计及系统的态简并性的影响效应.

在统计力学（statistical mechanics）中，在对称性自发破缺情况下，人们通过运用拟平均法，能在微观处理方法框架内来描述宏观可观察量（亦见统计力学中的数学问题（statistical mechanics, mathematical problems in））.

在具有简并性的问题中，对应于单一能级，系统有一个以上独立态；任何动力学量 A 的平均 $<A>$ 唯一地定义为

$$<A>_H = \frac{\mathrm{Tr}(Ae^{-\beta H})}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}, \qquad (1)$$

其中 H 是系统的 Hamilton 量，而 β 是温度倒数. 如果系统的统计平衡态具有比系统的 Hamilton 量为低的对称性（所谓对称性自发破缺，见[2]－[5]），则必须对求平均运算（1）补充一条规则，禁止对所考虑宏观量其值的变化不伴随以能量变化的各不同值进行"多余的"求平均.

这可以通过引进拟平均来达成，即对补充以无穷小项的 Hamilton 量平均，该项破坏了加性守恒律. 热力学平均相对于原 Hamilton 量的这种变化可能结果是不稳定的，这是平衡态的简并性的另一表征.

因而，对于具有 Hamilton 量 H 的系统，动力学量 A 的拟平均 $\prec A \succ$ 定义为下列极限

$$\prec A \succ_H = \lim_{\nu\to 0}\lim_{V\to\infty} <A>_{H_\nu}^{(V)}, \qquad (2)$$

其中 $<\cdot>_{H_\nu}$ 表示对 Hamilton 量 H_ν 所取的寻常平均，这里 H_ν 中含有小的对称破缺项，后者由包含参数 ν 所引进，当 $\nu\to 0$ 时变为零. 根据定义（2），寻常热力学平均可通过拟平均对对称破缺群的额外平均而获得.

如果被求平均的动力学量 A 关于原 Hamilton 量 H 的对称群不是不变量，则拟平均（2）的值可能依赖于附加项 $\Delta H = H_\nu - H$ 的具体结构. 对于简并态，当源的包含参数 ν 以任意方式趋于零时，寻常平均（2）的极限并不存在. 为了完全定义拟平均，必须指明这些参数趋于零的方式以保证收敛性（见，例如，[5]）. 另一方面，为了去除简并性，只要在构造 H_ν 时仅破坏那样一些加性守恒律，包括它们会导致寻常平均的不稳定性，这样就够了. 同时，对于拟平均将不执行关联函数的由上述守恒律所限制的那些选择定则.

拟平均法与弱关联原理直接有关（见[8]，[9]）：如果对于固定时间变量 $t_1, \cdots, t_n$，点集体 $x_1, \cdots, x_{s-1}$ 无限远离点集体 $x_s, \cdots, x_n$，则关联函数

$$\prec U_1(x_1, t_1)\cdots U_n(x_n, t_n)\succ \qquad (3)$$

分裂为乘积

$$\prec U_1(x_1, t_1)\cdots U_{s-1}(x_{s-1}, t_{s-1})\succ \times$$

$$\times \prec U_s(x_s, t_s)\cdots U_n(x_n, t_n)\succ, \qquad (4)$$

其中 $U_s(x_s, t_s)$ 是 **Heisenberg 绘景**（Heisenberg representation）中的场函数 $\Psi(s_s, t_s)$ 和 $\Psi^+(x_s, t_s)$. 在所考虑简并性情况，这个公式中的表达式 $\prec\cdot\succ$ 必须理解为拟平均：如果将 $\prec\cdot\succ$ 解释为寻常平均的话，则弱关联原理的上述说法肯定是不正确的.

关于非平衡统计算子的构造，人们考虑使得（**Liouville 方程**（Liouville equation））相对于时间反演对称破缺的无限小微扰. 应用这个运算相当于选择 Liouville 方程的推迟解（见[7]）.

为了在拟平均的定义（2）中保证寻常平均的收敛性，源的包含参数 ν 趋于零的方法的选取问题，曾经在近似 Hamilton 量的方法的框架内考虑过. 这里，应

用动力学量(它们在大系统极限下与局部可观察量的整个代数可对易)替换的特殊方法,将原 Hamilton 量用 c 数来替换(所谓近似 Hamilton 量). 这最后的 Hamilton 量应该远比原来的简单(而且在物理上重要的情况的广阔范围它具有严格解),同时当 $V \to \infty$ 时应该等于它(见[7]). 附加项必须取为正比于,对渐近 Hamilton 量的自由能的极限($V \to \infty$)函数,它的极小化极大问题这个一般情况下的解. 于是,收敛于零的任意实正 v 序列保证(2)中定义的收敛性;而且,结果弄清楚的是,这样构造的拟平均等于这个极小化极大问题的相应解.

在近似 Hamilton 量方法的框架内,曾经给出定义拟平均的可另外选择的一种方法,它无需在 H 中引进额外项. 这个处理方法中,在计算拟平均 $\prec A \succ_H$ 时,对所考虑动力学量 A 乘以某个因子 L,在一定意义上当 $V \to \infty$ 时它趋于一,而 Hamilton 量 H 则保持不变([4]):

$$\prec A \succ_H = \lim < A \cdot L >. \qquad (5)$$

按照(2)和(5)所定义的拟平均是相同的.

拟平均法的数学工具包括关于 $1/q^2$ 型奇性的 **Боголюбов 定理**(Bogolyubov theorem)和对 Green 函数和关联函数的 **Боголюбов 不等式**(Bogolyubov inequality)(见 **Green 函数**(Green function); **统计力学中的关联函数**(correlation function in statistical mechanics)). 它包括建立平衡拟平均的非平凡估计的算法,使得人们能够研究统计系统中的有序问题,以及阐明低激发态的能谱结构(见[4],[8]).

拟平均概念与相变理论直接有关(见[6],[7],[9]);热力学平均相对于 Hamilton 量的微扰(由于对某组变换的不变性的破坏)的不稳定性,意味着系统中出现向极值态的转变.

量子场论(quantum field theory)中,对于一些模型系统曾经证明有相变,并且曾经确立关于 $1/q^2$ 型奇性的 Боголюбов 定理的有效性;还有,关于真空的局部不稳定性以及其中畴结构的出现这种可能性,也曾经进行过研究.

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Избр. труды, т. 3, К., 1971.

[2] Статистическая физика и квантовая теория поля, М., 1973.

[3] Гриб, А. А., Дамаскинский, Е. В., Максимов, В. М., «УФН», 102 (1970), 587–620.

[4] Боголюбов, Н. Н. (мл.), Садовников, Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975.

[5] Боголюбов, Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974 (英译本: Bogolyubov, Jr., N. N., A method for studying model Hamiltonians, Pergamon, 1972).

[6] Brout, R., Phase transitions, New York, 1965.

[7] Ruelle, D., Statistical mechanics: rigorous results, Benjamin, 1974.

[8] Ахиезер, А. И., Пелетминский, С. В., Методы статистической физики, М., 1977 (英译本: Akhiezer, A. I. and Peletminskii, S. V., Methods of statistical physics, Oxford Univ. Press, 1981).

[9] Preston, C. J., Gibbs states on countable sets, Cambridge Univ. Press, 1974.

А. Н. Ермилов, А. М. Курбатов 撰 徐锡申 译

拟特征标[quasi-character; квазихарактер]

由一个 Abel **拓扑群**(topological group) G 到复数乘法群内的连续**同态**(homomorphism). 作为 G 通常是某个局部域 k 的乘法群 k^*.

拟特征标 c 在 G 的任意紧子群上的限制是这个子群的一个特征标(见**群的特征标**(character of a group)). 特别地,如果 $\| \ \|$ 是 k 上一个范数,而 $U = \{a \in k^* : \|a\| = 1\}$,则 c 诱导群 U 的一个特征标 χ,而在非 Archimedes 的情形下,U 与 k 的可逆元素的群一样. 如果 $c(U) = 1$,那么这个拟特征标就称为*非分歧的*(non-ramified). 任意非分歧的拟特征标都有形式

$$c = \|a\|^s = e^{s \log \|a\|}.$$

在一般情形下群 k^* 的一个拟特征标有形式 $c = c^1 \|a\|^s$,这里 s 是一个复数而 $c^1(a)$ 是 k^* 的一个特征标. s 的实部是由拟特征标 c 唯一确定的,称为 c 的实部(real part).

在非 Archimedes 情形下,对于每个拟特征标 c 来说,有一个正整数 m,使得

$$c(1 + \mathfrak{M}^m) = 1,$$

这里 $\mathfrak{M}$ 是 k 的整数环的**极大理想**(maximal ideal). 具有这个性质的最小数 m 称为拟特征标 c 的*分歧度*(degree of ramification of the quasi-character),而理想 $\mathfrak{M}^m$ 称为 c 的*导子*(conductor).

参考文献

[1] Lang, S., Algebraic numbers, Addison-Wesley, 1964.

[2] Шафаревич, И. Р., Дзета-функция, М., 1969.

Л. В. Кузьмин 撰 郝锅新 译

拟经典近似[quasi-classical approximation; квазиклассическое приближение]

见**半经典近似**(semi-classical approximation).

拟凝聚层[quasi-coherent sheaf; квазикогерентный пучок]

局部地由生成元和关系式定义的模层(sheaf).更精确地说,设 X 是拓扑空间,$\mathscr{A}$ 是 X 上环层.设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{A}$ 模的层,如果对任意的点 $x \in X$ 存在开邻域 U 以及 $(\mathscr{A}|_U)$ 模层的正合列

$$\mathscr{A}|_U^{(J)} \to \mathscr{A}|_U^{(I)} \to \mathscr{F}|_U \to 0,$$

其中 I, J 是某个集合,$|_U$ 表示一个层到 U 的限制,$\mathscr{A}^{(I)}$ 表示 I 个 $\mathscr{A}$ 的直和,则称 $\mathscr{F}$ 是拟凝聚的(quasi-coherent).在具有环层的拓扑化范畴(topologized category)上可类似地定义拟凝聚层.

如果 $(X, \mathscr{A})$ 是仿射概形,则关系 $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$ 给出了 $\mathscr{A}$ 模的拟凝聚层的范畴与 $\Gamma(X, \mathscr{A})$ 模范畴间的等价.这一事实导致拟凝聚层在概形理论中的广泛应用(亦见**凝聚层**(coherent sheaf),**概形**(scheme)).

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977, 111 - 115, 126.

陈志杰 译

拟紧空间 [quasi-compact space; квазикомпактное пространство]

一个拓扑空间(topological space) X,其中每个滤子(filter)都至少有一个聚点.下列三个条件与上述条件等价:1) X 中任何一族闭集如果有非空的交,则存在一个有限子族,也有非空的交;2) X 中任何超滤子(ultrafilter)都收敛;3) X 的任何开覆盖均含有有限子开覆盖(Borel-Lebesgue 条件).分离(或 Hausdorff)的拟紧空间称为紧(或 T_2 紧)空间.例如,只有有限多个开集的空间都是拟紧空间.特别是,任何有限空间都是拟紧空间.拟紧空间的连续象是拟紧空间.任意多个拟紧空间的拓扑乘积是拟紧空间(Тихонов 定理(Tikhonov theorem)).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966(译自法文).

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 拟紧空间常常称为紧(compact)空间,而这里所谓的紧空间则明确地称为 Hausdorff 紧(compact Hausdorff)空间.亦见**紧空间**(compact space).

胡师度 白苏华 译

拟共形映射 [quasi-conformal mapping; квазиконформное отображение]

与**共形映射**(conformal mapping)的偏离或畸变为有界的映射.在映射 $f: D \to D'$ 下,在点 $a \in D$ 的畸变的数值特征为 f 在该点的拟共形性系数(coefficient of quasi-conformality(或伸缩)(dilatation, dilatation)) $k(f, a)$:

$$k(f, a) = \limsup_{r \to 0} \frac{\sup\limits_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|}{\inf\limits_{|x-a|=r} |f(x) - f(a)|}.$$

称量

$$k(f) = \begin{cases} \infty, & \text{若 } \sup\limits_{x \in D} k(f, x) = \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{x \in D} k(f, x), & \text{若 } \sup\limits_{x \in D} k(f, x) < \infty, \end{cases}$$

为 f 在区域 D 的拟共形性系数或线伸缩(linear dilatation).称保持定向映射 $f: D \to D'$ 为拟共形的(或具有有界畸变的映射)(quasi-conformal (mapping with bounded distortion)),如果 $k(f) < \infty$;称其为 k 拟共形的(k-quasi-conformal),如果 $k(f) \leqslant k$.对于**共形映射**(conformal mapping),有 $k(f) = 1$.若 f 在点 $a \in D$ 可微,则线性映射 $f'(a)$ 把切空间的球变成椭球,其长短半轴之比为 $k(f, a)$.

除已给出的定义外,人们还常常使用如下的(等价的) f 在区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 中的拟共形性条件:$f \in W_n^1$(即 f 在 D 内具有局部 n 次幂可和的广义导数)且存在实数 k 使得对几乎所有的点 $x \in D$ 有

$$\|f'(x)\|^n \leqslant k \det f'(x),$$

或

$$|\nabla f(x)|^n \leqslant k n^{n/2} \det f'(x).$$

作为一种规定,对术语"拟共形映射"已预先假定该映射是一个同胚(homeomorphism).具有有界畸变的非同胚通常称为拟正则映射(quasi-regular mapping).$\mathbf{R}^n$ 中区域的拟共形映射理论对于 $n = 2$ 和 $n \geqslant 3$ 是截然不同的,只要人们不是关注那些一般的简单的问题.

二维理论.在这种情形下,映射 f 在点 $z \in D$ 的微分可写成如下形式

$$df(z) = f_z(z) dz + f_{\bar z}(z) d\bar z,$$

由公式

$$f_{\bar z}(z) = \mu(z) f_z(z) \tag{1}$$

确定出一个因子.函数 $\mu(z)$ 称为映射 f 在点 z 的 Beltrami 系数(Beltrami coefficient),复伸缩(complex dilatation),或复特征(complex characteristic);对于具有正 Jacobi 行列式 $J = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2$ 的映射,有 $|\mu(z)| < 1$.对于解析映射,$\mu(z) \equiv 0$,这就是 Cauchy-Riemann 条件.映射在一点的拟共形性系数 $k(f, z)$ 可用 $\mu(z)$ 表示为

$$k(f, z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|},$$

因此，映射 $f\in W_2^1$ 的拟共形性条件用复特征表述即为 $\|\mu\|_\infty(D)<1$.

通常公式（1）是作为带有已知函数 μ 的关于 f 的方程，称为 Beltrami 方程（Beltrami equation）（或 Beltrami 方程组（Beltrami system））．例如，从一区域 D 到另一区域 D' 的共形映射问题便是寻求同胚 f: $D\to D'$ 使之在 D 内满足当 $\mu(z)\equiv 0$ 时的 Beltrami 方程．

归结为求解一般的方程（1）的问题的一个例子是经典的 Gauss 问题，将二变元的正定**二次型**（quadratic form）的给定区域 D 全部同时归约为典则形式，或者同样的问题，在一个二维曲面上建立共形 Euclid 坐标的问题（见[50]）．

拟共形映射二维理论的基本事实（[5]，[30]），类似于 Riemann 映射定理（见 **Riemann 定理**（Riemann theorem）），称为可测 Riemann 映射定理（measurable Riemann mapping theorem），其内容如下文．对于区域 $D\subset\bar{\mathbf{C}}$ 中满足 $\|\mu\|_\infty(D)<1$ 的可测函数 $\mu(z)$，寻求 D 的拟共形同胚 f 使之具有复特征 $\mu(z)$；方程（1）在 D 内的一般解具有形式 $F\circ f(z)$，其中 f 是所述的拟共形同胚，F 是任一解析函数．

若 D 是单位圆盘，可选取 f 满足 $f(D)=D$，则 f 可延拓为闭圆盘到自身的同胚，而由标准化条件 $f(0)=0$，$f(1)=1$ 即确定出唯一的同胚 f: $D\to D$ 满足 Beltrami 方程．此外，若 $\mu\in C_\alpha^m(D)$，$0<\alpha<1$，$m\geqslant 0$，则 $f\in C_\alpha^{m+1}(D)$，其中 $C_\alpha^m(D)$ 是函数空间，系由 D 内具有 m 阶连续导数且其最高阶导数在 D 内为 α 阶 Hölder 连续（见 **Hölder 条件**（Hölder condition））的函数组成．若圆盘 D 的标准化拟共形自同构序列 f_n 满足 $|\mu_n(z)|\leqslant|\mu(z)|<1$ 且当 $n\to\infty$ 时 $\|\mu_n\|_\infty(D)\to 0$，则

$$\|f_n(z)-z\|_{C(D)}\to 0.$$

拟共形映射作为强椭圆方程组

$$\Phi_i(x,y,u,v,u_x,u_y,v_x,v_y)=0,\ i=1,2, \tag{2}$$

的同胚解也自然地同亚音速气动力系统的流线流问题相关联，就像满足 Cauchy-Riemann 方程组的共形映射同不可压缩理想流体的流动问题相关联那样（见[9]，[31]）．

构造从一个单连通区域到另一个单连通区域且满足条件（2）的拟共形映射的一般问题是由 M．A．Лаврентьев（[28]，[31]，拟共形映射理论创始人之一）所提出并解决的．在 H．Grötzsch 的工作中给出拟共形映射的显式表示（见[23]，[24]）．他特别考虑了如下极值问题（[24]）（Grötzsch 问题（Grötzsch problem），[2]）：在把正方形诸顶点映射为一矩形（非正方形）的顶点的诸映射中，寻求一映射使其最接近于共形映射．为表征这种近接性的尺度，有必要引入拟共形性系数，这是拟共形映射几何理论中最初的概念．后来，这些映射以拟共形（quasi-conformal）的名称出现在L．V．Ahlfors 的关于覆盖曲面的论文[1]中．在 20 世纪30年代后期，O．Teichmuller 把 Grötzsch 的研究深入地推广到闭 Riemann 曲面之间的映射并且得到具有固定亏格的这类曲面的一种自然的参数空间（[44]）（所谓 **Teichmüller 空间**（Teichmüller space））．近年来，Ahlfors，L．Bers（[6]），他们的弟子及追随者已大大扩展了 Teichmüller 的理论（[3]，[10]，[14]）．二维拟共形映射已在几何函数论（单值化，模，Klein 群（[11]，[43]），Nevanlinna 理论（[18]）），拓扑学（Thurston 理论，[12]，[13]）及拓扑动力系统（Fatou-Julia 问题，[42]）等领域得到新的出色的应用．

在拟共形映射二维理论中，就像在解析函数理论中那样，要研究一般的紧性问题，即映射的正规族；边界对应理论已建立，同共形的情形一样是通过证明这种对应可借助 Carathéodory 素端来实现（见**极限元**（limit elements））；已对奇异集的可去性条件作了研究；并就求解此类拟共形同胚的基本极值问题发展了变分原理（见[7]，[26]，[27]）．

空间理论．$\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中区域的拟共形映射理论亦有其自身的特色．这首先同共形映射不存在性有关：按照 Liouville 定理（Liouville theorem），区域 $D\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 的每个充分光滑的共形映射是 Möbius 变换（Möbius transformation），即反演与旋转的叠加．这一事实的本质，在于当 $n\geqslant 3$ 时映射的共形性条件，与 $n=2$ 时的 Cauchy-Riemann 条件相对照，是一个超定偏微分方程组．

下面对拟共形映射空间理论的某些重要结果作一简要陈述．Liouville 定理在 Hilbert 空间的情形（[36]）与关于映射的演绎正则性条件的极小化下均成立（[19]，[38]）．在 Liouville 定理中有稳定性（[8]，[38]），即存在常数 k_1 与 k_2 及函数 $\lambda(\varepsilon)=O(\varepsilon)$（当 $\varepsilon\to 0$）具有如下性质：a）若 $y=f(x)$ 是球 $|x|<1$ 的拟共形映射且满足 $k(f)<k_1$，则存在 Möbius 变换 $L(y)$ 使得

$$\sup_{|x|<1}|L\circ f(x)|<\infty,$$

且在 $L\circ f$ 映射下单位球的象包含球 $|y|<1$；b）若 $k(f)\leqslant 1+\varepsilon<k_2$，则

$$|L\circ f(x_1)-L\circ f(x_2)|\leqslant k(\varepsilon)|x_1-x_2|^{\alpha(\varepsilon)},$$

其中

$$\lim_{\varepsilon\to 0}k(\varepsilon)=1\ 且\ \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(\varepsilon)=1;$$

c) 若 $k(f) \leqslant 1+\varepsilon$，则在整个球 $|x|<1$ 内有

$$|L\circ f(x)-x| \leqslant \lambda(\varepsilon).$$

稳定性对某类具有非正则边界的区域仍成立，且对于不同范数亦成立([38])．目前，对维数 $n\geqslant 3$ 也建立了稳定性估计，n 有限并且是预先取定的(即 k，α，λ 也是 n 的函数)．

用同样的方法可知 1 拟共形映射便是 Möbius 变换而无需预先假定它是同胚，一个拟共形映射只要其拟共形性系数充分接近于 1 便是局部同胚([22]，[34])．与平面的情形相对照，$\mathbf{R}^3(n\geqslant 3)$ 中单位球的每个局部同胚拟共形映射必定在某个球 $|x|\leqslant r(n,k)<1$ 内同胚，其中 r 依赖于空间的维数 n 与该映射的拟共形性系数 $k=k(f)$ ([34])．特别地，全空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 的局部同胚拟共形映射 f 是整体同胚，且 $f(\mathbf{R}^n)=\mathbf{R}^n$([39]，[52])．边界性质(boundary behaviour)：若 f: $\mathbf{R}^n_+\to\mathbf{R}^n_+$ 是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 的上半空间 $x_n>0$ 到自身的拟共形映射，则 f 可延拓为其闭域上的同胚；其中在边界 $\partial\mathbf{R}^n_+=\mathbf{R}^{n-1}$ 上的诱导同胚 φ: $\mathbf{R}^{n-1}\to\mathbf{R}^{n-1}$ 在 $n=2$ 的情形满足 M 条件([15])：

$$M^{-1}\leqslant\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{\varphi(x)-\varphi(x-h)}\leqslant M,$$

且在 $n\geqslant 3$ 的情形为拟共形([19])．为使映射 φ: $\partial\mathbf{R}^n_+\to\mathbf{R}^n_+$ 是某个拟共形映射的边界迹，与维数有关的这最后两个条件中的每一个都不仅是必要的而且是充分的([45]-[47])．

根据球面的 1 拟共形映射是共形映射并且是球的共形自同构的迹的事实，由此发现的把 Лобачевский 空间(Lobachevskiĭ space)的拟共形自同构延拓为该空间的绝对形(absolute)的拟共形映射的可能性，便是证明所谓空间双曲形式的刚性的基础，即：若维数 $n\geqslant 3$ 且具有相同负常数曲率的两个闭 Riemann 流形同胚，则必等距(见[35]，[41])．

拟共形映射的正规性性质及收敛性特征，一方面可用来建立关于拟共形映射的 Carathéodory 收敛定理([20])，另一方面又可应用这类映射解决 Lichnérowicz 猜想(Lichnérowicz conjecture)：一个紧 Riemann 流形的自同构共形群非紧，当且仅当该流形是一个球面([33])．

该理论中的大量结果涉及拟正则映射(即非同胚的拟共形映射)([34]，[37])．对此类映射已建立了高级值分布理论，且已证明了一个 Picard 型定理，而且发现对于 $n\geqslant 3$，在 $\mathbf{R}^n$ 中省略有限个点的可能性依赖于该映射的拟共形性系数([39]，[40])．

关于维数 $n=2$ 的拟共形映射理论的简洁而全面的介绍可参阅[2]，[32]；文献[37]，[48]，[16]，[19]致力于 $n\geqslant 3$ 的情形．在[17]及较新近的专题报告[51]中可找到大量的文献．论文[3]，[21]，[49]是国际数学会议上的综合报告．

参考文献

[1] Ahlfors, L. V., Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Math.*, **65** (1935), 157-194.

[2] Ahlfors, L. V., Lectures on quasi-conformal mappings, v. Nostrand, 1966.

[3] Ahlfors, L. V., Quasi-conformal mappings. Teichmüller spaces and Kleinian groups, in Proc. Internat. Congress Mathematicians, Helsinki, 1978, Acad. Sci. Fennica, 1980, 71-84.

[4] Ahlfors, L. V., Möbius transformations in several dimensions, Univ. Minnesota, 1981.

[5] Ahlfors, L. V. and Bers, L., Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. of Math.* (2), **72** (1960), 385-404.

[6] Ahlfors, L. V. and Bers, L., Spaces of Riemann surfaces and quasi-conformal mappings, Moscow, 1961.

[7] Белинский, П. П., Общие свойства квазиконформных отображений Новосибирск, 1974.

[8] Белинский, П. П., 《Сибирск. матем. ж.》, **14** (1973), 3, 475-483.

[9] Bers, L., Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, Chapman & Hall, 1958.

[10] Bers, L., Quasi-conformal mappings and Teichmüller's theorem, in Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 89-119.

[11] Bers, L., Uniformization, moduli and Kleinian groups, *Bull. London Math. Soc.*, **4** (1972), 257-300.

[12] Bers, L., Quasi-conformal mappings with applications to differential equations, function theory and topology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 1083-1100.

[13] Bers, L., An entremal problem for quasi-conformal mappings and a problem of Thurston, *Acta Math.*, **141** (1978), 73-98.

[14] Bers, L., Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **5** (1981), 131-172.

[15] Beurling, A. and Ahlfors, L. V., The boundary correspondence under quasi-conformal mappings, *Acta Math.*, **96** (1956), 125-142.

[16] Bojarski, B. and Ivaniec, T., Analytical foundations of the theory of quasi-conformal mappings in $\mathbf{R}^n$, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, **8** (1983), 257-324.

[17] Caraman, P., n-dimensional quasi-conformal (Qcf) mappings, Ed. Acad. Romanie & Abacus Press, 1974.

[18] Drasin, D., The inverse problem of Nevanlinna theory, *Acta Math*., **138** (1977), 83 − 151.

[19] Gehring, F. W., Rings and quasiconformal mappings in space, *Trans. Amer. Math. Soc*., **103** (1962), 353 − 393.

[20] Gehring, F. W., The Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math*., **336** (1964), 11, 1 − 21.

[21] Gehring, F. W., Topics in quasiconformal mappings, in Proc. Internat. Congress Mathematicians, Berkeley, 1986, Amer. Math. Soc., 1987, 62 − 80.

[22] Gol'dshtein, V. M., The behavior of mappings with bounded distortion when the coefficient of distortion is close to unity, *Siber. Math. J*., **12** (1971), 6, 900 − 907 (*Sibirsk. Mat. Zh*., **12** (1971), 6, 1250 − 1259).

[23] Grötzsch, H., Über die Verzerrung bei schlichten nichtkon-formen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, **80** (1928), 503 − 507.

[24] Grötzsch, H., Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, **84** (1932), 114 − 120.

[25] Kra, I., On the Nielsen-Thurston-Bers type of some selfmaps of Riemann surfaces, *Acta Math*. **146** (1981), 231 − 270.

[26] Крушкаль, С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975 (英译本: Krushkal', S. L., Quasi-conformal mappings and Riemann surfaces, Winston, 1979).

[27] Krushkal', S. L. and Kühnau, R., Quasi-konforme Abbildungen-neue Methoden und Anwendungen, Teubner, 1983.

[28] Lavrentieff, M. [M. A. Lavrent'ev], Sur une classe de réprésentation continues, *Rec. Math*., **42** (1935), 407 − 424.

[29] Лаврентьев, М. А., 《Докл. Акад. Наук СССР》, **20** (1938), 241 − 242.

[30] Лаврентьев, М. А., 《Изв. АН СССР》, **12** (1948), 513 − 554.

[31] Лаврентьев, М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962.

[32] Lehto, O. and Virtanen, K. I., Quasiconformal mappings in the plane, Springer, 1973.

[33] Lelong-Ferrand, J., Transformations conformes et quasiconformes des variétés Riemanniennes compactes (Démonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz), *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect*., **39** (1971), 1 − 44.

[34] Martio, O., Rickman, S. and Väisälä, J., Topological and metric properties of quasi regular mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math*., **488** (1971), 1 − 31.

[35] Mostow, G. D., Quasiconformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, *Publ. Math. IHES*, **34** (1968), 53 − 104.

[36] Nevanlinna, R., On differentiable mappings, in Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 3 − 9.

[37] Reshet'nyak, Yu. G., Space mappings with bounded distortion, Amer. Math. Soc., 1989 (译自俄文).

[38] Reshet'nyak, Yu. G., Stability theorems in geometry and analysis, Новосибирск, 1982.

[39] Rickman, S., On the number of omitted values of entire quasiregular mappings, *J. d'Anal. Math*., **37** (1980), 100 − 117.

[40] Rickman, S., The analogue of Picard's theorem for quasiregular mappings in dimension three, *Acta Math*., **154** (1985), 195 − 242.

[41] Sullivan, D., On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, in Riemann Surfaces and Related Topics (Proc. 1978 Stony Brook Conf.), Princeton Univ. Press, 1981, 465 − 496.

[42] Sullivan, D., Quasi-conformal homeomorphisms and dynamics Ⅰ. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. of Math*., **122** (1985), 401 − 418.

[43] Sullivan, D., Quasi-conformal homeomorphisms and dynamics Ⅱ. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups, *Acta Math*., **155** (1985), 243 − 260.

[44] Teichmüller, O., Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl*., **22** (1940), 1 − 197.

[45] Tukia, P., Quasiconformal extension of quasisymmetric mappings compatible with a Möbius group, *Acta Math*., **154** (1985), 153 − 193.

[46] Tukia, P. and Väisälä, J., Quasiconformal extension from dimension n to $n+1$, *Ann. of Math*., **115** (1982), 331 − 348.

[47] Tukia, P. and Väisälä, J., Bilipschitz extension of maps having quasiconformal extension, *Math. Ann*., **269** (1984), 561 − 572.

[48] Väisälä, J., Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture notes in math., 229, Springer, 1971.

[49] Väisälä, J., A survey of quasiregular maps in $\mathbf{R}^n$, in Proc. Internat. Congress Mathematicians, Helsinki, 1978, Acad. Sci. Fennica, 1980, 685 − 691.

[50] Векуа, И. Н., Обобщенные аналитичесие функции, М., 1959 (英译本: Vekua, I. N., Generalized analytic functions, Pergamon, 1962).

[51] Vuorinen, M., Conformal geometry and quasiregular mappings, Lecture notes in Math, 1319, Springer, 1988.

[52] Зорич, В. А., 《Матем. сб.》, 74 (1967), 417-433.

В. А. Зорич 撰

【补注】 可测 Riemann 映射定理首先被 C. B. Morrey ([A1]) 所证明. L. V. Ahlfors 与 L. Bers 的重要论文[5]证明, 若 $\mu(x)$ 以连续(或连续可微, 或实解析, 或复解析)的方式依赖于参数 t, 则 Beltrami 方程(1)的解 f 亦然.

参考文献

[A1] Morrey, C. B., On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43 (1938), 126-166.

[A2] Gol'dshtein, V. and Reshent'nyak, Yu. G., Quasiconformal mappings and Sobolev spaces, Kluwer, 1990 (译自俄文).

杨维奇 译

拟循环群 [quasi-cyclic group; квазициклическая группа], p^∞ 型群(group of type p^∞)

每个真子群都是循环群(cyclic group)的无限 Abel p 群(p-group). 对每个素数 p, 有一个拟循环群并且在同构意义下只有一个. 此群同构于方程

$$x^{p^n}=1,\ n=1,2,\cdots$$

在复数域中的所有根关于通常乘法的乘法群, 也同构于 Q_p/Z_p, 这里 Q_p 指有理 p 进数域的加法群而 Z_p 指 p 进整数环的加法群. 拟循环群是 p^n 阶循环群 $C_n(n=1,2,\cdots)$ 所做成的升链的并, 确切地说, 它是关于归纳系 (C_n,φ_n) 的归纳极限

$$\varinjlim C_n.$$

用生成元和生成关系来定义它是有可数生成元系 a_1, $a_2\cdots$, 和关系

$$a_1^p=1,\ a_{n+1}^p=a_n,\ n=2,3,\cdots$$

的群. 拟循环群是具有下面性质的仅有的无限 Abel 群(仅有的局部有限的无限群): 它的所有真子群是有限群. 具此性质的无限非 Abel 群的存在性问题尚未解决(1978), 它是 О. Ю. Шмидт 问题之一.

拟循环群是可除 Abel 群(见**可除群**(divisible group)), 而每个可除 Abel 群是一组群的直接和其中每个群或同构于有理数加法群或同构于关于某素数 p 的拟循环群. p^∞ 型群是复数乘法群的极大 p 子群, 也是有理数模 1 加法群的极大 p 子群. p^∞ 型群的自同态环同构于 p 进整数环. 拟循环群是其自身的 **Frattini 子群**(Frattini subgroup).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 1982).

[2] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, М., 1972 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】 拟循环群在西方称为 Prüfer 群(Prüfer group).

李慧陵 译

拟二面体群 [quasi-dihedral group; квазидиэдральная группа]

由生成元 x, y 和定义关系

$$x^{2^{m-1}}=y^2=x^{-1+2^{m-2}}yx^{-1}y=1,$$

其中 $m\geqslant 4$, 所定义的 2 群. 拟二面体群的阶为 2^m; 它有一个指数为 2 的循环的不变子群. 对它如此命名是由于其定义关系与**二面体群**(dihedral group)的定义关系相似; 但是对任何 m, 拟二面体群与二面体群都不同构. 拟二面体群有时称为半二面体群(semi-dihedral group).

参考文献

[1] Huppert, B., Endliche Gruppen, I, Springer, 1967 (中译本: 贝·胡佩特, 有限群论, 第一卷, 福建人民出版社, 1992).

Н. Н. Вильямс 撰 李慧陵 译

拟离散谱 [quasi-discrete spectrum; квазидискретный спектр]

遍历理论(ergodic theory)和**拓扑动力学**(topological dynamics)中的一个术语, 例如, 在下述情形使用: 一个动力系统(流、瀑布或生成后者的变换)具有拟离散谱(或者说, 具有拟离散谱的系统, 具有拟离散谱的流, 等等).

在遍历理论中, "具有拟离散谱的变换"这个概念实际上只涉及到 **Lebesgue 空间**(Lebesgue space)(X,μ) 的遍历自同构 T (虽然下面给出的定义形式上也适用于更一般的情形). 对于 T, 我们用归纳法定义 n 阶拟本征函数(quasi-eigen function)和拟本征值(quasi-eigen value). 一阶拟本征函数是对应于 $L_2(X,\mu)$ 中位移算子

$$U_T: f(x)\mapsto f(Tx)$$

的通常的本征函数, 即几乎处处(以下也作同样假定)满足 $f(Tx)=\lambda f(x)$ 的非零函数 $f\in L_2(X,\mu)$, 这里, λ 是常数(本征值, 它是一阶拟本征值). 如果 $f\in L_2(X,\mu)$, $f\neq 0$ 且 $f(Tx)=\varphi(x)f(x)$, φ 是 n 阶拟本征函数, 则 f 称为 $n+1$ 阶拟本征函数, φ 是

(相同阶的)相应的拟本征值.(在[2]中,代替拟本征函数和拟本征值,称为广义本征函数(generalized eigen function)和广义本征值(generalized eigen value).)由 T 的遍历性推知,对任意拟本征函数 f 有 $|f(x)|=$ 常数,且若 f 又是一个拟本征值,则 $|f(x)|=1$. 因此,常常把正规化条件 $|f(x)|=1$ 包含在拟本征函数的定义中. 称 T 具有一个拟离散谱(quasi-discrete spectrum),如果所有可能阶数的拟本征函数组成 $L_2(X,\mu)$ 的**完全系**(complete system). 这时,在附加要求:自同构 T 是完全遍历的(completely ergodic)(即它的所有幂都是遍历的)之下,有完整的结果. 这样的自同构 T 有一个完全度量的分类,它们的性质是熟知的([3]). 拟离散谱的概念及与之相关的理论可以推广到 Lebesgue 空间的局部紧交换变换群上(特别地,可推广到**可测流**(measurable flow);见[4]中对 T. Wieting 的结果的介绍.

虽然"拟离散谱"从表面上看是为了处理动力系统的某一类谱而提出的,但具有拟离散谱的瀑布 $\{T^n\}$ 的性质实际上并不是谱的性质,即它不能用位移算子 U_T 的谱性质来表示. 即使已经知道一个瀑布具有拟离散谱,这个谱仍然不能唯一确定其度量性质. 拟离散谱的引人正是源于具有相同谱而又度量不同构的遍历瀑布的第一个例子([1],亦见[2]). 在该例子中,诸瀑布具有拟离散谱,但其中之一有 3 阶拟本征函数,其他的瀑布却没有.

在拓扑动力学中,拟离散谱的概念是对紧统 X 的同胚 T 引人的,且假定它是完全极小的(completely minimal)(即它的所有幂都是极小的). 用 $C(X)$(连续复值函数空间)代替 $L_2(X,\mu)$,可按前面一样的方式定义拟本征函数和拟本征值. T 具有拟离散谱,如果拟本征函数分离 X 的点. 此理论的拓扑说法与度量的说法大体雷同(见[5]~[7]). 但是,从瀑布的拓扑理论过渡到具有拟离散谱的流的理论需要本质上不同的论证,在某种程度上,甚至必须超出拓扑动力学通常概念的范围(考察其同胚 T_t 对 t 具有间断依赖性的流 $\{T_t\}$ 是合情合理的). 见[8],[9]).

参考文献

[1] Halmos, P. R. and Neumann, J. von, Operator methods in classical mechanics, *Ann. of Math.*, **43**(1942), 2, 332-350.

[2] Halmos, P. R., Lectures on ergodic theory, Math. Soc. of Japan, 1956.

[3] Абрамов, Л. М., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **26**(1962), 4, 513-530.

[4] Zimmer, R. J., Ergodic actions with generalized spectrum, *Illinois J. Math.*, **20**(1976), 555-588.

[5] Hahn, F. and Parry, W., Minimal dynamical systems with quasi-discrete spectrum, *J. London Math. Soc.*, **40**(1965), 2, 309-323.

[6] Hahn, F. and Parry, W., Some characteristic properties of dynamical systems with quasi-discrete spectra, *Math. Systems Theory*, **2**(1968), 2, 179-190.

[7] Brown, J. R., Ergodic theory and topological dynamics, Acad. Press, 1976.

[8] Hahn, F., Discrete real time flows with quasi-discrete spectra and algebras generated by exp $q(t)$, *Israel J. Math.*, **16**(1973), 1, 20-37

[9] Parry, W., Notes on a posthumous paper by F. Hahn, *Israel J. Math.*, **16**(1973), 1, 38-45.

Д. В. Аносов 撰 白苏华 胡师度 译

拟椭圆空间[**quasi-elliptic space; квазиэллиптическое пространство**]

一种 n 维射影空间,其射影度量由具 $(n-m-1)$ 维顶点(绝对平面 T_0)的虚锥面(绝对锥面 Q_0)和该 $(n-m-1)$ 维平面上的一个虚 $(n-m-2)$ 维二次曲面 Q_1(绝对二次曲面 Q_1)组成的**绝对形**(absolute)定义;用记号 S_n^m 表示,$m<n$. 拟椭圆空间与 Euclid 空间和上 **Euclid 空间**(co-Euclidean space)相比属于更一般的射影类型;后者的度量可由前者的度量得到. 拟椭圆空间是**半椭圆空间**(semi-elliptic space)的特殊情形. 对于 $m=0$,绝对锥面是与 $(n-1)$ 维绝对平面 T_0 重合的一对重合的 $(n-1)$ 维平面,而此时绝对形与 n 维 Euclid 空间的绝对形重合. 对于 $m=n-1$,锥面 Q_0 是具有一个点顶点的锥面,而此时的绝对形与 n 维上 Euclid 空间的绝对形相同. 当 $m=1$ 时,锥面 Q_0 是一对虚 $(n-1)$ 维平面. 特别是,拟椭圆 3 维空间 S_3^1 的锥面 Q_0 是一对虚 2 维平面,直线(1 维平面)T_0 是该两平面交成的实直线,而二次曲面 Q_1 是 T_0 上的一对虚点.

当直线 XY 与 $(n-m-1)$ 维平面 T_0 不相交时,这两点 X 和 Y 之间的距离 δ 由关系式

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho}=\frac{(\mathbf{x}^0E_0\mathbf{y}^0)^2}{(\mathbf{x}^0E_0\mathbf{x}^0)(\mathbf{y}^0E_0\mathbf{y}^0)}$$

定义,其中

$$\mathbf{x}^0=(x^a,\ a\leqslant m),\ \mathbf{y}^0=(y^b,\ b\leqslant m)$$

是点 X 和 Y 的向量,E_0 是在这些向量的空间中定义标量积的线性算子,ρ 是一个实数;当 XY 与 T_0 相交时,这两点间的距离 d 由点 X 和 Y 的向量之间的距离定义:

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}^1-\mathbf{x}^1,$$

$$\mathbf{x}^1=(x^a,\ a>m),\ \mathbf{y}^1=(y^b,\ b>m),$$

$$d^2=\mathbf{a}E_1\mathbf{a},$$

其中 E_1 是在这些向量的空间中定义标量积的线性算子.

当两个平面交成的 $(n-2)$ 维平面与 $(n-m-1)$ 维平面 T_0 不相交时，这两个平面的夹角是用它们在对偶拟椭圆空间 S_n^{n-m-1} 中的对应点之间的（规范）距离来定义的，其对应点在 S_n^{n-m-1} 中的坐标数值上与该平面在 S_n^m 中的射影坐标相等或成比例．如果给定的两个平面交成的 $(n-2)$ 维平面与 $(n-m-1)$ 平面 T_0 相交，那么，这两个平面之间的夹角就由数值距离定义．当 $n=2$ 时，平面的夹角就是直线的夹角．

拟椭圆空间 S_n^m 中的运动是这个空间中将锥面 Q_0 映到平面 T_0 并将二次曲面 Q_0 映到自身的直射变换．运动所成的群是一个 Lie 群，运动可用正交算子描述．在拟椭圆空间 S_{2m+1}^m 中，它是自对偶空间，上运动（co-motions）是指这种直射变换：它将每一对点映为两个 $2m$ 维平面且这两个平面的夹角与这两点之间的距离成比例，并将任何一对 $2m$ 维平面映为两个点且这两点之间的距离与这两个平面的夹角成比例．S_{2m+1}^m 的运动和上运动组成群，它是 Lie 群．2 维平面 S_2^0 的几何学是 Euclid 几何学，而 2 维平面 S_2^1 的几何学则与上 Euclid 平面的几何学相同．

3 维空间 S_3^1 的几何学由直线上的椭圆射影度量决定，它在平面上是上 Euclid 的，而在平面把上是 Euclid 的．3 维空间 S_3^0 的几何学是 Euclid 的，而 S_3^2 的几何学与 3 维上 Euclid 空间的几何学相同．曲率半径为 $1/2$ 的空间 S_3^1 等距于具一个特定度量的 2 维 Euclid 空间的连通运动群．拟 Euclid 空间 S_3^1 的连通运动群同构于 2 维 Euclid 空间的两个连通运动群的直积．

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A. [B. A. Rozenfel'd], A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988（译自俄文）.

[A2] Giering, O., Vorlesungen über höhere Geometrie, Vieweg, 1982.

潘养廉 译

拟等价表示 [quasi-equivalent representations; квазиэквивалентные представления]

Hilbert 空间 H_1 和 H_2 中一个群 X 的两个酉表示（unitary representation）（或对称代数 X 的对称表示），分别满足以下四个等价条件之一：1) 存在酉等价表示 ρ_1 和 ρ_2 使得 ρ_1 是 π_1 的倍式而 ρ_2 是 π_2 的倍式；2) π_1 的非零子表示不是与 π_2 不相交，而 π_2 的非零子表示不是与 π_1 不相交；3) π_2 酉等价于 π_1 的有单位中心支柱的某个倍式表示 ρ_1 的一个子表示；或 4) 存在一个由集合 $\pi_1(X)$ 生成的 von Neumann 代数（von Neumann algebra）到由集合 $\pi_2(X)$ 生成的 von Neumann 代数上的同构 Φ，使得对所有的 $x\in X$，$\Phi(\pi_1(x))=\pi_2(x)$．酉等价表示是拟等价表示；不可约拟等价表示（见**不可约表示**（irreducible representation））是酉等价的．如果 π_1 和 π_2 是拟等价表示且 π_1 是一个**因子表示**（factor representation），则 π_2 也是如此；一个因子表示和它的一个非零子表示是拟等价表示；两个因子表示要么是不相交的要么是拟等价的．拟等价表示的概念对局部紧群和对称代数分别地导致拟对偶对象和拟谱的概念．

参考文献

[1] Dixmier, J., C^* algebra, North-Holland, 1977（译自法文）.

А. И. Штерн 撰

【补注】 带有表示空间 H 和 H' 的（群或代数的）两个表示 π 和 π' 称为不相交的（disjoint），如果在 π 和 π' 之间不存在非零的交结算子（intertwining operator）．这里 π 和 π' 之间的交结算子是一个连续线性算子 $T: H\to H'$，使得对所有 x，$T\pi(x)=\pi'T(x)$．

葛显良 译 吴绍平 校

拟 Euclid 空间 [quasi-Euclidean space; квазиевклидово пространство]

一种 2 维空间，在它的一点处给定的每个方向可以含于一个方向场中，该场的方向可以沿任何道路平行移动（即拟 Euclid 空间容有绝对平行性）．拟 Euclid 空间的测地线可划分成 ∞^1 族绝对平行方向场的向量线，其中每一族与别的 3 族组成常数交比（cross ratio）：

$$\frac{k-k_1}{k_2-k}:\frac{k_3-k_1}{k_2-k_3}=\text{常数},$$

这里 $k=du^2/du^1$ 是角方向系数．每一族测地线由 3 个常数通过一阶方程

$$\frac{a_p du^p}{b_q du^q}=\text{常数}$$

决定．

参考文献

[1] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A. [B. A. Rozenfel'd], A history of non-euclidean geometry, Springer, 1988（译自俄文）.

潘养廉 译

拟 Frobenius 环 [quasi-Frobenius ring; квазифробениусово кольцо], QF 环（QF-ring）

（左或右）**Artin 环**（Artinian ring），对每个左（或右）理想 L（相应地，H）满足零化子条件

$$\mathfrak{Z}_l(\mathfrak{Z}_r(L)) = L \text{ 和 } \mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_l(H)) = H$$

(见**零化子**(annihilator)). 仅满足一个零化子条件的左 Artin 环未必是拟 Frobenius 环. 拟 Frobenius 环以它的对偶性引起人们的兴趣: 左 Artin 环 R 是拟 Frobenius 环, 当且仅当映射

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, R)$$

在左和右的有限生成 R 模范畴之间定义一个对偶. 域 P 上的有限维代数 A 是拟 Frobenius 环, 当且仅当左 A 模 $\mathrm{Hom}_P(A_A, P)$ 的每个不可约直和项同构于 A 的某个极小左理想. 这等价于 A 的左和右的理想格的自对偶性.

Frobenius 代数由右和左正则表示是等价的这一要求所确定, 而拟 Frobenius 环是作为 Frobenius 代数的推广而引入的. 对于左和右 Artin 环 R, 成为拟 Frobnius 环的性质起初是以下述方式定义的: 若 $e_1, \cdots, e_n$ 是 R 的本原幂等元的完全集(即对 $i \neq j$, $Re_i \not\cong Re_j$, 而对任意本原幂等元 e, 存在某个 e_i, 使得 $Re \cong Re_i$), J 是 R 的根, $\varphi: R \to R/J$ 是自然同态, 则存在集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的一个置换 π, 使得

$$\mathrm{Soc}(e_i R) \cong \varphi(e_{\pi(i)} R) \text{ 和 } \mathrm{Soc}(R e_{\pi(i)}) \cong \varphi(R e_i),$$

这里 $\mathrm{Soc}(M)$ 是模 M 的**基座**(socle). R 成为拟 Frobenius 环的性质等价于下述性质中的每一个: 1) R 是左 Noether 的(见 **Noether 环**(Noetherian ring)), 对每个右理想 H, $\mathfrak{Z}_r(\mathfrak{Z}_l(H)) = H$, 对任意左理想 L_1 和 L_2, $\mathfrak{Z}_r(L_1 \cap L_2) = \mathfrak{Z}_r(L_1) + \mathfrak{Z}_r(L_2)$; 2) R 满足左(或右)零化子理想极大条件(特别当 R 是左和右 Noether 环时), 并且是左和右自内射的(见**自内射环**(self-injective ring)); 3) R 是右 Artin 的, 左和右自内射的; 4) 每个内射(投射)左 R 模是投射(内射)的(见**投射模**(projective module); **内射模**(injective module)); 5) 每个平坦左 R 模是内射的(见**平坦模**(flat module)); 6) R 是左和右自内射的, 并且是右完满的(见**完满环**(perfect ring)); 7) R 是左和右自内射的, 并且每个右理想是 R 中某个有限集的零化子; 8) R 是右完满的, 并且每个有限生成左 R 模包含于一个投射模内; 9) R 是凝聚的(见**凝聚环**(coherent ring)), 右完满的, 并且对所有有限表现左 R 模 M, $\mathrm{Ext}_R(M, R) = 0$; 10) R 满足左零化子极大条件, 并且对所有有限表现左 R 模 M, $\mathrm{Ext}_R(M, R) = 0$; 11) R 是左和右 Artin 的, 并且对每个有限生成左 R 模 M, 模 M 和 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ 有相同的长度; 12) 每个自由左 R 模的自同态环是左自内射的; 或 13) 左 R 模范畴的投射生成元(内射上生成元)的自同态环的有限生成单侧理想是一个零化子.

拟 Frobenius 环的内射模分裂成循环模的直和. 对交换环, 其逆亦真. 如果环 R 的 **Jacobson 根**(Jacobson radical) J 是超限幂零的(即对某个超穷数 α, $J^\alpha = 0$, 这里 $J^1 = J$, $J^\alpha = J^{\alpha-1} J$, 而对极限序数 α, $J^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} J^\beta$), 则 R 是拟 Frobenius 环, 当且仅当 R 是左自内射的, 并且它的所有单侧理想是零化子. 拟 Frobenius 环 R 上的左模是忠实的, 当且仅当它是左 R 模范畴的一个生成元. 群环 RG 是拟 Frobenius 环, 当且仅当 G 是有限群, R 是拟 Frobenius 环.

还研究了拟 Frobenius 环的某些推广: 左 QF-3 环(left QF-3-ring) R 定义为要求存在一个忠实左 R 模, 以直和项的形式包含于任何忠实左 R 模内; 左 QF-3′ 环(left QF-3′-ring) R 定义为要求左 R 模 R 的内射包可以嵌入于 R 的若干重直积内. 左伪 Frobenius 环(left pseudo-Frobenius ring)(或左 PF 环(left PF-ring))由下述每个性质定义: a) R 是左 R 模范畴的一个内射上生成元; b) 每个忠实左 R 模是左 R 模范畴的一个生成元; 或 c) R 是一个左 QF-3 环, 并且异于 R 的任何右理想的零化子非零.

参考文献

[1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[2] Модули. [в.] 2, Новосиб., 1973, 42 – 48.

[3] Faith, C., Algebra: ring, moduks and categories, 1, Springer.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kasch, F., Modules and rings, Acad. Press, 1982 (译自德文).

[A2] Tachikawa, H., Quasi-Frobenius rings and generalizations, QF-3 and QF-1 ring, Lecture notes in math., 351, Springer, 1973.

蔡传仁 译

拟测地线 [**quasi-geodesic line 或** quasi-geodesic; **квазигеодезическая линия**]

曲面上的一种曲线, 它的任何线段上的右旋转和左旋转有相同的符号(见**曲线的突转**(swerve of a curve)). 例如, 透镜的棱是拟测地线.

拟测地线类实质性地扩大了测地线类(见**测地线**(geodesic line)), 使(长度和位置均有界的)测地线族成为紧集. 在曲率有界的 2 维流形 M 中, 过每一点在每个方向至少有一条拟测地线; 它可以不断延拓. 拟测地线的线段(其端点不是 M 上曲率为 2π 的点)是那些正常收敛于 M 的光滑曲面上的测地线的极限.

参考文献

[1] Александров, А. Д., Бураго Ю. Д., «Тр. ма-

тем. ин-та АН СССР», 76 (1965), 49 – 63.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1972(译自俄文).

潘养廉 译

拟群 [quasi-group; квазигруппа]

一个定义了二元运算(通常称为乘法)的集合,并对该集合中任意元素 a, b, 方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 都有唯一解. 有单位元的拟群称为**幺拟群**(loop).

拟群是群(group)概念的自然推广. 拟群出现于许多数学领域内,如射影平面理论,非结合可除环理论以及组合分析的一些问题,等等."拟群"这一用语是 R. Moufang 引入的;就是在她关于非 Desarques 平面的工作(1935)以后,拟群理论的发展才真正开始了,在那一个工作中她描述了此类平面与拟群的联系.

基本概念. 映射 $R_a: x \to xa$ 和 $L_a: x \to ax$ 称为元素 a 定义的右平移(right translation)(或右位移(right displacement))和左平移(left translation)(或左位移(left displacement)). 在拟群中平移是其元素集合的置换(permutation of a set). 在集合 Q 的全体置换组成的群中由拟群 $Q(\cdot)$ 的全部平移生成的子群 G 称为与拟群 $Q(\cdot)$ 相伴的群. G 和 $Q(\cdot)$ 的结构之间有密切的关系.

拟群的同态象一般说来不一定是拟群,但一定是具有除法的广群(groupoid). 与拟群到另一拟群上的同态相对应的是所谓正规同余(normal congruence)($Q(\cdot)$ 上的同余 θ(见合同(代数学中的)(congruence (in algebra))是正规的,如果由 $ac\theta bc$ 或 $ca\theta cb$ 可推出 $a\theta b$). 在群中所有同余都是正规的. 一个子拟群 H 称为正规的(normal),如果存在一正规同余 θ 使 H 为一同余类. 拟群上可能有这样的同余,在其中两个甚至所有关于 θ 的同余类都是子拟群.

与集合上的每个拟群运算伴随着两个另外的运算,称为左除和右除运算,分别记作 / 和 \. 它们的定义如下: $z/y=x$ 和 $z\backslash x=y$, 如果 $xy=z$. 考虑到 x, y, z 的全部排列,于是可从起初的一个运算得到五个另外的拟群运算. 由基本运算到某一个新运算的转移称为共生(parastrophy). 在一拟群中如果所有这些运算都和基本运算相同,这个拟群就称为全对称的(totally-symmetric)或 TS 拟群(TS-quasi-group). TS 拟群也可定义成满足恒等式 $xy=yx$ 和 $x(xy)=y$ 的拟群. 幂等的 TS 拟群(即满足附加的关系式 $x^2=x$ 的 TS 拟群)称为 Steiner 拟群(Steiner quasi-group). 它们与 Steiner 三元系(见 **Steiner 系**(Steiner system))有密切联系.

拟群理论中一个最重要的概念是**同痕**(isotopy). 两个拟群 Q 和 Q_1 称为同痕的,如果存在三个一一对应 $\rho,\sigma,\tau: Q \to Q_1$, 使得对一切 $x,y\in Q$, $(xy)^\rho = x^\sigma y^\tau$. 定义在一个有有限基数 n 的集合上的不同痕拟群的个数仅在 $n \leqslant 8$ 时已知(1978).

拟群的基本类. 有关拟群的早期文章与群的推广有关,那里把结合性的要求用较弱的条件,即现今称为"A"和"B" Сушкевич 公设(Sushkevich postulate)来代替. 一个拟群满足"A" Сушкевич 公设,如果方程 $(ab)c=a(bx)$ 的解仅依赖于 b 和 c, 满足"B"公设,如果解仅依赖于 c. 已经证明这种拟群类总与群同痕. 如果这一方程的解依赖于 a 和 c, 则拟群称左 F 拟群(left F-quasi-group). 右 F 拟群(right F-quasi-group)可由方程 $(ab)c=x(bc)$ 类似地定义. 既是左 F, 又是右 F 的拟群称为 **F 拟群**(F-quasi-group). 幂等的 F 拟群称为分配拟群(distributive quasi-group), 它可以由等式

$$(yz)x=(yz)(zx),\ x(yz)=(xy)(xz)$$

来定义,这些等式称为分配恒等式(distributive identity). 已经证明分配拟群同痕于 Moufang **幺拟群**(loop). 并非所有的拟群都同痕于群. 一拟群 $Q(\cdot)$ 称为中间的(medial), 如果下面的恒等式成立

$$(xy)(uv)=(xu)(yv).$$

每个中间拟群都同痕于一个 Abel 群 $Q(\cdot)$, 而对应的同痕形如

$$x\cdot y=\varphi x+\psi(y)+c,$$

其中 φ,ψ 为群的交换自同构, 而 c 是 Q 中某个元素(豊田定理(Toyoda theorem)).

拟群系和函数方程. 设在一集合 Q 上定义了一个拟群系. 此时各运算用字母表示更为方便: 例如,用 $A(a,b)=c$ 代替 $ab=c$. Q 上的各拟群运算假设有某种形式的关系,通常用称为"函数方程"的等式来表示. 研究找寻 Q 上满足函数方程的拟群系的问题是经常的. 比如说,一般结合律方程(equation of general associativity)

$$A_1[A_2(x,y),z]=A_3[x,A_4(y,z)] \qquad (1)$$

已经解出;就是说可以证明,若四个拟群满足(1),则它们同痕于同一个群 $Q(\cdot)$, 而通解可以由等式给出:

$$A_1(x,y)=\alpha x\cdot\beta y,\ A_2(x,y)=\alpha^{-1}(\varphi x\cdot\psi(y)),$$
$$A_3(x,y)=\varphi x\cdot\theta y,\ A_4(x,y)=\theta^{-1}(\psi x\cdot\beta y),$$

其中 $\alpha, \beta, \varphi, \psi, \theta$ 是 Q 的任意置换．一般中间性方程(equation of general mediality)

$$A_1[A_2(x,y), A_3(u,v)] = A_4[A_5(x,u), A_6(y,v)]$$

也可解出，此处六个拟群也同痕于同一 Abel 群．

n 拟群．一个具有 n 元运算的集合称为 n 拟群，若每个方程

$$a_1 \cdots a_{i-1} x a_{i+1} \cdots a_n = b$$

(此处 $b, a_1, \cdots, a_n \in Q$，$i = 1, 2, \cdots, n$)都有唯一解．拟群论的基本概念(同痕，共生，等等)也可延伸到 n 拟群上去．每个 n 拟群都同痕于某个 n 幺拟群(loop)．

通常二元拟群的某些类(例如中间拟群和 TS 拟群类等)在 n 拟群中也有相似的类．一个 n 元运算 A 称为可约的(reducible)，如果存在两个至少是二元的运算 B 和 C，使得

$$A(x_1, \cdots, x_n) =$$

$$= B(x_1, \cdots, x_{i-1}, C(x_i, \cdots, x_j), x_{j+1}, \cdots, x_n).$$

(此处可简记作 $A = B \overset{i}{+} C$)．否则 A 称为不可约的(irreducible)．与正整数的素因子分解定理相类似的定理对 n 拟群也成立．

组合问题．有限拟群的乘法表，即 **Cayley 表**(Cayley table)，在组合学中称为 **Latin 方**(Latin square)．拟群理论中的寻找一个给定集合上的相互正交的拟群系的问题对构造有限射影平面十分重要．同一集合 Q 上定义的两个拟群 A 和 B 是正交的(orthogonal)，如果方程组 $A(x,y) = a$，$B(x,y) = b$ 对 Q 中任意的 a 和 b 有唯一解．有限拟群的正交性等价于它们的 Latin 方的正交性．已经证明定义在一个 n 元集合上的两两正交的拟群系中不能包含多于 $n-1$ 个拟群．

与拟群有关的另一个组合学概念是全置换(full permutation)．一个拟群 $Q(\cdot)$ 的置换 φ 称为全置换，如果 $\varphi': x \to x\varphi x$ 也是 Q 的置换．并非每个拟群都有全置换．具有全置换的拟群称为容许的(admissible)．对容许群存在一个与之正交的拟群，而反过来也是对的：若一个群有一个拟群与其正交，则该群是容许的．若一个 n 阶有限拟群是容许的，则可由它出发按特别的手续得到一个 $n+1$ 阶的拟群(扩张)．

代数网．借助代数网(algebraic net)(亦称代数罗(algebraic web))拟群有一个自然的几何解释(见罗的几何学(webs, geometry of))．代数网是一个由两种类型元素，即线和点组成的集合 N，并带有这些元素间的某个关联关系(也可用"通过…"或"在…上"等表述来代替"关联"一词)．设 N 内的线分成三类而使下列公理成立：1)不同类的两条线与 N 中恰好一个共同的点关联；2)每个点与每类中恰好一条线关联．则 N 称为一个 3 网．同样地，k 网可用分成 k 类来定义．每类中线的条数(集合的基数)是相同的并等于网中每条线上的点数(线上点集合的基数)．这个数称为网的阶(order of the net)．网可用拟群按下法给出坐标：假设已给定一个 3 网 N，它的线集为 L_1, L_2, L_3．取 Q 为基数等于 N 的阶的集合．设在 Q 与每个 L_i 之间取定一个一一对应，于是 L_i 中每条线都有一 Q 中元素为其坐标．集合 Q 在如下定义的运算下成为一拟群(网的坐标拟群(coordinate quasi-group of the net))：$xy = z$ 当且仅当 L_1 中坐标为 x 的线与 L_2 中坐标为 y 的线的公共点落在 L_3 中坐标为 z 的线上．反过来，每个拟群都是某 3 网的坐标拟群．对于 Q 与各 L_i 的不同的一一对应，可得到 Q 上的不同的但相互同痕的拟群结构．每个类 L_1, L_2, L_3 的次序取定的 3 网对应相互同痕的全体拟群的类．而坐标拟群的共生则对应网中各类 L_i 的一个重新排列．

对应于 3 网的每个性质都有拟群的一个同痕－不变性质(即泛性质)与之对应．这种性质的例子如**闭包条件**(closure condition)，熟知的闭包条件有 Thomsen 条件，Reidemeister 条件，Bol 条件和六边形闭包条件．坐标拟群的 Thomsen 条件的含意是：对拟群的元素 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$，关系 $x_1 y_2 = x_2 y_1$ 及 $x_1 y_3 = x_3 y_1$ 可推出关系 $x_2 y_3 = x_3 y_2$，在一个拟群内 Thomsen 条件成立，当且仅当它同痕于 Abel 群．对其余的闭包条件可以得到拟群的类似刻画．

k 网可用 $k-2$ 个相互正交的拟群给出坐标．

参考文献

[1] Белоусов, В. Д., Основы теории квазигрупп и луп, М., 1967.

[2] Итоги науки, Алгебра, Топология, Геометрия, 1965, М., 1967, 63－81.

[3] Bruck, R. H., A survey of binary systems, Springer, 1971.

[4] Bruck, R. H., What is a loop, in Albert, A. A. (ed.), Studies in Modern Algebra, Studies in Math. Vol. 2, Math. Assoc. Amer., 1962, 59－99.

[5] Aczél, J., Quasigroups, nets and nomograms, *Adv. Math.*, 1(1965), 3, 383－450.

В. Д. Белоусов 撰

【补注】 Moufang 的原始文章为[A1]．

关于拟群，Steiner 系以及更一般的组合结构(如两两平衡设计)的联系的新建成果和更全的文献，见[A5]．

关于拟群、Latin 方和 3 网的联系，见[A3]，[A4]．拟群与 3 网的相互对应可用以从几何观点来研究拟群的代数结构，即考察诸如同射群，保持类不变的所有同射的群和对应 3 网的射影群等几何不变量．

有关某些旧的文献可参看[A10]、[A11].

参考文献

[A1] Moufang, R., Zur Struktur von Alternativkorpern, *Math. Ann.*, 110(1935), 416 – 430.

[A2] Barlotti, A. and Strambach, K.. The geometry of binary systems, *Adv. Math.*, 49(1983), 1 – 105.

[A3] Dénes, J. and Keedwell, A. D.. Latin squares and their applications, English Univ. Press, 1974.

[A4] Pickert, G., Projektive Ebenen, Springer, 1975.

[A5] Bennett, F. E., The spectra of a variety of quasigroups and related combinatorial designs, *Discr. Math.*, 77(1989), 29 – 50.

[A6] Belousov, V. D., Algebraic nets and quasi-groups, Kishinev, 1971.

[A7] Belousov, V. D., n-ary quasi-groups, Kishinev, 1972.

[A8] Belousov, V. D., Configurations in algebraic nets, Kishinev, 1979.

[A9] Chein, O., Pflugfelder, H. and Smith, J. D. H. (eds.), Theory and applications of quasi-groups and loops, Heldermann, 1990.

[A10] Reidemeister, K., Grundlagen der Geometrie, Springer, 1930.

[A11] Blaschke, W. and Bol, G., Geometrie der Gewebe, Springer, 1938.

李慧骏 译

拟双曲空间[quasi-hyperbolic space; квазигиперболическое пространство]

一种 n 维射影空间，其中的度量由一个具 $(n-m-1)$ 维顶点（绝对平面 T_0）的指标为 k 的绝对锥面 Q_0 和这个 $(n-m-1)$ 维平面上的一个指标为 l 的 $(n-m-2)$ 维二次曲面（绝对二次曲面 Q_1）组成的**绝对形**（absolute）定义．这样的空间称为指标为 k 和 l 的拟双曲空间（quasi-hyperbolic space），用记号 ${}^{kl}S_n^m$ 表示（$m<n$）．拟双曲空间是**半双曲空间**（semi-hyperbolic space）的特别情形．从双曲空间 ${}^lS_n$ 通过使 ${}^lS_n$ 的绝对形变换成拟双曲空间 ${}^{kl}S_n^m$ 的绝对形的极限过程可以得到 ${}^{kl}S_n^m$.

当 $m=0$ 时，锥面 Q_0 是与平面 T_0 相同的一对重合平面，而此时空间的绝对形与**伪 Euclid 空间**（pseudo-Euclidean space）${}^lR_n$ 的绝对形相同．当 $m=1$ 时，锥面 Q_0 是一对实平面；特别对 ${}^{11}S_3^1$，平面 T_0 是这两个平面的交线，而二次曲面 Q_1 是 T_0 上的一对点．在 $m=n-1$ 的情形，锥面 Q_0 有一个顶点，${}^{kl}S_n^{n-1}$ 的绝对形与**上伪 Euclid 空间**（co-pseudo Euclidean space）${}^lR_n^*$ 的绝对形相同．

拟双曲空间与上伪 Euclid 空间相比属于更一般类型的空间．

拟双曲空间 ${}^{kl}S_n^m$ 的射影度量的定义方式导致：当 $m=0$ 时得到伪 Euclid 空间 ${}^lR_n$ 的度量；而当 $m=n-1$ 时则得到上伪 Euclid 空间 ${}^kR_n^*$ 的度量．

在拟双曲空间中，有四类不同的直线：椭圆直线（elliptic lines），它们与绝对锥面交于两个共轭虚点；双曲直线（hyperbolic lines），它们与绝对锥面交于两个实点；抛物直线（parabolic lines），它们通过绝对锥面的顶点；迷向直线（isotropic lines），它们通过绝对锥面的顶点并与绝对锥面相切．

当直线 XY 与 $(n-m-1)$ 维平面 T_0 不相交时，两点 X 和 Y 之间的距离 δ 由公式

$$\cos^2\frac{\delta}{\rho}=\frac{(\mathbf{x}^0E_0\mathbf{y}^0)^2}{(\mathbf{x}^0E_0\mathbf{x}^0)(\mathbf{y}^0E_0\mathbf{y}^0)}$$

定义，这里 E_0 是定义 $(m+1)$ 维伪 Euclid 空间 ${}^kR_{m+1}$ 中标量积的线性算子；$\mathbf{x}^0=(x^a, a\leqslant m)$，$\mathbf{y}^0=(y^b, b\leqslant m)$ 是点 X 和 Y 的向量，而 ρ 是实数．不处于抛物直线上的两个点之间的距离等于这两点在 m 维平面 $x^1=0$ 上按 $(n-m-1)$ 维平面 T_0 方向的投影之间的距离．在直线 XY 与 T_0 相交的情形，距离 d 用差 $\mathbf{a}=\mathbf{y}^1-\mathbf{x}^1$ 来计算，这里 $\mathbf{x}^1=(x^u, u>m)$，$\mathbf{y}^1=(y^v, v>m)$ 是点 X 和 Y 在伪 Euclid 空间 R_{n-m} 中的向量；$d(X,Y)=\mathbf{a}E_1\mathbf{a}$，$E_1$ 是定义空间 R_{n-m} 中标量积的线性算子．

空间 ${}^{kl}S_n^m$ 中两个平面的夹角取为它们在其对偶空间 ${}^{lk}S_n^{n-m-1}$ 中按照射影空间对偶原理相对应的两个点之间的距离，这些对应点的坐标数值上等于这两个平面的射影坐标．如果两个平面交成的 $(n-2)$ 维平面与 T_0 相交，那么这个角总等于零，但此时可应用类似于相似情形下度量距离的度量方法．特别当 $n=2$ 时，1 维平面间的夹角就是直线间的夹角，并且根据这个 2 维平面与 T_0 的相对位置有 3 种类型的几何学，即 Euclid 几何学、伪 Euclid 几何学和上伪 Euclid 几何学．

拟双曲空间中的运动是保持点之间的距离且将绝对锥面 Q_0，$(n-m-1)$ 维顶点 T_0 和 T_0 中的 $(n-m-2)$ 维二次曲面 Q_1 映为自身的直射变换．运动可用指标 l 的伪正交算子描述．在拟双曲空间 ${}^{ll}S_{m+1}^m$ 中，它是自对偶空间，上运动（co-motion）是指这样的**对射变换**（correlation）：它将任意两点映为两个平面且这两个平面的夹角与这两点的距离成比例，并将任意两个平面映为两个点且这两点的距离与这两个平面的夹角成比例．上运动可用指标 l 的伪正交算子描述．运动构成一个 Lie 群，自对偶的拟双曲空间的运动和上运动也构成 Lie 群．

在直线上具有射影椭圆度量的拟双曲 3 维空间 ${}^{01}S_3^1$ 在 2 维平面上具有上 Euclid 度量而在平面把上具有指标 1 的伪 Euclid 度量．具有双曲射影距离度量的拟双曲 3 维空间有两种类型：${}^{10}S_3^1$ 或 ${}^{11}S_3^1$，差

别在于其在平面把上的度量：前者是 Euclid 度量，后者是指标 1 的伪 Euclid 度量．在 2 维平面上的度量则相同；是指标 1 的伪 Euclid 度量．

拟双曲 3 维空间 $^{11}S_3^1$ 可以解释为指标 1 的伪 Euclid 2 维平面的运动群．这个拟双曲 3 维空间的双曲直线组成的流形则可以解释为一对这样的伪 Euclid 平面．空间 $^{10}S_3^1$ 和 $^{01}S_3^1$ 互相对偶，并可在复 2 维平面上加以解释．

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, 1969.

[2] Яглом, И. М., Розенфельд, Б. А., Ясинская, Е. У., 《Успехи матем. наук》, **19** (1964), 5, 51 – 113.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Giering, O., Vorlesungen über höhere Geometrie. Vieweg, 1982.

[A2] Rosenfel'd, B. A. [B. A. Rozenfel' d], A history of non-euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文).

潘养廉 译

拟等式 [**quasi-identity**; **квазитождество**]，条件等式 (conditional identity)

形式如

$$(\forall x_1, \cdots, x_n)(A_1 \& \cdots \& A_p \rightarrow A)$$

的一阶逻辑语言的公式，这里 $A_1, \cdots, A_p$ 和 A 表示形如

$$f = g \text{ 或 } P(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$$

的原子公式，$f, g, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是含变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的项，而 P 是一个原始谓词符号．代数系统的拟簇由拟等式定义（见**代数系统拟簇** (algebraic system, quasi-variety of)）．等式是拟等式的特殊情形．

О. А. Иванова 撰

【补注】 拟等式一般也称为 Horn 语句．

参考文献

[A1] Horn, A., On sentences which are true of direct unions of algebras, *J. Symbol Logic*, **16** (1951), 14 – 21.

[A2] Cohen, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981, p. 235.

郝钢新 译

拟信息扩充 [**quasi-informational extension**; **квазиинформационное расширение**]，非合作对策 $\Gamma = < J, \{S_i\}_{i\in J}, \{H_i\}_{i\in J} >$ 中的

非合作对策 (non-cooperative game) $\widetilde{\Gamma} = < J, \{\widetilde{S}_i\}_{i\in J}, \{\widetilde{H}_i\}_{i\in J} >$，其中映射 $\pi: \widetilde{S} \rightarrow S$ 和 $c_i: S_i \rightarrow \widetilde{S}_i$, $i\in J$，给定，且对于所有 $i\in J$, $s_i\in S_i$, $\widetilde{s}\in\widetilde{S}$，满足下列条件：1) $\widetilde{H}_i = H_i \circ \pi$；2) $\pi_i(\widetilde{s} \| c_i(s_i)) = s_i$，这里 π_i 是 π 和射影 $S \rightarrow S_i$ 的复合，对策 Γ 的拟信息扩充可以解释为局中人在选择 Γ 中的策略 s_i 的过程中按上述模式交替作用的结果．策略 s_i 对应局中人 i 在任何他或她可能遇到的局势下确定行为的法则．映射 π 则把局中人的行为法则联系它们的实现，即，联系供局中人选择的遵循给定法则的策略 $s_i (i\in J)$ 的集合．拟信息扩充的定义中的条件 1) 因而是新对策 $\widetilde{\Gamma}$ 的支付函数的定义，而条件 2) 则表示每个局中人对老策略 $s_i\in S_i$ 的保留．

Γ 的局势 s^* 是 Γ 在对应映射 π 下的某个拟信息扩充 $\widetilde{\Gamma}$ 的均衡局势的象，当且仅当对于任何 $i\in J$ 和 $\overline{s_i}\in S_i$，存在局势 $s\in S$，使得

$$H_i(s^*) \geqslant H_i(s \| \overline{s}_i).$$

拟信息扩充的概念特别是在具有分级结构的对策论（见**具有分级结构的对策** (game with a hierarchy structure)）中有广泛应用，其中优化信息模式的不规范问题被变换为当第一个局中人具有最优结果时对给定对策构造拟信息扩充的问题．人们也考虑对局中人可采纳的信息加以这样那样限制条件下的拟信息扩充类．例如，如果 Γ 是两人对策 ($J = \{1, 2\}$)，那么说在拟信息扩充中局中人不具有关于策略 s_2 的（真正）信息，是指对于每个 $\widetilde{s_1}\in\widetilde{S}_1$，存在 $s_1\in S_1$ 使得 $\pi(\widetilde{s_1}, \widetilde{S}_2) \supseteq \{s_1\} \times S_2$．满足这一条件的最好的拟信息扩充例如是"对策 Γ_3"，而最好的拟信息扩充是"对策 Γ_2"．

参考文献

[1] Гермейер, Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976 (英译本：Germeier, Yu. B., Non-antagonistic games, Reidel, 1986).

[2] Кукушкин, Н. С., Морозов, В. В., Теория неантагонистических игр, ч. 2, М., 1977.

Н. С. Кукушкин 撰 史树中 译

拟不变测度 [**quasi-invariant measure**; **квазиинвариантная мера**]

定义于一空间上的测度，在该空间的"平移"下等价于自身．更严格地说，设 (X, B) 是一个可测空间 (measurable space)（即指集合 X，带有其子集族形成的显识的 σ 代数 B），G 是它的自同构群（即一一变换 $g: X \rightarrow X$，g 与其逆关于 σ 代数 B 是可测的）．称 (X, B) 上的测度 μ 是（关于 G）拟不变的 (quasi-invariant)，如果对任一 $g\in G$，其变换测度 $g\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$, $A\in B$，等价于测度 μ（即这些测度之间相互都是绝对连续的（见**绝对连续性** (abso-

lute continuity)). 如果 X 是一个拓扑的齐性空间(homogeneous space), 具有一个连续局部紧自同构群 G (即 G 可迁地作用于 X 上, 且被赋予一拓扑, 使得映射 $G\times X\to X, (g,x)\mapsto gx$ 关于 $G\times X$ 上的乘积拓扑是连续的), 而且 B 关于 X 上的拓扑是 Borel σ 代数, 那么存在一个拟不变测度, 它在至于等价性上是唯一的([1]). 特别地, $\mathbf{R}^n$ 上的测度关于平移 $x\mapsto x+a$, $x, a\in\mathbf{R}^n$, 是拟不变的, 当且仅当它等价于 **Lebesgue 测度**(Lebesgue measure). 如果变换群不是局部紧的, 那就无需是一个拟不变测度: 例如一大类无穷维拓扑向量空间就是这种情况([2]).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Integration, Addison-Wesley, Chapt. 6, 7, 8, 1975.

[2] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961 (英译本: Gel'fand, I. M., Vilenken, N. Ya., Generalized functions. Applications of harmonic analysis, 4, Acad. Press, 1964).

P. A. Минлос 撰

【补注】 如是, 拟不变测度是在拓扑群上 **Haar 测度**(Haar measure)的一种推广. 在带有左 Haar 测度 μ 的局部紧群上, 一个测度是左拟不变的(在左移下拟不变的), 当且仅当它与 μ 等价.

在无穷维 Hilbert 空间上关于所有平移群不存在拟不变测度(因此, 尤其不存在 Haar 测度). 设 $\Phi\subset H\subset\Phi'$ 是一个装配 Hilbert 空间(rigged Hilbert space). Φ 是带内积(,)的核空间, H 是 Φ 的完全化, Φ' 是 Φ 的对偶. 每一个 $f\in\Phi$ 定义一个元 $F_f\in\Phi'$, 泛函 $F_f(g)=\langle f, g\rangle$. Φ' 上的一个测度 μ 是拟不变的, 如果对一切 $f\in\Phi$ 以及 $\mu(X)=0$ 的 $X\subset\Phi'$, 有 $\mu(F_f+X)=0$. 即如果它关于平移群 $\{F_f: f\in\Phi\}$ 是拟不变的. 在核空间的如此对偶空间上是存在拟不变测度的, [2] 中第四章 § 5.2.

周民强 译

拟线性方程 [quasi-linear equation; квазилинейное уравнение]

一个**偏微分方程**(differential equation, partial), 它关于未知函数的高阶导数是线性的. 例如, 方程

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=0$$

是关于未知函数 u 的二阶拟线性方程.

【补注】

参考文献

[A1] Lubcrstein, H. M., Theory of partial differential equations, Acad. Press, 1972.

[A2] Carrier, G. F. and Pearson, C. E., Partial differential equations, Acad. Press, 1976.

杜小杨 译

拟线性双曲型方程和方程组 [quasi-linear hyperbolic equations and systems; квазилинейные гиперболические уравнения и системы]

形如

$$L[u]\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant m}a^{\alpha}D^{\alpha}u=f \qquad (1)$$

的微分方程和微分方程组. 方程组(1)是对具有分量 $u_1(x),\cdots,u_k(x)$ (在单个方程情形下, $k=1$) 的矢量值函数 $u(x)$ 来求解的. 系数 a^{α} 是矩阵, 它的元依赖于空间自变量 $x=(x_0,\cdots,x_n)$ 和矢量值函数 u, 以及它的直到 $m-1$ 阶在内的偏导数. 右端项 f 亦依赖于这些变量. 如果 a^{α} 是和 u 的分量个数有相同阶的方阵, 那么称(1)是确定方程组(determined system). 特征形式(characteristic form)

$$Q(\xi)=Q(\xi_0,\cdots,\xi_n)=\det\left\|\sum_{|\alpha|=m}a^{\alpha}\xi^{\alpha}\right\|$$

是由 L 的主部(principal part) $\sum_{|\alpha|=m}a^{\alpha}D^{\alpha}$ 所决定的. 这里 $D^{\alpha}=\partial^{|\alpha|}/\partial x_0^{\alpha_0}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$, 而 $\xi^{\alpha}=\xi_0^{\alpha_0}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$.

方程组(1)的双曲性是由算子 L 的下列表征所定义的. 对于 x,u 及其直到 $m-1$ 阶在内的导数的每一组值, 存在一个矢量 $\zeta\in\mathbf{R}^{n+1}$, 使得对任一不平行于 ζ 的 $\eta\in\mathbf{R}^{n+1}$, 特征方程(characteristic equation)

$$Q(\lambda\zeta+\eta)=0 \qquad (2)$$

有 mk 个实根 λ(每个根有多少重就算多少次).

通过某点 $P\in\mathbf{R}^{n+1}$ 且垂直于矢量 ζ 的面元称为空向的(space like), 垂直于空向面的方向称作时向的(time like).

一曲线, 在它每个点上都有时向的切线, 称作时向曲线(time-like curve).

Cauchy 问题(Cauchy problem)在拟线性双曲型方程和方程组的所有问题中占有中心位置. 它是在下列条件下求方程组(1)的解 u 的问题: 在由方程

$$\varphi(x)=0,\ |D\varphi|=|\operatorname{grad}\varphi|\neq 0$$

所定义的某个光滑的 n 维超曲面 Π 上, 已给函数 u 以及它的(沿某个不切于 Π 的方向的)直到 $m-1$ 阶(在内)的偏导数的值. 如果总可以求得这样的解, 那么 Π 称作是关于 L 的自由超曲面(free hypersurface).

如果(1)的系数和给在解析自由超曲面 Π 上的 Cauchy 条件都是解析的, 那么在 Π 的一个邻域中的解析解是唯一的; 如果 Cauchy 条件还包含有 Π 上所有直到 $m-1$ 阶的导数, 那么根据 **Cauchy-Ковалевская 定理**(Cauchy-Kovalevskaya theorem), 在 Π

的任一点的充分小的邻域中，存在一个解析解．这个定理适用于所有解析方程和方程组，不管他们属于哪个型．对非解析的数据，定理对这样的解的存在性问题没有给出回答．

如果 Π 的任一部分都不是自由的，那么称 Π 是关于 L 的特征曲面（characteristic surface）（亦见特征（characteristic））．为了使得一超曲面 Π 关于 L 是特征的，必要又充分的是方程

$$Q(\xi)=0 \tag{3}$$

成立，其中 $\xi=(\xi_0,\cdots,\xi_n)$ 是正交于 Π 的．特征矩阵、特征形式和特征面关于非奇异变换是不变的．特征面在研究形如（1）的方程和方程组的许多问题中起着重要作用．

数学物理的许多问题可以化为对称双曲型方程和方程组．一阶拟线性方程组

$$L[u]\equiv\sum_{i=0}^{n}a^i u_{x_i}+bu=f \tag{1'}$$

称作是对称的（symmetric），如果所有矩阵 a^i 都是对称的．一对称方程组（1′）称作在点 P 是对称双曲方程组（symmetric hyperbolic system），如果矩阵 a^i 之一或某个线性组合 $\xi^i a^i$ 是定号的．高阶单个方程或方程组称作是对称双曲的（symmetric hyperbolic），如果它等价于某个一阶对称双曲组．具有正定系数 a^0 的方程组（1′）可以用线性变换化为下面的形式

$$u_t+M[u]=f, \tag{1''}$$

其中 x_0 换成 t，且 M 是一对称算子．利用**能量不等式**（energy inequality）和迭代方法可以证明对二阶拟线性方程组或对单个任意阶的非线性方程的 Cauchy 问题的解的存在性．

因为对双曲型方程和双曲组的特征和**次特征**（bicharacteristic），在线性的和拟线性的情形是以同样方式定义的（亦见**线性双曲型偏微分方程和方程组**（linear hyperbolic partial differential equation and system）），因此关于线性方程和方程组的解的低阶导数的间断分布的熟知事实，对拟线性方程情形亦成立．双曲组的解 u 的间断分布已对守恒律（conservation laws）考虑了，即对一阶方程组

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}F^{ij}(x,u)=0,\ j=1,\cdots,k, \tag{4}$$

在激波阵面是非特征的条件下考虑的（亦见**双曲型偏微分方程**（hyperbolic partial differential equation））．

许多文章是致力于研究两个空间变量 x 和 t 的情形的拟线性双曲型方程和方程组．这些研究的一个重要部分是关于一阶拟线性方程组：

$$L(u)\equiv Au_x+Bu_t=C, \tag{5}$$

其中 A 和 B 是 k 阶方阵、矢量 C 依赖于 x,t 和矢量 $u(x,t)=\{u_1(x,t),\cdots,u_k(x,t)\}$．如果仅是右端项 C 依赖于未知函数 $u(x,t)$，那么称（5）为殆线性方程组（almost-linear system）．殆线性一阶组可以用非奇异线性变换化为对称组．在 $\det B\neq 0$ 的假定下，拟线性组（5）有下面的形式：

$$u_t+Au_x=C. \tag{6}$$

矩阵 A 可以被变换成具有对角线元为 κ_i 的对角线形式，这里矢量 $(\kappa_i,1)$ 定义了特征方向；这种写法称作方程组（5）的标准形．对形如（6）的方程组成立唯一性定理，与它们的特征是否依赖于解 $u(x,t)$ 无关．

如果系数 A,C 和解 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 的始值对所有变元都有一阶导数，且如果这些导数满足 **Lipschitz 条件**（Lipschitz condition），那么可以找到 $t=0$ 轴上区间的一个邻域 $0<t<h$，在此邻域中 Cauchy 问题存在唯一解，它的一阶导数满足 Lipschitz 条件．这里引进矢量值函数 $v(x,t)$，它在 $t=0$ 上和已给初始数据重合，且使得它的一阶导数满足 Lipschitz 条件．经过将 $v(x,t)$ 代入系数 A 和 C，Cauchy 问题是对线性方程具有已给初始数据来解的．对应于每个函数 $v(x,t)$ 存在一个解 $u(x,t)$，于是对方程组（6）的问题的解是作为变换 $u=\mathfrak{A}[v]$ 的不动点来求得的，或者作为由迭代过程

$$u_{n+1}\equiv\mathfrak{A}[u_n]$$

所得的一致收敛序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限来求到的．类似的结果在系数 A，矢量 C 和初始数据都是充分光滑的情形得到．在将问题化为积分方程组时，它的可解性是根据**压缩映射原理**（contracting-mapping principle（contraction-mapping principle））来证明的．

一阶拟线性方程组（5）称作弱非线性方程组（weakly non-linear system），如果对应的标准形

$$u_t+Au_x=C \tag{7}$$

使得对角线矩阵的每个元 a^{ii} 满足条件：

$$\frac{\partial}{\partial u_i}a^{ii}(x,t,u_1,\cdots,u_k)=0,\ i=1,\cdots,k.$$

否则，（5）称作强非线性方程组（strongly non-linear system）．如果对 $k=2$ 的弱非线性组的解是有界的，那么 Cauchy 问题在定义域中总是可解的．

除了始值问题外，对一阶拟线性方程组还提出并研究了其他问题．例如，所谓的混合问题（见**双曲型方程及方程组的混合和边值问题**（mixed and boundary value problems for hyperbolic equations and systems）），

是求方程组 (7) 的解 $u(x,t)$. 它除了对 $t=0, \alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 满足初始条件 $u(x,0)=\psi(x)$ 外，还在分别从点 $(\alpha,0)$ 和 $(\beta,0)$ 出发的某些光滑曲线 Γ_1 和 Γ_2 上满足边界条件．这些边界条件关于解 $u(x,t)$ 可以是线性的或者是非线性的．在某些情形下，当考察特别的条件时，上述类型的问题的适定性成功地被证明了．

对强非线性组 (6)，在 $k=2$ 的情形下，研究过下面的问题：令 Γ_1 是由坐标原点出发的、由方程 $x=x(t)$ 给出的曲线，假定 Γ_1 是特征的且有连续的切线．需要在由 Γ_1 和另一条亦通过原点的曲线 Γ_2 所围的某个域中求 (6) 的解，而解 $u(x,t)$ 在 Γ_1 上的值是已知的，且在额外的条件下，即矢量 $u(x,t)$ 的分量之一在边界曲线的交点处有一特定的奇性．当 δ 充分小时，在 $t \leqslant \delta$ 中的类似问题的可解性是已知的．

在对一阶拟线性双曲组所提出的问题中，有一些重要的应用问题：分解一个任意的间断性的问题，层析法和渗流中的问题等等．

上面陈述的结果带有局部性质且只涉及到正则解．事实上，如果解不是可微的，或者甚至是间断函数，那么就要用不同的方法引进所谓的弱解；对它们证明了 Cauchy 问题解的整体唯一性和存在性定理．通常这些解是定义在相当广的函数类（有界可测函数，局部可和函数，等等）中的．它们满足方程或方程组是在某种意义下，例如，在广义函数论的意义下，或者服从完全确定的积分关系式．在某些情形下，一个弱解被称作是 Cauchy 问题的解，如果当点 (t,x) 趋于初始数据的支集时，解和初始数据之间的差弱收敛于零．

对于具有相当一般类型的初始数据的守恒律，现已知道某些构造 Cauchy 问题整体弱解的方法．例如，解始值问题的光滑化方法和有限差分格式．

一般非线性双曲型方程和方程组，可以通过对自变量微分的办法，化为一阶拟线性双曲组．任一个二阶双曲型方程都可以化为一阶对称双曲组，且对一阶双曲组有关的事实，对单个二阶双曲型方程仍成立．

对单个高阶双曲型方程的 Cauchy 问题解的存在性定理是在要求方程系数有相当高的光滑性条件下得到的（见 [9]）．

高阶拟线性双曲型方程的 Cauchy 问题是通过将它化为一阶拟线性组的类似问题来研究的．此外，对二阶方程使用了引进特征坐标系 (α,β) 的方法．变量 x,t，函数 u 以及它的一阶和二阶导数，被看作是特征变量的函数，得到了一个方程组．这个方程组包含有对函数

$$x=x(\alpha,\beta),\ y=y(\alpha,\beta),\ u=u(\alpha,\beta),$$

$$p=u_x(\alpha,\beta),\ q=u_y(\alpha,\beta)$$

的六个一阶方程，其中之一是由所有其他的导出的．可以考虑这个具有五个未知函数的五个拟线性方程的组．对类似的方程组，因此对拟线性方程，成立 Cauchy 问题解的存在性和唯一性定理．这个方法，无需作任何重大的改变，可以应用于二阶拟线性组

$$au^j_{xx}+bu^j_{xt}+cu^j_{tt}+d^j=0,\ j=1,\cdots,k,$$

其中系数依赖于 x,t 和诸函数 u^j．

参考文献

[1] Glimm, J., Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 697 – 715.

[2] Doughs, A., Layering methods for nonlinear partial differential equations of first order, *Ann. Inst. Fourier*, **22** (1972), 141 – 227.

[3] Кружков, С. Н., 《Докл. АН СССР》, **187** (1969), 1, 29 – 32.

[4] Кузнецов, Н. Н., 《Матем. заметки》, 2 (1967), 4, 401 – 410.

[5] Courant, R. and Lax, P., On nonlinear partial differential equations with two independent variables, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2** (1949), 255 – 273.

[6] Conway, E. D. and Smoller, J., Weak solution of the Cauchy problem for a multi-dimensional quasi-linear equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **19** (1966), 95 – 105.

[7] Lax, P., Nonlinear hyperbolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 231 – 258.

[8] Lewy, H., Ueber das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, *Math. Ann.*, **98** (1927), 179 – 191.

[9] Levi, E., Sur problema di Cauchy per le equazioni a caratteristiche reali e distinti, *Rend. R. Acad. Lincei* (5), **17** (1908), 331 – 339.

[10] Leray, J., Hyperbolic differential equations, Princeton Univ. Press, 1953.

[11] Lee, Da-tsin（李大潜）and Yu, Wen-tzu（俞文鱿）, Some existence theorems for quasi-linear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables I, *Scientia Sinica*, **13** (1964), 4, 529 – 562.

[12] Олейник, О. А., 《Успехи матем. наук》, 12 (1957), 3, 3 – 73.

[13] Петровский, И. Г., 《Матем. сб.》, 2 (1937), 5, 815 – 866.

[14] Рождественский, Б. Л., Яненко, Н. Н., Системы квазилинейных уравнений, М., 1968（英译本：Rozhdestvenskiĭ, B. L. and Yanenko, N. N., Systems of quasilinear equations and their applications to

gas dynamics, Amer. Math. Soc., 1983).

[15] Friedrichs, K., Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 555 – 589.

[16] Hartman, P. and Winter, A., On the hyperbolic partial differential equations. *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 834 – 864.

[17] Schauder, J., Cauchysche Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungen beziehenden Abschätzungen. *Comment. Math. Helv.*, **9** (1936), 263 – 283.

Д. К. Гвазава 撰

【补注】 有关应用，见 [A2] – [A3].

参考文献

[A1] Jeffrey, A., Quasilinear hyperbolic systems and waves, Pitman, 1976.

[A2] Whitham, G. B., Linear and nonlinear waves, Wiley, 1974 (中译本: G. B. 惠瑟姆著，线性与非线性波，科学出版社，1986).

[A3] Rhee, H. K., Aris, R. and Amundson, N. R., *Philos. Transactions Roy. Soc.* A, **267** (1970), 419 – 455.

孙和生 译 陆柱家 校

拟线性化 [**quasi-linearization**; **квазилинеаризация**]

将其简化为一系列线性问题的一类求解非线性问题的数值解法. 拟线性化措施的基础是 **Newton 法** (Newton method) 及其向函数空间的推广，即**微分不等式** (differential inequality) 理论和**动态规划** (dynamical programming) 方法. 说明拟线性化方法的最简单的例子是使用 Newton-Raphson 方法寻求单调下降严格凸函数 f 的根 r. 当原来的非线性函数 f 在迭代的每一步上用线性函数 φ 逼近时，φ 的根可被求出，它被取作下一步的逼近值，于是

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

在很一般的条件下，这样构造的序列具有单调性 ($x_0 < x_1 < \cdots < r$) 和二次收敛性:

$$|x_{n+1} - r| \leqslant k |x_n - r|^2.$$

下面说明应用拟线性化方法解 **Riccati 方程** (Riccati equation)

$$v' + v^2 + p(t)v + q(t) = 0, \; v(0) = c$$

(假定解在区间 $[0, t_0]$ 上存在). 原方程由等价的方程

$$v' = \min_u [u^2 - 2uv - p(t)v - q(t)]$$

替代，其中最小值是对定义在 $[0, t_0]$ 上的一切函数 u 取的. 这个方程具有线性方程所固有的许多性质. 为求解它可应用线性微分方程

$$w' = u^2 - 2uw - p(t)w - q(t), \; w(0) = c,$$

其中 u 为取定的函数. 借助于性质 $v(t) \leqslant w(t)$ (当 $u(t) = v(t)$ 时等号成立)，可构造逐次逼近的系列

$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots$$

它们满足线性方程

$$v'_{n+1} = v_n^2 - 2v_n v_{n+1} - p(t)v_{n+1} - q(t),$$

$$v_{n+1}(0) = c.$$

对原始非线性方程运用 Newton-Канторович 方法 (参见 **Канторович 过程** (Kantorovich process)) 能够得到同样的递推关系.

对于如下二阶非线性微分方程:

$$u'' = f(u', u, t), \; t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$

$$g_1(u(t_1), u'(t_1)) = 0, \; g_2(u(t_2), u'(t_2)) = 0,$$

应用求解边值问题的拟线性化方法，将导出满足线性方程

$$u''_{n+1} = f(u'_n, u_n, t) + f_{u'}(u'_n, u_n, t)(u'_{n+1} - u'_n) + f_u(u'_n, u_n, t)(u_{n+1} - u_n)$$

以及线性化边界条件

$$g_i(u_n(t_i), u'_n(t_i)) + g_{iu}(u_n(t_i), u'_n(t_i)) \cdot (u_{n+1}(t_i) - u_n(t_i)) + g_{iu'}(u_n(t_i), u'_n(t_i)) \cdot (u'_{n+1}(t_i) - u'_n(t_i)) = 0$$

的函数序列 $\{u_n\}$.

该函数列的存在性、唯一性和二次收敛性可从函数 f, g_1, g_2 在充分小区间 $[t_1, t_2]$ 上相应的凸性得出.

拟线性化方法应用于求解线性和非线性常微分方程的两点和多点边值问题，椭圆型和抛物型偏微分方程的边值问题，变分问题，微分-差分方程和泛函微分方程等等. 如同每一个迭代格式一样，拟线性化方法适合在计算机上实现，它的许多种变形对于略窄的一类问题可以实现加速收敛. 有不少应用实例为求解大量物理、技术和经济方面的问题提供了启示性的方法.

参考文献

[1] Беллман, Р., Калаба, Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968 (英译本: Bellman, R. E. and Kalaba, R. E., Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems, Elsevier, 1965).

И. А. Ватель, Ф. И. Ерешко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bellman, R. and Adomian, G., Partial differential equations, Reidel, 1985, Chapt. IV.

[A2] Bellman, R. and Vasudevan, R., Wave propagation. An invariant imbedding approach, Reidel, 1986.

张宝琳　袁国兴 译

拟范数 [quasi-norm; квазинорма]

定义在**线性空间** (linear space) R 上的非负函数 $\|x\|$, 且除了三角形不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ 之外满足如**范数** (norm) 所具备的同样的公理, 而三角形不等式用较弱的要求代替: 存在常数 $c>0$ 使得对所有 $x, y\in R$, $\|x+y\|\leqslant c(\|x\|+\|y\|)$.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 一个局部有界拓扑向量空间的拓扑可用一个拟范数给定. 反之, 一个赋拟范向量空间是局部有界的 (bounded). 这里, 拓扑向量空间中的一个集合 B 是有界的, 如果对零的每个开邻域 U 存在 $\rho>0$ 使得 $B\subset\rho U$; 而一个拓扑向量空间是局部有界的 (locally bounded), 如果存在零的一个有界邻域. 在拓扑向量空间 E 中给定零的一个平衡有界邻域 U (集合 $M\subset E$ 是平衡的如果对所有 $|\alpha|\leqslant 1$, $\alpha M\subset M$), U 的 Minkowski 泛函 (Minkowski functional) 由 $q(x)=\inf_{x\in\alpha U}\alpha$ 定义. 它是一个拟范数.

参考文献

[A1] Köthe, G., Topological vector spaces, 1, Springer, 1969, 159.

葛显良 译

拟正规空间 [quasi-normal space; квазинормальное пространство]

一个**正则空间** (regular space), 其中任何两个互不相交的 π 集有互不相交的邻域. 一个 T_{λ} 空间, 如果其中任何两个互不相交的 π 集有互不相交的邻域, 就是一个拟正规空间. 对于拟正规空间, 而且只是这种空间, **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification) βX 才与空间 $\omega_{\kappa}X$ 一致. 任意多个分离的度量空间的乘积是拟正规空间. 这个结果可以提供大量非正规的拟正规空间.

参考文献

[1] Зайцев В. И., 《Тр. Моск. Матем. об-ва》, 27 (1972), 129 – 193.

[2] Щепин Е. В., 《Матем сб.》, 88 (1972), 2, 316 – 325.

В. В. Федорчук 撰

【补注】 拟正规空间起源于研究拓扑空间的谱 (spectrum of a topological space) (亦见**空间的谱** (spectrum of spaces)). 谱的定义如下: 空间 X 的分划 (partition) 是 X 的一个有限覆盖 $\mathscr{A}$, 其元素是典范闭集 (见**典范集** (canonical set)), 且具有互不相交的内部. 所有这些分划构成一个偏序集: $\mathscr{A}\succ\mathscr{A}'$ 等价于 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}'$ 的加细. $\mathscr{A}$ 的神经 (nerve) $N_{\mathscr{A}}$ (见**集族的神经** (nerve of a family of sets)) 是一个复形, 由 $\mathscr{A}$ 中使得元素之交非空的所有子族组成. 如果 $\mathscr{A}\succ\mathscr{A}'$, 则显然存在一个单纯映射 $\omega_{\mathscr{A}'}^{\mathscr{A}}:N_{\mathscr{A}}\to N_{\mathscr{A}'}$. 若 X 的分划集是按 $\succ$ (上升) 有向, 则逆谱 $\{N_{\mathscr{A}},\omega_{\mathscr{A}'}^{\mathscr{A}}:\mathscr{A}$ 是 X 的分划$\}$ 称为 X 的谱, 记为 S_X. 为了得到这个谱的适当极限, 考虑 S_X 的极大脉络 (maximal threads) 的集合 $\widetilde{S}_X$. 一条脉络 (thread) 就是一串单形 $\{t_{\mathscr{A}}\}_{\mathscr{A}}$, 使得对所有的 $\mathscr{A}$ 有 $t_{\mathscr{A}}\in N_{\mathscr{A}}$, 并且 $\mathscr{A}\succ\mathscr{A}'$ 蕴涵 $\omega_{\mathscr{A}'}^{\mathscr{A}}(t_{\mathscr{A}})=t_{\mathscr{A}'}$. 脉络 $\mathbf{t}=\{t_{\mathscr{A}}\}_{\mathscr{A}}$ 称为极大的, 如果给了另一条脉络 $\mathbf{t}'=\{t'_{\mathscr{A}}\}_{\mathscr{A}}$, 使得对任何 $\mathscr{A}$, $t_{\mathscr{A}}$ 都是 $t'_{\mathscr{A}}$ 的面, 则有 $\mathbf{t}=\mathbf{t}'$. 基本开集是形如 $O(t_{\mathscr{A}})=\{\mathbf{t}'\in\widetilde{S}_X:t'_{\mathscr{A}}$ 是 $t_{\mathscr{A}}$ 的面$\}$ 的集合.

空间 $\omega_{\kappa}X$ 是 [A3] 中首先引进的, 由典范闭集的所有极大中心系构成, 其拓扑按常规配置, 即是以集族 $\{A^{+}:A$ 是典范闭集$\}$ 作为 $\omega_{\kappa}X$ 中的闭集基, 其中 A^{+} 是 A 所在的那些极大中心系的集合.

结果, 存在一个自然的同胚映射, 把 $\omega_{\kappa}X$ 映成 $\widetilde{S}_X$. 因此, 就拟正规空间 X 而言, 有 $\beta X=\widetilde{S}_X=\omega_{\kappa}X$.

π 集 (π-set) 是指开集闭包的有限交. T_{λ} 空间 (T_{λ}-space) 是 [1] 中首先引进的, 这是一个半正则的 T_1 空间, 其所有开集都是 π 集的并. 即是说, T_{λ} 空间是一个半正则的 T_1 空间 (典范开集构成其拓扑结构的基), 使得典范闭集构成一个**网 (拓扑空间中集合的)** (net (of sets in a topological space)), 亦即若 O 是开集, $x\in O$, 则存在典范闭集 A, 使得 $x\in A\subseteq O$.

参考文献

[A1] Kurosh, A., Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume, *Compositio Math.*, 2 (1935), 471 – 476.

[A2] Zaitsev, V. I., Finite spectra of topological spaces and their limit spaces, *Math. Ann.*, 179 (1968 – 1969), 153 – 174.

[A3] Ponomarev, V. I., Paracompacta: their Projection spectra and continuous mappings, *Mat. Sb.*, 60 (102) (1963), 89 – 119 (俄文).

胡师度　白苏华 译

拟赋范空间 [quasi-normed space; квазинормированное пространство]

其中给定一个**拟范数** (quasi-norm) 的**线性空间** (linear space). 不是赋范的拟赋范空间的一个例子是具有 $0<p<1$ 的 **Lebesgue 空间** (Lebesgue space) $L_p(E)$, 其拟范数由表达式

$$\|f\|=\left[\int_E|f(x)|^p dx\right]^{1/p},\ f\in L_p(E)$$

定义.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 赋拟范拓扑向量空间正是局部有界拓扑向量

空间，见拟范数(quasi-norm).

葛显良 译 吴绍平 校

拟周期函数 [**quasi-periodic function; квазипериодическая функция**]，以 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为周期的

满足如下条件的函数 f：存在一个 n 元连续函数 $F(t_1, \cdots, t_n)$，F 关于变量 $t_1, \cdots, t_n$ 分别以 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 为周期，使得 $f(t) = F(t, \cdots, t)$. 所有的 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ 都要求是严格正的而且它们的倒数 $p_1, \cdots, p_n$ 是有理线性无关的. 例如，如果 f_1 和 f_2 是周期分别为 ω_1 和 ω_2 的连续周期函数而且 ω_1/ω_2 是无理数，则函数 $g = f_1 + f_2$ 及 $h = \max\{f_1, f_2\}$ 都是拟周期函数.

拟周期函数理论是创立殆周期函数(almost-periodic function)理论的基础. 如果局限于连续函数的情形，则拟周期函数是周期函数的推广，但同时又是殆周期函数的特例.

拟周期函数可以表为

$$f(t) = \sum c_{k_1 \cdots k_n} e^{i(k_1 p_1 + \cdots + k_n p_n)t},$$

其中的 $c_{k_1 \cdots k_n} = c_k$ 满足不等式 $\sum |c_k|^2 < \infty$. 拟周期函数具有下述性质：拟周期函数的加法和数乘仍是拟周期函数；关于 $t \in \mathbf{R}$ 一致收敛的拟周期函数序列的极限函数是拟周期函数；如果 g 是殆周期函数及 $\varepsilon > 0$，则存在一个拟周期函数使得

$$|f(t) - g(t)| < \varepsilon, \ t \in \mathbf{R}.$$

参考文献

[1] Bohl, P., Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten, Dorpat, 1893. Thesis.

[2] Харасахал, В. Х., Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений, А.-А., 1970.

Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков 撰

【补注】 以时间为变量的拟周期函数在 Hamilton 力学中出现是很自然的，它用于描述可积系统的多周期运动(见[A1]及拟周期运动(quasi-periodic motion)).

考虑 Hill 微分方程(Hill differential equation)

$$\frac{d^2u}{dx^2} + F(x)u = 0, \tag{A1}$$

其中的 F 是周期函数，$F(x+2\pi) = F(x)$. 其特殊情形是 Mathieu 微分方程(Mathieu differential equation)：

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (a - 2q\cos 2z)u = 0. \tag{A2}$$

(A1)的解并不一定是周期的. 但是，必定存在一个形式为 $u(x) = e^{i\mu x}\varphi(x)$ 的特解，其中的 $\varphi(x)$ 是周期函数(Floquet 定理(Floquet theorem)，更准确的叙述参见[A1]). 如果特征指数(characteristic exponent) μ 是实的，则 $u(x)$ 是拟周期函数.

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics Springer, 1978(译自俄文).

[A2] Bohl, P. G., Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie, *Crelles J.*, 131(1906), 268 – 321.

[A3] Levitan, B. M. and Zhikov, V. V., Almost periodic functions and differential equations, Cambridge Univ. Press, 1984, 47 – 48(译自俄文).

[A4] Magnus, W. and Winkler, S., Hill's equation, Dover, reprint, 1979, p. 4ff.

朱学贤 译

拟周期运动 [**quasi-periodic motion; квазипериодическое движение**]

质点的运动，其方程为 $x(f) = F(t)$，而 $F(t)$ 是一(向量值)拟周期函数.

【补注】 令 $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$，$n \geqslant 2$，是 n 个不可通约的实数，即在 $\mathbf{Q}$ 上无关，亦即由 $(k \cdot \omega) = 0$，$k \in \mathbf{Z}^n$ 可得 $k = 0$. 在环面 $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 上由 $t \mapsto (\omega_1 t, \cdots, \omega_n t)$ 定义的"直线运动"是拟周期的(因为有不可通约性，故非周期运动). 这是典型的情况，意为任意拟周期运动都是它和一个向量值周期函数的复合.

令一 Hamilton 函数 $H_0(p, q)$ 定义一完全可积方程组(见完全可积微分方程(completely-integrable differential equation))，于是有新的辛坐标 I, θ，称为作用量-角坐标(action-angle coordinates)，使 Hamilton 函数在此坐标下取形式 $H_0 = H_0(I)$，而 Hamilton 方程成为

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_i &= 0, \quad \text{即 } I_i \text{ 为常数}, \\ \dot{\theta}_i &= \frac{\partial H_0}{\partial I_i} = \omega_i(I). \end{aligned}\right\} \tag{A1}$$

这时相空间可以纤维化为 n 维的不变环面，而在每个环面上运动之形式为 $t \mapsto (\omega_1(I)t, \cdots, \omega_n(I)t)$，即为拟周期的(或周期的，或二者之混合，此即 Арнольд 定理(Arnol'd theorem)). (在[A1]中这些运动称为条件周期的(conditionally periodic)). 这些环面就是水平集 $I_i(p, q) =$ 常数，$i = 1, \cdots, n$. 如果一个不变环面相应的频率 $\omega_i(I)$ 是函数无关的，即

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right) \neq 0, \tag{A2}$$

则称它为非共振环面(non-resonant torus). 可以证明，非共振环面构成一个全测度集. 然而可以证明，不变的共振环面确实存在而且这样地混合于不变环面集中成为一个稠密集.

现在考虑一个满足(A2)的可积系统的小扰动：

$$H = H_0 + \varepsilon H_1,$$

其中 H_1 对角变量是周期的. 著名的 KAM 定理 (KAM theorem) (即 Колмогоров-Арнольд-Moser 定理 (Kolmogorov-Arnol'd-Moser theorem)) 说, 若 ε 充分小, 则对几乎所有 $\omega = \omega(I)$ 均有扰动系统的一不变环面 $T(\omega)$ 位于未扰动系统的不变环面 $T_0(\omega)$ 附近. 这个定理是 A. H. Колмогоров (在解析情况下)提出 ([A2]) 而由 В. И. Арнольд 和 J. Moser (在可微情况下) 证明的 ([A3], [A4]). 此外, 不变环面 $T(\omega)$之并成一正测度集, 而其补集之测度当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于 0, 这个定理的内容还多. 特别是, 它指定了确有不变环面存在的 ω 之集合. 这些就是"充分不可通约"的 ω, 这表示, 它们适合一个不等式

$$|k \cdot \omega| = |k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n| \geq C|k|^{1-n},$$

$$0 \neq k \in \mathbf{Z}^n, \quad C \text{ 为常数},$$

这里 $|k| = |k_1| + \cdots + |k_n|$. 这种 ω 有"许多", 以保证定理的陈述有意义. 也可证明, 这种条件有一些是必要的. 例如, 若 $n = 2$ 而 $\omega_2^{-1}\omega_1$ 是有理数, 则存在任意小的可破坏环面 $T_0(\omega)$ 的扰动(H. Poincaré 就已知道这一事实). KAM 定理还有许多其他方面, 例如关于平衡点以及有时间周期外力作用的系统等等都有 KAM 型定理, 例如见 [A5], [A1]. 也有逆 KAM 定理 (converse KAM-theorems), 对空间中的区域给以条件, 以保证没有不变环面存在, ([A11], [A12]). 该系统的一些不变 KAM 环面 (当 ε 增加时) 会分裂为 Cantor 集那样的集合, 在这种问题中, 这些不变环面称为 Cantor 环面 (Cantori).

若 $n = 2$, 等能曲面是 3 维的, 而其上的不变 KAM 环面是 2 维的, 并将等能曲面分裂为相离的小块. 结果是, 不在不变环面上的轨道将被约束在这些环面之间. 如果环面的频率可微地依赖于定义这些频率的作用量变量的值, 这一点由等级非退化条件 (iso-energy non-degeneracy condition)

$$\det \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} & \dfrac{\partial H_0}{\partial I_i} \\ \dfrac{\partial H_0}{\partial I_j} & 0 \end{Bmatrix} \neq 0$$

来保证, 则作用量变量对于一切初值均停留在初值附近而不会有久期扰动现象. 若自由度多于 2, 则不变环面不会把等能面分裂为相离的小块, 而即令在等能非退化条件下, 作用量变量确实可能漂移离开其初值. 这个现象称为 Арнольд 扩散 (Arnol'd diffusion).

若忽略行星间的相互作用, 则行星系就是可积系统之例; 加上这些相互作用就给出了小扰动 εH_1.

参考文献

[A1] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, Москва, 1974 (中译本: В. И. 阿诺尔德, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).

[A2] Колмогоров, А. Н., О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, 《Докл. АН СССР》, **98** (1954) 4, 527 – 530.

[A3] Арнольд, В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механики, 《Успехи Матем. Наук》, **18**, (1963), 6, 91 – 192.

[A4] Moser, J., On invariant curves of area preserving mappings on an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, **Kl** (1962), 1 – 20.

[A5] Tabor, M., Chaos and integrability in nonlinear dynamics, Wiley (Interscience), 1989, chapt. 3.

[A6] Gallovotti, G., The elements of mechanics. Springer, 1983, p. 466 ff.

[A7] Lichtenberg A. J., and Lieberman, M. A., Regular and stochastic motion, Springer, 1983, p. 159 ff.

[A8] Moser, J., Stable and random motions in dynamical systems, Princeton Univ, Press, 1973.

[A9] Thirring, W., Lehrbuch der Mathematischen Physik, I. Klassische Dynamische Systeme. Springer, 1977, p. 138.

[A10] Sternberg, S., Celestial mechanics, I – II, Benjamin, 1969, chapt. III, § 11 – 12.

[A11] Knauf, A., Closed orbits and converse KAM theory, *Non-linearity*, **3** (1990), 961 – 973.

[A12] MacKay, R. S., Meiss J. D., and Strak, J., Converse KAM theory for symplectic twist maps, *Nonlinearity*, **2** (1989), 555 – 570.

齐民友 译

拟素数 [quasi-prime number; квазипростое число]

没有小素因子的正整数. 这意味着 n 的全部素因子都大于 $\mathscr{P}(n)$, 此处 $\mathscr{P}(n)$ 是一个比 n 增长得较慢的函数. 例如

$$\mathscr{P}(n) = n^{1/(\ln\ln n)^2}.$$

拟素数在具有大模的算术级数中分布良好.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 亦见 素数 (prime number); 素数分布 (distribution of prime numbers).

戚鸣皋 译 潘承彪 校

拟射影概形 [quasi-projective scheme; квазипроективная схема]

射影空间 P^n 的局部闭子概形. 换句话说, 拟射影概形是射影概形 (projective scheme)的开子概形. 域上的概形 (scheme) X 是拟射影的, 当且仅当在 X 上存在可逆丰富层 (ample sheaf). "拟射影概形"概念的推广是拟射影态射 (quasi-projective morphism),

即概形的态射(morphism)、它是开嵌入与射影态射的复合. 既是拟射影的又是完全的概形是射影的.

В. И. Данилов 撰

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977, p. 10, 103.

陈志杰 译

拟正则根(根基)[quasi-regular radical; квазирегулярный радикал], 环的

给定环的最大拟正则理想. 环 R 的理想 A 称为拟正则的, 如果 A 是**拟正则环**(quasi-regular ring). 每个交错环(特别是结合环)中都存在拟正则根, 它与所有右(左)拟正则理想的和重合(见[1], [10]). 结合环的拟正则根也称为 **Jacobson 根**(Jacobson radical).

任一交错环 R 中的拟正则根 $J(R)$ 等于 R 中所有极大模右(左)理想之交, 也等于 R 的所有不可约右(左)表示之核的交(见[1], [5]-[8]). 环 R 称为 J 半单的(J-semi-simple), 如果 $J(R)=0$. 商环 $R/J(R)$ 总是半单的. 每个**半单环**(semi-simple ring)同构于本原环的部分直接和([1], [8]). 如果 R 满足右(左)理想的极小条件, 则根 $J(R)$ 是幂零的且商环 $R/J(R)$ 同构于体上的全矩阵环与 Cayley-Dickson 代数的有限直和(后一项在结合环中没有), 见[1]-[3]. 设 A 是环 R 的双边理想, 则

$$J(A)=A\cap J(R)$$

(见[1], [4]); 如果 R 是一结合环, R_n 是 R 上 n 阶矩阵环, 则

$$J(R_n)=[J(R)]_n.$$

若 R 是域 F 上的结合代数, 且 F 的基数大于 R 在 F 上的维数, 或是 R 在 F 之上是代数的, 则 $J(R)$ 是零理想. 满足基本恒等式的有限生成交错环的拟正则根是与下零根相同的(见**环与代数的根**(radical of rings and algebras))([6]). 在 Jordan 代数中存在着拟正则根的某种类似(见 **Jordan 代数**(Jordan algebra)).

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Жевлаков К. А., 《Алгебра и логика》, 4(1965), 4, 87-102.

[3] Жевлаков К. А., 《Алгебра и логика》, 5(1966), 3, 11-36.

[4] Жевлаков К. А., 《Алгебра и логика》, 8(1969), 2, 176-180.

[5] Жевлаков, К. А., 《Алгебра и логика》, 8(1969), 3, 309-316.

[6] Жевлаков К. А., 《Алгебра и логика》, 11(1972), 2, 140-161.

[7] Слинько А. М., Шестаков И. П., 《Алгебра и логика》, 13(1974), 5, 544-588.

[8] Kleinfeld, E., Primitive alternative rings and semi-simplicity, *Amer. J. Math.*, 77(1974), 725-730.

[9] McCrimmon, K., The redical of a Jordan algebra, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **62**(1969), 671-678.

[10] Smiley, M. F., The radical of an alternative ring, Ann. of Math. **49**(1948), 3, 702-709.

И. П. Шестаков 撰

【补注】 行有限的无限矩阵环的根由理想的零化序列决定([A1]). 多项式环 $R[x]$ 的根为 $N[x]$, N 是 R 中某个诣零理想(定出 N 仍是未决问题).

参考文献

[A1] Sexauer, N. E. and Warnock, J. E., The radical of the row-finite matrices over an arbitrary ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **39**(1969), 281-295.

[A2] Rowen, L., Ring theory, Ⅰ-Ⅱ, Acad. Press, 1988.

冯绪宁 译

拟正则环[quasi-regular ring; квазирегулярное кольцо]

每个元素都是拟正则的环(ring). 交错环(特别地, 结合环) R 的一个元素 a 称为拟正则的(quasi-regular), 如果 R 中存在元素 a', 使得

$$a+a'+aa'=a+a'+a'a=0.$$

元素 a' 称为 a 的拟逆(quasi-inverse). 如果 R 是具有恒等元 1 的环, 则元素 $a\in R$ 是以 a' 为拟逆的拟正则元, 当且仅当 $1+a$ 是以 $1+a'$ 为逆的可逆元. 每个幂零元(nilpotent element)是拟正则的. 在一个结合环中, 所有拟正则元的集合关于循环合成(cyclic composition)运算: $x\cdot y=x+y+xy$ 构成群. 没有常数项的(非交换)形式幂级数组成的环是拟正则环的一个重要例子. 存在单结合拟正则环([2]).

参考文献

[1] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[2] Sasiada, E. and Cohn, P. M., An example of a simple radical ring, *J. of Algebra*, **5**(1967), 3, 373-377.

И. П. Шестаков 撰 裴定一 译 赵春来 校

拟单表示[quasi-simple representation; квазипростое представление]

一个连通半单实 Lie 群 G 在一个 Banach 空间 E 内这样一个连续线性表示(linear representation) π: 1) 对于 G 的中心内任意元素 x 来说, 算子 $\pi(x)$ 是 E 上恒等算子的一个标量倍; 2) 如果 F 是 E 内关于 π 的解析向量(analytic vector)的空间而 π_F 是 G 的泛

包络代数(universal enveloping algebra)$\mathscr{U}$ 的表示. 则对于 $\mathscr{U}$ 的中心内一切元素 z 来说, $\pi_F(z)$ 是 F 上恒等算子的一个标量倍. 这些标量倍确定了 $\mathscr{U}$ 的中心的一个特征标, 称为这个拟单表示的无穷小特征标(infinitesimal charactes). 两个拟单表示称为无穷小等价的(infinitesimally equivalent), 如果它们在各自的泛包络代数的解析向量的空间内确定等价的表示. 一个群在一个 Banach 空间内每一个完全不可约表示都是拟单表示, 而一个群 G 在一个 Banach 空间内任意不可约拟单表示都与一个完全不可约表示无穷小等价; 后者是在 G 的表示的基本系列内的表示(一般不是酉表示)的某个商表示的不变子空间上的限制.

参考文献

[1A] Harish-Chandra, Representation of a semisimple Lie group on Banach space Ⅰ, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 75(1953), 185 - 243.

[1B] Harish-Chandra, Representation of a semisimple Lie group Ⅱ, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76(1954), 26 - 65.

[2] Lepowsky, J., Algebraic results on representations of semisimple Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 176 (1973), 1 - 44.

[3] Фомин, А. И., 《Функцион анализ и его прилож.》, 10(1976), 3, 95 - 96.

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wallach, N. R., Real reductive groups, Acad. Press, 1988.

郝炳新 译

拟解[quasi-solution; квазирешение]

某个不适定问题的广义解, 它和真解不一样, (在充分一般的条件下)满足 Hadamard 意义下的适定条件.

设 X, Y 是度量空间, 令 $A: X \to Y$, 且令 M 是 X 的一个子集. 对已给的 $y \in Y$, 方程

$$Ax = y \tag{1}$$

在集合 M 上的拟解(quasi-solution)是 M 中的元 $\bar{x}$, 对于 $x \in M$ 它极小化偏差 $\rho(Ax, y)$. 如果方程(1)在 M 上有真解 x_0, 那么 x_0 也是拟解.

拟解的集合对 y 的依赖性可方便地表为两个映射的叠加:

$$\bar{x} = A^{-1}Py,$$

其中 A^{-1} 是 A 的逆(一般是多值的), 而 P 是 Y 中到集合 $N = AM$ 上的度量投影算子. 这个叠加使得人们能将对拟解性质的研究化为对映射 A^{-1} 和 P 的研究. 例如, 如果 N 是一 **Чебышев 集**(Chebyshev set), 而 A^{-1} 在 N 上是单值和连续的, 那么求拟解的问题是适定的. 如果 P 或 A^{-1} 是多值的, 那么拟解集合的稳定性可以用 β 连续性(β-continuity)(集合值函数的连续性)的术语来阐述.

一般地 X 和 Y 取为线性赋范空间, 这使得能得到更完全的和完美的结果. 于是, 如果 Y 是严格凸的, A 是连续且可逆的线性算子, 并且 M 是凸紧统. 则求拟解的问题是适定的. 某些条件的其他的组合可以保证求拟解问题的适定性, 其中有些条件加强了, 而其他一些则减弱了(例如, A 是闭的线性算子, 但 Y 是 Hilbert 空间).

存在一些确定集合 M 的方法来保证拟解的有效确定. 应用得最多的方法之一是这样的: 考虑第三个空间 Z(空间 X, Y, Z 中的每一个或其中某些可以相同)和一个线性算子 $B: Z \to X$, 其逆 B^{-1} 是无界的. 取集合 $M = M_r$ 为一球 S_r 的象:

$$M_r = BS_r;\ S_r = \{z \in Z: \|z\| \leq r\}.$$

在此形式中求拟解的问题是数学规划的问题: 在 $\|z\| \leq r$ 的限制下极小化泛函:

$$f(z) = \|ABz - y\|.$$

对 Hilbert 空间 Y 和 Z 可以得到**二次规划**(quadratic programming)的问题.

在拟解是适定的情形下, 在应用中特别重要的是稳定性估计, 在其中 $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$ 对 $\|y_1 - y_2\|$ 的依赖性是已给的. 如果确定集合 M 的方法如上所述, 那么拟解的稳定性可以用下面的函数来描述:

$$\Omega(\tau, r) = \sup\{\|x_1 - x_2\|: x_i = Bz_i,\ \|z_i\| \leq r,$$
$$\|Ax_1 - Ax_2\| \leq \tau,\ i = 1, 2\}.$$

下面的关系式成立:

$$\Omega(\tau, r) = \omega(\tau, 2r),$$

其中 $\omega(\tau, r)$ 是极值问题 $\omega(\tau, r) = \sup\{\|Bz\|: \|z\| \leq r, \|ABz\| \leq \tau\}$ 的解.

对 Hilbert 空间 Z 和 Y, $\omega(\tau, r)$ 有封闭形式的表达式.

参考文献

[1] Иванов, В. К., 《Докл. АН СССР》, 145(1962), 2, 270 - 272.

[2] Иванов, В. К., 《Матем. сб.》, 61 (1963), 2, 211 - 223.

[3] Лисковец, О. А., 《Дифференциальные уравнения》, 7(1971), 9, 1707 - 1709.

[4] Морозов, В. А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, М., 1973, 129 - 178.

[5] Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974(英译本: Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Ya., Solutions of ill-posed

problems, Wiley, 1977).

[6] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы высшей математики, Т. 1 - 2, Минск, 1972 - 1975.

В. К. Иванов 撰

【补注】 通常，算子 B 使得 B^{-1} 是一微分算子．因而在一适当的空间上 B 是一紧算子，以致集合 M 是紧统．

参考文献

[A1] Hofmann, B., Regularization for applied inverse and ill-posed problems, Teubner, 1986.

[A2] Groetsch, C. W., The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind, Pitman, 1984.

[A3] Baumeister, J., Stable solution of inverse problems, Vieweg, 1987.

[A4] Nashed, M. Z. (ed.), Generalized inverses and applications, Acad. Press, 1976.

[A5] Morozov, V. A., Methods for solving incorrectly posed problems, Springer, 1984 (译自俄文).

孙和生 译 陆柱家 校

拟分裂群 [quasi-split group; квазиразложимая группа]，拟可裂群 (quasi-splittable group)，在域 k 上的．

定义在 k 上且包含定义在同一域上的 **Borel 子群** (Borel subgroup) 的仿射代数群 (见**仿射群** (affine group)；**代数群** (algebraic group))．每个仿射代数群总对其基域的某一扩张是拟分裂域，例如在基域的代数闭包上．每一个定义在有限域 k 上的仿射代数群是在 k 上的拟分裂群．亦见**分裂群** (split group)．

В. Л. Попов 撰

【补注】 一个群可以是在 k 上拟分裂的，或称 k 拟分裂的 (k-quasi-split)，但不是 k 分裂的．

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975, Sect. 35. 1.

李慧陵 译

拟辛空间 [quasi-symplectic space; квазисимплектическое пространство]

一个奇数维的射影空间 P_{2n-1}，其中定义了以下的零系 (zero system)：

$$u_a = -x^{m+a};\ u_{m+a} = x^a;\ u_{m+b} = u_{n+b} = 0$$

与

$$u_{n+b} = x^{m+b};\ u_{m+b} = -x^{n+b},$$

$$m \leqslant b \leqslant n-1;\ 0 \leqslant a \leqslant m-1.$$

第一个零系将空间里的点变到通过 $(2n-2m-1)$ 维平面

$$x^a = x^{m+a} = 0$$

的超平面，而第二个零系将点变到这同一平面的点．

平面 $x^a = x^{m+a} = 0$ 称为**绝对形** (absolute)．并且这两个零系是拟辛空间 $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$ 的绝对零系．拟辛空间是**半辛空间** (semi-symplectic space) 的一个特殊情形．

$S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$ 的将绝对平面变到自身的直射变换有形式

$$'x^k = \sum_\lambda U^k_\lambda x^\lambda,$$

$$'x^u = \sum_\lambda T^u_\lambda x^\lambda + \sum_\mu V^u_\mu x^\mu,$$

$$0 \leqslant k,\ \lambda \leqslant 2m-2,\ 2m-1 \leqslant \mu,\ u \leqslant 2n-1,$$

且矩阵 U^k_λ 与 V^u_μ 是 $2m$ 与 $2n-2m$ 阶的辛矩阵，T^u_λ 是一个 $2m$ 列 $2n-2m$ 行的长方形矩阵．

这些直射变换称为 $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$ 的拟辛变换 (quasi-symplectic transformations)，它们与空间的给定的零系是交换的．两直线的拟辛不变量类似于辛空间的直线的辛不变量定义．

拟辛空间 $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$ 能够由辛空间 $S_{P_{2n-1}}$ 通过从 $S_{P_{2n-1}}$ 的绝对形到 $S^{2m-1}_{P_{2n-1}}$ 的绝对形的极限过程而得到．即第一个零系将空间的所有点变到通过绝对平面的平面中，而第二个将所有平面变到这同一平面的点中．

拟辛变换构成一个群，它是一个 Lie 群．

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文).

林向岩 译 陆珊年 校

拟一致收敛 [quasi-uniform convergence; квазиравномерная сходимость]

一致收敛 (uniform convergence) 的一种推广．从拓扑空间 X 到度量空间 Y 内，点态收敛于映射 f 的映射序列 $\{f_n\}$ 称为拟一致收敛的，如果对于任意 $\varepsilon > 0$ 及任意正整数 N，存在 X 的可数开覆盖 $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots\}$ 及大于 N 的正整数序列 $n_0, n_1, \cdots$，使得对于所有 $x \in \Gamma_k$，有 $\rho(f(x), f_{n_k}(x)) < \varepsilon$．一致收敛蕴涵拟一致收敛．对于连续函数序列，拟一致收敛是其极限函数连续的必要充分条件 (Arzelà-Александров 定理 (Arzelà-Aleksandrov theorem))．

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948 (中译本: П. С. 亚历山大罗夫, 集与函数泛论初阶, 上册, 商务印

书馆，1954；下册，高等教育出版社，1955）．

В．В．Федорчук 撰 罗嵩龄 罗 昕 译

拟簇 [quasi - variety；квазимногообразие]

见代数系统拟簇（algebraic systems，quasi - variety of）．

【补注】 正如在代数系统拟簇（algebraic systems，quasi-variety of）的补注中所指出的，定义拟簇的拟等式（quasi-identity）通常称为 Horn 语句（Horn sentences）．相应地，拟簇也称为泛 Horn 类（universal Horn class）；它也称为拟本原类（quasi-primitive class）．

四元型 [quaternary form；кватернарная форма]，亦称四元形式

四变量型，亦即四个未知量的、系数属于一个给定的具有恒等元的交换环的齐次多项式（见齐次函数（homogeneous function））．

О．А．Иванова 撰 朱尧辰 译

四元二次型 [quaternary quadratic form；кватернарная квадратичная форма]，亦称四元二次形式

四变量的二次型（quadratic form）．域 F 上的四元二次型与同一域上的四元数（quaternion）代数有关．这就是说，与以 $[1, i_1, i_2, i_3]$ $(i_1^2 = -a_1 \in F, i_2^2 = -a_2 \in F$，且 $i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3)$ 为基底的代数相对应，可有下列四元二次型，它是四元数的范数：

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = N(x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) = x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2.$$

对于与四元数代数相对应的四元二次型，并且仅仅对于这种型，可定义四元二次型的合成：

$$q(x)q(y) = q(z),$$

其中向量 z 的坐标是 x 和 y 的双线性型．这种合成只对二、四或八变量二次型才有可能．

А．В．Малышев 撰

【补注】 最后提到的结果称 Hurwitz 定理（Hurwitz theorem）；见二次型（quadratic form）．

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

四元数 [quaternion；кватернион]

一个超复数（hypercomplex number），它在四维空间中有几何刻画．四元数系是在 1843 年由 W．R．Hamilton（1805 － 1865）提出的．四元数是由于力图推广复数而产生的历史上第一个超复数系的例子．复数被几何地描述为平面上的点及其算子，相应于平面上最简单的几何变换．不能把三维或更高维空间中的点"组织"成类似实数域或复数域的数系．然而，如果去掉乘法的交换性要求，则可以由 4 维空间的点构造一个数系（在 3 维，5 维或更高维空间中，却不能这样做）．

四元数构成实数域上一个 4 维代数，带有基 1，i, j, k（"基单位"）和下面的"基单位"乘法表：

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

每个四元数可以写成

$$X = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot i + x_2 \cdot j + x_3 \cdot k$$

或者（由于 1 起着通常的单位元的作用，在写成四元数时可被省略）写成

$$X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k.$$

四元数可以分成标量部分（scalar part）x_0 和向量部分（vector part）

$$V = x_1 i + x_2 j + x_3 k,$$

即 $X = x_0 + V$．若 $x_0 = 0$，则四元数 V 称为向量，等同于通常的 3 维向量，因为这样的两个向量 V_1 和 V_2 在四元数代数中的乘法与向量 V_1 和 V_2 在 3 维空间中的标量积 (V_1, V_2)（见内积（inner product））及向量积（vector product）$[V_1, V_2]$ 有关，公式为

$$V_1 V_2 = -(V_1, V_2) + [V_1, V_2].$$

这表明了四元数和向量演算（vector calculus）之间的密切关系．历史上，后者来源于四元数理论．

对应于每个四元数 $X = x_0 + V$ 有一个共轭四元数（conjugate quaternion）$\bar{X} = x_0 - V$，并且

$$X \cdot \bar{X} = \bar{X} \cdot X = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

这个实数称为四元数 X 的范数（norm of the quaternion），记为 $N(X)$．范数满足关系

$$N(XY) = N(X)N(Y).$$

3 维空间的绕原点的任意旋转可通过范数为 1 的四元数 P 来确定．对应于 P 的旋转将向量 $X = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ 变为向量 $Y = y_1 i + y_2 j + y_3 k = PXP^{-1}$．

四元数代数是实数域上带单位元的唯一的结合的非交换的有限维赋范代数．四元数代数是一个除环（skew-field），即在其中定义了除法，四元数 X 的四元数逆元是 $\bar{X} / N(X)$．四元数除环是唯一无零因子的结合非交换的有限维实代数（亦见 Frobenius 定理

(Frobenius theorem); **Cayley-Dickson 代数** (Cayley-Dickson algebra)).

参考文献

[1] Калужнин, Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973.

[2] Кантор, И. Л., Солодовников, А. С., Гиперкомплексные числа, М., 1973 (英译本: Kantor, I. L. and Solodovnikov, A. S., Hyperkomplexe Zahlen, Teubner, 1978).

[3] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973 (英译本: Kurosh, A. G., Higher algebra, Mir, 1972).

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】 设 ζ 是四元数代数中的元素 $(1+i+j+k)/2$. Hurwitz 四元整数环 (Hurwitz ring of integral quaternions) 是环

$$H=\{m_0\zeta+m_1i+m_2j+m_3k : m_0, m_1, m_2, m_3\in\mathbf{Z}\}.$$

Hurwitz 环是非交换环, 其中类似的 Euclid 除法性质 (Euclidean division property) (见 **Euclid 算法** (Euclidean algorithm)) 成立: 对任何 $a,b\in H$, $b\neq 0$, 存在 q, $r\in H$, 使得

$$a=qb+r,$$

并且

$$N(r)<N(b).$$

(这一性质对子环 $\{n_0+n_1j+n_2j+n_3k : n_0, n_1, n_2, n_3\in\mathbf{Z}\}$ 不成立.) 由此推出每个左理想是左主理想, 这又可以用来证明 Lagrange 四平方定理 (Lagrange four-square theorem), 使得每个正整数写成四个整数的平方和.

Lagrange 恒等式 (Lagrange identity) 在这一结果的证明中起了重要作用, 对实数 $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3$

$$\begin{aligned}(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2) &=\\ =(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)^2 &+\\ +(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)^2 &+\\ +(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1)^2 &+\\ +(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0)^2 &\end{aligned}$$

等价于范数的乘法性质 $N(XY)=N(X)N(Y)$, 这里 X, Y 是四元数, $X=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, $Y=b_0+b_1i+b_2j+b_3k$.

将 X 写成 $(a_0+a_1i)+(a_2+a_3i)j$, 令 $\alpha=a_0+a_1i$, $\beta=a_2+a_3i$, 得到 $X=\alpha+\beta j$. 容易证明四元数代数同构于复数 (2×2) 矩阵代数

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{bmatrix},$$

这里 $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ 是 $\alpha, \beta\in\mathbf{C}$ 的共轭复数.

当希望保持范数的乘法性质 $N(XY)=N(X)\cdot N(Y)$ 时, 四元数 (在实数域上) 仅存在一种可能的推广: 八维数 (octave) 或八元数 (octonion), 它有八个分量而不是四个 (Hurwitz 定理 (Hurwitz theorem), 1898; 见 **Cayley 数** (Cayley numbers)).

四元数除环的中心是实数域. 后来超复数系的概念在任意域的除环理论中得到了推广, 例如交换域的 **Brauer 群** (Brauer group) 理论.

在这方面, 广义四元数代数是域 F 上的由 1, x, y, xy 生成的 4 维代数, 带有乘法表 $x^2=a$, $y^2=b$, $yx=-xy$, 这里 a, b 是 F 的非零元. (四元数是 $a=b=-1$, F 为实数域的情形.)

参考文献

[A1] Albert, A. A., Structure of algebras, Amer. Math. Soc., 1935.

[A2] Brauer, R. and Noether, E., Über minimale Zerfällungskörper irreducibler Darstellungen, *Sitzungsber. Akad. Berlin*, 27 (1927), 221-226.

[A3] Wedderburn, J. H. M., On hypercomplex numbers, *Proc. London Math. Soc. Ser.* 2, 6 (1907), 77-118.

[A4] Brauer, R. and Weiss, E., Non-commutative rings, Harvard Press, 1950, Part I.

[A5] Behnke, H. and Bachmann, F., Grundzüge der Mathematik, 1, Göttingen, 1962.

[A6] Maclane, S. and Birkhoff, G., Algebra, MacMillan, 1979.

[A7] Crowe, M., A history of vector analysis, the evolution of the idea of a vectorial system, Univ. of Notre Dame Press, 1967.

[A8] Stephenson, R. J., Development of vector analysis from quaternions, *Amer. J. Physics*, 34 (1966), 194-201.

[A9] Waerden, B. L., van der, Hamiltons Entdeckung der Quaternionen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1973.

[A10] Herstein, I. N., Topics in algebra, Wiley, 1975, Sect. 7.4.

蔡传仁 译

四元数群 [quaternion group; кватернионов группа]

由生成元 x, y 和关系

$$x^4=x^2y^2=xyxy^{-1}=1$$

所定义的 8 阶亚 Abel 2 群 (见**亚 Abel 群** (meta-Abelian group)).

四元数群可以同构地嵌入到四元数代数的乘法群中 (见**四元数** (quaternion), 嵌入由 $x\mapsto i$, $y\mapsto j$ 定义). 对应

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

定义了四元数群被（2 × 2）复矩阵的**忠实表示**（faithful representation）.

广义四元数群（generalized quaternion group）（它在 $n=2$ 时为四元数群）是由生成元 x, y 和关系

$$x^{2^n} = x^{2^{n-1}} y^2 = xyxy^{-1} = 1$$

（其中 n 为取定的数）定义的群，这是一个阶为 2^{n+1} 的 2 群，其幂零类为 n.

四元数群是一个 **Hamilton 群**（Hamilton group），而且可视为极小 Hamilton 群，因为任意非 Abel 的 Hamilton 群包含一个与四元数群同构的子群．在四元数群内（以及在广义四元数群内）一切非平凡子群的交是非平凡子群．每一个具有这一性质的非 Abel 群是广义四元数群．在有限 Abel 群当中只有循环 p 群（p-group）；**循环群**（cyclic group））有此性质．广义四元数群和循环 p 群是仅有的具有真 L 同态的 p 群（见 p 群），所谓 L 同态是子群格到一个格 L 上的非同构的同态．

有时"四元数群"也用来表示四元数代数的乘法群中以及相关的拓扑群中的一些子群．

参考文献

[1] Hall, M. Jr., Group theory, Macmillan, 1959（中译本：M．赫尔，群论，科学出版社，1981）.

H. H. Вильямс 撰

【补注】 四元数群 H 到四元数代数内的嵌入 $x \mapsto i$, $y \mapsto j$ 给出群代数 $\mathbf{R}[H]$ 到四元群代数的满代数同态，后者可视为 $\mathbf{R}[H]$ 关于理想 (x^2+1) 的商．

李慧陵 译

四元数结构［quaternionic structure；кватернионная структура］

1）实向量空间 V 上的四元数结构是四元数除环 $\mathbf{H}$ 上模结构，就是由 V 上两个反交换**复结构**（complex structure）J_1, J_2 所诱导的 V 的自同态代数 End V 的一个子代数 H．自同态 J_1, J_2 称为这个四元数结构 H 的标准生成元（standard generators），由它们所定义的 H 的基 $\{\mathrm{Id}, J_1, J_2, J_3 = J_1J_2\}$ 称为标准基（standard basis）．标准基确切到 H 的自同构范围内是唯一确定的．代数 H 同构于四元数代数（见**四元数**（quaternion））．向量空间 V 的自同构 A 称为这个四元数结构的自同构（automorphism），如果由它所诱导的自同构空间的变换 Ad A 保持 H 不变，这就是说，如果 $(\mathrm{Ad}\,A)H = AHA^{-1} = H$．如果更进一步，在 H 上诱导出恒等自同构，则 A 称为这个四元数结构的特殊自同构（special automorphism）．这个四元数结构的所有特殊自同构的群同构于除环 $\mathbf{H}$ 上**一般线性群**（general linear group）GL $(m, \mathbf{H})$，这里 $4m = \dim V$．一个四元数结构的全体自同构的群同构于子群 GL$(m, \mathbf{H})$ 与单位四元数群 $H_1 \approx \mathrm{Sp}(1)$ 共合化的直积．

2）微分流形上的四元数结构是切空间上一个四元数结构的域，就是切空间的自同态的丛 End$(T(M)) \to M$ 的一个子丛 $\pi: H \to M$，它的纤维 $\mathscr{H}_p = \pi^{-1}(p)$ 是切空间 $T_p(M)$ 上的四元数结构，对一切 $p \in M$．流形 M 上一对反交换殆复结构 J_1, J_2 称为一个特殊四元数结构（special quaternionic structure），它诱导出四元数结构 H，这里

$$H_p = \{J = \lambda_0 \mathrm{id} + \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_1 J_2 : \lambda_i \in \mathbf{R}\}.$$

流形 M 上一个四元数结构 H 被一个特殊四元数结构所诱导，当且仅当 $H \to M$ 是平凡的．流形上一个四元数结构可以看成一个 Sp(1)・GL$(m, \mathbf{H})$ 结构，而一个特殊四元数结构可以看成在 **G 结构**（G-structure）理论意义下一个 GL$(m, \mathbf{H})$ 结构．因此，为了使得在一个流形 M 上存在一个四元数结构（或特殊四元数结构），必要且只要切丛的结构群约化为群 Sp(1)・Sp(m)（或 Sp(m)）．一个特殊四元数结构，看成一个 GL$(m, \mathbf{H})$ 结构，第一个延伸就是一个 e 结构（标架域），它确定一个与这特殊四元数结构相关联的典范**线性联络**（linear connection）．这个联络的**曲率**（curvature）和**挠率**（torsion）为零是这个特殊四元数结构局部等价于向量空间 $\mathbf{R}^{4m}$ 上标准平坦特殊四元数结构的一个必要且充分的条件．

四元数 Riemann 流形（quaternionic Riemannian manifold）是 **Kähler 流形**（Kähler manifold）对于四元数结构的类比．它被定义为一个 $4m$ 维 **Riemann 流形**（Riemannian manifold）M，它的完整群 Γ 被包含在群 Sp(1)・Sp(m) 内．如果 $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(m)$，则这个四元数 Riemann 流形称为特殊的（special）或四元数（quaternionic）Kähler 流形，并且具有零 **Ricci 曲率**（Ricci curvature）．一个四元数 Riemann 流形可以被刻画为这样的一个 Riemann 流形，在其中存在一个关于 Levi-Civita **平行位移**（parallel displacement）不变的四元数结构 H．类似地，一个特殊四元数 Riemann 流形是这样的一个 Riemann 流形，在其中存在一个关于 Levi-Civita 平行位移不变的特殊四元数结构 (J_1, J_2)：$\nabla J_1 = \nabla J_2 = 0$，这里 ∇ 是 **Levi-Civita 联络**（Levi-Civita connection）的**共变微分法**（covariant differentiation）算子．

在一个四元数 Riemann 流形里存在一个典范平行 4 形式，它在 M 上微分形式环 $\Lambda(M)$ 内定义若干与 Laplace-Beltrami 算子交换的算子（外积算子，缩

并算子）．这就使得有可能在四元数 Riemann 流形上构造类似关于 Kähler 流形的 Hodge 理论那样一个调和微分形式的有趣理论（[2]），并且得出对于流形 M 的 Betti 数的估计（见 **Hodge 结构**（Hodge structure）；**Betti 数**（Betti number））．局部 Euclid 空间穷尽了所有齐次特殊四元数 Riemann 流形．作为非特殊齐次四元数 Riemann 流形的例子可以举四元数射影空间还有其他的 Wolf 对称空间，它们与无中心的单紧 Lie 群一一对应（见**对称空间**（symmetric space））．这些就穷尽了所有紧齐次四元数 Riemann 流形．很广泛一类非紧非对称齐次四元数 Riemann 流形可以通过 Clifford 代数上的模构造出来（见[5]）．

参考文献

[1] Chern, S. S., On a generalization of Kähler geometry, in Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in Honour of S. Lefschetz, Princeton Univ. Press, 1957, 103－121.

[2] Kraines, V. Y., Topology of quaternionic manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **122** (1966), 357－367.

[3] Yano, K. and Ako, M., An affine connection in an almost quaternionic manifold, *J. Differential Geom.*, **8** (1973), 3, 341－347.

[4] Sommese, A. J., Quaternionic manifolds, *Mat. Ann.*, **212** (1975), 191－214.

[5] Алексеевский, Д. В., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **39** (1975), 2, 315－362.

[6] Wolf, J. A., Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, *J. Math. Mech.*, **14** (1965), 6, 1033－1047.

[7] Алексеевский, Д. В., 《Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия》, **11** (1974), 37－123.

Д. В. Алексеевский 撰 郝钢新 译

排队 [queue; массового обслуживания система]

一种系统，它包括一个由需要"服务"的请求（用户，呼唤）组成的随机"输入"流以及一个提供这种"服务"的机构（规则）．

排队的典型例子是自动电话交换机．其中请求即电话用户的呼唤（呼唤的输入流），是随机地发生的，而服务机构是由固定数目的 n 条通道（线路、服务台、中继线）组成的，其中每条通道可能在一段随机时间即通话时间里，为了服务呼唤而繁忙．如果所有 n 条通道都繁忙，那么一个新到的呼唤就会遭受"损失"．服务机构（规则）也可能包括有关下一个呼唤要用到的空闲线路的指示，或当想用的线路繁忙时如何等待的建议等等．

还有其他类型的系统，其中每个请求必须得到服务．例如，到达机场要求降落的飞机或在计算机上必须加以处理的问题（程序）等．

排队的"随机"部分不难用随机序列或过程来描述．最简单的排队可以用非负值随机变量组成的二维随机控制序列

$$\{\tau_j^e, \tau_j^s: 0 \leqslant j < \infty\}$$

来描述．序列 $\{\tau_j^e\}$ 用来定义呼唤流 e：它给出请求进入系统的随机时间

$$\tau_0^e, \tau_0^e+\tau_1^e, \tau_0^e+\tau_1^e+\tau_2^e, \cdots.$$

同样，输入流也可用随机过程 $\{e(t): t \geqslant 0\}$ 来刻画，其中 $e(t)$ 表示到时刻 t 为止进入系统的呼唤数．第二个序列 $\{\tau_j^s\}$ 描述服务过程 s：随机变量 τ_j^s 表示第 j 个呼唤所用的服务时间．服务结束后，呼唤就离开系统．

标值点过程可用来更一般地描述控制序列，其中 τ_j^e 表示点之间的间隔，而 τ_j^s 表示点的标值．

对控制序列的表述并不能唯一地决定系统的性态，还必须同时给出服务规则：决定服务开始的规则及呼唤的行为依赖于系统状态的方式．

不同的服务规则产生多种不同形式的排队．下面给出一些最简单的排队．

Ⅰ．**等待制系统**．进入系统而没有立即被服务的呼唤形成排队等待服务．此后，呼唤按到达的顺序接受服务．如果在时刻 t 有排队或有一个呼唤正被服务，那么就称系统此刻为繁忙的（busy），否则，称系统为空闲的（free）．要区分下面两种排队系统．

I_1．常规系统．如果系统空闲，那么当一个呼唤到达时它立即开始工作（服务该呼唤）；如果系统繁忙，那么下一个呼唤的服务开始于前一个呼唤服务结束的时刻．这种系统也称为完全可达的（completely accessible）．

I_2．自控服务系统．这里服务仅在时刻 $0, \tau_1^s, \tau_1^s+\tau_2^s, \cdots$ 开始．

Ⅱ．**队长有限制的系统（有限等待空间的系统）**．如果在时刻 t 有一个呼唤正被服务而其他 $n-1$ 个呼唤在等待，就称队长 $q(t)$ 等于 $n \geqslant 1$．令 $q_n = q(\tau_0^e + \cdots + \tau_{n-1}^e)$ 为第 n 个呼唤到达时刻的队长（该呼唤不计在内）．在队长有限制的系统中，如果第 n 个呼唤到达时队长 q_n 等于最大容许值 $N \geqslant 1$，那么该呼唤就遭受"损失"而离开系统．数 N 为此系统的一个基本特征．如果 $N=\infty$，那么就是队长无限制的常规系统．

也会考虑队长随机限制的系统与等待时间随机限制的系统．

Ⅲ．**损失制系统**．即 $N=1$ 的队长有限制的系统．对于损失制，显然不用考虑自控服务情形．

对每个最简单系统，对控制序列的描述完全确定

系统的行为．换言之，对每个基本事件 ω 及任意时刻 t，时刻 t 系统的状态唯一被确定．

除以上形式服务外，可以有更复杂的系统．它们具有更复杂的控制序列及服务规则．

Ⅳ．**成批输入流与成批服务**．这些系统由四维控制序列

$$\{\tau_j^e, v_j^e, \tau_j^s, v_j^s : j \geq 0\}$$

来控制，其中 v_j^e 与 v_j^s 皆为非负整数值的．新随机变量的意义如下：呼唤以批量 $v_0^e, v_1^e, \cdots$ 进入系统（在相应的时刻 $\tau_0^e, \tau_0^e + \tau_1^e, \cdots$）；服务也是成批地进行，第一批有 v_0^s 个呼唤被服务，第二批有 v_1^s 个等等（如果排队中没有足够多的呼唤，那么这些批量可能变小）．这里 τ_k^s 为第 k 批服务所用的时间．

对于成批输入与成批服务的系统可以有上面描述的那些服务规则．

Ⅴ．**多服务台系统**．在这些系统中服务可以在 $m \geq 1$ 条通道中同时进行，以便下一个呼唤（或在成批服务中下一批呼唤）可以在前一服务完成之前开始服务．多服务台系统的服务规则与所有已考虑过的服务类型类似（每一条通道起一个独立的服务机构的作用）．只须补充说明当有 n 条通道同时空闲时呼唤选择哪个通道．像前面一样，τ_i^s 为第 i 批（其批量 $\leq v_i^s$）服务所用的时间．

对于一个多服务台系统，如果一个呼唤在其到达时刻发现所有通道皆繁忙而"损失"且因此离开系统，那么就称为损失制系统（loss system）．

有时，为了简化多服务台系统的控制序列的性质，不用两个而用 $m+1$ 个二维控制序列

$$(\tau_i^e, v_i^e), (\tau_i^{s_1}, v_i^{s_1}), \cdots, (\tau_i^{s_m}, v_i^{s_m})$$

是方便的．这样，第 k 条服务通道被序列 $(\tau_i^{s_k}, v_i^{s_k})$，$k = 1, \cdots, m$，控制．例如，$\tau_i^{s_k}$ 为在第 k 条通道中第 i 批呼唤的服务时间．

以上的分类远未详尽．例如，有些具有广泛应用的系统中，呼唤被分成两类或更多类，其中一类相对于其他类具有服务优先权（这种情形出现于当一类呼唤的等待费用高于其他类时）．对这种系统的刻画要求对应于不同类型的请求引入若干个输入流．与有优先权的系统有关的还有服务机构要求运行中断的系统．可以用特殊的输入流来刻画这种中断的出现和长度的规律．

在**排队论**（queueing theory）文献中还讨论过其他特殊形式的服务系统．但在这里应记住：

1）基本的与最通用类型的排队都包括在以上的分类中；

2）作为规律探讨各种系统的排队的方法大都很类似，而且用研究"基本"系统的方法很好地说明了；这些方法的基础无论从一般方面来说还是从特殊发展的方面来说都是概率论．

主要目的是探讨刻画系统行为的各种参数的分布（例如，队长，直到下一次服务为止的等待时间，给定呼唤的损失概率等等）．在这一点上，主要感兴趣的是描述长时间之后这些特征行为的遍历定理．例如，描述自动电话交换机效率的一个特征是呼唤损失率，即当 $t \to \infty$ 时，时刻 t 为止损失的呼唤数 $r(t)$ 与相同时间内到达的呼唤数 $e(t)$ 之比 $r(t)/e(t)$ 的极限 p（若它存在）．很合乎情理地称这个极限为损失概率（loss probability）．第 n 个呼唤的等待时间 w_n 及第 n 个呼唤到达时刻的队长 q_n 的分布 $\mathrm{P}\{w_n < x\}$ 与 $\mathrm{P}\{q_n < x\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限都是刻画系统特征的参数．

探讨的方法通常由寻找 Марков 过程或刻画系统状态的序列组成．例如，如果随机变量 τ_j^e 与 τ_j^s 皆服从指数分布且对不同下标为独立的随机变量，那么"队长过程"$q(t)$ 将具有 Марков 性且可由其平稳分布的简单微分方程来描述．在其他情形，通常试图构造随机时间 $t_1, t_2, \cdots$，使得 $q(t_n)$ 或其他特征参数（例如，等待时间）在时刻 $t_1, t_2, \cdots$ 上的值形成一个 **Марков 链**（Markov chain）．这就是所谓的嵌入 Марков 链方法．这种方法通常用于当感兴趣系统的状态构造为半 Марков 过程时的修正形式．

对于更复杂的情形，用渐近方法（见**排队论**（queueing theory））或对描述排队的随机过程采用**蒙特卡罗方法**（Monte-Carlo method）来模拟是合适的．

在**等待制的单通道排队**（queue with waiting and one service channel）；**等待制的多通道排队**（queue, multi-channel with waiting）；**带拒绝的排队**（queue with refusals）；**排队输入流（呼唤的）**（queue input stream of calls）等条目中，对基本的服务系统与输入流有更详细的讨论．在这些条目中采用以下记号．

E 为服从指数分布的独立随机变量序列类．记号 $\{\tau_j^e\} \in E$ 表示

$$\mathrm{P}\{\tau_j^e > x\} = e^{-\alpha x}, \ \alpha > 0.$$

记号 $\{\xi_j\} \in G_I$ 表示随机变量 ξ_j 为独立同分布的（分布可以是任意的）．在形如 $\{\tau_j^e\} \in E$ 或 $\{\tau_j^e\} \in G_I$ 的关系中，通常还假设控制序列 $\{\tau_j^e\}$ 不依赖于剩余控制序列．

狭义平稳序列类记为 G_S．

这一记法也可以用于多维序列．例如，$\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_I$ 表示这二维序列是由平稳的且独立的向量组成．

通常为了简单起见，讨论局限于"单个"输入与输出过程，$v_j^e \equiv v_j^s \equiv 1$（呼唤单个出现与单个服

务). 推广到"多个"情形的可能性(呼唤成批出现或成批服务: $v_j^e \neq 1$ 或 $v_j^s \neq 1$)分开讲述.

此外, 如果排除初始条件, 那么控制序列的性质将是简单和一致的. 也就是说, 如果考虑控制序列 $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$, $1 \leqslant j \leqslant \infty$, 那么总假设 $q(0)=0$ 且第一个呼唤在时刻 $\tau_0^e = 0$ 到达. 如果控制是由输入过程 $e(t)$ 来给定, 那么 τ_0^e 就不是固定的.

参考文献见**排队论**(queueing theory).

A. A. Боровков 撰

【补注】 D. G. Kendall ([A2]) 引进一套简短记法, 用有关到达间隔时间分布(描述过程 $\{\tau_j^e\}$), 服务时间分布(描述过程 $\{\tau_j^s\}$)和服务台数来描述各种不同的排队情况. 在这个记法中符号 M 表示**负指数分布**(negative exponential distribution), H 表示**超指数分布**(hyperexponential distribution) ($F(t)=0$, $t \leqslant 0$; $F(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1-e^{-\lambda_k t})$, $t>0$, $\lambda_k>0$, $a_k>0$, $a_1+\cdots+a_n=1$), E 表示 **Erlang 分布**(Erlang distribution), D 表示退化为一个正值的分布, K 表示其 Laplace-Stieltjes 变换为有理函数的分布, G 表示非负随机变量的一般分布. 因此, $M/G/1$ 表示具有负指数到达间隔分布, 一般服务时间分布和单服务台的排队. 现在很普遍地使用这种记法.

参考文献

[A1] Cohen, J. W., The single server queue, North-Holland, 1982, Chapt. Ⅱ. 1.

[A2] Kendall, D. G., Some problems in the theory of queues, *J. Royal Stat. Soc.*, **B13**(1951), 151－185.

【译注】

参考文献

[B1] 徐光辉, 随机服务系统(第二版), 科学出版社, 1988.

曹成铉 译 徐光辉 校

排队输入流(呼唤的)[queue input stream of calls; массового обслуживания система]

以这样或那样形式给出的描述排队中呼唤出现的随机过程. 输入流通常定义为随机序列 $\{\tau_j^e, v_j^e\}$, 其中 τ_j^e, $j=1, 2, \cdots$, 为呼唤到达系统的到达间隔时间, 而 $v_1^e \geqslant 1$, $v_2^e \geqslant 1$, $\cdots$ 分别为呼唤成批到达的批量. 如果 $v_j^e \equiv 1$, 那么称此输入流为单的(single). 等价地, 输入流也可以由点过程 $\{e(t): t \geqslant 0\}$ 来给定, 其中 $e(t)$ 为到时刻 t 为止到达系统的呼唤数. 为了明确起见, 可以假设 $e(t) = e(t-0)$.

加在输入流上的通常条件是平稳性. 这条件可以有两种: 要求序列 $\{\tau_j^e, v_j^e\}$ 具有狭义平稳性(记为 $\{\tau_j^e, v_j^e\} \in G_S$), 或要求 $e(t)$ 为狭义平稳增量过程(记为 $\{e(t)\} \in G_{IS}$). 一般来说, 这二个条件并非完全一致(见**平稳随机过程**(stationary stochastic process)).

平稳流强度(intensity of a stationary stream)是数

$$\mu = \lim_{t \to \infty} \frac{\mathsf{E}(e(t)-e(0))}{t}.$$

如果 $\{e(t)\} \in G_{IS}$, 那么

$$\mu = \mathsf{E}(e(t+1)-e(t)) = \mathsf{E}(e(1)-e(0)),$$

因此, μ 等于单位时间内到达系统的平均呼唤数. 如果序列 $\{\tau_j^e\}$ 是平稳且遍历的, 而 $\{v_j^e\} \in G_I$, 那么

$$\mu = \frac{\mathsf{E} v_j^e}{\mathsf{E} \tau_j^e}.$$

在其他情况下, μ 与序列 $\{\tau_j^e, v_j^e\} \in G_S$ 的分布之间关系可能更复杂.

假设给定了具有强度 μ 与初始值 $e(0)=0$ 的过程 $\{e(t)\} \in G_{IS}$. 与数 μ 紧密相关的输入流的另一个参数定义为

$$\alpha = \lim_{t \to \infty} \frac{\mathsf{P}(e(t) \geqslant 1)}{t}.$$

这个极限总是存在且 $\alpha \leqslant \mu$. 如果 $\mu < \infty$, 那么 $\alpha = \mu$, 当且仅当输入流是单的.

在研究输入流的性质时, 经常用到所谓 *Palm 函数*(Palm function)

$$\varphi_k(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\mathsf{P}\{e(t+\tau)-e(\tau)=k,\ e(\tau) \geqslant 1\}}{\mathsf{P}\{e(\tau) \geqslant 1\}},$$

$$k = 0, 1, \cdots \tag{1}$$

(这里 $e(0)=0$), 它表示在时刻 0 到达一个呼唤的条件下在时间 $(0, t)$ 内到达 k 个呼唤的条件概率. 函数 $\varphi_k(t)$ 与 $e(t)$ 的分布有关:

$$\mathsf{P}\{e(t)=0\} = 1 - \lambda \int_0^t \varphi_0(u)\,du,$$

$$\mathsf{P}\{e(t)=k\} = \lambda \int_0^t [\varphi_{k-1}(u) - \varphi_k(u)]\,du.$$

如果 $\{\tau_j^e\} \in G_I$, 那么

$$\varphi_0(t) = \mathsf{P}\{\tau_j^e \geqslant t\},$$

$$\sum_{j=0}^{k} \varphi_j(t) = \mathsf{P}\{\tau_1^e + \cdots + \tau_{k+1}^e \geqslant t\}.$$

所谓的*最简单的*(simplest)或 Poisson 输入流(Poisson input stream), 即满足 $v_j^e = 1$, $\{\tau_j^e\} \in E$ 的平稳输入流, 在排队论中扮演一个重要角色. 为了用 $e(t)$ 定义最简单流, 要求 $\{e(t)\}$ 为 Poisson 的(见 **Poisson 过程**(Poisson process)). 这个过程在不相交时间区间内的增量是独立的且具有与此区间长度成比例的数作为参数的 Poisson 分布.

非时齐 Poisson 流也有广泛的应用(特别是在电话学中); 这种流被刻画为具有 Poisson 分布

$$\mathrm{P}\{e(t+u)-e(t)=k\}=$$
$$=\frac{e^{-(A(t+u)-A(t))}}{k!}(A(t+u)-A(t))^k$$

的独立增量过程 $e(t)$，其中 $A(t)$ 为过程的漂移函数（在时齐情形 $A(t)=\alpha t$）.

输入流的基本极限定理从很多方面说明了 Poisson 过程在排队论中的特殊作用．这个极限定理断言，在宽的假设条件下，任意具有低强度的独立平稳输入流的大数和收敛到一个 Poisson 过程．输入流为 Poisson 的这一常用假设，则是基于在很多应用中，实际输入流的确是如此构成的事实（例如，到达电话交换机的呼唤流是来源于个别电话用户的弱流之和）.

下面以两种形式给出基本极限定理．第一种与任意（非平稳）输入流之和有关．

假设给定了依赖于 n 的独立过程 $e_{1n}(t),\cdots,e_{nn}(t)$, $n=1,2,\cdots$ 的递增集（即三角阵列），且记

$$A_n(t,u)=\sum_{r=1}^{n}\mathrm{P}\{e_{rn}(t)-e_{rn}(u)\geqslant 1\},$$

$$B_n(t,u)=\sum_{r=1}^{n}\mathrm{P}\{e_{rn}(t)-e_{rn}(u)\geqslant 2\}.$$

另外，对任意固定的 $t>0$，当 $n\to\infty$ 时，设

$$\mathrm{P}\{e_{rn}(t)-e_{rn}(0)\geqslant 1\}\to 0,$$

关于 r 是一致的（这是流 $e_{rn}(t)$ 的低强度条件）．那么，为了过程

$$e_n(t)=\sum_{r=1}^{n}e_{rn}(t)$$

的有限维分布族收敛到以 $A(t)$ 为漂移函数的 Poisson 过程之分布，其充分必要条件是当 $n\to\infty$ 时，

$$A_n(t,u)\to A(t)-A(u),\ B_n(t,u)\to 0.$$

如果在所讨论的三角阵列中 $e_{rn}(t)\in G_{IS}$ 且皆为单的，那么下面的结论也成立．令 μ_{rn} 为 $e_{rn}(t)$ 的强度，且当 $n\to\infty$ 时，令

$$\sum_{r=1}^{n}\mu_{rn}\to\alpha,$$

则过程 $e_n(t)$ 的有限维分布族收敛到以 α 为参数的 Poisson 过程 $e(t)$ 之分布的充分必要条件是，对任意 t，有

$$\sum_{r=1}^{n}\mu_{rn}\int_0^t\varphi_0^{(r)}(u)du\to\alpha t, \qquad (2)$$

其中 $\varphi_0^r(u)$ 在（1）中定义，它是过程 $e_{rn}(t)$ 的 Palm 函数．如果当 $n\to\infty$ 时，

$$(1-\varphi_0^{(r)}(t))\to 0,$$

关于 r 是一致的，那么（2）显然成立．

参考文献见排队论（queueing theory）.

А. А. Боровков 撰 曾成铉 译 潘一民 校

等待制的多通道排队 [**queue, multi-channel with waiting**; **массового обслуживания система**]，多服务台排队（multi-server queue）

一种排队，它为呼唤到达时刻系统正繁忙而形成的排队提供规则；这里呼唤的服务是在若干条通道中同时进行．其基本定义与记号与排队（queue）条目中相同．

一个多服务台排队的运行由序列 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}$ 控制如下．呼唤到达于时刻 $0,\tau_1^e,\tau_1^e+\tau_2^e,\cdots$. τ_j^s 为第 j 个呼唤服务所用时间，无论它在 $m(\geqslant 1)$ 条通道中的哪一条中服务．如果不是所有通道都繁忙，那么呼唤到达后立即被送到（以到达的顺序）一条空闲通道服务．否则，等到某一通道空闲下来后开始服务．为了简单起见，令时刻 $t=0$ 系统空闲．

1) 为了表达清楚，采用下列记号：$\mathbf{w}_n=(w_{n,1},\cdots,w_{n,m})$ 为第 n 个呼唤的等待时间向量，其中 $w_{n,i}$ 为此呼唤直到由其前到达的呼唤占用的 i 条通道空闲下来为止所等待的时间．因此，$w_{n,1}$ 为"实"等待时间．另外，令 $x^+=\max(0,x)$,

$$\mathbf{x}^+=(x_1^+,\cdots,x_m^+),$$

$$\mathbf{e}=(1,0,\cdots,0),\ \mathbf{i}=(1,\cdots,1),$$

再令 $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 为把 $\mathbf{x}$ 的坐标以递增的顺序排列得到的向量（这样 $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 的第一个坐标为 $\min(x_1,\cdots,x_m)$）．那么，下面关于 $\mathbf{w}_n$ 的递推关系成立：

$$\mathbf{w}_{n+1}=[\mathbf{R}(\mathbf{w}_n+\tau_n^s\mathbf{e})-\tau_n^e\mathbf{i}]^+ \qquad (1)$$

它是一维情形的推广形式．

如果 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}\in G_S$ 且 $\mathrm{E}(\tau_n^s-m\tau_n^e)<0$，那么存在一个真序列 $\{w^k\}\in G_S$ 满足（1），且当 $n\to\infty$ 时 $\mathbf{w}_n$ 的分布函数单调收敛到 $\mathbf{w}_n^0$ 的分布函数．这个结果可以推广到 $v_j^e\neq 1$ 的情形，也可以推广到第 n 个呼唤到达时的队长 q_n（队长 q_n 不包括正在服务的呼唤）上．下面给出联系 $\mathbf{w}_n$ 与 q_n 极限分布的公式．

如果 $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in G_I$，那么由（1）可以写出有关 $\mathbf{w}^0$ 平稳分布的积分方程．在这种情形，也可以给出队长与等待时间平稳分布之间的简单关系．特别是如果 w_k^0 表示向量 $\mathbf{w}^0$ 的第 k 个坐标，那么对 $k\geqslant m-1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{q_n>k\}=\mathrm{P}\{w_1^e>\tau_1^e+\cdots+\tau_{k-m+1}^e\}.$$

如果 $m>k\geqslant 0$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{q_n\geqslant m-k\}=\mathrm{P}\{w_{k+1}^0>0\}.$$

这里，概率符号下的所有随机变量都是独立的.

此外，如果 τ_j^e 有非格点分布，那么对 $q(t)$ 的极限分布，类似的公式也成立. 如果 $\{\tau_j^e\}\in E$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n=k\}=\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)=k\}.$$

2) 如果 $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in E$，那么可以给出 q_n, $q(t)$ 及 $\mathbf{w}_n$ 极限分布的显式公式. 令 α 为 τ_j^s 分布的指数且 $\alpha m\mathsf{E}\tau^e>1$，则数

$$p_k=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n=k\}$$

可由 μ 及 $\psi(-j\alpha)$, $j=1,\cdots,m$, 的有理函数明确地给出，其中 μ 为方程

$$\mu=\psi((\mu-1)m\alpha),\quad \psi(\mu)=\mathsf{E}e^{\mu\tau^e}$$

在 $|\mu|<1$ 内的唯一根. 如果 $k>m$，那么

$$p_k=A\mu^{k-m},$$

其中 A 不依赖于 k. 对等待时间的极限分布，有

$$W(x)=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{w_{n,1}>x\}=\frac{Ae^{-m\alpha(1-\mu)x}}{1-\mu}.$$

如果 τ_j^e 为非格点随机变量，那么

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)=k\}=p_k$$

存在，其中

$$p_k=\frac{p_{k-1}}{k\alpha\mathsf{E}\tau^e},\ 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$p_k=\frac{p_{k-1}}{m\alpha\mathsf{E}\tau^e},\ k\geqslant m.$$

对 $\{\tau_j^e\}\in E$, $\{\tau_j^s\}\in E$ 的情形，有

$$p_k=\frac{p_0}{k!m^k}\lambda^k,\ 1\leqslant k\leqslant m,$$

$$p_k=\frac{p_0}{m!m^m}\lambda^k,\ k\geqslant m,$$

其中 $\lambda=\dfrac{1}{\alpha m\mathsf{E}\tau^e}<1$.

3) 上面得到的稳定性定理（$\mathbf{w}^0$ 平稳分布关于 τ_j^e 与 τ_j^s 分布的连续依赖性）的形式不如对单服务台系统的一般. 此定理与所谓更新事件的存在性条件有关，但是在 $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in G_I$ 的情形，必须满足条件 $\mathsf{E}(\tau_n^s-m\tau_n^e)<0$. 如果对此系统，在三角阵列中，$\tau_j^{(n)e}$ 与 $\tau_j^{(n)s}$ 的分布分别弱收敛到 τ_j^e 与 τ_j^s 的分布，此外 $\mathsf{E}\tau_j^{(n)s}\to\mathsf{E}\tau_j^s$，那么 $\mathbf{w}^{(n)0}$ 的分布将弱收敛到 $\mathbf{w}^0$ 的分布.

4) 在重话务下，用渐近方法分析多服务台系统给出的结果与在单服务台系统中的相应结果类似.

在一列控制序列 $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in G_I$ 中，令

$$\delta=\frac{1}{\mathsf{E}\tau^e}-\frac{m}{\mathsf{E}\tau^s}\to 0$$

（δ 为系统中呼唤的平均个数与在单位时间内系统可以服务的平均呼唤数之差；如果 $\nu_j^e\neq 1$, $\nu_j^s\neq 1$，那么 δ 可以取为数 $\mathsf{E}\nu^e/\mathsf{E}\tau^e-m\mathsf{E}\nu^s/\mathsf{E}\tau^s$，其含义与前者一样）. 如果

$$\frac{\mathsf{D}\tau^e}{(\mathsf{E}\tau^e)^3}+m\frac{\mathsf{D}\tau^s}{(\mathsf{E}\tau^s)^3}\to\sigma^2>0$$

且 $\mathsf{E}|\tau^e|^{2+\varepsilon}$, $\mathsf{E}|\tau^s|^{2+\varepsilon}$ 对某个 $\varepsilon>0$ 皆一致有界，那么对时刻 t 的队长 $q(t)$，当 $t\to\infty$, $\delta\to 0$ 时，下式成立:

若 $\delta\sqrt{t}\to v$, $v\geqslant-\infty$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\mathsf{P}\{q(t)<\frac{x}{|\delta|}\}=$$

$$=\mathsf{P}\{w(u)<\frac{x-u\operatorname{sign}\delta}{\sigma}\,|0\leqslant u\leqslant v^2\},$$

其中 $w(u)$ 为标准 **Wiener** 过程（Wiener process）;

若 $\delta\sqrt{t}\to 0$，则

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)<x\sqrt{t}\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sigma}e^{-u^2/2}du;$$

若 $\delta\sqrt{t}\to\infty$, $\delta>0$，则

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)<\delta t+x\sqrt{t}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x/\sigma}e^{-u^2/2}du.$$

对队长 q_n 与等待时间 $\mathbf{w}_n$，类似的关系也成立.

用渐近方法探讨多服务台系统的另一个方向是研究带强输入流和无限地增加服务通道数目的系统.

5) 用于描述等待制的多服务台系统行为同样的方法来描述带无限多个服务通道与一个控制序列 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}$ 的多服务台系统的行为；其仅有的区别是这里总有空闲的通道，因而所有呼唤的等待时间皆为零. 取第 n 个呼唤到达时繁忙线路数 q_n 或时刻 t 繁忙线路数 $q(t)$ 为系统状态的特征参数（与上面一样，q_n 与 $q(t)$ 为队长，而 $q_1=0$）.

令 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}\in G_S$，而 $\{\tau_j^e\}$ 为度量可递的. 那么若 $\mathsf{E}\tau_j^s<\infty$，则当 $n\to\infty$ 时，序列 $\{q_{n+k}:k\geqslant 0\}$ 的分布单调收敛到严平稳序列

$$q^k=\sum_{l=0}^{\infty}I\{\tau_{k-l}^s>\tau_{k-l}^e+\cdots+\tau_k^e\}\qquad(2)$$

的分布，其中 $I\{A\}$ 为事件 A 的示性函数. 条件 $\mathsf{E}\tau_j^s<\infty$ 近乎于 (2) 有限的必要条件.

6) 对 $m=\infty$, $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in G_I$ 的系统，平稳队长 q^k 的分布可以借助于方程来给出. 为此，引入变量

$$q^0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}I\{\tau_k^s>x+\tau_0^e+\cdots+\tau_k^e\}.$$

$q^0(x)$ 表示在平稳状态下当某一呼唤到达后退回到时间 x 但不计此呼唤及其后到达的呼唤数时有多少呼唤

在系统中.

记

$$P_j(x)=\mathsf{P}\{q^0(x)=j\},\ j=0,1,\cdots,$$

$$P(x)=\mathsf{P}\{\tau^s>x\},\ F(x)=\mathsf{P}\{\tau^e<x\},$$

那么

$$\mathsf{P}\{q^k=j\}=\mathsf{P}\{q^0(0)=j\}=P_j(0);$$

一列函数 $P_j(x)$ 满足方程组

$$P_k(x)=\int_0^\infty dF(t)P(t+x)P_{k-1}(t+x)+$$

$$+\int_0^\infty dF(t)(1-P(t+x))P_k(t+x),\ k=1,2,\cdots.$$

这里 $P_{-1}(x)$ 应等于零. 在这个方程组中, 关于 $P_0(x),\cdots,P_k(x)$ 的前 $k+1$ 个方程在具有性质

$$P_0(x)\to 1,\ P_i(x)\to 0,\ i\geqslant 1,\ x\to\infty$$

的有界变差函数类里有唯一解.

对 $q(t)$ 的分布, 类似的结论也成立. 如果 $\{\tau_j^e\}\in E$, $\{\tau_j^s\}\in G$, 那么

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)=k\}=\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q_n=k\}=\frac{(a\alpha)^k}{k!}e^{-a\alpha},$$

其中 $a=\mathsf{E}\tau_j^s$, α 为 τ_j^e 分布的指数.

如果 $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in E$, 那么

$$P_k=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n=k\}=\sum_{j=k}^{\infty}(-1)^{j-k}[\,{j \atop k}\,]C_j,$$

其中

$$C_0=1,\ C_j=\prod_{l=1}^{j}\frac{\psi(-l\alpha)}{1-\psi(-l\alpha)};$$

$$j=1,2,\cdots,\ \psi(\lambda)=\mathsf{E}\,e^{\lambda\tau^e},$$

而 α 为 τ_j^s 分布的指数. 另外, 如果 τ_j^e 为非格点随机变量, 那么

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)=k\}=\frac{p_{k-1}}{k\alpha\mathsf{E}\tau^e},\ k=1,2,\cdots.$$

7) 对 $m=0$ 的情形, 像前一节一样, 稳定性定理给出一些条件. 在这些条件下, 控制序列的小变化导致繁忙线路数 q_n 平稳分布的小变化.

对三角阵列, 当系统被依赖于一个参数 $n=1,2,\cdots$ 的平稳序列 $\{\tau^{(n)e},\tau^{(n)s}\}$ 控制时, 令下列条件成立.

A) 存在一个序列 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}\in G_S$, 使得 $\{\tau_j^e\}$ 为度量可递的, $\mathsf{E}\tau_j^e<\infty$, 且当 $n\to\infty$ 时 $\{\tau_j^{(n)e},\tau_j^{(n)s}\}$ 的有限维分布族收敛到 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}$ 的分布.

B) $\mathsf{E}\tau_j^{(n)s}\to\mathsf{E}\tau_j^s$, $n\to\infty$.

C) 对所有 $j\geqslant 0$, $\tau_{-1}^s-\sum_{k=-j}^{0}\tau_k^e$ 的分布在点 0 连续.

那么, 稳定性定理断言, 在条件 A) − C) 下, 当 $n\to\infty$ 时, 队长序列 $\{q^{(n)k}\}$ (对控制序列 $\{\tau_j^{(n)e},\tau_j^{(n)s}\}$ 由 (2) 定义) 的分布收敛到 $\{q^k\}$ 的分布.

这个结果里的三个条件 A), B) 和 C) 都是必不可少的. 此三个条件中任何一个不成立, 都可以构造出例子, 使得 $\{q^{(n)k}\}$ 不收敛.

8) 当输入流具有高强度时, 无限多通道系统的渐近分析在所谓话务系统的研究中是自然的而且有效的. 渐近方法的优点在于其建立的定律具有极大的一般性与广泛性.

令输入流 $e(t)=e_T(t)$, 表示到时刻 t 为止到达系统的呼唤数, 它依赖于参数 $T\to\infty$ (三角阵列), 使得对每个固定的 $t>0$, 当 $T\to\infty$ 时, $e_T(t)\to\infty$. 此外, 设存在非降函数 $m(t)$, 函数 $B(T)\to\infty$, $T\to\infty$, 和定义在 $[0,t_0]$ 上的连续随机过程 $\xi(t)$, 使得对任意关于一致距离连续可测的泛函 f, 当 $T\to\infty$ 时, $f(\xi_T(t))$ 的分布弱收敛到 $f(\xi(t))$ 的分布, 其中

$$\xi_T(t)=\frac{e_T(t)-Tm(t)}{B(t)}.$$

例如, 如果 $\{\tau_j\}\in G_I$ 且系统的控制是通过序列 $\tau_j^e=\tau_j/T$ 的, 那么前面所述的条件对任意 t_0 都成立, 其中

$$m(t)=\frac{t}{\mathsf{E}\tau_j},\ B^2(T)=\frac{T\mathsf{D}\tau_j}{(\mathsf{E}\tau_j)^3},$$

而 $\xi(t)$ 为标准 Wiener 过程.

作为服务规则, 假定 $\{\tau_j^s\}\in G_I$. 那么:

a) 如果 $B(T)/\sqrt{T}\to\infty$, 则正规化队长

$$z_1(t)=\frac{q(t)-TQ(t)}{B(t)}$$

的有限维分布族当 $T\to\infty$ 时弱收敛到过程

$$\zeta_1(t)=\int_0^t G(t-u)d\xi(u)$$

的分布, 其中

$$Q(t)=\int_0^\infty G(t-u)dm(u),\ G(t)=\mathsf{P}\{\tau_j^s\geqslant t\}.$$

b) 如果 $B(T)/\sqrt{E}\to\sigma\geqslant 0$, 则过程

$$z_2(t)=\frac{q(t)-TQ(t)}{\sqrt{T}}$$

的有限维分布族弱收敛到过程

$$\zeta_2(t)=\theta(t)+\sigma\int_0^t G(t-u)d\xi(u)$$

的有限维分布族, 其中 $\theta(t)$ 为不依赖于 $\xi(t)$ 且具有协方差函数

$$\mathsf{E}\theta(t)\theta(t+u)=$$

$$\int_0^t F(t+u-v)(1-G(t-v))dm(v)$$

的中心 **Gauss 过程**(Gaussian process). 如果函数 $m(t)$ 或 $G(t)$ 具有某种程度的光滑性, 那么在更强的意义下, $z_i(t)$ 收敛到 $\zeta_i(t)$, $i=1,2$(例如, 对所有关于一致距离连续的泛函, 当 $T\to\infty$ 时, $f(z_i(t))$ 的分布收敛到 $f(\zeta_i(t))$ 的分布).

参考文献见**排队论**(queueing theory).

А. А. Боровков 撰 曹成铉 译 潘一民 校

带拒绝的排队 [**queue with refusals**; **массового обслуживания система**], 损失制系统(loss system)

一种排队, 其服务规则要求损失掉在所有通道都繁忙时到达的呼唤. 其基本定义与记号见**排队**(queue)条目.

1) 带拒绝的排队的一个自然特征参数是在第 n 个呼唤到达时刻(或时刻 t)繁忙的线路数 q_n(或 $q(t)$). 但是不同于无限多通道系统, 这里 $q_n\leqslant m$, 其中 m 为系统中的通道数. 如果当第 n 个呼唤到达时 $q_n=m$, 那么这个呼唤就被损失且离开系统. 如果 $q_n<m$, 那么这个呼唤进入一条空闲通道服务.

如果假设控制序列 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}\in G_S$ 为度量可递的且 $\mathsf{E}\tau_j^s<\infty$, 那么可以利用被相同序列控制的无限多通道系统来给出损失制系统的遍历定理. 对此系统存在队长的真平稳序列 $\{Q^k\}$. 变量 Q^0 为一个呼唤到达时刻平稳系统中的繁忙线路个数. 如果此呼唤的下标记为 γ, 那么 Q_l^0 定义为在下标为 $\gamma+l$ 的呼唤到达时刻被呼唤 γ 之前到达的呼唤占用的繁忙线路数, 从而 $Q_0^0=Q^0$, $Q_2^0\leqslant Q^0$. 因此, 如果事件

$$A=\{Q_k^0\leqslant m-1-k;\ k=0,\cdots,m-1\}$$

的概率是正的, 那么损失制系统的队长序列 $\{q_{n+k}:k\geqslant 0\}$ 分布当 $n\to\infty$ 时将收敛到平稳序列 $\{q^k:k\geqslant 0\}$ 的分布. 事件 A 的含义很简单: 它是由系统的"更新"组成: 它发生之后, 只有下标为 γ 及更高的呼唤在系统中.

这里引用的定理是用所谓的更新方法得到的更一般结果的特殊情况. 如果 $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in G_I$, 那么为了使所述条件成立, 只须

$$\mathsf{P}\{\tau_j^s\leqslant m\tau_j^e\}>0,\ \mathsf{E}\tau_j^s<\infty.$$

对于当 $t\to\infty$ 时过程 $\{q(t+u):u\geqslant 0\}$ 向队长的平稳过程 $\{q^s(u):u\geqslant 0\}$ 的收敛性, 类似于上述给出的结论将成立. 这里, 除了已列出的条件外还要求输入过程 $\{e(t)\}$(时刻 t 为止到达的呼唤数)为平稳增量过程.

2) 如果 $\{\tau_j^s\}\in E$, $\{\tau_j^e\}\in G_I$, 那么 Erlang 公式(Erlang formula)成立:

$$\mathsf{P}\{q^k=j\}=\mathsf{P}\{q^s(u)=j\}=c\,\frac{(\alpha a)^j}{j!},$$

其中 $a=\mathsf{E}\tau_j^s$, α 为 τ_j^e 分布的指数, 而

$$c=\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{(\alpha a)^j}{j}\right]^{-1}.$$

如果 $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in E$, 那么序列 q_n 与具有有限 $(m+1)$ 个状态的简单时齐 **Марков 链**(Markov chain)有关. 在此情形下, 概率

$$p_j=\mathsf{P}\{q^0=j\}=\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q_n=j\}$$

也可以明确地给出. 另外, 如果 τ_j^e 的分布为非格点的且 $\mathsf{E}\tau_j^e<\infty$, 那么

$$\mathsf{P}\{q^s(0)=j\}=\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)=j\}=\frac{p_{k-1}}{k\alpha\mathsf{E}\tau_j^e},$$

其中 α 为 τ_j^e 分布的指数.

这些结果给出了平稳损失概率的存在性条件及其显式形式, 它等于

$$\mathsf{P}\{q^0=m\}=\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q_n=m\}.$$

3) 损失制系统的稳定性定理完全类似于无限通道系统的稳定性定理. 假设给定序列 $\{\tau_j^{(n)e}\}$, $\{\tau_j^{(n)s}\}$, $n=1,2,\cdots$, 作为控制序列满足下列条件:

A) 存在序列 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}$, 其分布是当 $n\to\infty$ 时 $\{\tau_j^{(n)e},\tau_j^{(n)s}\}$ 的有限维分布的极限. 另外, 所有序列都假定保证队长平稳序列的存在条件(如, 见部分1). 为了得到这些队长的平稳序列分布的收敛性, 记此队长序列为 $\{q^{(n)k}:k\geqslant 0\}$ 和 $\{q^k:k\geqslant 0\}$, 再引进另外两个条件:

B) 当 $n\to\infty$ 时, $\mathsf{E}\tau^{(n)s}\to\mathsf{E}\tau^s$;

C) $\tau_{-j}^s-\sum_{k=-j}^{0}\tau_k^e$

的分布对所有 $j\geqslant 0$, 在点 0 连续.

在条件 A), B), C) 下, 序列 $\{q^{(n)k}:k\geqslant 0\}$ 的有限维分布族弱收敛于 $\{q^k:k\geqslant 0\}$ 的分布.

4) 探讨损失制系统的渐近方法可能对研究重话务系统或有大量服务通道的系统也有效.

探讨重话务系统与在对无限多通道系统的渐近分析中考虑过的那些在相近假设下所得到的结果有关. 对有大量通道系统的研究不仅利用对大的 n 很有效的显式公式的渐近分析, 而且利用 q^k 分布与在类似的无限多通道系统中繁忙线路数分布的接近性.

例如, 对具有序列 $\{\tau_j^e\}\in G_I$ 与 $\{\tau_j^s\}\in E$ 的系统, 平稳损失概率等于

$$p_m=\left[\sum_{j=0}^{m}A_j\right]^{-1},$$

其中

$$A_0=1,\ A_j=\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{j}\frac{1-\varphi(k/m)}{\varphi(k/m)},$$

$$\varphi(t)=\mathrm{E}\,e^{-(m\alpha\tau_j^s)},$$

而 α 为 τ_j^s 分布的指数．对大的 m，这些关系式对寻找 p_m 的数值解很少有用．但是当 $m\to\infty$ 时却存在确定 p_m 渐近行为的非常简单的公式，从而可用于损失概率的近似计算．这里参数 $\rho=\mathrm{E}\,m\alpha\tau_j^e$ 起着重要的作用，它表示呼唤到达系统的平均数 $1/\mathrm{E}\tau_j^e$ 与在单位时间内能被系统服务的平均呼唤数 $m/\mathrm{E}\tau_j^s=m\alpha$ 之比．如果 $\rho<1$，那么系统负载良好；如果 $\rho>1$，那么系统超负载．如果对某 $\varepsilon>0$，当 $m\to\infty$ 时，$\rho<1-\varepsilon$，那么 $p_m/(1-\rho)\to 1$．如果当 $m\to\infty$ 时，$\mathrm{E}(m\alpha\tau_j^e)^2<c<\infty$，那么当 $\rho\to 1$ 时倘若 $(1-\rho)\sqrt{m}\to\infty$，则 p_m 的关系式仍成立．但是，如果 $(1-\rho)\sqrt{m}\to$ 常数，那么 p_m 的渐近行为就像 $b/\sqrt{m}$，其中常数 b 已明确求出．在 $(1-\rho)\sqrt{m}\to-\infty$ 情形，p_m 的渐近行为也已找到．

5) 可以更完备地研究单服务台损失制系统．例如，令 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}\in G_I$．随机变量 η 定义为

$$\eta=\max\{k:X_k\geqslant\tau_1^s\},$$

其中 $X_k=\tau_1^e+\cdots+\tau_k^e$．那么，为在任意初始条件下极限

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{q_m=1\}=p_1$$

存在，当且仅当 η 的所有可能值的最大公因数为 1．这里，$p_1=1-1/\mathrm{E}\eta$．如果 τ^e 为非格点，那么

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{q(t)=1\}=\frac{\mathrm{E}\tau^s}{\mathrm{E}\tau^e\mathrm{E}\eta}$$

总是存在的．

损失概率更广义地解释为比率 $\pi_n=r_n/n$ 的极限，其中 r_n 为前 n 个到达的呼唤中未被服务的呼唤数．这时，$\lim_n\pi_n$ 的存在性条件将更宽些．例如，对 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}\in G_I$ 情形，π_n 的极限总是存在且等于 $1-1/\mathrm{E}\eta$．

参考文献见排队论（queueing theory）

A. A. Боровков 撰　曹成铉 译　潘一民 校

等待制的单通道排队［queue with waiting and one service channel; массового обслуживания система］，单服务台排队（single-server queue）

一种排队，其服务规则规定（发现系统正繁忙）没有立即被服务的呼唤形成一个排队，而对此呼唤（或成批呼唤）的服务只能开始于前一个呼唤（或成批呼唤，若服务是成批进行的）服务完之后．基本定义与记号见排队（queue）．

排队系统的状态有如下非常自然的特征参数：a) 直到第 n 个呼唤开始服务的等待时间 w_n 和定义为时刻 t 前到达的呼唤服务完毕所需时间的虚等待时间 $w(t)$；b) 第 n 个呼唤到达时的队长 q_n 和时刻 t 的队长 $q(t)$．

1) 在"单的"情形（$\nu_j^e\equiv 1$），值 w_n 之间有递推关系：

$$w_{n+1}=\max(0,\,w_n+\xi_n),\ \xi_n=\tau_n^s-\tau_n^e.\qquad(1)$$

排队系统在"多的"情形，当 ν_j^e 与 ν_j^s 都不是 1 时，也可用同样类型的方程来描述（对等待时间或队长）．例如，对队长 q_n 有关系式

$$q_{n+1}=\max(0,\,q_n+\nu_n^e-\beta_n),\qquad(2)$$

其中 β_n 为在系统连续运行的情况下时间 τ_n^e 内能服务的呼唤数．如果 $\{\tau_j^e\}\in E$，$\{\nu_j^s\}\in G_I$，那么 β_n 的分布可以由关系式

$$\mathrm{E}_{\tau_n^e}e^{i\lambda\beta_n}=\exp\left[\tau_n^e\alpha\sum_{k=1}^{\infty}(e^{i\lambda k}-1)\mathrm{P}\{\nu_j^s=k\}\right]$$

给出，其中 α 为 τ_j^s 分布的指数．

如果置 $X_0=0$，$X_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$，那么 (1) 式的解有如下形式

$$w_{n+1}=X_n-\min(-w_1,\,X_1,\,\cdots,\,X_n)=\qquad(3)$$

$$=\max(X_n+w_1,\,X_n-X_1,\,\cdots,\,X_n-X_{n-1},\,0).$$

因此，如果 $\{\xi_n\}\in G_S$ 且对固定区间 Δ，当 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{P}\{X_n\in\Delta\}\to 0$，那么等待时间有极限分布：

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{w_n>x\}=\mathrm{P}\{Y>x\},$$

其中

$$Y=\sup_{k\geqslant 0}Y_k,\ Y_k=\xi_{-k}+\cdots+\xi_{-1},\ Y_0=0.$$

这里变量 ξ_{-k} 为序列 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 延拓到全轴上的平稳序列 $\{\xi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 的元素．下面假设对所有控制序列都做这种延拓．

下面的值

$$w^k=\sup(0,\,\xi_k,\,\xi_k+\xi_{k-1},\,\xi_k+\xi_{k-1}+\xi_{k-2},\cdots)$$

满足 (1) 且具有与 w_n 的极限分布完全一样的分布．这就是平稳等待时间过程．

令 $\{\xi_n\}\in G_s$ 为遍历的（以概率 1，$X_n/n\to\mathrm{E}\xi_1$）．如果 $\mathrm{E}\xi_k<0$ 或 $\mathrm{E}\xi_k=0$ 且 $\xi_k=\eta_{k+1}-\eta_k$，其中 $\{\eta_k\}\in G_S$，那么

$$\mathrm{P}\{Y<\infty\}=\mathrm{P}\{w^k<\infty\}=1.$$

否则，

$$\mathsf{P}\{Y=\infty\}=\mathsf{P}\{w^k=\infty\}=1.$$

如果 $\{\xi_n\}\in G_I$，那么

$$\mathsf{P}\{Y<\infty\}=1.$$

当且仅当 $\mathsf{E}\xi_k<0$ (不包括平凡情形 $\xi_k=0$).

2) 已经提到过，另一个可能的系统状态特征参数为虚等待时间 $w(t)$. 粗略地说，它是时刻 t 到达系统的呼唤直到其开始服务为止所等待的时间. 令 $S(t)$ 为到时刻 t 为止到达系统的呼唤服务时间之和，令 $X(t)=S(t)-t$. 这里有与 (3) 类似的关系式

$$w(t)=X(t)-\inf_{0\le u\le t}(0,\ X(u)). \qquad (4)$$

令 G_{IS} 为狭义平稳增量过程的类，而 G_{II} 为独立增量过程的类 (这里 G_{II} 与 G_{IS} 的含义可能更狭窄：例如，可以假设 G_{II} 为具有正跳与 -1 漂移的广义 Poisson 过程类). 如果过程 $\{X(t):t\ge 0\}\in G_{IS}$，那么它可以延拓为全轴上的过程 $\{X(t):-\infty<t<\infty\}$ 且也属于 G_{IS}. 在这种情形

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{w(t)>x\}=\mathsf{P}\{\overline{Y}>x\}$$

存在，其中

$$\overline{Y}=\sup_{u\ge 0}Y(t),\ Y(t)=X(0)-X(-t).$$

此外，如果

$$\mathsf{E}(X(1)-X(0))=\mathsf{E}(Y(1)-Y(0))=a<0,$$

那么过程

$$w_t(u)=\{w(t-u):u\ge 0\}$$

的分布当 $t\to\infty$ 时收敛到严平稳虚等待时间过程

$$w^s(u)=\sup_{v\le u}(X(u)-X(v))$$

的分布. 这里的收敛性在强形式下成立，即对任意可测集 B，有

$$\mathsf{P}\{w_t\in B\}\to\mathsf{P}\{w^s\in B\}.$$

进一步，如果 $\{X(t)\}\in G_{IS}$ 且 $a<0$，那么 $X(t)$ 有条件更新函数 $H_0(x)$:

$$H_0(x)=$$
$$=\int_0^\infty\mathsf{P}\{0\le X(u)-X(0)<x:X(0)=$$
$$=\inf_{v\le 0}X(v)\}du<\infty;$$

这里

$$\left.\begin{aligned}\mathsf{P}\{w^s(u)\ge x\}&=-a\frac{dH_0(x)}{dx},\\ \mathsf{P}\{w^s(t)=0\}&=-a.\end{aligned}\right\}$$

这些公式当 $v_j^e\ne 1$ 时仍然成立.

对于 $\{\tau_j^s-\tau_j^e\}\in G_I$ 的系统，w^k 与 $w^s(t)$ 的分布之间有简单的关系.

3) 队长的遍历定理可借助于等待时间的对应定理得到. 例如，令序列 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}\in G_S$ 是遍历的 (度量可递的). 另外，如果 $\mathsf{E}(\tau_j^s-\tau_j^e)<0$，那么存在一个 q_n 的 (平稳) 极限分布，使得

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n>k\}=\mathsf{P}\{w^0>\tau_1^e+\cdots+\tau_k^e\}.$$

如果 $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in G_I$ 且 τ_j^e 有非格点分布，那么

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)>k+1\}=$$
$$=\mathsf{P}\{w^0>\tau_1^e+\cdots+\tau_k^e+\gamma\},\ k\ge 0,$$
$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{q(t)=0\}=-\frac{a}{\mathsf{E}\tau^e},$$

其中右方概率号下的所有项是独立的，而 γ 有密度

$$\frac{\mathsf{P}\{\tau_j^e>x\}}{\mathsf{E}\tau^e},$$

$$w^0=\sup(0,\ \xi_0,\ \xi_0+\xi_{-1},\ \cdots),\ \xi_j=\tau_j^s-\tau_j^e.$$

如果 $\{\tau_j^e\}\in E$，那么 q_n 与 $q(t)$ 的极限分布完全一样.

4) 如果 $\{\tau_j^e\}\in E$, $\{\tau_j^s\}\in G_I$ (也假设 $v_j^e\ne 1$, $\{v_j^e\}\in G_I$)，那么可以得到 $w(t)$ 极限分布的精确公式:

$$\mathsf{P}\{w(t)<x\}=\mathsf{P}\{Y(t)<x\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial X}\int_0^t\mathsf{E}\left[\frac{Y(u)}{u}:Y(u)<0\right]\mathsf{P}\{Y(t-u)<x\}du,$$

$$\mathsf{P}\{w(t)=0\}=-\mathsf{E}\left[\frac{Y(t)}{t}:Y(t)<0\right].$$

当 $a<0$ 及 $t\to\infty$ 时，对平稳分布有 Хинчин-Pollaczek 公式 (Khinchin-Pollaczek formula):

$$\mathsf{E}e^{i\lambda w^s(u)}=\frac{1-\alpha\mathsf{E}\theta}{1-\alpha\dfrac{\varphi(\lambda)-1}{i\lambda}},\ \varphi(\lambda)=\mathsf{E}e^{i\lambda\theta},$$

其中 θ 为过程 $X(t)$ 的跳跃 ($\theta=\tau_j^s$，若 $v_j^e\equiv 1$) 而 α 为 τ_j^e 分布的指数.

令 T_j, $j=1,2,\cdots$, 为系统的忙期 (busy periods of the system) (即 $w(t)>0$ 的时间区间长度)，则对所考虑的系统，有

$$\mathsf{P}\{T_j\in(u,\ u+du)\}=\frac{1}{\alpha u}\mathsf{P}\{X(u)\in(0,\ du)\}.$$

5) 对 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}\in G_I$ 的系统 (也假设 $v_j^e\ne 1$, $\{\tau_j^e,\tau_j^s,v_j^e\}\in G_I$)，$w^k$ 的分布与随机变量

$$Y=\sup(0,\ \xi_1,\ \xi_1+\xi_2,\ \cdots)$$

的分布完全一样.

如果 ξ_j 的分布是已知的, 那么 Y 的分布可以得到如下. 如果 $\mathsf{P}\{Y<\infty\}=1$ (当 $\mathsf{E}\xi_j<0$ 时这总成立), 那么因子分解恒等式

$$1-\mathsf{E}e^{i\lambda\xi}=(1-p)\frac{1-\mathsf{E}e^{i\lambda\chi}}{\mathsf{E}e^{i\lambda Y}},\ \mathrm{Im}\,\lambda=0$$

成立, 其中 $p=\mathsf{P}\{Y<0\}$, 而 $\chi\leqslant0$ 为 $\xi_1,\xi_1+\xi_2,\cdots$ 中第一个非正和的值. 这个关系式可把 $\mathsf{E}e^{i\lambda Y}$ 与比值 $w_+(\lambda)/w_+(0)$ 通过恒等式

$$1-\mathsf{E}e^{i\lambda\xi}=\frac{w_-(\lambda)}{w_+(\lambda)},\ \mathrm{Im}(\lambda)=0 \qquad (5)$$

联系起来, 其中函数 $w_\pm(\lambda)$ 的表达式为

$$w_\pm(\lambda)=\int_0^{\pm\infty}e^{i\lambda t}dV_\pm(t)$$

($V_\pm$ 为有界变差函数). 等式 (5) 给出了函数 $1-\mathsf{E}e^{i\lambda\xi}$ 的所谓 V 因子分解. 当可以明确地求出 $\mathsf{E}e^{i\lambda Y}$ 时, 它说明了以下情形.

假设 $-\infty<\mathsf{E}\xi<0$, 且置

$$f(\lambda)=\mathsf{E}e^{i\lambda\xi},\ f_+(\lambda)=e^{i\lambda\tau^s},\ f_-(\lambda)=e^{-i\lambda\tau^e},$$

因此 $f(\lambda)=f_+(\lambda)f_-(\lambda)$.

A) 如果 f_+ 为有理函数, $f_+=P_m/Q_n$, 其中 P_m 与 Q_n 分别为 m 次与 n 次多项式, 那么在区域 $\mathrm{Im}\,\lambda<0$ 内, 函数 $(1-f)Q_n$ 正好有 n 个零点 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 且

$$w_+(\lambda)=\frac{Q_n(\lambda)}{\prod_{k=1}^{n}(\lambda-\lambda_k)},$$

$$\mathsf{E}e^{i\lambda Y}=\frac{w_+(\lambda)}{w_+(0)}.$$

这意味着如果 τ^s 的分布可以表示为

$$\mathsf{P}\{\tau^s>x\}=\sum_k P_k(x)e^{-\alpha_k x},\ \mathrm{Re}\,\alpha_k>0,$$

其中 $P_k(x)$ 为多项式, 那么对 $\mathsf{P}\{Y>x\}$ 也有同样类型的表达式 (对其他 α_k 与 P_k, 它们由 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 来确定).

B) 如果 $f_-=P_m/Q_n$ 为有理函数, 那么在区域 $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ 内函数 $(1-f)Q_n$ 有 $n-1$ 个零点 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}$, 且

$$w_+(\lambda)=i\lambda\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_k)}{Q_n(\lambda)(1-f(\lambda))}.$$

除了这些公式之外, 对更广的类也可以给出 Y 分布的明确表达式来描述当 $x\to\infty$ 时 $\mathsf{P}\{Y>x\}$ 的渐近行为. 也就是说, 如果

$$\gamma=\sup(\mu:\mathsf{E}e^{\mu\xi}<\infty)>0$$

且 $\mathsf{E}e^{\gamma\xi}>1$, 那么方程 $\mathsf{E}e^{q\xi}=1$ 有唯一的根. 在这种情形, 当 $x\to\infty$ 时,

$$\mathsf{P}\{Y>x\}=c_1e^{-qx}(1+o(1)).$$

如果 $\gamma=0$, $-\infty<\mathsf{E}\xi<0$, 那么

$$\mathsf{P}\{Y>x\}=c_2\int_x^\infty\mathsf{P}\{\xi>t\}dt(1+o(1)).$$

其中常数 c_1 与 c_2 已明确地求出.

当时间 t 与控制序列的随机变量都仅取整数值时, 对此离散时间系统在 2) - 5) 里讨论过的类似结果都成立.

6) 稳定性定理探讨控制序列有限维分布的小变化导致等待时间或队长平稳分布的小变化的条件. 排队稳定性的重要性可由如下事实来说明, 在实际问题中各种假设通常都加在控制序列的性质上 (例如, 假设 ξ_j 是独立的或 τ_j^s 服从指数分布), 而实际上这些假设仅仅是近似地满足. 问题是这种 " 理想化 " 的问题的解是否接近于实际问题的解.

为了给出问题的准确叙述, 要用到三角阵列, 这里方程 (1) 由平稳序列 (三角阵列) $\xi^{(n)}=\{\xi_j^{(n)}:-\infty<j<\infty\}$, $n=1,2,\cdots$, 控制. 另外, 考虑平稳序列 $\xi=\{\xi_j:-\infty<j<\infty\}$, 且令

$$Y^{(n)}=\sup_{k\geqslant0}Y_k^{(n)},\ Y_k^{(n)}=\sum_{j=1}^{n}\xi_{-j}^{(n)}.$$

上面提出的问题由以下结果来回答.

令 $\xi^{(n)}$ 的有限维分布弱收敛到 ξ 的对应分布, 这里假设 ξ 为遍历的且 $\mathsf{E}\xi_j<0$, 那么, 弱收敛

$$\mathsf{P}\{Y^{(n)}<t\}\Rightarrow\mathsf{P}\{Y<t\} \qquad (6)$$

(即平稳等待时间分布的收敛性) 成立的充分条件为

$$\mathsf{E}(\xi_j^{(n)}:\xi_j^{(n)}\geqslant0)\to\mathsf{E}(\xi_j:\xi_j\geqslant0).$$

收敛性的这一条件几乎是必要条件.

如果控制序列 $\{\tau_j^{(n)e},\tau_j^{(n)s}\}$ 与 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}$ 使得 $\tau_j^{(n)e}$ 与 $\tau_j^{(n)s}$ 是独立的且 $\{\tau_j^{(n)e},\tau_j^{(n)s}\}$ 的分布弱收敛到 $\{\tau_j^e,\tau_j^s\}$ 的分布, 那么 (6) 成立的充分条件是

$$\mathsf{E}\tau_j^{(n)s}\to\mathsf{E}\tau_j^s.$$

对虚等待时间 $w^v(t)$ 的平稳分布来说, 情况是类似的. 如果过程 $Y^{(n)}(t)\in G_{IS}$ 的有限维分布收敛到 $Y(t)\in G_{IS}$ 的分布且序列 $\{\eta_k=Y(k+1)-Y(k)\}$ 是遍历的, $\mathsf{E}\eta_k=a<0$, 那么

$$\sup_{t\geqslant0}Y^{(n)}(t) \text{ 与 } \sup_{t\geqslant0}Y(t)$$

的分布收敛的充分条件是

$$\mathsf{E}\{\eta_k^{(n)}:\eta_k^{(n)}\geqslant0\}\to\mathsf{E}\{\eta_k:\eta_k\geqslant0\}.$$

7）对重话务及轻话务情形、用研究单服务台系统的渐近方法（包括稳定性定理）可给出其近似公式．令$\{Y(t)\}\in G_{IS}$．那么，如果

$$a=\mathrm{E}(Y(t+1)-Y(t))<0$$

接近于0，则称系统处于重话务条件；如果a接近于-1，则称系统处于轻话务条件．

像在部分6）一样，准确的叙述也与三角阵列的引入有关．特别是对重话务情形，考虑依赖于参数$a\to 0$的过程$X^a(t)$．令$X^a(t)$满足弱相依条件，它保证当$t\to\infty$时，

$$\mathrm{E}\left[\frac{|X^a(t)-X^a(0)-at|^{2+\gamma}}{A}\right]<ct^{1+\gamma/2},$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\left\{\frac{X^a(t)-X^a(0)-at}{\sigma\sqrt{t}}<x|A\right\}=\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du,$$

关于a一致成立，其中

$$\gamma,\ c,\ \sigma>0,\ A=\{X^a(0)=\inf_{v\leqslant 0}X^a(v)\}.$$

那么，对于平稳虚等待时间$w^s(t)$，当$a\to 0$时，有

$$\mathrm{P}\{w^s(t)>\frac{x}{|a|}\}\to e^{-2x/\sigma^2}.$$

对w^k的平稳分布，也有类似的结果．

如果对序列$\{\xi^{(n)}=\tau_j^{(n)s}-\tau^{(n)e}\}\in G_I$（也对与$n$有关的三角阵列）加上重话务条件并且要求

$$0>\alpha_n=\mathrm{E}\xi_j^{(n)}\to 0,\ \mathrm{D}\xi_j^{(n)}\to\sigma^2>0,\qquad(7)$$

那么也可以给出极限等待时间w_n分布的非常完整的描述，包括所谓的转移现象．特别是除（7）外，设对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\left[(\xi_j^{(n)})^2:|\xi_j^{(n)}|>\varepsilon\sqrt{n}\right]=0.$$

那么，如果$n\to\infty$时不变号地有$\alpha=\alpha_n\to 0$，使得$n\alpha^2\to v^2$，则

$$\mathrm{P}\{w_n<\frac{x}{|\alpha|}\}\to$$

$$\to\mathrm{P}\{w(u)<\frac{(x-u\,\mathrm{sign}\,n\alpha)}{\sigma};0\leqslant u\leqslant v^2\},\quad(8)$$

其中$w(u)$为标准 **Wiener 过程**（Wiener process）．（8）式右边的值可以直接算出．如果$n\alpha^2\to 0$，则有

$$\mathrm{P}\{w_n<x\sqrt{n}\}\to\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sigma}e^{-u^2/2}du.$$

如果$n\alpha^2\to\infty,\alpha>0$，则有

$$\mathrm{P}\{w_n<\alpha n+x\sqrt{n}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x/\sigma}e^{-u^2/2}du.$$

8）对队长有限制的系统可刻画如下：到达系统而发现队长$n\geqslant N$的呼唤被拒绝并离开系统．在这种情形，$q_n\leqslant N$且概率$\mathrm{P}\{q_n=N\}$等于第n个呼唤被拒绝的概率．

这里，方程（2）应变为如下形式

$$q_{n+1}=\min(N,\max(0,q_n+\eta_n)),\ n\geqslant 0.$$

令$\{\eta_n\}\in G_S$为度量可逆的．另外，令它满足如下条件：$\mathrm{E}\eta_1\neq 0$或$\mathrm{E}\eta_1=0$，且在第二种情形，η_n不能表示为形式$\eta_n=\gamma_n-\gamma_{n-1}$，$\{\gamma_n\}\in G_S$．在这些条件下，$q_n$当$n\to\infty$时存在极限分布．

此外，如果$\{\eta_n\}\in G_I$（例如，当$\{\tau_j^e\}\in E$且剩余控制序列属于G时成立），那么当$n\to\infty$时可以找到q_n平稳分布的显式形式，因为在这种情况q_n与有限状态空间上的简单时齐 **Марков 链**（Markov chain）有关．

对平稳分布也有表达式：

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{q_n=k\}=$$

$$=\mathrm{P}\{\chi(k-N,k)=k\}\mathrm{P}\{\chi(-N,1)\leqslant -N\}+$$

$$+\mathrm{P}\{\chi(k-N,k)=k-N\}\mathrm{P}\{\chi(-1,N)\geqslant N\},(9)$$

其中$\chi(-l,m)$为质点离开0且以跳η_k，$k=1,2,\cdots$，漫游到首次离开区间$(-l,m)$时刻的位置．如果$\nu_j^s\equiv 1$（即$\mathrm{P}\{\eta_n\leqslant 1\}=1$），那么概率（9）可以由$\tau_j^e$与$\tau_j^s$的分布明确地给出．

9）相对于通常的排队系统，在自控服务系统中，呼唤的服务只能从时刻$0,\tau_1^s,\tau_1^s+\tau_2^s,\cdots$开始，其中$\tau_j^s$为控制序列的项．因此，发现系统为空时呼唤必须等到下一级的服务．

与描述输入流的过程$\{e(t)\}$一起，考虑过程$\{s(t)\}$，其中$s(t)$定义为时刻t为止接受服务的呼唤数，若队长可以是无限的．记$q(t)$为不包括正在服务的呼唤的队长，并设$X(t)=e(t)-s(t)$，则有

$$q(t)=q(0)+X(t)-\inf_{0\leqslant u<t}(0,X(u)+q(0))=$$

$$=\sup_{0\leqslant u<t}(q(0)+X(t),X(t)-X(u)).$$

这个等式类似于（4）式且导致如下的结果．如果过程$\{X(t)\}\in G_{IS}$是遍历的，且

$$\mathrm{E}(X(1)-X(0))<0,$$

那么过程$\{X_t(u)=X(t+u):u\geqslant 0\}$的分布当$t\to\infty$时收敛到平稳过程

$$\bar{X}(u)=\sup_{v\leqslant u}(X(u)-X(v))$$

的分布．如果$\{\tau_j^s\}\in E$或$\{\tau_j^e\}\in E$且剩余控制序列属

于 G_j，那么可以给出 $\bar{X}(u)$ 分布的显式公式.

参考文献见排队论(queueing theory).

А. А. Боровков 撰 曾成铉 译 潘一民 校

排队论 [**queueing theory**; **массового обслуживания теория**]

概率论的一个分支，研究各种实际排队(见排队(queue))的数学模型. 这些模型表示为特殊形式的随机过程，有时称之为服务过程. 这些过程的定义通常是描述性的，因为它们的正规结构非常复杂而且并不总是有效的.

排队论主要以概率论作为工具. 排队论的基本问题通常是：基于讨论中随机过程的“局部”性质，研究其平稳特征参数(若它们存在)或长时间之后这些特征参数的行为. 在这领域中研究的一个主要目的是对排队系统选择更好的组织结构.

例如，对诸如自动电话交换机(见**带拒绝的排队**(queue with refusals))这样一个排队论中的典型对象，一个基本的特征参数为呼唤的损失率，即时刻 t 为止呼唤损失的个数与同一时刻为止到达的呼唤数之比 $r(t)/e(t)$ 当 $t\to\infty$ 时的极限 p(若它存在). 这里假设知道呼唤到达时间间隔 $\tau_1^e, \tau_2^e, \cdots$ 与这些呼唤的服务时间 $\tau_1^s, \tau_2^s, \cdots$. 随机(控制)序列 $\{\tau_j^e, \tau_j^s : j=1,2,\cdots\}$ 分布的指定与怎样运行排队的服务规则的描述形成初始数据，刻画服务过程的“局部”性质.

类似地，对多服务台排队(见**等待制的多通道排队**(queue, multi-channel with waiting))，研究第 n 个到达的呼唤直到其开始服务为止的等待时间的概率分布 $\mathrm{P}\{w_n<x\}$ 与其到达时的队长 q_n 的概率分布 $\mathrm{P}\{q_n<x\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限. 同时，也讨论时刻 t 队长的极限分布 $\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}\{q(t)<x\}$ 等等. 这里，初始数据还是控制序列(服务时间隔分布)与界定排队运行的服务规则.

对于相对简单的排队来说，在对控制序列的某种假设下，用分析方法可以得到所要求的特征参数. 但是，这类系统并不是很多的. 加在控制序列上的条件的性质可以用带拒绝的排队(自动电话交换机)这一例子来说明. 令 1) 随机变量 τ_j^e 具有指数分布：

$$\mathrm{P}\{\tau_j^e>x\}=e^{-\alpha x}, \alpha>0,$$

即输入流为 Poisson 的；2) 随机变量 τ_j^s 为独立同分布且不依赖于 $\{\tau_j^e\}$. 那么，上面定义的拒绝概率 p 存在且等于

$$p=\frac{\rho^n}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\right]^{-1},$$

其中 ρ 为数学期望的比：

$$\rho=\frac{\mathrm{E}\tau_j^s}{\mathrm{E}\tau_j^e}=\alpha\mathrm{E}\tau_j^s.$$

对此系统，如果条件 1) 或 2) 中的任何一个不成立，那么寻找 p 的显式公式变得非常困难或甚至不可能.

用来求得所需特征参数显式表达式的基本分析方法是有关构造描述系统状态的 Марков 过程的方法. 此类过程已有很好的研究，且此时问题的解化为对平稳分布(不变测度)相应方程的列出与求解.

这一过程通常用于形成半 Марков 过程或嵌入 Марков 过程(仅在某些随机时间上满足 Марков 性)的修正形式.

通常对某些复杂的排队，原则上精确分析方法是无效的，因而用渐近方法或用**蒙特卡罗方法**(Monte-Carlo method)来模拟随机过程. 渐近方法与如下情形有关：当所考虑的系统(其局部性质)接近于另一个很好地被研究过且可以算出其所需特征参数的系统或在某种意义上临界的系统. 在第一种情形，渐近探讨是由稳定性(或连续性)定理来描述的. 在第二种情形，平稳特征参数通常不存在，但是对此可以建立“聚合”极限定理，即定理中的极限行为不是由控制序列的个别性质决定而仅由某些数值参数决定. 第二种情形的例子是所谓的重话务单服务台排队的定理，现说明如下：令到达时间间隔 $\tau_j^e, j=1,2,\cdots$ 与服务时间 $\tau_j^s, j=1,2,\cdots$ 形成独立同分布的独立序列. 令 τ_j^s 与 τ_j^e 之差的期望

$$a=\mathrm{E}(\tau_j^s-\tau_j^e)$$

为正的. 那么第 n 个呼唤的等待时间 w_n 有非退化的极限分布

$$w(x)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{w_n\geqslant x\}.$$

另外，令随机变量 τ_j^e, τ_j^s 满足：当 $a\downarrow 0$ (a 从正轴趋近于 0) 时，方差 $\mathrm{D}(\tau_j^s, \tau_j^e)$ 收敛到正极限 $\sigma^2<\infty$ 且对某个 $\gamma>0$，$\mathrm{E}[\tau_j^s-\tau_j^e]^{2+\gamma}$ 一致有界. 因此，对每个固定的 z，有

$$w\left[\frac{z}{a}\right]\to e^{-2z/\sigma^2}. \qquad (*)$$

当 a 取小值时，用此关系近似地计算 $w(x)$. 对应于 $a=0$ 的极限系统没有非退化的极限分布 $w(x)$，而且当 $x>0$ 时 $w(x)=1$(当 n 递增时第 n 个顾客的等待时间无限地递增). 在这个意义下，这个极限系统是临界的. 关系式 (*) 可以推广到在对控制序列的假设非常一般的情况下更广类型的带等待的排队.

对电话网络组织中出现的新奇数学问题的兴趣导致了排队论的兴起. 与此相关的第一篇著作是 1907

年 A. Erlang 发表的. 排队论后来的发展出现在 20 世纪 40 年代和 50 年代, C. Palm, F. Pollaczek, A. Я. Хинчин 等人的论文中, 最后采用了"排队"这个术语. 在前苏联, 对排队论的研究工作是由 Б. В. Гнеденко 及其学生等来继承和发展的.

各种应用及其问题中的数学内容促进了排队论的发展. 虽然排队论严格说来是随机过程理论的一部分, 但是它已发展成为具有其本身的问题与求解方法的独立的研究领域.

参考文献

[1] Хинчин, А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963 (中译本: 欣钦, A. Я., 公用事业理论中的数学方法, 科学出版社, 北京, 1958).

[2] Гнеденко, Б. В., Коваленко, И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966 (英译本: Gnedenko, B. V. and Kovalenko, I. N., Introduction to queueing theory, Israel Progr Sci. Transl., 1968).

[3] Боровков, А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972 (英译本: Borovkov, A. A., Stochastic processes in queueing theory, Springer, 1996).

[4] Боровков, А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980 (英译本: Borovkov, A. A., Asymptotic methods in queueing theory, Wiley, 1984).

A. A. Боровков 撰

【补注】 公用设施通常有有限的容量且当使用者瞬间需求超过容量时出现拥挤(损失). 在当今社会里, 人们会遇到很多种类的公用设施. 例如, 售票口, 道路交叉口, 医院里的床位, 电话网络中的通信中继线及计算机中的中心处理器.

对设施进行性能评定的需要导致了排队论的发展. 基本的模型涉及单服务台系统与到达过程. 顾客所需的服务时间及说明处理顾客调度的服务规则的描述.

到达流与所需服务时间的不规则性要求对它们用概率方法来建模. 实际上, 把它们建模为随机过程. 因此, 像第 m 个到达顾客的等待时间、第 n 个到达时的队长及作为时间函数的服务台工作量这样的性能特征必须作为随机过程来分析. 排队论研究这些性能特征与输入过程(到达与服务时间)之间的关系, 它是应用概率论的一个重要分支.

排队论早期的发展产生于 20 世纪最初十年里, 电话通信中的拥挤现象是直接的动力. 直到 1940 年前排队论的发展主要是由于电信工程的需要. 1940 年之后, 人们对**运筹学** (operations research) 的兴趣越来越浓, 这对排队论的发展带来巨大的影响. 目前研究很多种类的排队模型: 多服务台模型、成批到达而不是单个到达, 成批服务, 以及复杂的服务规则, 像随机服务, 优先权服务, 处理器共享和顾客的反馈. 单服务设施之后, 排队网络需要作分析. 在网络中, 顾客或信息必须通过由连线联系在一起的节点传输到某一目的地; 在开关节点可能发生拥挤. 顾客通过网络的路径通常按随机协议来建模.

有关性能与模型特征之间关系的数学分析是排队论的分析部分; 而模拟技术则是用来实验性地研究此类关系.

参考文献

[A1] Feller, W., Probability theory and its applications, I – II, Wiley, 1966 (中译本: 费勒, W., 概率论及其应用(上、下册), 科学出版社, 1979).

[A2] Kleinrock, L., Queueing systems, 1 – 2, Wiley, 1976.

[A3] Cohen, J. W., The single server queue, North-Holland, 1982.

[A4] Syski, R., Congestion theory, North-Holland, 1986.

【译注】

参考文献

[B1] 徐光辉, 随机服务系统(第二版), 科学出版社, 1988.

曹成铉 译 潘一民 校

箭图 [quiver]

【补注】 箭图 (quiver) $Q=(Q_0, Q_1, s, e)$ 由两个集合 Q_0, Q_1 和两个映射 $s, e: Q_1 \to Q_0$ 给定; Q_0 的元素称为顶点或点, Q_1 的元素称为箭; 如果 α 是一个箭, 则 $s(\alpha)$ 称为它的始点, $e(\alpha)$ 称为它的终点, 而 α 被说成由 $s(\alpha)$ 射向 $e(\alpha)$, 写成 $\alpha: s(\alpha) \to e(\alpha)$. (这样, 箭图只不过是可能带有多重箭和闭路的定向图(见定向图 (graph, oriented)), 或者是 A. Grothendieck 意义下的图概形; "箭图"一词由 P. Gabriel 给出.) 给定一个箭图 $Q=(Q_0, Q_1, s, e)$, 存在一个反向箭图 $Q^o=(Q_0, Q_1, e, s)$, 带有相同的顶点集, 而所有的箭取相反的方向.

给定箭图 Q, Q 中长度为 $l \geqslant 1$ 的道路具有形式 $(x|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|y)$, 这里 α_i 是箭, $x=s(\alpha_1)$, 对 $1 \leqslant i < l$, $e(\alpha_i)=s(\alpha_{i+1})$, 而 $e(\alpha_l)=y$; Q 中长度为 0 的道路形式为 $(x|x)$, $x \in Q_0$. 如果 $\omega=(x|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|y)$ 是一个道路, 则 $x=s(\omega)$ 称为它的始点, 而 $y=e(\omega)$ 称为它的终点; 长度为 $\geqslant 1$ 且 $s(\omega)=e(\omega)$ 的道路 ω 称为循环道路 (cyclic path).

设 k 是一个域. Q 在 k 上的道路代数 (path algebra) kQ 是 k 上的自由向量空间, 以 Q 中道路的集合作为基, 带有分配的乘法, 在基上为

$$(x|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|y) \cdot (x'|\alpha'_1, \cdots, \alpha'_{l'}|y') =$$

$$=\begin{cases}(x|\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\alpha_1',\cdots,\alpha_l'|y') & 若\ y=x',\\ 0 & 若\ y\neq x'.\end{cases}$$

元素 $(x|x)$ 是正交本原幂等元，$x\in Q_0$．当 Q_0 是有限集时，$1=\sum_{x\in Q_0}(x|x)$ 是 kQ 的单位元．注意：kQ 是有限维的，当且仅当 Q 是有限的，且没有循环道路．

整体维数 $\leqslant 1$ 的环称为遗传的（hereditary），而根为 N 的有限维 k 代数 A 称为基本分裂的（split basic），如果 A/N 是 k 的直积．当 Q 是没有循环道路的有限箭图时，道路代数 kQ 是遗传的、基本分裂的有限维 k 代数．

设 Q 是一个箭图，k 是一个域．Q 在 k 上的一个表示 $V=(V_x,V_\alpha)$ 由一组向量空间 $V_x(x\in Q_0)$ 和一组线性映射 $V_\alpha:V_{s(\alpha)}\to V_{e(\alpha)}(\alpha\in Q_1)$ 给出．给定两个表示 V,V'，映射 $f=(f_x):V\to V'$ 由线性映射 $f_x:V_x\to V_x'$ 给出，使得对任何 $\alpha\in Q_1,f_{s(\alpha)}V_\alpha'=V_\alpha f_{e(\alpha)}$．设 Q 有限，右 kQ 模的范畴 $\mathrm{mod}\,kQ$ 等价于 Q 的表示范畴（如果将向量空间的所有映射 V_α、f_x 以及 $\mathrm{mod}\,kQ$ 中的模同态写在右边），通常对这两个范畴不加区别．对任意顶点 $x\in Q_0$，存在 Q 的一维表示 $S(x)$，定义为 $S(x)_x=k$，对 $y\neq x\in Q_0,S(x)_y=0$，对 $\alpha\in Q_1,S(x)_\alpha=0$．因而 $\dim_k\mathrm{Ext}^1(S(i),S(j))$ 等于使 $s(\alpha)=i$ 而 $e(\alpha)=j$ 的箭 α 的个数．给定有限维表示 V，由定义，维数向量 $\mathbf{dim}\,V$ 有整数坐标：$(\mathbf{dim}\,V)_x=\dim_k V_x$，$x\in Q_0$；而 $\sum_{x\in Q_0}(\mathbf{dim}\,V)_x$ 称为 V 的维数．在 Q 没有循环道路的情形，$(\mathbf{dim}\,V)_x$ 恰为 V 中 $S(x)$ 的 Jordan-Hölder 重数（Jordan-Hölder multiplicity）．

有限箭图 Q 称为表示有限的，驯顺的或非驯的，如果道路代数 kQ 具有这一性质．连通箭图 Q 是表示有限的，当且仅当 Q 的基础图 $\overline{Q}$（由 Q 忽略边的方向得到）是形式为 A_n,D_n,E_6,E_7,E_8 的 **Дынкин 图**（Dynkin diagram），见 [A4]，[A1]；Q 是驯顺的，当且仅当 $\overline{Q}$ 形式为 $\widetilde{A}_n$，$\widetilde{D}_n$，$\widetilde{E}_6$，$\widetilde{E}_7$，$\widetilde{E}_8$，见 [A3]，[A8]．更确切地，一个 $(n\times n)$ 矩阵 $(a_{ij})_{ij}$，在 $a_{ii}=2$，$a_{ij}=a_{ji}\leqslant 0\ (i\neq j)$ 时，称为对称广义 Cartan 矩阵（symmetric generalized Cartan matrix）（[A6]）．对于一个对称广义 $(n\times n)$ Cartan 矩阵 $\Delta=(a_{ij})_{ij}$ 可联系到下述箭图 $Q(\Delta)$：它的顶点集是 $Q(\Delta)_0=\{1,\cdots,n\}$，对 $1\leqslant i<j\leqslant n$，从 i 到 j 画 $-a_{ij}$ 个箭．注意：当 Δ 是对称广义 Cartan 矩阵时，形式为 $Q(\Delta)$ 的箭图没有循环道路．

设 Δ 是一个对称广义 Cartan 矩阵．若 V 是 $Q(\Delta)$ 的一个不可分解表示，则 $\mathbf{dim}\,V$ 是 Δ 的一个**正根**（root），并且所有正根都由这种方法得到；对于取定的 $\mathbf{dim}\,V$，不可分解表示 V 的同构类的个数依赖于 $\mathbf{dim}\,V$ 是实根（则只有一个类）还是虚根（[A7]）．

设 Q 是一个箭图，长度 $\geqslant 2$ 且有相同始点和相同终点的道路的非零 k 线性组合称为 Q 上的一个关系（relation）．给定一个关系的集合 $\{\rho_i\}_i$，设 $<\rho_i|i>$ 是 $\{\rho_i\}_i$ 在 kQ 中生成的理想，则 $A=kQ/<\rho_i|i>$ 称为由带关系的箭图定义的代数（algebra defined by a quiver with relations）．有限维 k 代数 A 同构于一个由带关系的箭图定义的代数，当且仅当 A 是基本分裂的．这样，若 k 是代数闭的，则任何有限维 k 代数森田等价于一个由带关系的箭图定义的代数．代数闭域上所有表示有限的以及某些极小的表示无限的 k 代数是由带有形如 ω 和 $\omega_1-\omega_2$ 的关系的箭图定义的，其中 ω,ω_1,ω_2 是道路（乘法基定理（multiplicative basis theorem），[A2]）；这表明有限表示代数的研究纯粹是一个组合问题；它是证明第二 Brauer-Thrall 猜想的关键步骤（见**结合代数的表示**（representation of an associative algebra））．

为了有效地解决出现在代数，几何和分析中的给定域 k 上的某些类型的矩阵问题，箭图的表示理论得到了发展．典型的驯顺箭图是 Kronecker 箭图（Kronecker quiver）



它的表示恰好是矩阵束（阶数相同的矩阵对 A,B，考虑等价关系：$(A,B)\sim(A',B')$，当且仅当存在可逆矩阵 p,Q，使得 $A'=PAQ$，$B'=PBQ$），和四子空间箭图（four-subspace quiver）



一般地，n 子空间箭图（n-subspace quiver）的表示理论



处理一个向量空间中 n 子空间的相对位置．

利用箭图的语言，这些问题转化为有限维基本分裂的 k 代数问题．

为了处理任意有限维 k 代数，需要类型(species)的概念(来取代箭图)，见[A5]．这种方法涉及不同域的向量空间问题．表示有限类型对应于任意 **Дынкин** 图 $(A_n, B_n, C_n, \cdots, G_2)$，驯顺类型对应于 Euclid 图([A9])．

参考文献

[A1] Bernstein, I. N., Gel'fand, I. M. and Ponomarev, V. A., Coxeter functors and Gabriel's theorem, *Russian Math. Surveys*, **28**(1973), 2, 17－32. (*Uspekhi Mat. Nauk*, **28**(1973), 2, 19－34).

[A2] Bautista, R., Gabriel, P., Rojter, A. and Salmeron, L., Representation-finite algebras and multiplicative basis, *Invent. Math.*, **81**(1985), 217－285.

[A3] Donovan, P. and Freislich, M. R., The representation of finite graphs and associated algebras, Carleton Lecture Notes, 5(1973).

[A4] Gabriel, P., Unzeriegbare Darstellunren I, Manuscripta Math., **6**(1972), 71－103.

[A5] Gabriel, P., Indecomposable representations II, in Symp. Math. Ist. Naz. Alta Mat. (Rome, 1971), Vol. XI, Acad. Press, 1973, 81－104.

[A6] Kac, V. G., Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A7] Kac, V. G., Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math.*, **56**(1980), 57－92.

[A8] Nazarova, L. A., Representations of quivers of infinite type, *Math. USSR Izv.*, 7(1973), 749－792. (*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **37**(1973), 752－791).

[A9] Dlab, V. and Ringel, C. M., Indecomposable representations of graphs and algebras, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **173**(1976).

C. M. Ringel 撰　裘传仁 译

商范畴[quotient category; факторкатегория]

类似于商集与商代数的一种构造．设 $\mathfrak{K}$ 为任意的一个范畴(category)，假定在其态射类 Mor $\mathfrak{K}$ 上给定了一种等价关系 $\sim$，使满足下列条件：1)若 $\alpha\sim\beta$，则态射 α 与 β 有相同的源与目标；与2)如果 $\alpha\sim\beta$，$\gamma\sim\delta$，并且乘积 $\alpha\gamma$ 是有定义的，则 $\alpha\gamma\sim\beta\delta$．以$[\alpha]$表示 α 的等价类，则由 $\sim$ 所构造的 $\mathfrak{K}$ 的商范畴(quotient category)是这样的一个范畴(记作 $\mathfrak{K}/\sim$)，它与 $\mathfrak{K}$ 有相同的对象，且对任一对对象 A, B，$\mathfrak{K}/\sim$ 中的态射集 $H(A,B)$ 是由等价类$[\alpha]$所组成的，这里 $\alpha: A\to B$ 是 $\mathfrak{K}$ 中的态射；两个态射$[\alpha]$与$[\beta]$的乘积是由公式$[\alpha][\beta]=[\alpha\beta]$来定义的(当乘积 $\alpha\beta$ 有定义时)．

每一个小范畴(small category)都可以表示为某一个适当的有向图上的路范畴之商范畴．

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 任一个满足上述条件的等价类通常都称为 $\mathfrak{K}$ 上的一个合同(congruence)(见合同(代数学中的)(congruence (in algebra)))．

参考文献

[A1] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965, p.4.

周伯埙 译

商群[quotient group; факторгруппа]，*群 G 对正规子群 N 的*

由 G 的陪集 $Ng(g\in G)$ 所构成的群(见**陪集**(coset))，记作 G/N(见**正规子群**(normal subgroup))．陪集的乘法由公式

$$Ng_1\cdot Ng_2=Ng_1g_2$$

规定．商群的单位元为陪集 $N=N\cdot 1$，而陪集 Ng 的逆元为 Ng^{-1}．

映射 $\kappa: g\to Ng$ 是群 G 到 G/N 上的一个满同态，称为典范满同态(canonical epimorphism)或自然满同态(natural epimorphism)．若 $\varphi: G\to G'$ 为 G 到群 G' 上的任意满同态，则 φ 的核 K 是 G 的正规子群，而商群 G/K 与 G' 同构；确切地说，有一个 G/K 到 G' 上的同构映射 ψ 使得图

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ & {\scriptstyle\kappa}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\psi} & \\ & G/K & \end{array}$$

是交换的，这里 κ 为自然满同态 $G\to G/K$．

群 G 的商群也可由 G 上的某一同余(见**合同(代数学中的)**(congruence (in algebra)))出发来定义，此时商群是同余元素类关于类的乘法构成的群．一个群内所有可能的同余是与各正规子群一一对应的．用同余关系所定义的商群与由正规子群所定义的是一致的．商群是群范畴中的一个正规商对象．

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, I, Wiley, 1982, Sect, 9.1.

李慧陵 译

商映射[quotient mapping; факторное отображение]

映射 f，把拓扑空间(topological space) X 映成拓扑空间 Y，使得 $v\subset Y$ 是 Y 中的开集等价于原象 $f^{-1}v$ 是 X 中的开集．如果给了一个映射 f，把拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 映成集合 Y，则在 Y 上使 f 连续的所有拓扑中，存在最强的拓扑 $\mathscr{T}_f$(即含有最多开集的拓扑)．拓扑 $\mathscr{T}_f$ 由所有下述集合 $v\subset Y$ 组成：$f^{-1}v$ 是 X 中的开集．这个拓扑是 Y 上唯一使 f 成为商映射

的拓扑．因此，$\mathcal{T}_f$ 称为关于映射 f 以及 X 上给定拓扑 $\mathcal{T}$ 的商拓扑（quotient topology）．

上述构造是研究拓扑空间的分解时产生的，由此得到一个重要的运算：从已知拓扑空间转移到一个新空间——一个分解空间．假设给了拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的分解 γ，即是 X 的一个覆盖 γ，由 X 中两两互不相交的非空子集组成，则可定义一个投影映射 $\pi: X \to \gamma$ 如下：$\pi(x)=P\in\gamma$，如果 $x\in P\subset X$．让集合 γ 配备关于 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 及映射 π 的商拓扑 $\mathcal{T}_\pi$，则 $(\gamma,\mathcal{T}_\pi)$ 称为 $(X,\mathcal{T})$ 的一个分解空间（decomposition space）．于是，除了一个同胚映射不计外，圆周可以表为线段的分解空间，球面可以表为圆盘的分解空间，Möbius 带可以表为矩形的分解空间，而投影平面可以表为球面的分解空间，等等．

商映射具有下列重要性质，应与有关的图表一起考虑．让 $f: X\to Y$ 是连续映射，$f(X)=Y$．于是存在拓扑空间 Z，商映射 $g: X\to Z$ 以及一一连续映射（即连续双射）$h: Z\to Y$，使得 $f=h\circ g$．事实上，分解空间 $\gamma=\{f^{-1}y: y\in Y\}$ 把 X 分解为点在 f 下的完全原象，可以取作 Z，而投影 π 则可取作 g．假设给了连续映射 $f_2: X\to Y_2$ 和商映射 $f_1: X\to Y_1$，满足下述条件：若 $x', x''\in X$，且 $f_1(x')=f_1(x'')$，那么也有 $f_2(x')=f_2(x'')$．这就定义了一个单值映射 $g: Y_1\to Y_2$，使得 $g\circ f_1=f_2$，并且 g 是连续的．商映射在子空间上的限制不必是商映射，即使这个子空间在原空间中既开又闭．商映射与恒同映射的 Descartes 乘积不必是商映射，商映射的 Descartes 自乘也不必是商映射．商映射在完全原象上的限制不必是商映射，确言之，若 $f: X\to Y$ 是商映射，$Y_1\subset Y$，$X_1=f^{-1}Y_1$，而 $f_1=f|_{X_1}$，则 $f_1: X_1\to Y_1$ 不必是商映射．但是，若 Y_1 在 Y 中既开又闭，则 f_1 是商映射．

这些事实表明：处理商映射必须谨慎；从范畴理论的观点来看，商映射类并不像连续映射类、完满映射类以及开映射类那么协调而方便（见**连续映射**（continuous mapping）；**完满映射**（perfect mapping）；**开映射**（open mapping））．不过，考虑到分解空间以及商映射的上述"图表"性质，这就保证商映射类成为拓扑学中最重要的一类映射的地位．这一类包括所有满射的，连续的，开的及闭的映射（见**闭映射**（closed mapping））．商映射在利用映射方法进行空间分类时起着至关重要的作用．例如，k 空间被刻画为局部紧的 Hausdorff 空间的商空间（即商映射的象），而序列空间正好就是度量空间的商空间．

大多数拓扑性质在商映射下都不保存．例如，度量空间的商空间不必是 Hausdorff 空间，可分度量空间的商空间不必具有可数基．因此，拓扑性质在商映射下的表现问题通常是对点的原象或对象空间加上额外的限制后才产生的．例如，已知：若一紧统同胚于一可分度量空间的分解空间，则该紧统可度量化．如果一个商映射把可分度量空间映成一个满足第一可数公理的正则 T_1 空间，则象空间可度量化．但是也有一些拓扑不变量，关于任何商映射都是稳定不变的，例如序列性及紧度的上界．在拓扑代数中，商映射如果同时还是代数同态，则具有比一般拓扑中规则得多的结构．例如，把一个拓扑群映成另一拓扑群的代数同态如果还是商映射，就一定是开映射．因此，商同态映射保存的拓扑性质的范围实际上相当广泛（例如，其中就有可度量化性）．

参考文献

[1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974（英译本：Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984）.

[2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. General topology, Addison-Wesley, 1966（译自法文）.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 分解空间亦称商空间（quotient space）．

商映射（开映射、双商映射（bi-quotient mappings）等）保存的性质总结在[A2]中．而且，任何拓扑空间都是仿紧正则空间（regular space）的开商（[A1]）（亦见**仿紧空间**（paracompact space））．

参考文献

[A1] Isbell, J., A note on complete closure algebras, *Math. systems Theory*, 3(1969), 310－312.

[A2] Michael, E. A., A quintuple quotient quest, *Gen. Topol. Appl.*, 2(1972), 91－138.

[A3] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

胡师度　白苏华　译

商对象［**quotient object; фактообъект**］，范畴中一个对象的

商集、商群、商空间等概念的一般化．

令 $\mathscr{E}$ 是**范畴**（category）$\mathfrak{K}$ 中的某些满态射的类，其中包含 $\mathfrak{K}$ 中的全体恒等态射，且在同构的右乘下封闭．换言之，任取 $X\in\mathrm{ob}\,\mathfrak{K}$，$1_X\in\mathscr{E}$，并且对任意 Iso $\mathfrak{K}$ 中的 $\xi: B\to C$ 和任意 $\mathscr{E}$ 中的 $\varepsilon: A\to B$，态射 $\varepsilon\xi\in\mathscr{E}$．$\mathscr{E}$ 中的两个态射 $\varepsilon: A\to B$ 和 $\varepsilon_1: A\to C$ 称为等价的（equivalent），是指存在一个同构 ξ，使 $\varepsilon_1=\xi\varepsilon$．态射 ε 的等价类叫作对象 A 的 $\mathscr{E}$ 商对象（quotient object），对 (ε, B) 叫作商对象的代表（representative）．以 (ε, B) 为代表的商对象有时记作 $[\varepsilon, B]$，$[\varepsilon, B)$ 或简记作 $[\varepsilon]$．

每个对象 A 至少有一个 $\mathscr{E}$ 商对象，即非真商

对象(improper quotient object)$[1_A, A]$; A 的其他商对象叫作真的(proper). 如果范畴 $\mathfrak{K}$ 中任意对象 A 的 $\mathscr{E}$ 商对象类都是集合, 则称范畴 $\mathfrak{K}$ 是 $\mathscr{E}$ 局部小的($\mathscr{E}$-locally small).

若取 $\mathscr{E}$ 为全体满射的子范畴 Epi $\mathfrak{K}$, 则 Epi $\mathfrak{K}$ 商对象简称为商对象(quotient object). 如果 $\mathscr{E}$ 是 $\mathfrak{K}$ 上双范畴(bicategory)结构($\mathfrak{K}$, $\mathscr{E}$, $\mathfrak{M}$)的一部分, 则 $\mathscr{E}$ 商对象叫作容许商对象(admissible quotient objects). 类似地, 若 $\mathscr{E}$ 由全体正则的(严格的, 正规的, 等等)满态射组成, 则对应的商对象叫作正则的(regular)(严格的(strict), 正规的(normal), 等等). 例如, 在拓扑空间范畴中, 商空间对应于正则商对象.

范畴中一个对象的商对象的概念与子对象(subobject)的概念对偶. M. Ш. Цаленко 撰

【补注】 术语"余局部小的"(colocally small)和"余良势的"(co-well-powered)经常用来取代"局部小的".

参考文献

[A1] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algébre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119-221.

[A2] Mitchell, B., Theory of categories, Acad. Press, 1965, p.7.

张英伯 译

商表示[quotient representation; фактор представление]

群, 或代数, X 的表示 π(见群的表示(representation of a group))的商表示是如下定义的表示 ρ. 设 E 是表示 π 的(拓扑)向量空间, E/F 为 E 的关于 π 的某不变子空间 F 的商空间(见表示的不变子空间(invariant subspace of a representation)), 则 ρ 是在(拓扑)向量空间 E/F 内对一切 $x\in X$, $\xi\in E$, 由公式 $\rho(x)(\xi+F)=\pi(x)\xi+F$ 所定义的表示. 若 π 为连续表示(continuous representation), 则它的任意商表示也是连续的. A. И. Штерн 撰 李慧陵 译

商环[quotient ring; факторкольцо], 环 R 对理想 I 的

R 的加法群对子群 I 的商群(quotient group), 并定义乘法

$$(a+I)(b+I)=ab+I.$$

这样商群就变为环, 记为 R/I. 映射 $\pi: R\to R/I$, $\pi(x)=x+I$, 是环的满同态, 称为自然同态(natural homomorphism)(见代数系统(algebraic system)).

商环的最重要例子是模 n 的剩余环(ring of residues), 即整数环 $\mathbf{Z}$ 对于理想 $\mathbf{Z}n$ 的商环. $\mathbf{Z}/\mathbf{Z}n$ 中的元素可设为是数 $\{0,1,\cdots,n-1\}$, 和与积定义为通常的和与积被 n 除后所得的余数. 可以建立 R/I 中理想与 R 中包含有 I 的理想之间的保序的一一对应, 特别 R/I 是单的(见单环(simple ring)), 当且仅当 I 是极大理想(maximal ideal).

Л. А., Скорняков 撰

【补注】 商环的另一重要例子是 $F[x]/F[x]f(x)$, 这里 $F[x]$ 是 F 上单变元 x 的多项式环, $f(x)$ 是一不可约多项式(irreducible polynomial). 这种商环描述了所有 F 添加方程 $f(x)=0$ 的根的扩张(亦见域的扩张(extension of a field)).

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1. Wiley, 1982, Sect 10.1

冯绪宁 译

商空间[quotient space; факторпространство] 定义在拓扑空间 S 上的动力系统(dynamical system) f^t 的.

S 关于以下等价关系的商空间: $x\sim y$, 若 x 点与 y 点在同一轨道上. 换言之, 商空间的点就是动力系统 f^t(另一种记号是 $f(t,p)$, 见[1])的轨道, 其拓扑是使得映 S 之每一点到与之相联的轨道的映射为连续的最强的拓扑(这映射就是: 定义

$$\{f^t x_k\}_{t\in\mathbf{R}} \xrightarrow[k\in K]{} \{f^t x\}_{t\in\mathbf{R}}$$

(K 是有向集), 当且仅当存在 t_k 使得

$$f^{t_k} x_k \xrightarrow[k\in K]{} x;$$

若 S 为一度量空间, 则 $k\in\mathbf{N}$). 许多动力系统的商空间不满足任何分离性公理, 即令 S 满足. 例如, 若 S 是一极小集(minimal set), 则商空间中每个非空集的闭包均为整个商空间. 若给定在一度量空间上的动力系统是完全不稳定的(见完全不稳定性(complete instability)), 则其商空间为 Hausdorff 空间, 当且仅当此动力系统没有无穷远鞍点(saddle at infinity).

参考文献

[1] Немыцкий, В. В., и Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949(中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956).

[2] Bourbaki, N., Topologie générale, Prem. Partie, Les structures fondamentales de l'analyse, 3e, éd, Hermann, 1961.

[3] Миллионщиков, В. М., 《Дифференц. Уравнения》 10 (1974), 12, 2292-2293.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 一般地, 令 X 为一拓扑空间(topological space), R 为 X 上的等价关系(或与此等价: 设 X 为互不相交的子集 X_λ 之并集, λ 在某一不一定有限的指标集 Λ 中; 这时 $(x_1, x_2)\in R$, 当且仅当 x_1 与 x_2 在同一 X_λ 中). 商空间(或称为分解空间(decomposition space), 见商映射(quotient mapping))

X/R 就是以 R 等价类为点的空间，且其上赋有最细（即最强）的使得商映射 $x \mapsto R[x]$ 为连续的拓扑．（这里 $R[x]=\{x' \in X;\ (x, x') \in R\}$ 对 $x \in X$）．上面讨论的对象，其中等价类是一动力系统的轨道，通常称为此动力系统的轨道空间（orbit space）．轨道空间中网（或称**广义序列**（generalized sequence））的收敛性不能推广到任意商空间；它之所以有效是因为对于轨道空间，商映射恒为**开映射**（open mapping）．

对于完全不稳定系统，轨道空间具有 Hausdorff 拓扑，当且仅当此动力系统没有无穷远处的鞍点，这与［A2］中的结果有关．亦见［A1］中的命题 14．

参考文献

［A1］Hajek, O., Prolongation in topological dynamics, in Sem. Differential Equations and Dynamical Systems II, Lecture notes in math., Vol. 144, Springer, 1970, pp. 79－89.

［A2］Markus, L., Parallel dynamical systems, *Topology*, 8(1969), 45－57.

［A3］Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989

齐民友 译

R

-正则环** [-regular ring**; ***-регулярное кольцо**]

带有对合反自同构 $\alpha \mapsto \alpha^*$ 的正则环（von Neumann 意义下的）(regular ring (in the sense of von Neumann))，使得 $\alpha\alpha^* = 0$ 蕴涵 $\alpha = 0$. *-正则环的幂等元 e 称为一个投影算子 (projector)，若 $e^* = e$. *-正则环的每个左（右）理想由唯一的投影算子生成．这样可以谈到 *-正则环的投影算子的格．若格是完全的，则是一个连续几何 (continuous geometry). 一个有齐次基 $a_1, \cdots, a_n (n \geqslant 4)$ 的有补模格 (modular lattice)（亦见有补格 (lattice with complements)）是有正交补的格，当且仅当它同构于某个 *-正则环的投影算子的格．

参考文献

[1] Скорняков, Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961（英译本：Skornyakov, L. A., Complemented modular lattices and regular rings, Oliver & Boyd, 1964）.

[2] Berberian, S. K., Baer *-rings, Springer, 1972.

[3] Kaplansky, I., Rings of operators, Benjamin, 1968.

Л. А. Скорняков 撰　蔡传仁 译

Raabe 准则 [**Raabe criterion**; **Раабе признак**]，关于数项级数收敛性的

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，如果对于充分大的 n，有如下不等式

$$R_n \equiv n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right] \geqslant r > 1.$$

若对于某个 n 以后 $R_n \leqslant 1$，则级数发散．

这是 J. Raabe 证明的．　Е. Г. Соболевская 撰

【补注】

参考文献

[A1] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964（英译本：Dover, reprint, 1990）.

罗嵩龄 译

Radau 求积公式 [**Radau quadrature formula**; **Радо квадратурная формула**]

在区间 $[a, b] = [-1, 1]$ 上具有权 $p(x) = 1$，而且有一个固定节点，即区间某端点（譬如 -1）的一个**最高代数精度的求积公式** (quadrature formula of highest algebraic accuracy). Radau 求积公式形式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong Af(-1) + \sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j),$$

其中节点 x_j 是 Jacobi 多项式 $P_n^{(0,1)}(x)$ 的根（**Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials) 形成 $[-1, 1]$ 上关于权 $1 + x$ 的正交系），且 $A = 2/(n+1)^2$，系数 C_j 是正的，其代数精度为 $2n$. Radau 求积公式的节点和系数有表可查，例如，见 [2].

该公式由 R. Radau ([1]) 发现．

参考文献

[1] Radau, R., Etude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie, *J. Math. Pures et Appl.*, 6 (1880), 283 – 336.

[2] Крылов, В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967（英译本：Krylov, V. I., Approximate calculation of integrals, Macmillan, 1962）.

[3] Stroud, A. M. and Secrest, D., Gaussian quadrature formulas, Prentice-Hall, 1966.

И. П. Мысовских 撰　张宝琳　袁国兴 译

Rademacher 函数系 [**Rademacher system**; **Радемахера система**]

$[0, 1]$ 上规范正交系 (orthonormal system) $\{r_k(x)\}$. 它是由 H. Rademacher 引进的 ([1]). 函数

$r_k(x)$ 由方程

$$r_k(x) = \operatorname{sign}\sin 2^k \pi x,\ x\in[0,1],\ k=1,2,\cdots$$

定义.

Rademacher 函数的另一种定义是由考虑 [0, 1] 中数的二进制展开式得到的：如果 x 的二进制展开式的第 k 位中有一个零，则令 $r_k(x)=1$，如果有个 1，则令 $r_k(x)=-1$，如果 $x=0$ 或 x 容许两个展开式，则令 $r_k(x)=0$. 按照这个定义，区间 [0, 1] 划分成 2^k 个相等的子区间，在其中每一子区间中，函数 $r_k(x)$ 交替地取值 $+1$ 和 -1，且在子区间的端点 $r_k(x)=0$.

函数系 $\{r_k(x)\}$ 是随机独立函数系的一个典型例子且在概率论和正交级数理论中均有应用.

Rademacher 级数的主要性质之一由 Rademacher 定理(Rademacher theorem)表出：如果 $\sum c_k^2 < +\infty$，则级数 $\sum c_k r_k(x)$ 在 [0, 1] 上几乎处处收敛；还有 Хинчин - Колмогоров 定理(Khinchin-Kolmogorov theorem)：如果 $\sum c_k^2 = +\infty$，则级数 $\sum c_k r_k(x)$ 在 [0, 1] 上几乎处处发散.

由于 Rademacher 函数在 [0, 1] 的二进无理点只取值 ± 1，考虑级数 $\sum c_n r_n(x)$ 意味着对级数 $\sum c_n$ 的项的 $\pm$ 符号的一个分布被选取，它依赖于 x. 如果 $x = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots$ 是 $x\in[0,1]$ 作为一个无限二进分数的表示式，则对 $\alpha_n=0$，正号置于 c_n 前而对 $\alpha_n=1$，负号置其前.

在概率论的述语中，上述定理意指：如果 $\sum c_n^2 < +\infty$，则 $\sum \pm c_n$ 对几乎所有的正负号分布收敛(以概率 1 收敛)，而如果 $\sum c_n^2=+\infty$，则 $\sum \pm c_n$ 对几乎所有的正负号分布发散(以概率 1 发散).

反之，很多概率论中定理可用 Rademacher 函数来表述. 例如 Cantelli 定理(赌注为 1 的"首和尾"赌博，其平均增益以概率 1 趋向于零)意味着在 [0, 1] 上几乎处处满足等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k(x) = 0.$$

参考文献

[1] Rademacher, H., Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Ann.*, 87(1922), 112-138.

[2] Kaczmarz, S. and Steinhaus, H., Theorie der Orthogonalreihen, Chelsea, reprint, 1951.

[3] Alexits, G., Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961(译自德文).

[4] Kac, M., Statistical independence in probability, analysis and number theory, Math. Assoc. Amer., 1959.

A. A. Талалян 撰

【补注】 在赋范空间的研究中与在概率论中一样，形如 $\sum_{k=1}^{\infty} r_k(x) y_k$ 的级数的性态起着重要作用，这里 $x\in[0,1]$ 且 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是赋范空间 Y 中的向量系. 特别有兴趣的是 Rademacher 型(Rademacher type)和余型(cotype)的概念. Banach 空间 Y 称为是型 p 的，$1\leqslant p\leqslant 2$，如果存在常数 c 使得对所有的整数 n 和所有的 $\{y_k\}_{k=1}^{n}\subset Y$，有

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(x) y_k \right\| dx \leqslant c\left[\sum_{k=1}^{n} \|y_k\|^p\right]^{1/p}.$$

空间 Y 称为余型 q 的，$2\leqslant q<\infty$，如果存在常数 c 使得对所有的整数 n 和所有的 $\{y_k\}_{k=1}^{n}\subset Y$，有

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \|y_k\|^q\right]^{1/q} \leqslant c\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(x) y_k \right\| dx.$$

具有型 2 和余型 2 的空间恰好是那些与 Hilbert 空间同构的空间.

参考文献

[A1] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., Classical Banach spaces, II. Function spaces, Springer, 1979.

葛显良 译 吴绍平 校

径向边界值[**radial boundary value**; **радиальное граничное значение**]

定义于单位圆盘 $D=\{z\in\mathbf{C}: |z|<1\}$ 上的函数 $f(z)$ 在边界点 $\zeta=e^{i\theta}$ 处的值，它等于函数 $f(z)$ 当 z 沿半径 $H=\{z=re^{i\theta}: 0<r<1\}$ 的点集趋于点 ζ 时的极限

$$\lim_{r\uparrow 1} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta}).$$

对于给定于任何(包括多维)区域 D 上的函数 $f(z)$，有时也在较广意义下使用"径向边界值"这一名词，这时 H 取为 D 的边界通向所说边界点的法线(或其类似)点集. 例如，对双圆盘情形

$$D=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2: |z_1|<1, |z_2|<1\},$$

作为 $\zeta=(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ 处的径向边界值，取极限

$$\lim_{r\uparrow 1} f(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2}) = f^*(\zeta).$$

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1-2, М., 1967-1968(中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957).

[2] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950(中译本：И. И. 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 所考虑的函数通常是解析或调和函数. 亦见**解析函数的边界性质**(boundary properties of analytic functions)及其参考文献；亦可参看**角边界值**(angular

boundary value) 和 **Fatou 定理** (Fatou theorem).

沈永欢 译

弧度 [radian; радиан]

对应于其长度等于半径的圆弧的角; 例如, 180° 等于 π 弧度; 1 弧度近似等于 57°17′44″. 在所谓角的圆(或弧度)度量中, 把弧度取作为角的度量单位. 如果一个角的圆度量是 a 弧度, 则这个角包含 $(180a/\pi)^{\circ}$; 反之, n° 的角在圆度量中具有 $\pi n^{\circ}/180^{\circ}$ 弧度.

БСЭ-3 杜小杨 译

辐射条件 [radiation conditions; излучения условия]

对椭圆型方程外边界值问题(见**椭圆型方程边值问题** (boundary value problem, elliptic equations)) 的解的唯一性所提的在无穷远处的条件, 是不同物理现象的定态振荡的数学模型. 辐射条件的物理意义是选择描述发散波的边值问题的解, 这些发散波的源(实的或虚构的)处在一个有界域中(见[1]). 描述具有无穷远处源的波(例如, 平面波)的定态振荡的方程的解不满足辐射条件.

对 **Helmholtz 方程** (Helmholtz equation)

$$\Delta u+k^{2}u=-f \qquad (1)$$

的辐射条件的第一个解析形式是 A. Sommerfeld ([2]) 提出的. 如果 (1) 对应于具有时间依赖性 $e^{-i\omega t}$ 的定态振荡的问题, 那么对应的辐射条件就称作 **Sommerfeld 辐射条件** (Sommerfeld radiation conditions), 在三维空间情形下, 它们取下面的形式:

$$u=O\left(\frac{1}{r}\right),\ \frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\text{当 } r\to\infty \text{ 时}, \qquad (2)$$

而在二维情形下, Sommerfeld 辐射条件的形式为

$$u=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\ \frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$
$$\text{当 } r\to\infty \text{ 时}. \qquad (3)$$

[3] 中证明了: (2) 和 (3) 中的第一个条件是第二个条件以及满足方程 (1) 这一要求的推论.

条件 (2) 和 (3) 可以减弱. 特别地, 在许多情形下 (2) 可以换成非局部积分条件:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{r=R}\left|\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right|^{2}d\sigma=0. \qquad (4)$$

如果外域的边界有点在无穷远处, 那么条件 (2)-(4), 在下面的意义下, 不是普遍适用的: 他们并不总定义一函数类, 在其中对应的边值问题有唯一解. 例如, 在两个平行平面上, 已给齐次 Dirichlet 或 von Neumann 边界条件, 在此两个平行平面所夹的层中, 具有局部右端的方程 (1) 并不存在满足 Sommerfeld 辐射条件 (2) 或 (4) 的古典解(见[4]). 为了使得问题有解, 这些条件必须换成所谓的部分辐射条件(见[4]).

和 (2)-(4) 不一样, 部分辐射条件不能表示成渐近表达式的形式, 而是表示为精确的关系式, 这些关系式为解按某个基本函数系展开的分量所满足. 对应的基本函数系是用不同方式按照原来的边值问题的特殊性来引进的. 这样, 在以 z 轴为轴向的无限圆柱中、在柱的侧面上给齐次 Dirichlet 或 von Neumann 边界条件的、具有局部右端的方程 (1) 的边值问题情形下, 部分辐射条件可以写成

$$\begin{cases}\displaystyle\int_S \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z\leqslant z_1} v_n\,d\sigma = i\gamma_n\int_S u|_{z\leqslant z_1}v_n\,d\sigma,\\[2ex] \displaystyle\int_S \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z\geqslant z_2} v_n\,d\sigma = -i\gamma_n\int_S u|_{z\geqslant z_2}v_n\,d\sigma,\end{cases} \qquad (5)$$

其中 S 是圆柱的横截面, v_n 是对 S 中下列 **Laplace 方程** (Laplace equation) 的边值问题的规范化本征函数:

$$\begin{cases}\Delta_2 v_n+\lambda_n v_n=0,\ \text{在 } S \text{ 中},\\ v_n|_{\partial S}=0,\ \text{在 Dirichlet 条件情形下},\\ \displaystyle\frac{\partial v_n}{\partial n}\bigg|_{\partial S}=0,\ \text{在 von Neumann 条件情形下},\end{cases} \qquad (6)$$

$\gamma_n^2=k^2-\lambda_n$, $\operatorname{Im}\gamma_n\geqslant 0$, 且右端的支集是在由横截面 z_1 和 z_2 所围的域中.

因为各种辐射条件 (2)-(5) 的解析形式是不同的, 自然会提出如下问题: 如何建立一般的辐射原理, 它不依赖于定态振荡问题求解的无界域的形状. 有两种可能的办法去解这个问题. 在[5] 中建立了所谓的极限振幅原理 (limiting-amplitude principle). 根据这原理, 定态振荡方程的解由下述要求所唯一确定, 即它是具有周期右端的**波动方程** (wave equation) 的具有零初值的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 的解的振幅当 $t\to\infty$ 时的极限; 在[5] 中, 对在每一个无界空间中的定态振荡问题给出了**极限振幅原理** (limiting-amplitude principle) 的一个证明. 极限振幅原理被推广到很广一类微分算子的外问题, 且在无界域的内边界上给了某些附加条件, 例如, 见[6].

建立一般辐射原理的另一办法称为**极限吸收原理** (limit-absorption principle), 它是将关于在没有吸收的介质中的定态振荡的外边值问题的解, 作为对应的在具有(最后趋于零的)吸收的介质中的边值问题有界解的极限来求解的. 这个方法在解电磁波在无限长的金属线上反射的具体问题时首次使用(见[7]). 极限吸收原理也推广用作对一般椭圆算子的外边值问题

以及对无限域的很广一类内边界的外边值问题的解的唯一性条件（例如，见[8]）.

极限振幅原理和极限吸收原理广泛用于外边值问题解的一般性质的研究；但是，因为如 Sommerfeld 辐射条件（2）－（4）那样，它们有一个渐近性质，因此它们在外边值问题的数值解中的使用，在许多情形中证明不是充分有效的．在这些情形中通常使用部分辐射条件，它和投影法结合，使得它有可能去实现一大类重要实际问题的完整的数值研究（例如，见[9]）.

参考文献

[1] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 4, ч. 1, 6 изд., 1974（中译本：В. И. 斯米尔诺夫著，高等数学教程，第四卷第一分册，人民教育出版社，1979 年，第一章.）

[2] Sommerfeld, A., Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, Jhrber. Deutsch. Math.-Verein, **21** (1912), 309 – 353.

[3] Векуа, И. Н., 《Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР》, **12** (1943), 105 – 174.

[4] Свешников, А. Г., 《Докл. АН СССР》, **73** (1950), 5, 917 – 920.

[5] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., 《Ж. экспериментальной и теоретич. физики》, **18** (1948), 2, 243 – 248.

[6] Lax, P. D. and Philips, R. S., Scattering theory, Acad. Press, 1967.

[7A] Ignatowsky, W. von, *Ann. der Phys.*, **18** (1905), 13, 495 – 522.

[7B] Ignatowsky, W. von, *Ann. der Phys.*, **18** (1905), 15, 1078.

[8] Эйдус, Д. М., 《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 3, 91 – 156.

[9] Свешников, А. Г., Проблемы математической физики и примыкающие к ним вопросы вычислительной математики и дифференциальных уравнений, М., 1977.

А. Г. Свешников 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zauderer, E., Partial differential equations of applied mathematics, Wiley (Interscience), 1989.

[A2] Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984（译自俄文）.

[A3] Ramm, A. G., Scattering by obstacles, Reidel, 1986.

[A4] Whitham, G. B., Linear and nonlinear waves, Wiley (Interscience), 1974（G. B. 惠瑟姆著，线性与非线性波，科学出版社，1986）.

孙和生 译 陆柱家 校

辐射转移理论 [**radiative transfer theory**; **переноса излучения теория**]

利用线性动理方程或输运方程对电磁辐射，γ 射线，中子和其他基本粒子穿过物质的研究（见动理学方程（kinetic equation））.

根据已知物理定律确定大气中的辐射场以及光的散射的问题，最初是在 19 世纪 80 年代关于对白昼天空照明度的研究中予以考虑的．辐射转移的动理方程是 20 世纪开始时对于恒星大气中辐射平衡予以推导的．方程的物理意义在于依据粒子坐标和速度的相空间体元中能量，光量子数，和粒子数的平衡：

$$\frac{d\Phi}{dt}=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{\text{coll}}+S, \qquad (*)$$

其中 $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ 是粒子分布函数；$\mathbf{r}$ 是坐标，$\mathbf{v}$ 是速度，t 是时间；d/dt 是沿粒子路径的全导数；$(\partial\Phi/\partial t)_{\text{coll}}$ 是归因于与物质（中子与核的或光量子与原子的）碰撞的分布中的变率；而 S 是粒子源强度．对于电磁辐射的分布函数，它定义辐射的平均强度，其中独立变量是辐射的方向向量及其频率．用来描述粒子和光量子传播的是同样方程，因为这些动理方程具有同样物理意义，即相空间中的能量平衡．

碰撞项是一积分：

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]_{\text{coll}}=\lambda\int\Sigma_S(\mathbf{r},\mathbf{v}'\to\mathbf{v})\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v}',t)d\mathbf{v}'-$$

$$-\Sigma(\mathbf{r},\mathbf{v})\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v},t),$$

所以输运方程（动理学方程（kinetic equation））是一个积分微分方程．这里 Σ 是元碰撞中粒子与物质相互作用的总截面，而 $\Sigma_S(\mathbf{r},\mathbf{v}'\to\mathbf{v})$ 则是转移截面（转移概率），即（考虑到发生碰撞的概率的情况下）从散射前速度 $\mathbf{v}'$ 转移到之后的速度 $\mathbf{v}$ 的概率．下面是分布函数沿自由运动路径的全导数：

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi.$$

为了使解完全确定，必须规定初始条件

$$\Phi|_{t=0}=f(\mathbf{r},\mathbf{v})$$

和边界条件．在物体（方程必须在其内予以求解的空间区域）边界可以规定，例如，粒子的绝对吸收的条件

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=0,\ 对\ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})<0,$$

其中 $\mathbf{n}$ 是物体表面（边界）的外法线．还可应用更一般的边界条件，描述从边界的反射或者通过真空（对于以真空为界限的非凸物体，这是其中没有碰撞的区域）В. С. Владимиров（[1]）曾对单速和定态 $\partial\Phi/\partial t=0$ 情况下的这些方程进行过数学研究；这里单速指的是假定仅仅传播方向变化，而光量子或粒子的能量是恒定的．对于各向同性散射，这化为一个具有正核函的积分方程，对此可运用 Banach 空间中具有不变锥的

全连续算子理论．这里均匀问题具有（由碰撞积分中因子导出的）一个正本征值，它不大于任何其他本征值 λ_i 的模数，并且对应于至少一个非负本征函数（对应于 λ_1）．这个定理可以推广到各向异性散射．在许多情况下，第一本征值是简单问题，而相应本征函数在坐标和方向的相空间中几乎处处为正．

例如，当几乎处处有 $\Sigma_S(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \to \mathbf{v}) > 0$ 时，情况就是这样．

曾经求得 Hilbert-Schmidt 理论（见 **Hilbert-Schmidt 积分算子**（Hilbert-Schmidt integral operator））适用于具有各向异性散射的输运方程的条件，并且曾经建立对于具有转移概率对变量 $\mu_0 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')$ 为偶次的输运方程的新变分泛函．曾经运用新变分法研究了**球面调和函数法**（spherical harmonics, method of）中的方程，它和边界条件一起是通过将 Галеркин 直接变分法运用于输运方程而推导出来的，如果取依赖于传播方向的球谐函数乘以空间坐标的未知函数这样的线性组合作为尝试函数．变分原理容许对于球谐函数法选择最佳边界条件；这些条件以前曾是凭经验从物体边界处大量可能的线性独立条件推出的，它是两倍大（对平面几何形状）（[1]）．

在非定态情况（[2]），当研究（各向同性散射）积分方程本征值谱时，积分方程核函中出现非线性．这种情形最终导致离散谱点数目为有限（而在某些情况，例如，小块慢化剂中热中子的非定态问题，根本没有离散点），而此外有本征值的连续谱．

在有些情况，曾经获得输运方程的解析解．例如，**Wiener-Hopf 法**（Wiener-Hopf method）曾用于求解 **Milne 问题**（Milne problem）；按照输运算子的奇异本征函数展开能用来求解各种一维问题（[3]）．

工程的需要曾导致求解中子输运方程的数值方法的发展，为了计算核反应堆的临界态（具有 $\partial\Phi/\partial t = 0$ 的输运方程（*）的本征值问题）．基本方法之一是球谐函数法，然而，和其他方法一样由于收敛慢（这归因于积分方程核函中的奇点），要在计算机上实现是繁难的．见**输运方程，数值方法**（transport equations, numerical methods）．

参考文献

[1] Владимиров, В. С., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 61 (1961).

[2] Шихов, С. Б., Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ, М., 1973.

[3] Case, K. M. and Zweifel, P. F., Linear transport theory, Addison-Wesley, 1967.

[4] Соболев, В. В., Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956.

В. А. Чуянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chandrasekhar, S., Radiative transfer, Dover, reprint, 1960.

徐锡申 译

根号［**radical**; **радикал**］

数学符号 $\sqrt{\ }$（修饰的拉丁字母 r），它表示开方，即一个形如 $x^n - a = 0$ 的二项式代数方程的解．符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示这个方程的一个解．

复数域 C 上代数方程的根式求解问题就是用这个（复系数）代数方程的系数的有限次加、乘、除、乘方和开方表示方程的解．高于 4 次的方程一般不能用根式求解（见 **Galois 理论**（Galois theory））．

根号还用作表示理想的根（**根基**）（radical of an ideal）的符号．О. А. Иванова 撰 裴定一 译 赵春来 校

根基［**radical**; **радикал**］，简称根

在某些代数系统中，根基是一个与根的性质相关连的一个概念．根基的第一个例子出现于结合环理论中（详见**环与代数的根**（radical of rings and algebras）．根基的一般理论的建立是由 S. Amitsur 和 A. G. Kurosh 开始的．可以在任意具有某些必要性质的代数系统的范畴（例如多重算子群的范畴）中发展根基的理论．根基的理论中的很多问题已经在范畴论的范围内研究过．亦见**群的根**（radical of a group）；**半群类的根**（radical in a class of semi-groups）；**拟正则根**（quasi-regular radical）．

О. А. Иванова 撰 裴定一 译 赵春来 校

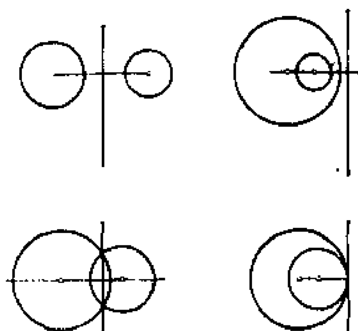
根轴［**radical axis**; **радикальная ось**］，亦称等幂轴

平面上一些点的集合，这些点相对于两非同心圆

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2 = 0$$

是具有相同幂的点（见**点的度**（degree of a point））．根轴的方程是

$$(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + (c_2 - c_1) = 0.$$



两不相交的圆的根轴是两圆外的一条直线，它垂直于两圆心的连线（有时假设同心圆的根轴是无穷远直线）．两相交圆的根轴是过两交点的直线，两相切圆的根轴是它们的公切线．对于圆心不在同一直线上的三个圆，其中每两个圆的根轴相交于同一点（**根中心**（radical centre））．　　А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gaultier, L., *J. de l'École Polytechn*, 16 (1813), 147.

[A2] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987（中译本：M. 贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991）.

[A3] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

杜小杨 译

半群类中的根（根基）[radical in a class of semi-groups; радикал в классе полугрупп]

把每个**半群**（semi-group）S 映到一个合同（见**合同（代数学中的）**（congruence (in algebra)））$\rho(S)$ 且具有下列性质的函数 ρ：1）若 S 与 T 同构且 $\rho(S)=0$（0 表示相等关系），则 $\rho(T)=0$；2）若 θ 为 S 上的合同且 $\rho(S/\theta)=0$，则 $\rho(S)\leqslant\theta$；3）$\rho(S/\rho(S))=0$．若 1）和 3）成立，则 2）等价于

$$\sup\{\rho(S),\theta\}/\theta\leqslant\rho(S/\theta)$$

对每个合同 θ 成立．半群 S 称为 ρ **半单的**（ρ-semi-simple），如果 $\rho(S)=0$．ρ 半单半群类包含单元素半群并且对同构和次直积封闭．反过来，每个具有这一性质的半群类一定是对某个根 ρ 的 ρ 半单半群类．若 $\rho(S)=S\times S$，则 S 称为 ρ **根**（ρ-radical）．与环的情形不同，在半群中根不是被相应的根类决定的．若在根的定义中仅限于考虑由理想定义的合同，那么又有根的另一个概念，此时对应的函数在每个半群中取一个**理想**（ideal）．

设 $\mathfrak{K}$ 为一个半群类，它对同构封闭并包含单元素半群，则把每个半群 S 对应到其上的所有满足 $S/\theta\in\mathfrak{K}$ 的合同 θ 的交的函数就是一个根，称为 $\rho_{\mathfrak{K}}$．类 $\mathfrak{K}$ 与 $\rho_{\mathfrak{K}}$ 半单半群类重合，当且仅当它对次直积封闭．在此情况下，$S/\rho_{\mathfrak{K}}(S)$ 是 S 的落在 $\mathfrak{K}$ 中的最大的商半群（见**仿样**（replica））．

例．设 $\mathfrak{K}$ 为有忠实的不可约表示（见**半群的表示**（representation of a semi-group））的半群的类，则

$$\rho_{\mathfrak{K}}(S)=$$

$$=\{(a,b):a,b\in S,(a,b)\in\mu(as)\cap\mu(bs)\text{ 对一切 }s\in S\cup\varnothing\},$$

其中

$$\mu(a)=\{(x,y):x,y\in S,\ a^m x=a^n y\text{ 对某 }m,n\geqslant 0\}.$$

定义在给定半群类上对同态象封闭的根已被研究过．

对每一个根 ρ 都有左多边形类 $\Sigma(\rho)$（见**多边形（幺半群上的）**（polygon (over a monoid)））．设 A 是一左 S 多边形，S 上的合同 θ 称为 A **零化的**（A-annihilating），如果 $(\lambda,\mu)\in\theta$ 蕴含对一切 $a\in A$，$\lambda a=\mu a$．所有 A 零化合同的最小上界还是一 A 零化合同，它记作 $\mathrm{Ann}\,A$．类 $\Sigma(\rho)$ 按定义由所有这样的左 S 多边形 A 组成，它满足 $\rho(S/\mathrm{Ann}\,A)=0$，$S$ 遍历所有半群的类．若 θ 为 S 上的合同，则一左 (S/θ) 多边形在 $\Sigma(\rho)$ 内，当且仅当它作为 S 多边形时也属于 $\Sigma(\rho)$．反过来，若已给定具有这些性质的左多边形类 Σ 而 $\Sigma(S)$ 为 Σ 中所有左 S 多边形的类，则函数

$$\rho(S)=\begin{cases}S\times S, & \text{若 }\Sigma(S)\text{ 为空的},\\ \bigcap\limits_{A\in\Sigma(S)}\mathrm{Ann}\,A, & \text{其他情况},\end{cases}$$

就是一个根．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semi-groups, 2. Amer. Math. Soc., 1967.

[2] Скорняков, Л. А., в кн.: Избр. вопросы алгебры и логики, Новосиб, 1973, 283－299.

[3] Clifford, A. H., Radicals in semigroups, *Semigroup forum*, 1 (1970), 2, 103－127.

[4] Roiz, E. N. and Schein, B. M., Radicals of semi-groups, *Semigroup forum*, 16 (1978), 3, 299－344.

Л. А. Скорняков 撰　李慧陵 译

群的根（根基）[radical of a group; радикал группы]

群 G 的属于某给定根类的最大的**正规子群**（normal subgroup）．一个群类称为根（radical）类，如果它在取同态象下封闭，并在"无限扩张"下封闭，就是说这个类若包含某个群的正规升列的所有的因子群，那么它也包含这个群（见**正规列**（normal series））．每个群中都有一最大的根正规子群，即**根**（radical）．群关于这个根的商群是**半单群**（semi-simple group），就是说，它只有平凡根．

根类的例子可举出所有具有以局部幂零群为因子群的次正规升列的群所组成的类．有时"根"这个术语只用来指群的最大局部幂零正规子群（在有限群里这就是幂零根或称 **Fitting 子群**（Fitting subgroup））．在有限群里最重要的根是**可解根**（solvable radical）（见**可解群**（solvable group））．对有平凡可解根的有限群有一个只用单群以及它们的自同构群的描述（见[1]）．

参考文献

[1] Курош, А. G., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 1982)

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】

[A1] Robinson, D. J. S., Finiteness conditions and generalized solvable groups, 1, Springer, 1972.

[A2] Kegel, O. H. and Wehrfritz, B. A. F., Locally finite groups, North-Holland, 1973, p. 12ff.

在 Lie 群中根是最大连通可解正规子群. 在任一 Lie 群 G 中都有根 R, 而 R 是 G 的闭的 Lie 子群. 若 H 是 G 的正规 Lie 子群, 则 G/H 为半单的(见**半单 Lie 群**(Lie group, semi-simple)), 当且仅当 $H \supseteq R$. G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的对应于根的子代数是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中的最大可解理想, 称为 $\mathfrak{g}$ 的根.

一代数群 G 的根(radical of an algebraic group), 即 G 的最大连通可解正规子群, 在 G 中总是闭的. 一线性代数群 G 的根 $R(G)$ 就是单位元在 G 的全部 **Borel 子群**(Borel subgroup)的交中的连通分支; 它是使 G/H 为半单群的最小的闭正规子群 H(见**半单代数群**(semi-simple algebraic group)). $R(G)$ 中全体幂幺元的集合 $R(G)_u$ 是 G 中的连通幂幺闭正规子群, 也是最大的连通幂幺闭正规子群. 这个子群称为 G 的幂幺根(unipotent radical), 它也可看成是 G 中最小的使 G/H 为约化群的闭正规子群 H(见**约化群**(reductive group)).

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969, p. 283ff.

[A2] Satake, I., Classification theory of semi-simple algebraic groups, M. Dekker, 1971, p. 32ff.

[A3] Varadarajan, V. S., Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall, 1974.

[A4] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

李慧陵 译

理想 A 的根(根基)[radical of an ideal; радикал идеала], 交换结合环 R 中的

所有元素 $b \in R$ 的集合, 其中 b 的某个幂含于 A. 这个集合用 $\sqrt{A}$ 表示. 它是 R 的一个**理想**(ideal); 且有 $\sqrt{A} \supset A$, $\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

这个思想的一个推广是子模的根(radical of a submodule). 设 M 是 R 上的一个**模**(module), N 是 M 的一个子模, N 的根是 R 中满足 $a^n M \subset N$ 的所有元素 a 的集合, 其中 n 为一整数(n 一般依赖于 a). 子模的根是 R 的一个理想.

О. А. Иванова 撰

【补注】 考虑商环 R/A 和自然商同态 $\pi: R \to R/A$. A 的根是 R/A 的幂零根(见**幂零理想**(nil ideal))的逆像.

根理想(radical ideal)一词有时用来表示一个理想, 这个理想与它的根相等.

设 k 为代数闭域. 对 $R = k[X_1, \cdots, X_n]$ 的每个理想 A, 引进相应的代数集 $V(A) \subset k^n$, $V(A) = \{a = (a_1, \cdots, a_n) \in k^n : f(a) = 0$, 对所有 $f \in A\}$. Hilbert 零点定理(Hilbert Nullstellensatz)提出, $\{g \in R: g(x) = 0$, 对所有 $x \in V(A)\} = \sqrt{A}$. 因而在此意义下存在根理想和代数集之间的一一对应.

对于**仿射概形**(affine scheme) Spec(R) 的情况, 上述对应取下列形式. 对 R 的每个理想 A, 引进闭子空间 $\mathrm{Spec}(R/A) = V(A) = \{\mathfrak{p}: \mathfrak{p} \supset A$, $\mathfrak{p}$ 是素理想$\}$. 反之, 对 Spec(R) 的每个闭子空间 V, 引进理想 $I(V) = \{f \in R$: 对所有的 $\mathfrak{p} \in V$ 有 $f \in \mathfrak{p}\}$. 由于 $\sqrt{A}$ 是包含 A 的所有素理想之交, 所以依然有 $I(V(A)) = \sqrt{A}$, 同样地, I 和 V 建立了根理想与 Spec(R) 的闭子空间之间的一一对应. 这个对应与上述零点定理所建立的对应的差别在于, 零点定理只考虑形如 $(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$ 的素理想.

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, II, Wiley, 1977, Sects. 11.2, 11.10.

[A2] Grothendieck, A., Eléments de géométrie algébrique. I. Le language des schémas, *Publ. Math. IHES*, **20**(1960), 80.

裴定一 译 赵春来 校

环与代数的根(根基)[radical of rings and algebras; радикалы колец и алгебр]

最早出现于 20 世纪初的有限维代数的经典的结构理论中的概念. 最初, 根被取为有限维结合代数的最大的**幂零理想**(nilpotent ideal). 根为零的代数(称为半单的(semi-simple))在经典理论中已得到完全刻画: 任一半单的有限维结合代数都是适当的域上的单矩阵代数的直和. 后来, 证明了在满足左(或右)理想的极小条件的环和代数, 即 Artin 环和代数(见 **Artin 环**(Artinian ring))中存在最大的幂零根理想, 并且 Artin 半单环和代数的刻画与有限维半单代数的刻画是吻合的. 在同一时期人们发现, 根以及最大幂零理想或最大可解理想在许多类有限维非结合代数(交错代数, Jordan 代数, Lie 代数等)中都可被定义. 在这里, 像结合的情形一样, 半单代数被证明也是某些特殊形式的单代数的直和.

在无限维的情形下, 最大的幂零理想不一定存在. 与此事实相关的是出现了经典的理想的众多不同的推广: Baer 根, Jacobson 根, Левицкий 根, Köthe 根等等. 其中最常用到的是 **Jacobson 根**(Jacobson ra-

dical)(亦见拟正则根(quasi-regular radical)). 与经典的根在某种意义下相反的根的概念也已被引入. 例如, 所有典型半单环(classical semi-simple ring)(即全矩阵环的直和)在正则 von Neumann 根的意义下都是根, 而且对于幂等 Baer 根都是可传的. 根的一般理论最初是由 S. Amitsur([1]) 和 A. Г. Курош([2]) 构造的.

根的一般理论. 在本节中将仅考虑代数(任一确定的有幺元的交换的结合环上的). 任一环都是这种代数的特殊情形. 如果没有特别的声明, 代数的理想总是指双边理想.

设 $\mathfrak{A}$ 是代数的一个类, 它在取理想和同态像之下是封闭的, 即此类中包含着其中任一代数的理想及同态像. 设 r 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个代数可能具有或不具有的一个抽象性质. 具有性质 r 的代数称作 r 代数(r-algebra). 一个代数的理想 I 称作 r 理想(r-ideal), 如果 I 是 r 代数. 一个代数称作 r 半单的(r-semi-simple), 如果它没有非零的 r 理想. 称 r 是类 $\mathfrak{A}$ 的一个根性质(radical property), 或称在 $\mathfrak{A}$ 中给定了一个根(radical)(在 Курош 的意义下), 如果下述性质被满足:

a) r 代数的同态像仍是 r 代数;

b) $\mathfrak{A}$ 的每个代数 A 有最大的 r 理想, 即包含此代数的任一 r 理想的 r 理想; 这个极大的 r 理想称作 A 的 r 根(r-radical), 记为 $r(A)$;

c) 商代数 $A/r(A)$ 是 r 半单的.

若一个代数与它的根相同, 则称之为根代数(radical algebra). 对于任一代数类以及任一根, $\{0\}$ 是同时为根代数和半单代数的唯一代数. 任一半单代数集合的子直积仍是半单的.

与每个根 r 相关联的有 $\mathfrak{A}$ 中的两个代数子类: 所有 r 根代数组成的类 $\mathscr{R}(r)$ 和所有 r 半单代数组成的类 $\mathscr{S}(r)$. 对于 $\mathfrak{A}$ 中的任一代数 A, 可以用这两个子类中的任一个给出根 $r(A)$, 即

$$r(A)=\sum\{I: I \text{ 是 } A \text{ 的理想}, I\in\mathscr{R}(r)\};$$

$$r(A)=\bigcap\{I: I \text{ 是 } A \text{ 的理想}, A/I\in\mathscr{S}(r)\}.$$

一个代数是 r 根代数当且仅当它不能被同态映到一个非零 r 半单代数上.

对于 $\mathfrak{A}$ 上任一根, 都已知关于一个代数子类是所有根代数组成的类或是所有半单代数组成的类的充分必要条件. 这两个子类通常分别称为根子类(radical subclass)以及半单子类(semi-simple-sub-class).

根类在包含关系下的偏序诱导出 $\mathfrak{A}$ 上的全部根构成的类上的偏序. 即, 如果 $\mathscr{R}(r_1)$ 包含 $\mathscr{R}(r_2)$ (此时亦有 $\mathscr{S}(r_1)$ 包含 $\mathscr{S}(r_2)$), 就认为 $r_1\leqslant r_2$.

对于 $\mathfrak{A}$ 的每个子类 M, 所谓由 M 生成的下根类(lower radical class) $l(M)$ 是指包含 M 的最小的根类, 与之相应的根称作 M 决定的下根(lower radical). 由 M 决定的上根类(upper radical class) $u(M)$ 是使得 M 中的任一代数皆为半单代数的根所对应的根类中的最大者(此根称作 M 决定的上根(upper radical)). 对于任一个类 M, 下根类 $l(M)$ 总是存在的. 如果 $\mathfrak{A}$ 是结合代数的一个类, 则任一子类也有上根. 在非结合的情形上根则不一定存在. 已经知道关于 M 的若干充分条件, 在这些条件下 M 的上根存在. 特别地, 任一仅由单代数构成的类满足这些条件.

对于任一根, 单代数或是根代数或是半单代数. 于是, 相应于每一个根 r, 单代数的类被划分为两个不相交的类: r 半单代数的类 S_1, 或上类(upper class)和 r 根代数的类 S_2, 或下类(lower class). 根 r 被称作对应于此划分. 反之, 将单代数类任意划分为两个不相交的类, 其中之一 S_1 称作上类, 另一个 S_2 称作下类, 则存在一个根与这个给定的划分相对应. 有 S_1 决定的上根 r_1 以及 S_2 决定的下根 r_2; 根 r_1 和 r_2 分别称作单代数类的这个给定的划分的上根和下根(upper and lower radical of the given partition). 对于任一对应于单代数类的同一划分的根 r, 总有 $r_1\geqslant r\geqslant r_2$. 在全体结合代数构成的类中, 对于单代数的任一划分, 总有 $r_1>r_2$. 在域上的有限维结合代数的情形, 经典的根对应于下类为空集的单代数的划分; 进而言之, 与此划分相对应的非平凡的根是唯一存在的.

遗传根(hereditary radicals). 在类 $\mathfrak{A}$ 中一个根 r 称为理想遗传根(ideally hereditary radical)或扭根(torsion radical), 如果对于这个类中的代数 A 的任一理想 I, 都有 $r(I)=r(A)\cap I$. 理想遗传根也就是使得 $\mathscr{R}(r)$ 和 $\mathscr{S}(r)$ 在取理想之下封闭的根. 一个根 r 称为遗传的(hereditary), 如果 $\mathscr{R}(r)$ 在取理想之下是封闭的. 在结合代数以及交错代数类中每个遗传根都是扭的. 一个根 r 称为严格遗传的(strictly hereditary), 如果 $\mathscr{R}(r)$ 在取子代数下是封闭的.

所有扭根构成的类是一个完全分配"格"(见分配格(distributive lattice)); 这里使用引号的原因是: 此"格"的元素的全体不是一个集合, 而是一个类.

在所有扭根构成的类中可以特别区分出两个相反的子类: 超幂零扭根(super-nilpotent torsion radical), 即使得全体具有零乘法的代数都是 r 根代数的扭根 r, 所组成的类, 以及子幂等扭根(sub-idempotent torsion radical), 即使得全体具有零乘法的代数皆为 r 半单代数的扭根 r(于是所有 r 根代数都是幂等的), 所组成的类. 超幂零根的一个重要的特别的情形是特殊根(special radical), 即使得所有 r 半单代数都能分解为准素 r 半单代数的子直和的扭根. 存在着超幂零的非

特殊根（见[5]、[7]）.

结合环类中的根．设 $\mathfrak{A}$ 是全体结合环组成的类，并定义：

φ——具有零乘法的全体单环的类决定的下根；

β（下 Baer 根（lower Baer radical））——全体幂零环的类决定的下根；全体准素环的类决定的上根；最小的特殊根；等于环的全体素理想的交；

$\mathcal{L}$（Levitzki 根（Levitzki radical））——全体局部幂零环的类决定的下根；等于环的全体局部幂零理想的和并且包含此环的每个单边幂零理想；

$\mathcal{K}$（上诣零根（upper nil radical）或 Köthe 根（Köthe radical））——全体诣零环的类决定的下根；

$\mathcal{J}$（Jacobson 根（Jacobson radical））——全体本原环的类决定的上根；等于环的全体本原理想的交，也等于全体模极大右（左）理想的交，它是包含全体拟正则右（左）理想的拟正则理想；

$\mathcal{T}$（Brown-McCoy 根（Brown-McCoy radical））——全体有幺元的单环的类决定的上根．它与它自身的划分的上根重合；等于环的全体极大模理想的交；

τ——域上的全体矩阵环的类决定的上根；

$\mathcal{A}$（广义诣零根（generalized nil radical）——全体无零因子的环的类决定的上根；

F——全体域的类决定的上根．

在结合环类中有严格不等式：

$$\varphi<\beta<\mathcal{L}<\mathcal{K}<\mathcal{J}<\mathcal{T}<\tau<F,$$
$$\mathcal{K}<\mathcal{A}<F.$$

在具有极小条件的环的类中上述前 7 个根都相同，并且对应于经典的根．如果根 r 诱导出具有极小条件的环的类上的根，则有 $\varphi<r<\tau$．对于具有极大条件的环有 $\beta=\mathcal{L}=\mathcal{K}$．对于交换环有 $\mathcal{J}=\mathcal{T}=\tau=F$，$\beta=\mathcal{L}=\mathcal{K}=\mathcal{A}$．根 β，$\mathcal{L}$，$\mathcal{K}$，$\mathcal{J}$，$\mathcal{T}$，τ，$\mathcal{A}$，F 都是特殊根．根 φ，β，$\mathcal{L}$ 对应于单环的相同的划分，而 $\mathcal{J}$，$\mathcal{T}$，τ，$\mathcal{A}$，F 对应于其他的两两不同的划分．

参考文献

[1A] Amitsur, S. A., A general theory of radicals Ⅰ. Radical in complete lattices, *Amer. J. Math.*, 74(1952), 774 – 786.

[1B] Amitsur, S. A., A general theory of radicals Ⅱ. Radicals in rings and bicategories, *Amer. J. Math.*, 76(1954), 100 – 125.

[1C] Amitsur, S. A., A general theory of radicals Ⅲ. Applications, *Amer. J. Math.*, 76(1954), 126 – 136.

[2] Курош А. Г., 《Матем сб.》, 33(1953), 1, 13 – 26.

[3] Divinsky, N., Rings and radicals, Allen & Unwin, 1965.

[4] Artin, E., Nesbitt, C. J. and Thrall, R. M., Rings with minimum condition, Univ. Michigan Press, Ann Arbor, 1946.

[5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1967, М., 1969 28 – 32.

[6] Кольца, т. 2, Новосиб., 1973, 3 – 6.

[7] Андрунакиевич, В. А., Рябухин, Ю. М., Радикалы алгебр и структурная теория, М. 1979.

[8] Жевлаков, К. А., Слинько, А. М., Шестаков, И. П., Ширшов, А. И., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978.

В. А. Андрунакиевич 撰 赵春来 译

在 Lie 代数的类中，根（radical）是最大可解理想，即包含所给的 Lie 代数的全部可解理想的可解理想 $\mathfrak{r}$（见可解群（solvable group））．在有限维 **Lie 代数**（Lie algebra）$\mathfrak{g}$ 中也存在最大**幂零理想**（nilpotent ideal）$\mathfrak{n}$（有时称作诣零根（nil radical）），它同于由幂零元组成的最大的理想，也同于满足下述条件的元素 $x\in\mathfrak{g}$ 组成的集合：伴随算子 $\operatorname{ad}x$ 包含在由伴随 Lie 代数 $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ 生成的 $\mathfrak{g}$ 的线性变换结合代数的根之中．人们也考虑 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零根（nilpotent radical）$\mathfrak{s}$——满足下述条件的 $x\in\mathfrak{g}$ 组成的集合：对于 $\mathfrak{g}$ 的任意不可约有限维线性表示 σ，都有 $\sigma(x)=0$．幂零根也与在 $\mathfrak{g}$ 的任一有限维线性表示下表现为幂零算子的最大的理想相同．这里有 $\mathfrak{r}\supseteq\mathfrak{n}\supseteq\mathfrak{s}$．如果基域的特征为 0，则 是使得 $\mathfrak{g}/\mathfrak{i}$ 为约化 Lie 代数（见**约化 Lie 代数**，（Lie algebra, reductive））的最小的理想 $\mathfrak{i}\subset\mathfrak{g}$．在这种情形下，幂零根与 $\mathfrak{r}$ 有下述关系：

$$\mathfrak{s}=[\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}]=[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}]\cap\mathfrak{r};$$

$\mathfrak{g}$ 的任一微分将 $\mathfrak{r}$ 变成 $\mathfrak{n}$，将 $\mathfrak{s}$ 变成 $\mathfrak{s}$．不过，诣零根和幂零根并不是环与代数的一般理论意义下的根．

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962.

[2] Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie 1954/55, Sem. S. Lie, Secr. Math. Univ. Paris, 1955.

[3] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann, 1960, Chapt. 1: Algèbres de Lie.

赵春来 译 冯绪宁 校

半径[radius; радиус]，圆的或球面的

连接圆上（或球面上）一点与圆心（或球心）的线段．这个线段的长度也称为半径． БСЭ-3

【补注】关于曲线、曲面、高维微分几何对象的曲率半径（radius of curvature），例如见**曲率**（curvature）和**微分几何学**（differential geometry）.

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1, 1987(中译本：M. 贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991)

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

杜小杨 译

径向量 [**radius vector**; **радиус-вектор**]，空间中一点的从预先固定的称之为原点（origin）的某一点到该点的向量．

БСЭ-3 撰

【补注】 径向量亦称为位置向量（position vector）．

如果给定了通过原点的基方向为 V_1，…，V_n 的一组坐标轴，那么位置向量关于这个**仿射坐标系**（affine coordinate system）的第 i 个坐标由因数 x_i 决定，使得 $x_i v_i$ 是位置向量在第 i 个坐标轴上沿其余方向的平行投影．

潘养廉 译

Radon 积分 [**Radon integral**; **Радона интеграл**]

关于 **Radon 测度**（Radon measure）的积分．

М. И. Войцеховский 撰

Radon 测度 [**Radon measure**; **Радона мера**]，内正则测度（inner regular measure）

定义在拓扑空间 X 的 Borel σ 代数 $\mathscr{B}(X)$ 上的一种有限测度 μ（见**拓扑向量空间中的测度**（measure in a topological vector space）），具有下述性质：对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个紧集 $K=K_\varepsilon\subseteq X$，使得 $\mu(X\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon$．这是 J. Radon（1913）引入的概念，最初的构想源于 σ 代数 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$——空间 $\mathbf{R}^n(n=1,2,\cdots)$ 的 Borel σ 代数——上的测度．称拓扑空间 X 为 Radon 空间（Radon space），如果定义在 σ 代数 $\mathscr{B}(X)$ 上任一有限测度是 Radon 测度．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Eléments de mathématiques. Intégration, Hermann, 1963, Chapts, 6－8.

[2] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

Р. А. Минлос 撰

【补注】 任一 Radon 测度是胎紧的（tight）（也称为内正则的（inner regular））：对 X 的任一 Borel 子集 B，有

$$\mu(B)=\sup\{\mu(K):K\subseteq B,\ K\text{ 是紧集}\}.$$

如果 $\mathscr{B}(X)$ 是可数生成的，那么 X 是 Radon 空间，当且仅当它是 Borel 同构于 $[0,1]^N$（或任一其他非列紧的可度量化空间）的一个普遍可测子集．特别地，任一 Polish 空间（Polish space）或更一般在 Bourbaki 意义下的 Суслин 空间（Suslin space）都是 Radon 的．

还可以定义非有限（非负）的 Radon 测度，它们是胎紧的且在紧子集上取有限值．如果 X 有一个可数基，那么它们是 σ 有限的．

按 N. Bourbaki 的说法（以及回顾 W. H. Young 和引用 Vallée-Poussin 的思想），局部紧空间 X 上的一个（非负的）Radon 测度是指、定义在具紧支集的连续函数组成的空间 $\mathscr{K}_C(X)$（赋予自然归纳拓扑）上的一个（非负的）连续线性泛函．借助于 Riesz-Марков 定理（Riesz-Markov theorem，论述 X 是紧的情形），可以证明，在这一意义下，任一非负有界 Radon 测度是关于唯一（有限）Radon 测度（如上述文献中所定义者）的积分在 $\mathscr{K}_C(X)$ 上的限制．反之亦真且是平凡的．

周民强 译

Radon-Nikodým 定理 [**Radon-Nikodým theorem**; **Радона-Никодима теорема**]

关于某测度 μ 绝对连续的一个负荷（charge）ν 有关于 μ 的密度 $p=d\nu/d\mu$ 且 p 关于此测度 μ 是可和的．它是由 J. Radon（[1]）和 O. M. Nikodým（[2]）建立的．更确切地说，在一可测空间 $(X,\mathfrak{B})$ 上，其中 $\mathfrak{B}$ 是 X 的子集的一个 σ 代数，设给定了一个负荷 v，即一个给定在 $\mathfrak{B}$ 上的可数加性实或复函数，和一个 σ 有限测度 μ，此外，又设 ν 关于 μ 是绝对连续的．则存在一个函数 $p(x)$，$x\in X$，关于 μ 可和，使得对任何集合 $A\in\mathfrak{B}$，

$$\nu(A)=\int_A p(x)d\mu(x).$$

函数 p 是唯一的（除了在 μ 测度为零的集合上的修改外），且称为负荷 ν 关于测度 μ 的密度（density of the charge）．这定理可推广到负荷在某向量空间中取值的情形（见[4]）．

参考文献

[1] Radon, J., Ueber linear Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen, *Sitzungsber. Acad. Wiss. Wien*, **128**（1919），1083－1121.

[2] Nikodým, O. M., Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, *Fund. Math.*, **15**（1930），131－179.

[3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators General theory, 1, Interscience, 1958.

[4] Diestel, J. and Uhl, J., Vector measure, Amer. Math. Soc., 1977.

Р. А. Минлос 撰

【补注】"负荷"这概念在西方未被确认；通常称"带号测度"（见负荷）．密度 $\rho=d\mu/d\nu$ 也有确定定义，如果 ν 是（非负）测度的级数和；在这种情况 p 及该积分可取值 $+\infty$．

如果 μ 不满足同样的有限性条件，则该定理不真；透彻的讨论和富于启发性的例子，见[A1]，§19．

关于该定理推广到向量测度（和与 Banach 空间几何学的关系）见**向量测度**（vector measure）.

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

葛显良 译 吴绍平 校

Radon 变换 [Radon transform; Радона преобразование]

多变量函数的与 **Fourier 变换**（Fourier transform）有关的一种积分变换. 它是由 J. Radon 引入的（见[1]）.

设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是实变量 $x_i \in \mathbf{R}^1$ 的一个连续函数，在无穷处充分地急减，$i=1, \cdots, n$, $n=1, 2, \cdots$.

对 $\mathbf{R}^n$ 中任何超平面

$$\Gamma = \{(x_1, \cdots, x_n): \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = C\},$$

$$\xi_i \in \mathbf{R}^1, \ i = 1, \cdots, n,$$

且

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 > 0, \ C \in \mathbf{R}^1,$$

定义以下积分:

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_n; C) = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right]^{1/2}} \int_{\Gamma} f(x_1, \cdots, x_n) d V_{\Gamma},$$

其中 V_{Γ} 是超平面 Γ 中 Euclid $(n-1)$ 维体积. 函数

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_n; C), (\xi_1, \cdots, \xi_n, C) \in \mathbf{R}^{n+1},$$

称为函数 f 的 Radon 变换. 它是其变量的 -1 次齐次函数

$$F(\alpha\xi_1, \cdots, \alpha\xi_n; \alpha C) = \frac{1}{|\alpha|} F(\xi_1, \cdots, \xi_n; C),$$

且由公式

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_n; C) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(\alpha\xi_1, \cdots, \alpha\xi_n) e^{-i\alpha C} d\alpha$$

与 f 的 Fourier 变换 $\widetilde{f}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $\xi_i \in \mathbf{R}^1$ 相联系. Radon 变换与从函数在空间 $\mathbf{R}^n$ 的所有超平面上计算的积分值去还原该函数 f 的问题直接相联系，该问题可追溯到 Radon（即 Radon 变换反演问题）.

参考文献

[1] Radon, J., Ueber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad.*, **69** (1917), 262–277.

[2] Гельфанд, И. М., Граев, М. И., Виленкин, Н. Я., Интегральная геометрия ..., М., 1962（英译本: Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 5. Integral geometry and representation theory, Acad. Press, 1966）

P. A. Минлос 撰

【补注】 关于 Radon 变换深远的推广到齐性空间，见[A3].

Radon 变换以及特别是相应的反演公式（即从函数 f 的 Radon 变换还原 f 的公式）在**断层照相法**（tomography）中具有最关键的重要性.

参考文献

[A1] Deans, S. R., The Radon transform and some of its applications, Wiley, 1983.

[A2] Helgason, S., The Radon transform, Birkhaüser, 1980.

[A3] Helgason, S., Groups and geometric analysis, Acad. Press, 1984.

葛显良 译 吴绍平 校

Ramanujan 函数 [Ramanujan function; Рамануджана функция]

函数 $n \to \tau(n)$, $\tau(n)$ 是乘积

$$D(x) = x \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{24}$$

的幂级数展开式

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n$$

中的 $x^n (n \geqslant 1)$ 的系数. 若令

$$\Delta(z) = D(e^{2\pi i z}), \ \operatorname{Im} z > 0,$$

则 Ramanujan 函数就是 S. Ramanujan（[1]）所首先研究的尖形式 $\Delta(z)$ 的第 n 个 Fourier 系数. Ramanujan 函数的某些值为: $\tau(1)=1$, $\tau(2)=-24$, $\tau(3)=252$, $\tau(4)=-1472$, $\tau(5)=4830$, $\tau(6)=-6048$, $\tau(7)=-16744$, $\tau(30)=9458784518400$. Ramanujan 猜测 Ramanujan 函数有下列性质成立:

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n), \text{ 若 } (m, n) = 1;$$

$$\tau(p^{n+1}) = \tau(p^n)\tau(p) - p^{11}\tau(p^{n-1}), \text{ 若 } p \text{ 是素数}, n \geqslant 1.$$

这后来为 L. J. Mordell 所证明. 这样，$\tau(n)$ 的计算就被归结为 $\tau(p)$ 的计算，p 是素数. 已知 $|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$（见 **Ramanujan 假设**（Ramanujan hypothesis））. 还知道 Ramanujan 函数满足许多同余关系式. 例如，Ramanujan 已经知道

$$\tau(p) \equiv 1 + p^{11} \pmod{691}.$$

后来所发现的同余关系式，例如有

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{2^{11}}, \text{ 若 } n \equiv 1 \pmod 8;$$

$$\tau(p) \equiv p + p^{10} \pmod{25},$$

等等.

参考文献

[1] Ramanujan, S., On certain arithmetical functions, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **22** (1916), 159 – 184

[2] Serre, J.-P., Une interpretation des congruences relatives à la function τ de Ramanujan, Sém. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des nombres) 9 (1967/68), 14, 1 – 17

[3] Фоменко, О. М., в кн.: Итоги науки и техники, Алгебра. Топология. Геометрия, М., **15** (1977), 5 – 91.

К. Ю. Булота 撰

【补注】 迄今(1996)还不知道是否存在 $n\in\mathbf{N}$ 使 $\tau(n)=0$. 可以相信答案将是"否". 关于 $\Delta(z)$ 的基本背景知识可见[A1].

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Modular functions and Dirichlet series in number theory, Springer-Verlag, 2nd, 1990.

潘承彪 译 朱尧辰 校

Ramanujan 假设 [Ramanujan hypothesis; Рамануджана гипотеза], Ramanujan 猜想 (Ramanujan conjecture)

S. Ramanujan ([1]) 提出的一个假设: 函数 Δ (权为 12 的尖形式) 的 Fourier 系数满足不等式

$$|\tau(p)|\leqslant 2p^{11/2},\ p \text{ 是素数}.$$

$\tau(n)$ 也称为 **Ramanujan 函数** (Ramanujan function). 函数 Δ 是 Hecke 算子的特征函数, $\tau(n)$ 是相应的特征值. H. Petersson 把 Ramanujan 假设推广到权为 k (k 是大于 1 的整数) 的模形式的 Hecke 算子的特征值的情形 (Petersson 猜想 (Petersson conjecture)). P. Deligne (见 [2]) 把 Petersson 猜想归结为 Weil 猜想 (见 ζ 函数 (zeta-function)), 并证明了后者 (1974), 这也就证明了 Ramanujan 假设.

参考文献

[1] Ramanujan, S., On certain arithmetical functions, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **22** (1916), 159 – 184.

[2] Deligne, P., La conjecture de Weil I, *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 273 – 307.

[3] Фоменко, О. М., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, М., **15** (1977), 5 – 91.

К. Ю. Булота 撰

【补注】 亦见**同余方程** (congruence equation).

参考文献

[A1] Katz, N. M., An overview of Deligne's proof of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, in F. E. Browder (ed.): Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 28, Amer. Math. Soc., 1976, 275 – 305.

潘承彪 译 朱尧辰 校

Ramanujan 和 [Ramanujan sums; Рамануджана суммы]

依赖两个整数参数 k 和 n 的三角和

$$c_k(n)=\sum_h \exp\left(\frac{2\pi n h i}{k}\right)=\sum_h \cos\frac{2\pi n h}{k},$$

此处 h 遍历小于 k 且与 k 互素的所有非负整数. Ramanujan 和的基本性质是它关于指数 k 是积性的:

$$c_{kk'}(n)=c_k(n)c_{k'}(n),\ 当 (k,k')=1;$$

以及利用 **Möbius 函数** (Möbius function) μ 的表示式:

$$c_k(n)=\sum_{d|(k,n)}\mu\left(\frac{k}{d}\right)d.$$

当 k 或 n 是有限时, Ramanujan 和是有限的. 特别是, $c_k(1)=1$.

许多定义在自然数上的积性函数 (见**积性算术函数** (multiplicative arithmetic function)) 可以表为 Ramanujan 和的级数, 反之, 由 Ramanujan 和的基本性质能求出形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_k(qn)}{n^s}f(n),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(qn)}{k^s}f(k)$$

的级数和, 其中 f 是积性函数而 q 是整数. 特别是,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(n)}{n^s}=\frac{\sigma_{1-s}(n)}{\zeta(s)},$$

此处 ζ 是 **Riemann ζ 函数** (zeta-function), $\sigma_a(n)$ 则是 n 的除数的 a 次幂的和. 这类和与数论中某些加性问题的特殊级数紧密相关 (见**加性数论** (additive number theory)); 例如, 表自然数为偶数个平方和. S. Ramanujan ([1]) 得到许多含有 Ramanujan 和的公式.

参考文献

[1] Ramanujan, S., On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **22** (1918), 259 – 276. (Also: Collected papers, Chelsea, reprint, 1962).

[2] Hardy, G. H., Note on Ramanujan's trigonometrical function $c_q(n)$ and certain series of arithmetical functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **20** (1920 – 1921), 263 – 271.

[3] Hardy, G. H., et al (eds.), Collected papers of S. Ramanujan, Chelsea, reprint, 1962.

[4] Volkmann, B., Verallgemeinerung eines Satzes von Maxfield, *J. Reine Angew. Math.*, **271** (1974), 203 – 213.

[5] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, 1951.

[6] Левин, В. И., в кн., Историко-математические

исследования, М., 13 (1960).

К. Ю. Булота 撰 戚鸣皋 译 潘承彪 校

分歧素理想 [ramified prime ideal; критический идеал]

Dedekind 环 (Dedekind ring) A 中的**素理想** (prime ideal), 它能整除有限**可分扩张** (separable extension) K/k 的判别式, 其中 k 为 A 的分式域. 这样的理想是在扩张 K/k 中分歧的所有的理想. 设 B 是 A 在域 K 中的整闭包, 如果 A 的素理想 $\mathfrak{p}$ 在 B 中的分解式为

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{p}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{p}_s^{e_s},$$

其中 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_s$ 是 B 的素理想, 当 $e_1,\cdots,e_s$ 中至少一个大于 1 时, 则称 $\mathfrak{p}$ 在 K/k 中是分歧的 (ramified). e_i 称为 $\mathfrak{p}_i$ 在 $\mathfrak{p}$ 上的分歧指数 (ramification index).

如果 K/k 是 **Galois 扩张** (Galois extension), Galois 群为 $G(K/k)$, 则 $e_1=\cdots=e_s$. 并且 e_i 恰是 $\mathfrak{p}_i$ 在 $G(K/k)$ 中的惯性子群 (inertia subgroup) $T(\mathfrak{p}_i)$ 的阶, 其中

$$T(\mathfrak{p}_i)=\{\sigma\in G(K/k):\sigma a-a\in\mathfrak{p}_i,\ 对任意\ a\in B\}.$$

另外, 更精细地刻画, 分歧的特征可由如下定义的高次分歧群 (higher ramification groups) $T(\mathfrak{P}_i)_n\subset T(\mathfrak{P}_i)$ $(n=1,2,\cdots)$ 给定:

$$T(\mathfrak{P}_i)_n=\{\sigma\in G(K/k):\sigma a-a\in\mathfrak{P}_i^{n+1},\ 对任意\ a\in B\}.$$

令 $A=\mathbf{Z}$. 由 Minkowski 定理 (Minkowski theorem), 对有理数域 $\mathbf{Q}$ 的任意有限扩张, 都存在分歧素理想. 这个结论对任意代数数域并不成立: 如果域 k 的类数 $h>1$, 即有非平凡的理想类群, 则存在 k 上的非分歧扩张 (unramified extensions), 即没有分歧素理想的扩张. 域 k 上的 Hilbert 类域就是这样的扩张的例子. 例如 $\mathbf{Q}(\sqrt{5},\sqrt{-5})$ 是 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ 的 Hilbert 类域, 它在 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ 上不分歧.

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972 (英译本: Borevich, Z. I and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1987).

[2] Cassels, J. W. S and Fröhlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

[3] Lang, S., Algebraic number theory, Addison-Wesley, 1970.

Л. В. Кузьмин 撰 裴定一 译 赵春来 校

Ramsey 定理 [Ramsey theorem; Рамсея теорема]

由 F. P. Ramsey 提出并证明的离散数学中几个定理的名称 ([1]).

Ramsey 提出的这些定理中的第一个如下: 设 Γ 是一个无穷类并且 μ 和 r 是正整数; 设 Γ 的所有具有 r 个元素的子类, 换言之, Γ 的所有 r 元组, 按某种方式分离为 μ 个不相交类 C_i, $i=1,\cdots,\mu$, 使得每一个 r 元组是一类且仅是一类 C_i 的一个元素; 那么由**选择公理** (axiom of choice), 类 Γ 必定包含一个无穷子类 Δ, 使得 Δ 的所有 r 元组属于同一类 C_i. Ramsey 定理的有限模拟 (finite analogue), 也是由 Ramsey 建立的, 并且可以描述如下:

设 S 是 N 个元素的集合, T 是 S 的恰好 r 个元素的所有子集的族. 设族 T 被划分为 t 个(不相交的)子族 $T_1,\cdots,T_t$, 并设 $q_1,\cdots,q_t$ 和 r 是整数且对 $i=1,\cdots,t$ 有 $q_i\geqslant r\geqslant 1$. 那么存在一个仅依赖于 $q_1,\cdots,q_t$ 和 r 而不依赖于 S 的最小数 $n(q_1,\cdots,q_t,r)$, 使得如果 $N\geqslant n(q_1,\cdots,q_t,r)$, 则对某个 i, $i=1,\cdots,t$, 存在 S 的 q_i 个元素的子集 A_i, 使得它的所有 r 子集都在 T_i 里 (这个定理的证明也包含在 [2], [3] 中).

后一定理可以用一个例子来说明, 例中的数 $n(3,3,2)$ 将被算出. 考察平面上六个点, 每一对点之间连一条边, 每一条边染成红色或蓝色, 那么存在三个点, 它们之间的连边同色. 连接某一点 P_0 到其余五个点的五条边有三条边同色 (例如, 红色). 令这些边为 P_0P_1, P_0P_2, P_0P_3. 如果边 P_1P_2, P_1P_3 和 P_2P_3 中有一条是红色的, 那么它与 P_0 到它的两个端点的那两条边构成一个红色三角形. 如果它们都是蓝色, 则它们自身就构成一个蓝色三角形. 这就意味着 $n(3,3,2)\leqslant 6$. 但是, 对平面上五个点, 可用红边或蓝边连接每一对点, 使得没有单色三角形出现. 为此, 让边 P_1P_2, P_1P_3, P_2P_4, P_3P_5 和 P_4P_5 是红色, 而其余的边是蓝色即可. 这说明 $n(3,3,2)>5$. 因此 $n(3,3,2)=6$.

Ramsey 定理蕴含下述结果: 对给定整数 $n\geqslant 3$, 存在一整数 $N=N(n)$, 使得平面上任意 N 个点中任何三个点不在同一直线上, 那么存在 n 个点构成一个凸 n 边形 (见 [4]).

参考文献

[1] Ramsey, F. P., On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 30 (1930), 264–285.

[2] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Math. Assoc. Amer., 1963 (中译本: H. J. 赖瑟, 组合数学, 科学出版社, 1983).

[3] Hall, M., Combinatorial theory, Blaisdell, 1967.

[4] Erdös, P. and Szekeres, G., A combinatorial problem in geometry, Compos. Math., 2 (1935), 463–470.

[5] Erdös, P. and Rado, R., A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc., 62 (1956), 427–489.

М. П. Минеев 撰

【补注】 当今 Ramsey 型定理的研究已发展成为组合数学的一个独立分支，称为 Ramsey 理论（Ramsey theory）.

参考文献

[A1] Graham, R. L., Rothschild, B. L. and Spencer, J. H., Ramsey theory, Wiley, 1980.

[A2] Erdos, P., Hajnal, A., Mate, A. and Rado, R., Combinatorial set theory: partition relations for cardinals, North-Holland, 1984.

【译注】

参考文献

[B1] Second edition of [A1], 1990.

[B2] Nešetřil, J. and Rodl, V. (eds), Mathematics of Ramsey theory, Springer, 1990.

[B3] Prömel, H. J. and Voigt, B., Aspects of Ramsey theory, Springer, 1991.

刘振宏 译 李 乔 校

随机分配 [**random allocation**; **случайные размещения**]

把 n 个粒子随机分配到 N 个单元的一种概率模型. 在最简单的概型中，粒子是等可能且彼此独立地被分配的，因此每个粒子可以以概率 $1/N$ 落到任一确定的单元. 令 $\mu_r=\mu_r(n,N)$ 为分配后恰有 r 个粒子的单元数，又设 $0\leq r_1<\cdots<r_s$. 其母函数

$$\Phi(z;x_1,\cdots,x_s)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1,\cdots,k_s=0}^{\infty}\frac{N^n z^n}{n!}\times$$

$$\times\mathrm{P}\{\mu_{r_1}=k_1,\cdots,\mu_{r_s}=k_s\}x_1^{k_1}\cdots x_s^{k_s}$$

有如下形式：

$$\Phi(z;x_1,\cdots,x_s)=$$

$$=\left[e^z+\frac{z^{r_1}}{r_1!}(x_1-1)+\cdots+\frac{z^{r_s}}{r_s!}(x_s-1)\right]^N. \tag{1}$$

母函数(1)可用来计算 μ_r 的矩以及研究其分布当 n，$N\to\infty$ 时的渐近性质. 这些渐近性质很大程度上是由参数 $\alpha=n/N$——一个单元中粒子的平均数的性态所确定的. 如果 n，$N\to\infty$ 且 $\alpha=o(N)$，那么对于固定的 r 和 t，

$$\mathrm{E}\mu_r\sim Np_r(\alpha),\ \mathrm{Cov}(\mu_r,\mu_t)\sim N\sigma_{rt}(\alpha), \tag{2}$$

其中 $p_r(\alpha)=\alpha^r e^{-\alpha}/r!$，

$$\sigma_{rt}(\alpha)=$$

$$=p_r(\alpha)\left[\delta_{rt}-p_t(\alpha)-p_t(\alpha)\frac{(\alpha-r)(\alpha-t)}{\alpha}\right],$$

而 δ_{rt} 为 Kronecker 符号. 按照 μ_r 当 N，$n\to\infty$ 时不同类型的渐近行为，可以分辨出五个区域.

中心区域（central domain）对应于 $\alpha=n/N\asymp 1$. 对应于

$$\alpha\to\infty,\ \mathrm{E}\mu_r\to\lambda,\ 0<\lambda<\infty$$

的区域称为**右 r 区域**（right r-domain），而对应于

$$\alpha\to\infty,\ \mathrm{E}\mu_r\to\infty$$

则为**右中 r 区域**（right intermediate r-domain）. 对于 $r\geq 2$，**左 r 区域**（left r-domain）对应于

$$\alpha\to 0,\ \mathrm{E}\mu_r\to\lambda,\ 0<\lambda<\infty,$$

而**左中 r 区域**（left intermediate r-domain）对应于

$$\alpha\to 0,\ \mathrm{E}\mu_r\to\infty.$$

对于 $r=0,1$，则其左和左中 r 区域与其相应的 2 区域是相同的.

在等可能概型的情形，在右 r 区域 μ_r 有渐近 **Poisson 分布**（Poisson distribution）. 当 $r\geq 2$ 时，这在左 r 区域也是成立的，而当 $r=0$ 或 $r=1$ 时，μ_0-N+n 与 $(n-\mu_1)/2$ 依极限有 Poisson 分布. 在左中和右中 r 区域，μ_r 有渐近**正态分布**（normal distribution）. 在中心区域则有一个关于 $\mu_{r_1},\cdots,\mu_{r_s}$ 的多维渐近正态性定理，其极限正态分布的参数由渐近公式(2)确定（见[1]）.

如果 n 个粒子彼此独立地分配到 N 个单元，每个粒子落到第 j 个单元的概率等于 a_j，$\sum_{j=1}^{N}a_j=1$，这种分配称之为**多项式的**（polynomial）. 对于一个多项式分配，也可以引进中心、右和左区域，且极限正态与 Poisson 定理成立（见[1]，[3]）. 利用这些定理，可以计算**空盒检验**（empty-boxes test）的功效（又见**统计检验的功效**（power of a statistical test））. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为有连续分布函数 $F(x)$ 的独立随机变量（假设 H_0）. 对立假设 H_1 则对应于另一分布函数 $F_1(x)$. 选择点 $z_0=-\infty<z_1<\cdots<z_{N-1}<z_N=\infty$，使得 $F(z_k)-F(z_{k-1})=1/N$，$k=1,\cdots,N$. 空格检验是基于统计量 μ_0，它等于不包含任何 ξ_i 的区间 $(z_{k-1},z_k]$ 的个数. 空格检验由临界域 $\mu_0>C$ 所确定，这时 H_0 被拒绝. 因为在 H_0 之下，μ_0 有由均匀分配定义的概率分布，而在 H_1 之下，它有一个由多项分配定义的分布，利用关于 μ_0 的极限定理就能计算这个检验的功效 $\mathrm{P}\{\mu_0>C|H_1\}$（见[2]）.

在其他概型中，粒子被分成大小为 m 的组，并且假定在把它们配置到 N 个单元中时，同一组的两个粒子不会落入相同的单元，不同组的位置则是独立的. 如果每个组的所有 $\binom{N}{m}$ 个位置是等可能的且组数 $n\to$

∞，那么对于有界或弱增的 m，μ_r 也有渐近的正态或 Poisson 分布．

与概率论一整套的组合问题（随机排列，随机映射，树，等等）相联系，分配概型有着种种可能的推广（见[1]）．

参考文献

[1] Колчин, В. Ф., Севастьянов, Б. А., Чистяков, В. П., Случайные размещения, М., 1976（英译本：Kolčin, V. F., Sevast'yanov, B. A., Čistyakov, V. P., Random allocations, Winston, 1978）.

[2] Севастьянов, Б. А., 《Труды ин-та прикладной математики Тбилисского ун-та》, **2** (1969), 229 – 233.

[3] Михайлов, В. Г., 《Труды Матем. ин-та АН СССР》, **157** (1981), 138 – 152.

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】 本条所涉及的问题常称为占有问题（occupancy problems）；它们等价于瓮问题（urn problem）（见[A1]及**瓮模型**（urn model））．

参考文献

[A1] Johnson, N. L., Kotz, S., Urn models and their application, Wiley, 1977.

潘一民 译

随机数和伪随机数［random and pseudo-random numbers；случайные и псевдослучайные числа］

数 ξ_n（特别，二进制数 α_n），其顺序出现，满足某种统计正则性（见**概率论**（probability theory））．人们是这样区别随机数（random numbers）和伪随机数（pseudo-random numbers）的，前者由随机的装置来生成，而后者是用算术算法构造的．总是假设（出于较好或较差的理由）所得（或所构造）的序列具有频率性质，这些性质对于具有分布函数 $F(z)$ 的某随机变量 ξ 独立实现的一个序列来说是“典型的”；因此人们称作根据规律 $F(z)$ 分布的（独立的）随机数．最经常使用的例子为：在区间 $[0,1]$ 上均匀分布的随机数 ξ_n，$\mathrm{P}(\xi_n < x) = x$；等概率随机二进制数 α_n，$\mathrm{P}\{\alpha_n = 0\} = \mathrm{P}\{\alpha_n = 1\} = 1/2$；均值为 0，方差为 1 的正态律分布的正态随机数 η_n（见**均匀分布**（uniform distribution）；**正态分布**（normal distribution））．具有任意分布函数 $F(z)$ 的随机数 ζ_n 可以由均匀分布的随机数序列 ξ_n 通过 $\xi_n = F^{-1}(\zeta_n)$ 构造出来，即，它们能够从方程 $\zeta_n = F(\xi_n)$，$n = 1, 2, \cdots$，求出．还有其他构造方法．例如，可由均匀分布随机数利用下面一对解析式简单求得正态分布随机数

$$\zeta_{2n-1} = \sqrt{-2\ln\xi_{2n}}\,\cos 2\pi\xi_{2n-1},$$

$$\zeta_{2n} = \sqrt{-2\ln\xi_{2n}}\,\sin 2\pi\xi_{2n-1}.$$

以二进制表示的均匀分布随机数的数字是等概率随机二进位数字；反过来，把等概率二进制随机数组成无穷序列则可得到均匀分布随机数．

随机数和伪随机数实际上应用于**对策论**（games, theory of），**数理统计**（mathematical statistics），**蒙特卡罗方法**（Monte-Carlo method）和密码学等领域中，用于完成不确定算法的具体实现，只限“平均”意义下预测性态．例如，如果下一个 $\alpha_n = 0$，则局中人选择第一个策略，但若 $\alpha_n = 1$，他（她）就选择第二个策略．

可以在严格的数学意义下说明 А. Н. Колмогоров（[2]）和 P. Martin-Löf（[5]）的算法概率论框架中随机数的概念．令 $H = \mathsf{X}_{n=1}^{\infty}\{x_n : 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$ 是可数维单位立方体，λ 是 H 上的 Lebesgue 测度，又令 $G \subset H$ 是最大的零测度构造性可测集（它是存在的），那么任何一个序列 $\{x_n\} \notin G$ 可视为典型的，且可取作均匀分布随机数序列．类似地，可以引入关于全体事件 $B \subset \{0;1\}^N$ 系统的、二进制符号 a_j（$j = 1, \cdots, N$）形成的一个 N 序列的构造的 (ε, l) 典型性概念：不超过 ε 的测度以及不超过 l 的描述长度．显然由定义，均匀分布随机数的一个典型序列其本身不会是构造的，甚至随机符号的一个 (ε, l) 典型序列的构造都要求作极大量的探索．所以，人们在实际中使用较简单的算法，允许以少量试验检查其统计“质量”．这样一来，在构造均匀分布随机数时就必须对序列的均匀分布作必要的检验（见[3]）．在一些简单问题中，某些检查的完成实际上能够保证序列的可用性，有时使用由均匀分布随机数序列构造的相关随机数更为有效．

已经发表了随机数和随机数字的表，但是似乎并不能保证，它们会满足一切合理的非相关性统计试验．

参考文献

[1] Ермаков, С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975.

[2] Kolmogorov, A. N., On tables of random numbers, *Sankhya Ser. A*, **25** (1963), 369 – 376.

[3] Коробов, Н. М., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **14** (1950), 3, 215 – 238.

[4] Knuth, D. E., The art of computer programming, 2, Addison-Wesley, 1969.

[5] Martin-Löf, P., The definition of random sequences, *Inform. and Control*, **9** (1966), 602 – 619.

[6] Ченцов, Н. Н., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физики》, **7** (1967), 3, 632 – 643.

[7] Шень, А., 《Семиотика и информатика》, 1982, в. 18, 14 – 42.

Н. Н. Ченцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bratley, P., Fox, B. L. and Schrage, L. E., A

guide to simulation, Springer, 1987.

张宝琳 袁国兴 译

随机编码 [random coding; случайное кодирование]

一种编码方法（见**编码和译码**（coding and decoding）），即**信息源**（information, source of）产生的每个消息值在**通信信道**（communication channel）的输入端被赋予一个随机选取的信号值. 在信道输入端，信号值构成的集合具有某个给定的概率分布. 一般假设码中每个码字（即对给定的信息值，在输入端有一个相应的信号值）均按照给定的概率分布相互独立地进行选取. 有时随机编码以这样的方式定义，使得所编出的每个码都是群码.

随机编码的重要性在于：利用由随机编码得到的所有码的平均**译码错误概率**（erroneous decoding, probability of），可以给出一个相对简单的办法来计算最优码的译码错误概率上界.

参考文献

[1] Shannon, C. E., A mathematical theory of communication, *Bell. System. Techn. J.*, **27** (1948), 379－423; 623－656.

[2] Добрушин, Р. Л., 《Успехи матем. наук》, **14** (1959), 6, 3－104.

[3] Gallager, R. C., Information theory and reliable communication, Wiley, 1968.

Р. Л Добрушин В. В. Прелов 撰

【译注】 参考文献见 **Shannon 定理**（Shannon theorem）译注之参考文献. 骆 源 符方伟 沈世镒 译

随机元 [random element; случайный элемент]

随机变量（random variable）概念的推广. "随机元"一词是 M. Fréchet（[1]）创造的. 他指出，随着**概率论**（probability theory）的发展及其应用领域的扩展，必然会导致从实验的（随机）结果可以用一个数或有限个数描述的那种概型，过渡到实验结果例如为序列、函数、曲线或变换的概型.

其后，"随机元"一词主要被用来称呼在某个线性拓扑空间，尤其是 Hilbert 空间或 Banach 空间中"随机选择"的元. 例如，Banach 空间 $\mathfrak{X}$ 中的随机元 X 的确切定义，就是从随机变量的定义衍生出的. 设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 是一**概率空间**（probability space），$\mathfrak{X}$ 是一 Banach 空间而 $\mathfrak{X}^*$ 为 $\mathfrak{X}$ 的对偶空间. 从基本事件 ω 的空间 Ω 到 $\mathfrak{X}$ 内的映射 $X = X(\omega)$ 称为随机元（random element），如果每个连续线性泛函 $x^*(X(\omega))$ 都是随机变量，即 $\mathscr{A}$ 可测函数.

设 $\mathscr{S}$ 是使所有连续线性泛函都为可测的 $\mathfrak{X}$ 的子集的最小 σ 域. X 为随机元，当且仅当 $\mathscr{S}$ 中所有集的完全前象（原象）都是 $\mathscr{A}$ 可测的. 在 $\mathfrak{X}$ 为可分空间的情形，$\mathscr{S}$ 与 $\mathfrak{X}$ 的 Borel 子集的 σ 域相同.

概率论的基本概念，诸如**特征函数**（characteristic function），**数学期望**（mathematical expectation），**协方差**（covariance）等等，都可以推广到随机元. 随机元 X 称为正态的（normal）（Gauss 的（Gaussian）），如果它的每个连续线性泛函 $x^*(X)$ 的概率分布都是正态的（见**正态分布**（normal distribution））. 弱**大数律**（law of large numbers），强大数律，**重对数律**（law of the iterated logarithm），**中心极限定理**（central limit theorem），及概率论的其他一些结果，都可以推广到随机元序列. 这些定理的经典形式是否能转移到 Banach 空间的情形，依赖于空间的几何. 重要的是注意这是一种双向的联系，在这种联系下概率的性质事实上常常转化为概率几何性质：不仅它们在一个给定的 Banach 空间内的真实性由该空间的几何性质所决定，而且反之，其真实性也决定了这些几何性质. 例如，对于任何取值于 $\mathfrak{X}$ 的独立同分布随机元序列 $X_1, X_2, \cdots$，设其有零数学期望及 $\mathrm{E}\|X_j\|^2 < \infty$，其正则和 $(X_1 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$ 的分布当 $n \to \infty$ 时弱收敛于一正态随机元的分布，当且仅当 $\mathfrak{X}$ 是所谓的第二型空间（见[4]）.

参考文献

[1] Fréchet, M., Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **10** (1948), 215－310.

[2] Mourier, E., Eléments aléatoires dans un espace de Banach, Paris, 1955. Thése.

[3] Вахания, Н. Н., Вероятностные распределения в линейных пространствах, Тбилиси, 1971（英译本：Vahanija, N. N., Probability distributions on linear spaces, North-Holland, 1981）.

[4] Hoffmann-Jørgensen, J., Pisier, G., The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces, *Ann. Probab.*, **4** (1976), 587－599.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Schwartz, L., Geometry and probability on Banach spaces, Springer, 1981.

[A2] Hoffmann-Jørgensen, J., Probability in Banach spaces, Springer, 1977.

[A3] Yamasaki, Y., Measures on infinite dimensional spaces, World Scientific, 1985.

[A4] Vakhania, N. N., Tarieladze, V. I., Chobanyan, S. A., Probability distributions on Banach spaces, Reidel, 1987（译自俄文）.

[A5] Paulauskas, V., Rackauskas, A., Approximation theory in the central limit theorem. Exact results in Banach spaces, Kluwer, 1989（译自俄文）.

潘一民 译

随机事件 [**random event**; **случайное событие**], 事件 (event)

一个具有确定发生概率的试验结果的任意组合.

例 1. 掷两颗骰子. 36 个结果的每一个可以表示为一个数对 (i,j), 其中 i 是第一颗骰子上面的点数, j 是第二颗的点数. 事件"点数之和等于 11"恰是两个结果 $(5,6)$ 和 $(6,5)$ 的组合.

例 2. 在区间 $[0,1]$ 中随机投两个点, 其所有结果的集合用正方形 $\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 中的点 (x,y)(其中 x 是第一个点的值, y 是第二个点的值)的集合来表示. 事件"连接 x 和 y 的区间的长小于 α, $0 < \alpha < 1$"是在正方形中与过原点的对角线距离小于 $\alpha/\sqrt{2}$ 的点的集合.

在普遍承认的**概率论** (probability theory) 的公理化 (见 [1]) 范围内, 其中概率模型是**概率空间** (probability space) $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ (Ω 是基本事件空间, 即给定试验的一切可能结果的集合, $\mathscr{A}$ 是 Ω 的子集的一个 σ 代数而 P 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的概率测度). 随机事件正是属于 $\mathscr{A}$ 的集合.

在上述第一个例子中, Ω 是一个具 36 个元素的有限集: 点 (i,j), $1 \leq i, j \leq 6$; $\mathscr{A}$ 是 Ω 的所有 2^{36} 个子集组成的类 (包含 Ω 本身和空集 ϕ), 而对每一 $A \in \mathscr{A}$, 其概率 $\mathsf{P}(A)$ 等于 $m/36$, 其中 m 是 A 的元素个数. 在第二个例子中, Ω 是单位正方形中的点所构成的集, $\mathscr{A}$ 是它的 Borel 子集类, P 是通常的 $\mathscr{A}$ 上的 Lebesgue 测度 (对简单图形与其面积相同).

与 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ 相联系的事件类 $\mathscr{A}$ 形成一个 **Boole 环** (Boolean ring), 具有运算 $A+B$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (对称差) 和 $A \cdot B = A \cap B$ (它有一个乘法单位元 Ω), 于是, 它形成一个 **Boole 代数** (Boolean algebra). 定义在这个 Boole 代数上的函数 $\mathsf{P}(A)$ 除了不能由 $\mathsf{P}(A) = 0$ 推出 $A = \phi$ 外具有范数的一切性质. 如果定义对称差的 P 测度为零的两个集合是等价的, 并考虑等价类 $\bar{A}$ 代替事件 A, 就可得到类 $\bar{\mathscr{A}}$ 的正规化 Boole 代数 (normalized-Boolean algebra) $\bar{\mathscr{A}}$. 这一观点导向概率论公理化的另一种可能的方法, 在其中基本对象不是与给定试验相联结的概率空间, 而是随机事件的正规化 Boole 代数 (见 [2], [3]).

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: А. Н. 柯尔莫格洛夫, 概率论基本概念, 商务印书馆, 1952).

[2] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Теория вероятностей, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917 – 1947, М.-Л., 1948.

[3] Kolmogorov, A. N., Algèbres de Boole métriques complètes, in VI Zjazd Mathematyków Polskich, Kraków 1950

[4] Halmos, P. Measure theory, v. Nostrand, 1950 (中译本: 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, J. Wiley, 1957 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷, 上、下册, 科学出版社, 1964, 1979, 第二卷, 科学出版社, 1994).

[A2] Bauer, H., Probability theory and elements of measure theory, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

刘秀芳 译 陈培德 校

随机场 [**random field**; **случайное поле**], 多维时间随机过程 (stochastic process in multidimensional time), 多维参数随机过程 (stochastic process with a multidimensional parameter)

一种定义在多维空间点集上的**随机函数** (random function). 随机场是随机函数的一个重要例子 (见**随机元** (random element)), 在各种应用中常常遇到. 依赖于三个空间坐标 x, y, z (以及时间 t) 的随机场的例子是湍流的速度分量、气压和温度场 (见 [1]). 依赖于两个坐标 x 和 y 的随机场例子是一个波状的海面或粗糙的板表面的高度 z (见 [2]). 在按地球尺度的大范围大气过程的研究中, 地面压力场和其他气象特征有时看作球面上的随机场, 等等.

一般形式的随机场理论几乎等同于随机函数的一般理论. 人们只能对各种带有附加性质的特殊类型的随机场得到更有趣的具体结果. 那些附加性质简化了对它们的研究. **齐次随机场** (random field, homogeneous) 是这样一类随机场, 定义在具有变换群 G 的齐次空间 S 上并且具有性质: 在 S 的任意一个有限点组上场的值的概率分布, 或场的平均值及点对上值的二阶矩, 当 G 的元素作用到它们的自变量上时是不变的. 在 Euclide 空间 $\mathbf{R}^k$, $k = 1, 2, \cdots$, 或在 $\mathbf{R}^k$ 的具有整值坐标的格点集 Z^k 上的齐次随机场, 当 G 取成一切可能的 (或所有整值的) 平行变换的群时是**平稳随机过程** (stationary stochastic process) 的自然推广, 有关平稳随机过程的许多结果可用类似的方式搬到这种齐次随机场上. 在应用上 (特别, 对流体力学, 见 [1]) 有极大兴趣的是 $\mathbf{R}^3$ 或 $\mathbf{R}^2$ 上的称之为各向同性的齐次随机场, 其中 G 是相应空间的各向同性变换群. 齐次随机场的一个重要特点是无论对场本身还是它的相关函数都存在特殊形式的谱分解 (例如, 见 [3], [4], [11]; 亦见**随机函数的谱分解** (spectral decomposition of a random function)).

吸引着很大注意力的另外一类随机场是定义在 $\mathbf{R}^k$ 的某一区域 K 上的 Марков 随机场 (Markov random

fields). 随机场 $U(x)$ 是 Марков 的条件：粗略地说，是对一个具有边界 Γ 的开集 Q 的充分大的族，对任意 $\varepsilon > 0$，取定这个场在 Γ 的 ε 邻域 Γ^{ε} 上的值的条件下，随机变量族 $\{U(x): x \in Q \setminus \Gamma^{\varepsilon}\}$ 和 $\{U(x): x \in T \setminus \Gamma^{\varepsilon}\}$ 独立，其中 T 是在 K 中 Q 的闭包的余集(或在广义 Марков 性的情形，两个随机变量族相互不相关，例如见[5])．可以把这一概念推广到 L-Марков 随机场，上述独立性(或正交性)只需将任意宽度的 ε 邻域 Γ^{ε} 换作特殊厚度类型的边界 $\Gamma + L$．Марков 随机场和 L-Марков 场的理论在量子场论和统计物理学中有许多重要的应用(见[6]，[7])．由统计物理问题产生的另外一类随机场是 Gibbs 随机场，它的概率分布可以用 **Gibbs 分布** (Gibbs distribution) (例如，见[7]，[8]，[10]) 来表示．定义 Gibbs 随机场的一种方便的方式包含一族在一有限区域内场的值的条件概率分布(相对于这个区域外部的一切固定值)．必须注意，把平滑流形 S 上的随机场看作一个广义随机场的特殊情形常常是方便的．这种随机场可能在一个指定的点不存在值，但其平滑值 $U(\varphi)$ 可解释作在某个平滑检验函数 $\varphi(x)$ 空间 D 上定义的随机线性泛函．广义随机场(特别是广义 Марков 随机场)在物理应用中广泛地被使用．在**广义随机场** (random field, generalized) 理论的范围内，通过考虑场 $U(\varphi)$，其中 $\varphi(\mathbf{x})$ 满足

$$\int \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0,$$

相对于**平稳增量随机过程** (stochastic process with stationary increments)，也可以定义局部齐次(以及局部齐次且局部各向同性)随机场，见[10]，[11]．在湍流的统计理论中这样的场起着重要的作用(例如，见[1]，[9])．

参考文献

[1] Монин, А. С., Яглом, А. М., Статистическая гидромеханика, 1-2, М., 1965-1967 (英译本: Monin, A. S. and Yaglom, A. M., Statistical fluid mechanics, 1-2, M. I. T., 1971-1975).

[2] Хусу, А. П., Витенберг, Ю. Р., Пальмов, В. А., Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход), М., 1975.

[3] Hannan, E. J., Group representations and applied probability, Methuen, 1965.

[4] Ядренко, М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980 (英译本: Yadrenko, M. I., Spectral theory of random fields, Optim. Software, 1983).

[5] Розанов, Ю. А., Марковские случайные поля, М., 1981 (英译本: Rozanov, Yu. A., Markov random fields, Springer, 1982).

[6] Simon, B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.

[7] Preston, K., Gibbs states on countable sets, Cambridge Univ. Press, 1974.

[8] Добрушин, Р. Л., Синай, Я. Г., Многокомпонентные случайные системы, М., 1978 (英译本: Dobrushin, R. L. and Sinai, Ya. G. (eds.), Malti-component random systems, M. Dekker, 1980).

[9] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа, Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961 (英译本: Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, Applications of harmonic analysis, 4, Acad. Press, 1964).

[10] Malyshev, V. A. and Minlos, R. A., Gibbs random fields, Kluwer, 1990.

A. M. Яглом 撰

【补注】 对 Gibbs 场和 Марков 场亦见[A2]－[A3]，随机场的估计理论在[A4]－[A5]中有讨论，关于随机场的极限定理见[A5]．

参考文献

[A1] Adler, J., The geometry of random fields, Wiley, 1981.

[A2] Albeverio, S., Fenstad, J. E., Høegh-Krohn, R. and Lindstrøm, T., Non standard methods in stochastic ahalysis and mathematical physics, Acad Press, 1986.

[A3] Georgii, H. O., Gibbs measures and phase transitions, de Gruyter, 1988.

[A4] Ramm, A. G., Random fields, estimation theory, Longman & Wiley, 1990.

[A5] Ivanov, A. V. and Leonenko, N. N., Statistical analysis of random fields, Kluwer, 1989 (译自俄文).

刘秀芳 译 陈培德 校

广义随机场 [random field, generalized; случайное поле обобщенное]，广义随机过程 (generalized stochastic process)

光滑流形 G 上的**随机函数** (random function)，它的典型的实现是定义在 G 上的广义函数．更确切地说，设 G 是一 C^{∞} 流形(光滑流形)，再设 $D(G)$ 是定义在 G 上的紧支撑的无限次可微函数空间，具有在一致紧支撑上的函数列及其所有导数序列的一致收敛性的通常拓扑．这样，就可以在 G 上用给定的从 $D(G)$ 到定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的随机变量空间 $L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 的连续线性映射

$$D(G) \to L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu), \ \varphi \to f_{\varphi}, \ \varphi \in D(G)$$

来定义广义随机场，这里 Ω 是非空集合，$\mathfrak{B}$ 是 Ω 的子集 σ 代数，μ 是定义在 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度，而随机变量空间 $L_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 具有**依测度收敛** (convergence in measure) 拓扑([7])．当概率空间是 G 上广义函数空间 $D'(G)$，具有由 $D'(G)$ 中柱集生成的 σ 代数 $\mathfrak{B}_0$ (见**广义函数空间** (generalized functions, space

of)，**柱集**(cylinder set))且映射由

$$f_\varphi(T)=(T,\varphi),\ T\in D'(G),\ \varphi\in D(G),$$

给定的情形，广义随机场$\{f_\varphi:\varphi\in D(G)\}$称为典型的(canonical)．任何一个在有限维流形 G 上的广义随机场概率同构于某一(唯一的) G 上的典型随机场(见[2])．

这个定义容许很多自然的修正．例如，可以考虑向量值广义随机场或者在定义中用 G 上的检验函数的更广的空间(例如，在 $G=\mathbf{R}^n$, $n=1,2,\cdots$, 的情形，$S(\mathbf{R}^n)-C^\infty$ 可微函数连同其导数都比任意负幂 $|x|^k$, $k=-1,-2,\cdots$, $x\in\mathbf{R}^n$ 下降迅速，这样的函数所成的空间)来代替空间 $D(G)$．

广义随机场的概念包括其实现是通常函数的古典随机场及过程．这一概念出现于50年代中期，当时许多自然的随机结构显而易见地不能够用古典随机场给予充分简单的表述，而可以用广义随机场的语言给出简单、优雅的描述．例如，$D(\mathbf{R}^n)$, $n=1,2,\cdots$, 上的任意正定双线性形

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}W(x_1,x_2)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)dx_1dx_2,$$

$\varphi_1,\varphi_2\in D(\mathbf{R}^n)$，其中 $W(x_1,x_2)$ 是两个变量的正定对称广义函数，决定一个唯一的 $\mathbf{R}^n$ 上具零均值的 Gauss 广义随机场$\{f_\varphi:\varphi\in D(\mathbf{R}^n)\}$，这个场的协方差是

$$\int f_{\varphi_1}f_{\varphi_2}d\mu=(\varphi_1,\varphi_2),$$

其中 μ 是 $D'(\mathbf{R}^n)$ 上与这个场对应的概率测度．仅当函数 $W(x_1,x_2)$ 充分好(例如连续有界)时，这个广义随机场才能转化成古典的．另一个例子是 $\mathbf{R}^n$ 上的广义随机场(见[6])，其中没有古典场．

由于70年代早期发现了构造物理量子场的问题和 $\mathbf{R}^n(n>1)$ 上 Марков 广义随机场之间的联系，研究广义随机场(和特别是 Марков 场)的兴趣近年来一直在增长(见[5])．

参考文献

[1] Гельфанд, И. М., Шилов, Г. Е., Пространства основных и обобщенных фукций, М. 1958 (英译本: Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E., Generalized functions. Space of fundamental and generalized functions, Acad. Press, 1968).

[2] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961 (英译本: Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, 4, Applications of harmonic analysis, Acad. Press, 1964).

[3] Гелфанд, И. М., Обобщенные случайные процесса, 《Докл. АН СССР》, 100 (1955), 5, 853－856.

[4] Itô, H., Stationary random distributions, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A.*, **28** (1954), 209－223.

[5] Simon, B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.

[6] Добрушин, Р. Л., в сб., Многокомпонентные случайные системы, М.-Л., 1978, 179－213.

[7] Добрушин, Р. Л., Минлос, Р. А., 《Успехи матем. наук》, **32** (1977), 2, 67－122.

Р. А. Минлос 撰

【补注】 亦见随机场(random field)．

参考文献

[A1] Yaglom, A. M., Correlation theory of stationary and related random functions, Ⅰ－Ⅱ, Springer, 1987 (译自俄文).

[A2] Albeverio, S., Høegh-Krohn, R. and Zegarlinski, B., Uniqueness and global Markov property for Euclidean fields: the case of general polynomial interactions, *Commun. Math. Phys.*, **123** (1989), 377－424.

[A3] Rozanov, Yu. A., Markov random fields, Springer, 1982 (译自俄文).

刘秀芳 译 陈培德 校

齐次随机场 [**random field, homogeneous; случайное поле однородное**]

一种定义在**齐性空间**(homogeneous space) $S=\{s\}$ 上的**随机场**(random field) $X(s)$，S 装备有 S 到自身的映射所构成的传递变换群 $G=\{g\}$，这个场的统计特征的值当 G 的成员作用到它的自变量时不改变．有两类不同的齐次随机场：$X(s)$ 称为严格意义下的齐次随机场(homogeneous random field in the strict sense)，如果对一切 $n=1,2,\cdots$ 和 $g\in G$，它在任意 n 个点 $s_1,\cdots,s_n$ 处的值，其有限维概率分布与在 $gs_1,\cdots,gs_n$ 处的相同；如果 $\mathsf{E}|X(s)|^2<\infty$ 且 $\mathsf{E}X(s)=\mathsf{E}X(gs)$, $\mathsf{E}X(s)\overline{X(s_1)}=\mathsf{E}X(gs)\overline{X(gs_1)}$ 对一切 $s,s_1\in S$ 和 $g\in G$ 成立，则 $X(s)$ 称之为广泛意义下的齐次随机场(homogeneous random field in the wide sense)．

重要的特殊情形是在 k 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^k$(或 $\mathbf{R}^k$ 的具有整值坐标的格点集 $\mathbf{Z}^k$)上的齐次随机场，其中 G 是一切平移变换所成的群．有时术语"齐次随机场"就是指这种类型的场．$\mathbf{R}^k$ 上的一种齐次随机场具有 $\mathbf{R}^k$ 上一切等距变换(由平移、旋转和反射生成的)群 G，常称之为迷向齐次随机场(isotropic homogeneous random field)．

齐次随机场的概念是**平稳随机过程**(stationary stochastic process)概念的自然推广．在两种情形，场和协方差函数都有特殊种类的谱分解(见**随机函数的谱分解**(spectral decomposition of a random function))(例如，见[1]－[5])．齐次随机场及其某些推广常在

应用性质的问题中产生．特别是在湍流的统计理论中，$\mathbf{R}^k$ 上迷向齐次（数量和向量）随机场以及称之为同时局部齐次和局部迷向随机场（就是具有齐次性和迷向增量的场，它们是迷向齐次场的简单推广（例如，见[4]））起着重要的作用．此外，在物理量子场和统计物理的现代理论中有着广义齐次随机场理论的应用，它包括齐次随机场作为特殊情形（见**广义随机场**（random field, generalized））．

参考文献

[1] Yaglom, A. M., Second-order homogeneous random fields, in Proc. 4-th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Vol. 2, Univ. California Press, 1961, 593－622.

[2] Hannan, E. J., Group representations and applied probability, Methuen, 1965.

[3] Ядренко, М. И., Спектральная теория случайных полей, К., 1980（英译本：Yadrenko, M. I., Spectral theory of random fields, Optim. Software, 1983）.

[4] Монин, А. С., Яглом, А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2, М., 1967（英译本：Monin, A. S., and Yaglom, A. M., Statistical fluid mechanics, 2 M. I. T., 1975）.

[5] Yaglom, A. M., Correlation theory of stationary and related random functions, Ⅰ－Ⅱ, Springer, 1987（译自俄文）.

A. M. Яглом 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ramm, A. G., Random fields: estimation theory, Longman & Wiley, 1990.

[A2] Georgii, H.-O., Gibbs measure and phase transitions, de Gruyter, 1988.

[A3] Albeverio, S. and Høegh-Krohn, R., Homogeneous random fields and statistical mechanics, *J. Funct. Anal.*, 19 (1975), 242－272.

刘秀芳 译　陈培德 校

随机函数 [random function; случайная функция]

任意自变量 t（定义在集合 T 上，t 的值可取数值或更一般地在向量空间中取值）的函数，函数值可用某个试验来定义并可以随着试验的结果而变化，而试验的结果服从给定的概率分布．在**概率论**（probability theory）中，注意力集中在数值（即纯量的）随机函数 $X(t)$；一个随机向量函数 $\mathbf{X}(t)$ 可看作纯量函数 $X_\alpha(t)$ 的总合，其中 α 在 $\mathbf{X}$ 的分量的有限集或可数集 A 上变化，即看作点对 (t,α)，$t\in T$，$\alpha\in A$，集合 $T_1=T\times A$ 上的数值随机函数．

当 T 是有限集时，$X(t)$ 是有限随机变量集，可以看作多维（向量）随机变量，用多维分布函数来表征．当 T 是无限集时，研究最多的是 t 取（实）数值的情形；在这种情形，t 通常表示时间，$X(t)$ 称为**随机过程**（stochastic process），或者若 t 只取整数值，$X(t)$ 称为**随机序列**（random sequence）（或时间序列（time series））．如果 t 的值是流形（诸如 k 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^k$）中的点，则 $X(t)$ 称为**随机场**（random field）．

定义在一个无限集 T 上的随机函数的值的概率分布是用与 T 的所有有限子集 $\{t_1,\cdots,t_n\}$ 对应的随机变量 $X(t_1),\cdots,X(t_n)$ 的有限维概率分布的总和，即相应的满足下述相容性条件的有限维分布函数 $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 的总和来表征的

$$F_{t_1,\cdots,t_n,t_{n+1},\cdots,t_{n+m}}(x_1,\cdots,x_n,\infty,\cdots,\infty)=$$
$$=F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\tag{1}$$

$$F_{t_{i_1},\cdots,t_{i_n}}(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})=F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),\tag{2}$$

其中 $i_1,\cdots,i_n$ 是足码 $1,\cdots,n$ 的一个任意置换．在一切只对依赖于 T 的可数个值上 X 的值的事件感兴趣的情形，X 的概率分布的这种表征法是充分的．但是它不能用来决定 X 的依赖于 T 的连续统子集的性质的概率，诸如连续性或可微性或在 T 的连续子集上 $X(t)<a$ 的概率（见**可分过程**（separable process））．

可以更一般地对 T 中的每个点 t，用定义在一个固定的**概率空间**（probability space）$(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})$（其中 Ω 是点 ω 的集合，$\mathscr{A}$ 是 Ω 的子集的一个 σ 代数而 P 是在 $\mathscr{A}$ 上给定的概率测度）上的随机变量 $X=X(\omega)$ 的总和来描述随机函数．依这种方法，T 上的一个随机函数，看作两个变量的函数 $X(t,\omega)$，$t\in T$，$\omega\in\Omega$，对每个 t 它是 $\mathscr{A}$ 可测的（即对固定的 t，它归结为定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})$ 上的随机变量）．通过取 ω 的一个固定值 ω_0，得到一个 T 上的数值函数 $X(t,\omega_0)=x(t)$，称为 $X(t)$ 的实现（realization）（或者 $X(t)$ 的样本函数（sample function)，或者，当 t 表示时间时，称为 $X(t)$ 的轨道（trajectory））；$\mathscr{A}$ 和 P 在实现 $x(t)$ 的函数空间 $\mathbf{R}^T=\{x(t):t\in T\}$ 上导出一个子集的 σ 代数和定义在其上的概率测度．它的规范也可看作与随机函数的规范等价．随机函数的规范作为一切可能的实现的函数空间 $\mathbf{R}^T$ 的子集的 σ 代数上的概率测度可以看作两个变量的函数 $X(t,\omega)$ 的一般规范的特殊情形（其中 ω 属于 $\Omega=\mathbf{R}^T$ 的概率空间 $(\Omega,\mathscr{A},\mathsf{P})$），即，基本事件（在给定的概率空间中的点 ω）等同于 $X(t)$ 的实现 $x(t)$．另一方面，利用特殊指定 $\mathbf{R}^T$ 中的一个概率测度可以证明：任意其他方式确定的 $X(t)$ 均可归结为这种形式．特别是关于相容分布的 Колмогоров 基本定理（Kolmogorov fundamental theorem on consistent distribution）（见**概率空间**（probabiliy space））指出：满足上述相容性条件(1)和(2)的一切可能的有限维分布函数 $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,$

$\cdots, x_n$) 的总和定义了函数空间 $\mathbf{R}^T = \{x(t): t \in T\}$ 上由形如 $\{x(t): [x(t_1), \cdots, x(t_n)] \in B^n\}$ 的柱集 (cylinder set) 的总和生成的 σ 代数上的概率测度，其中 n 是任意正整数，B^n 是向量 $[x(t_1), \cdots, x(t_n)]$ 的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个任意 Borel 子集．

参考文献见**随机过程** (stochastic process)

A. M. Яглом 撰

【补注】

参考文献

[A1] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.

[A2] Loève, M., Probability theory, Springer, 1977.

[A3] Gihman, I. I. [I. I. Gikhman] and Skorohod, A. V. [A. V. Skorokhod], The theory of stochastic processes, Springer, 1974 (译自俄文).

[A4] Blanc-Lapierre, A. and Fortet, R., Theory of random functions, Gordon & Breach, 1965 (译自法文).

刘秀芳 译 陈培德 校

随机映射 σ [**random mapping**; **случайное отображение**]，集合 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 到它本身的

取值在 X 到它本身的一切单值映射的集合 Σ_n 中的**随机变量** (random variable)．概率 $\mathsf{P}\{\sigma = s\}$ 仅对一一映射 $s \in \Sigma_n$ 取正值的随机映射 σ，称为阶为 n 的**随机置换** (random permutation)．最彻底地研究过的随机映射是：对一切 $s \in \Sigma_n$，$\mathsf{P}\{\sigma = s\} = n^{-n}$．这一随机映射的一个实现是从 Σ_n 中一个简单随机选择的结果．

参考文献

[1] Колчин, В. Ф., Случайные отображения, М., 1984 (英译本: Kolchin, V. F., Random mappings, Optim. Software, 1986).

В. Ф. Колчин 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

随机序列 [**random sequence**; **случайная последовательность**]，离散时间随机过程 (stochastic process in discrete time)，时间序列 (time series)

定义在所有整数集 $t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$，或正整数集 $t = 1, 2, \cdots$，上的随机函数． A. M. Яглом 撰

【补注】 参考文献见**随机过程** (stochastic process) 及**时间序列** (time series). 刘秀芳 译 陈培德 校

随机变量 [**random variable**; **случайная величина**]

概率论的基本概念之一．随机变量及其期望（见**数学期望** (mathematical expectation)）曾被 П. Л. Чебышев (1867；见 [1]) 清楚地指出．随机变量的概念是一般可测函数的概念的特殊情形的认识要晚得多．在测度论框架下的概率论基础里，一个没有任何多余的限制的完整阐述首先由 A. H. Колмогоров 给出 (1933；见 [2])．这样，随机变量就是**概率空间** (probability space) 上的**可测函数** (measurable function)．即使在概率论的初等解释中这一点也必须给予清楚地阐述．在科学文献中这一观点被 W. Feller 采用（见 [3] 的前言，其中的解释是在基本事件空间基础上的，并强调只有在这个意义上随机变量的概念才有意义）．

设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ 是一概率空间，一个定义在 Ω 上的单值实函数 $X = X(\omega)$ 称为**随机变量** (random variable)，如果对任意实数 x，集合 $\{\omega: X(\omega) < x\}$ 属于类 $\mathscr{A}$．设 X 是任意随机变量，$\mathscr{A}_X$ 是那些使得 $\{\omega: X(\omega) \in C\} \in \mathscr{A}$ 的 $C \subset \mathbf{R}^1$ 的子集类；这是一个 σ 代数，$\mathbf{R}^1$ 的一切 Borel 子集类 $\mathscr{B}_1$ 总包含在 $\mathscr{A}_X$ 中．用等式 $\mathsf{P}_X(B) = \mathsf{P}\{X(\omega) \in B\}$，$B \in \mathscr{B}_1$，定义在 $\mathscr{B}_1$ 上的测度 P_X，称为 X 的**概率分布** (probability distribution)．这个测度由 X 的**分布函数** (distribution function)

$$F_X(x) = \mathsf{P}_X\{(-\infty, x)\} = \mathsf{P}\{\omega: X(\omega) < x\}$$

唯一决定．对 $C \in \mathscr{A}_X$，值 $\mathsf{P}\{\omega: X(\omega) \in C\}$（即 P_X 扩张到 $\mathscr{A}_X$ 上测度的值）一般不能由 F_X 唯一决定（唯一性的一个充分条件是称之为测度 P 的完满性条件；见**完满测度** (perfect measure) 及 [4]）．这一点必须常记（例如，当证明随机变量的分布由其**特征函数** (characteristic function) 唯一决定时）．

如果随机变量 X 取有限个或可数个两两不同的值 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$，相应的概率为 $p_1, \cdots, p_n, \cdots$ ($p_n = \mathsf{P}\{\omega: X(\omega) = x_n\}$)，则它的概率分布（在这种情形下，称之为离散的 (discrete)）由

$$\mathsf{P}_X(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$$

给定．如果有一个函数 $p(x)$（称之为**概率密度** (probability density)）使得对任何区间 B（或等价地，任何 Borel 集 B），

$$\mathsf{P}_X(B) = \int_B p(x)\, dx,$$

则称 X 的分布是连续的 (continuous)．用通常数学分析的术语这意味着 P_X 对 $\mathbf{R}^1$ 上的 Lebesgue 测度是绝对连续的．

随机变量 X 的概率分布的几个一般性质用少数数字特征就足以刻画．例如，**中位数（统计学中的）** (median (in statistics)) 和**分位数** (quantile) 具有对任何分布都有定义的优点，虽然应用最广泛的还是**数学期望** (mathematical expectation) $\mathsf{E}X$ 和**方差** (dispersion) $\mathsf{D}X$．亦见**概率论** (probability theory)．

复随机变量 X 由实随机变量对 X_1 和 X_2 通过公式

$$X(\omega) = X_1(\omega) + i X_2(\omega)$$

决定.

随机变量的有序集 $(X_1, \cdots, X_s)$ 看作取值于 $\mathbf{R}^s$ 中的随机向量(random vector).

使用随机元(random element)的概念可将随机变量的概念推广到无穷维的情形.

值得注意的是，在数学分析和数论的某些问题中，把包含在公式中的某些函数看作定义在适当的概率空间上的随机变量是方便的(例如，见[5]).

参考文献

[1] Чебышев, П. Л., О средних величинах, в кн. Полн. собр. соч., 2, М.-Л. 1947.

[2] Колмогоров, А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974 (中译本: A. H. 柯尔莫格洛夫, 概率论基本概念, 商务印书馆, 1952).

[3] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1957 — 1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷, 上、下册, 科学出版社, 1964, 1979; 第二卷, 科学出版社, 1994).

[4] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949 (中译本: Б. В. 格涅坚科, A. H. 廓洛莫格若夫, 相互独立随机变数之和的极限分布, 科学出版社, 1955).

[5] Kac, M., Statistical independence in probability, analysis and number theory, Math. Assoc. Amer., 1959.

Ю. В. Прохоров 撰

【补注】 其他采用 Колмогоров 观点的数学家，例如有，J. L. Doob([A1]) 和 P. Lévy([A2]).

参考文献

[A1] Doob, J. L., Stochastic processes depending on a continuous parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **42** (1937), 107 — 140.

[A2] Lévy, P., Le mouvement brownien plan, *Amer. J. Math.*, **62** (1940), 487 — 550.

刘秀芳 译 陈培德 校

随机变量变换 [random variables, transformations of; случайных величин преобразование]

确定任意给定的随机变量的函数，使其概率分布具有所要求的性质.

例 1 设 X 为一有连续且严格增的分布函数 F 的随机变量. 那么随机变量 $Y = F(X)$ 就有区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布，而随机变量 $Z = \Phi^{-1}(F(X))$ (其中 Φ 为标准正态分布函数)则有参数为 0 与 1 的**正态分布**(normal distribution). 反之，公式 $X = F^{-1}(\Phi(Z))$ 使人们能从一有标准正态分布的随机变量 Z 得到有给定分布函数 F 的随机变量 X.

随机变量的变换常用来联系概率论的极限定理. 例如，设随机变量 Z_n 的序列是渐近正态的，参数为 $(0, 1)$. 那么可以提出构造简单(且简单可逆)函数 f_n 使随机变量 $V_n = Z_n + f_n(Z_n)$ 比 Z_n"更正态"的问题.

例 2. 设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立随机变量，每一个都有 $[-1, 1]$ 上的**均匀分布**(uniform distribution)，并置

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n/3}}.$$

由**中心极限定理**(central limit theorem),

$$\mathrm{P}\{Z_n < x\} - \Phi(x) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

如果令

$$V_n = Z_n - \frac{1}{20n}(3Z_n - Z_n^3),$$

则有

$$\mathrm{P}\{V_n < x\} - \Phi(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

例 3. 随机变量 χ_n^2, $\sqrt{2\chi_n^2}$ 与 $(\chi_n^2/n)^{1/3}$ 当 $n \to \infty$ 时都是渐近正态的(见 χ^2 **分布**('chi-squared' distribution)). 其对应分布函数与其正态逼近间的一致偏差对于 χ_n^2 要 $n \geqslant 354$ 时才小于 0.01; 对于 $\sqrt{2\chi_n^2}$ (Fisher 变换(Fisher transformation)), 则当 $n \geqslant 23$ 时就小于 0.01; 而对于 $(\chi_n^2/n)^{1/3}$ (Wilson-Hilferty 变换(Wilson-Hilferty transformation))更只需 $n \geqslant 3$ 其偏差就不超过 0.0007.

随机变量的变换长期以来被用于数理统计问题中，作为构造简单的高精度渐近公式的基础. 随机变量的变换在随机过程论中也是有用的(例如"单一概率空间"方法).

参考文献

[1] Большев, Л. Н., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **4** (1959), 2, 136 — 149.

[2] Большев, Л. Н., 《Теория вероятн. и ее примен.》, **8** (1963), 2, 129 — 155.

[3] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

В. И. Пагурова, Ю. В. Прохоров 撰

【补注】 与上述变换有关的是 Edgeworth 展开(例如见[A1]; 亦见 **Edgeworth 级数**(Edgeworth series)).

参考文献

[A1] Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975 (译自俄文).

潘一民 译

随机游动 [random walk; случайное блуждание]

一种特殊形式的**随机过程**(stochastic process)，可以解释作描述某一状态空间中的质点在某种随机机制作用下的运动的模型. 状态空间通常为 d 维 Euclid 空间或在其中的整值格点. 随机机制可以是各种各样

的；最普通的随机游动由独立随机变量和或 Марков 链生成．还没有一种被普遍接受的严格的随机游动的定义．

在 $d=1$ 的情形，最简单的随机游动的轨道用初始位置 $S_0=0$ 及部分和的序列

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,\ n=1,2,\cdots, \qquad (1)$$

来描述，其中 X_i 是具有 Bernoulli 分布：

$$\mathsf{P}(X_i=1)=p,\ \mathsf{P}(X_i=-1)=q=1-p,$$
$$p\in(0,1)$$

的独立随机变量．S_n 的值可解释作：两个局中人之一在每次博奕中以概率 p 赢一元钱，以概率 $1-p$ 输一元钱，在 n 次博奕后他所赢得的钱．如果博奕由投掷一个无偏的硬币构成，即假定 $p=1/2$（对称游动（symmetric walk），见 **Bernoulli 随机游动**（Bernoulli random walk））．假设第一个局中人的初始资本为 b，第二个为 a，当运动着的质点（具坐标 $S_1,S_2,\cdots$）首次接触到水平 a 或 $-b$ 之一时博奕即告结束．在此时刻，局中人之一输光．这就是古典的输光问题，其中边界点 a 和 $-b$ 可看作是吸收的（absorbing）．

在排队论（queueing theory）的应用中，质点接近边界 a 和 $-b$ 的性态可以不同，例如：如果 $a=\infty$，$b=0$，则随机质点在时刻 $n+1$ 的位置由

$$Z_{n+1}=\max(0,\ Z_n+X_{n+1}) \qquad (2)$$

给定，0 处的边界称为反射的（reflecting）或阻留的（detaining）．质点在边界邻域的性态也存在其他的可能性．

如果 $a=\infty$，就得到具有一个边界的随机游动（random walk with one boundary）．如果 $a=b=\infty$，则就得到无限制的随机游动（unrestricted random walk）．通常使用离散 Марков 链的机制，特别是通过研究相应的有限差分方程来研究随机游动．例如，在输光问题中，设 u_k 是第一个局中人初始资本等于 k 时输光的概率，$0\leqslant k\leqslant a+b$，两个局中人的总资本是 $a+b$．则根据首次跳跃处的全概率公式，推导出 u_k 满足方程

$$u_k = pu_{k+1}+qu_{k-1},\ 0<k<a+b,$$

及边界条件 $u_{a+b}=0$，$u_0=1$．于是得到：

$$u_b=\frac{\left[\frac{q}{p}\right]^{a+b}-\left[\frac{q}{p}\right]^{b}}{\left[\frac{q}{p}\right]^{a+b}-1},\ \text{当 } p\neq q;$$

$$u_b=\frac{a}{a+b},\ \text{当 } p=q=\frac{1}{2}.$$

第二个公式表明甚至在“公平”博奕中（两个局中人有同样的机会），当第二个局中人的资本 a 同 b 相比大得多时，会导致第一个局中人以接近于 1 的概率输光（当 $b<\infty$，$a=\infty$ 时 $u_b=1$）．

输光问题已经被彻底地研究过了．例如，J．Lagrange（见[1]，卷 1）证明了：在总资本为 $a+b$（固定），给定第一个局中人初始资本为 b 的条件下，他在第 n 步输光的概率等于

$$u_{b,n}=(a+b)^{-1}2^n p^{(n-b)/2}q^{(n+b)/2}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{a+b-1}\cos^{n-1}\frac{\pi k}{a+b}\sin\frac{\pi k}{a+b}\sin\frac{\pi bk}{a+b}.$$

在两个局中人之一输光之前的平均时间 m_b 由

$$m_b=\frac{b}{q-p}-\frac{a+b}{q-p}\,\frac{1-\left[\frac{q}{p}\right]^{b}}{1-\left[\frac{q}{p}\right]^{a+b}},$$

如果 $p\neq q$；

$$m_b=ab,\ \text{如果 } p=q=\frac{1}{2}$$

给定．

对（2）中描述的具有一个边界（$a=\infty$）的随机游动，当 $p<q$，$n\to\infty$ 时有一个平稳分布，它与随机变量 $S=\sup_{k\geqslant 0}S_k$ 的分布相同，而且

$$\mathsf{P}\{S\geqslant k\}=\left[\frac{p}{q}\right]^{k},\ k=0,1,\cdots. \qquad (3)$$

描述无限制随机游动的规律由关于部分和序列 S_n，$n=1,2,\cdots$，性态的定理导出．这些规律之一是对称随机游动（$p=1/2$），质点击中（无穷次）任一固定点的概率为 1；当 $p<1/2$ 时，以概率 1 游动向左离去；在这种情况下，以概率 1，$S<\infty$．

对于对称随机游动，质点处于正半轴的时间 K_n（在序列 $S_1,\cdots,S_n$ 中正项的个数）将以大概率靠近 0 或 n 而不是靠近 $n/2$．这可从**反正弦律**（arcsin law）看出：对于大的 n（见[1]，卷 1）

$$\mathsf{P}\left\{\frac{K_n}{n}<x\right\}\approx\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sin}\sqrt{x}.$$

例如，这蕴含着

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{K_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{4}\right\}=1-2\mathsf{P}\left\{\frac{K_n}{n}<\frac{1}{4}\right\}\approx$$
$$\approx 1-\frac{4}{\pi}\,\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3},$$

并且以概率 0.2 质点处在单边的时间至少占 97.6%．

具有边界的随机游动与无限制随机游动之间存在一些关系．例如，若假设 $Y(x)=\min\{k:S_k\geqslant x\}$，则（见[2]）

$$\mathsf{P}\{Y(x)=n\}=\frac{x}{n}\mathsf{P}\{S_n=x\}.$$

在无限制随机游动中，对大的 n，质点的位置 S_n 是用**大数律**（law of large numbers）和**中心极限定理**（central limit theorem）描述的．

如果跳跃值由 ± 1 变为 $\pm\Delta$（对小的 Δ）且假定 $p=(1+\alpha\Delta)/2$，则质点在 $n=t\Delta^{-2}$ 步以后的位置 S_n 将渐近地（当 $\Delta\to 0$ 时）描述漂移为 α，扩散系数为 1，且在边界 a 和 $-b$ 处具有相应性态（如果这些由随机游动 S_n 指定的话）的**扩散过程**（diffusion process）在时刻 t 的状态．

上述的随机游动概念可以许多方式推广．对 $d>1$，$\mathbf{R}^d$ 上最简单的随机游动定义如下：质点离开原点在 $2d$ 个平行于坐标轴的方向之一移动长为 1 的一步．于是它的可能位置是 $\mathbf{R}^d$ 中具有整数坐标的点．为定义一个随机游动必须对 $2d$ 个不同的方向指定相应的概率．如果所有这些概率都等于 $1/2d$，就得到对称随机游动．在多维的情形，具有边界的随机游动问题变得复杂得多，因为当 $d>1$ 时边界的形状实质性地复杂化了．在无限制情形，Pólya 定理（Pólya theorem）（见[1]，卷 1）成立：对 $d\leqslant 2$ 的对称随机游动，质点以概率 1 将或早或晚地回到它的初始位置（一次，从而无限经常地）；但当 $d=3$ 时这一概率渐近地等于 0.35（当 $d>3$ 时它还要更小）．

最简单随机游动的另一种可能的推广是在 (1) 中取任意分布的独立随机变量 $X_1,X_2,\cdots$．在这种情形，对无限制随机游动和带有边界的随机游动的基本定性规律仍然保持．例如，质点以概率 1 达到边界 a 或 $-b$．如果 $\mathsf{E}X_i\leqslant 0$ 且 $a=\infty$，则将以概率 1 达到边界 $-b$．如果 X_i 是整值的且 $\mathsf{E}X_i=0$，则质点以概率 1 回到初始位置．对具有 $\mathsf{E}X_i=0$ 的任意分布的 X_i，这一叙述仅在考虑回到一个区间时成立，而不是对一个点．

在一般情形，解决随机游动从一个区间 $(-b,a)$ 跑出去的问题要复杂得多．但同时，这个问题在数理统计（序贯分析）、保险业、排队论等等中有许多应用．在对它们的研究中，随机游动 $\{S_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 的各种称为**边界泛函**（boundary functionals）的泛函起着决定性的作用．这些包括：$S=\sup_{k\geqslant 0}S_k$，以正方向以首次穿越零的时间 $Y_+=\min\{k,\ S_k>0\}$，以负方向以首次穿越零的时间 $Y_-=\min\{k\geqslant 1: S_k\leqslant 0\}$，首次正和 $\chi_+=S_{Y_+}$ 和首次非正和 $\chi_-=S_{Y_-}$ 等等．跳跃值 X_i 的分布与这些泛函的分布用下述的所谓因子分解恒等式（见[1]，卷 1；[2]，[3]；亦见**因子分解恒等式**（factorization identities））联结：设 $\varphi(\lambda)=\mathsf{E}e^{i\lambda X_i}$ 是 X_i 的特征函数，则当 $|z|\leqslant 1$ 且 $\operatorname{Im}\lambda=0$ 时，

$$1-z\varphi(\lambda)=[1-\mathsf{E}(e^{i\lambda\chi_+}z^{Y_+};\ Y_+<\infty)]\times$$

$$\times[1-\mathsf{E}(e^{i\lambda\chi_-}z^{Y_-};\ Y_-<\infty)]. \qquad (4)$$

这个恒等式揭示了随机游动的边界问题和复变函数论中有关问题之间的联系，因为 (4) 式右边的因子由函数 $1-z\varphi(\lambda)$ 在轴 $\operatorname{Im}\lambda=0$ 上的典型因子分解所唯一决定，即对 $\operatorname{Im}\lambda=0$，将函数表为乘积 $1-z\varphi(\lambda)=A_{z+}(\lambda)A_{z-}(\lambda)$，其中 $A_{z\pm}(\lambda)$ 分别在上、下半平面解析，没有零点，且是连续的（包括边界）．在恒等式 (4) 中，当 $z=1$ 时第一个因子可用下式代替：

$$\frac{1-\mathsf{P}\{Y_+<\infty\}}{1-\mathsf{E}e^{i\lambda S}}=1-\mathsf{E}\{e^{i\lambda\chi_+};\ Y_+<\infty\}.$$

恒等式 (4) 只是关于各种边界泛函分布的因子分解恒等式中的一个．另一个是与 Pollaczek-Spitzer 恒等式（Pollaczek-Spitzer identity）

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n\mathsf{E}e^{i\lambda\bar{S}_n}=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathsf{E}e^{i\lambda\max(0,S_n)}\right\}$$

有关，其中 $\bar{S}_n=\max(0,S_1,\cdots,S_n)$．因子分解恒等式对研究随机游动的边界问题提供了一个有效的方法（见[1]，卷 2；[2]，[3]）．

随机游动的边界问题（包括渐近分析）已有过相当完整的研究（见[1]，卷 2；[4]－[6]）．

分析上，边界问题的解导出积分微分方程．例如，一个质点从 $x\in(-b,a)$ 出发在时间 n 之内离开这一区间的概率 $u_n(x,a,b)$ 满足下述方程（在第一次跳跃处的全概率公式）：

$$u_{n+1}(x,a,b)=\int_{-b-x}^{a-x}u_n(x+y,\ a,b)dF(y)+1+$$

$$-F(a-x)+F(-b-x),$$

其中 $F(x)=\mathsf{P}\{X_1<x\}$．通过母函数 $u(z,x,a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}z^nu_n(x,a,b)$，得到通常的积分方程．至少有两种方法研究这些方程解的渐近性质．其中之一基于对二重变换

$$U(z,\lambda,a,b)=\int e^{i\lambda x}u(z,x,a,b)dx$$

及其反演的解析性质的研究（见[5]－[6]）．另一个涉及Вишик和Люстерник方法，解带有小参数的方程（见[4]及**带小参数的微分方程**（differential equations with small parameter）．后者揭示了这些问题与位势理论之间深刻的联系．

上述许多讨论可转到具有相依跳跃的情形，例如当随机变量 S_n 同 **Марков 链**（Markov chain）相联系时，也可以转到在 $\mathbf{R}^d(d>1)$ 中多维随机游动的情形（见[6]，[7]）．

参考文献

[1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications. 1 - 2. Wiley, 1957 - 1971 (中译本. W. 费勒, 概率论及其应用. 第一卷, 上、下册, 科学出版社, 1964, 1979; 第二卷, 科学出版社, 1994).

[2] Боровков, А. А., Теория вероятностей, М., 1976.

[3] Боровков, А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М, 1972 (英译本: Borovkov, A. A., Stochastic processes in queueing theory, Springer, 1976).

[4] Королюк, В. С., Боровских, Ю. В., Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений, К., 1981.

[5] Боровков, А. А., 《Сиб. матем. ж.》, 3 (1962), 5, 645 - 694.

[6] Лотов, В. И., 《Теория вероятн. и ее примен.》 **24** (1979), 3, 475 - 485, 4, 873 - 879.

[7] Spitzer, F., Principles of random walk, V. Norstrand, 1964.

А. А. Боровков 撰

【补注】 对物理和生物科学的应用见[A7]及其所引文献.

参考文献

[A1] Barber, M. N. and Ninham, B. W., Random and restricted walks, theory and applications, Gordon & Breach, 1970.

[A2] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1960.

[A3] Gut, A., Stopped random walks. Limit theorems and applications, Springer, 1988.

[A4] Kemeny, J. G., Snell, J. L. and Knapp, A. W., Denumerable Markov chains, Springer, 1976.

[A5] Kemperman, J. H. B., The passage problem for a stationary Markov chain, Univ. of Chicago Press, 1961.

[A6] Lévy, P., Processus stochastiques et mouvement Brownien, Gauthier - Villars, 1965.

[A7] Montroll, E. W. and West, B. J., On an enriched collection of stochastic processes, in E. W. Montroll and J. L. Lebowitz (eds.): Fluctuation Phenomena, Series in Statistical Mechanics, Vol. 7, Elsevier, 1987, Chapt. 2.

[A8] Revuz, D., Markov chains, North - Holland, 1975.

刘秀芳 译 陈培德 校

随机化 [randomization; рандомизация]

用随机方式作判决的统计方法. 设 X 是在样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}, \mathrm{P}_\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ 中取值的随机变量; $(\Xi, \mathscr{A})$ 是一可测空间; $\{Q_x(\cdot)\}$ $(x \in \mathfrak{X})$ 是定义在 $(\Xi, \mathscr{A})$ 上的所谓转移概率分布族, 其中函数 $Q.(A)$ 对于每一固定 $A \in \mathscr{A}$ 关于 x 是 $\mathscr{B}$ 可测的. 需要根据 X 的实现 x 在 $(\Xi, \mathscr{A})$ 中作出判决 ξ. 那么, 随机化 (randomization) 是根据 X 的实现 x 按概率律 $Q_x(\cdot)$ 抽签作判决的一种统计决策.

参考文献

[1] Ченцов, Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972 (英译本: N. N. Chentsov, Statistical decision rules and optimal inference, Amer. Math. Soc., 1982).

М. С. Никулин 撰

【补注】 随机化统计方法亦称做随机化判定法则 (randomized decision rule).

参考文献

[A1] Berger, J. O., Statistical decision theory and Bayesian analysis, Springer, 1985.

[A2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

周概容 译

随机化检验 [randomization test; рандомизации критерий], 排列检验 (permutation test)

假设"被观测随机向量的概率密度关于其自变量的排列对称"的统计检验 (statistical test).

设 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是随机向量 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 的实现; 需要检定假设 H_0: X 的未知概率密度关于自变量的排列对称, 即检定是否满足

$$p(x_1, \cdots, x_n) = p(x_{r_1}, \cdots, x_{r_n}),$$

其中 $(r_1, \cdots, r_n)$ 是 $(1, \cdots, n)$ 的任意排列. 设 $X^{(\cdot)}$ 和 R 相应为由 X 产生的**顺序统计量** (order statistic) 向量和**秩向量** (rank vector); 此外, 设在 $[0, 1]$ 上取值的统计量 $\Psi = \Psi(X^{(\cdot)}, R)$, 对于某个 $\alpha \in (0, 1)$, 几乎处处满足

$$\mathrm{E}\{\Psi(X^{(\cdot)}, R) | X^{(\cdot)}\} = \alpha;$$

φ 是与统计量 Ψ 有相依关系 $\varphi(X) = \Psi(X^{(\cdot)}, R)$ 的函数. 那么, 以 φ 为临界函数的统计检验称为随机化检验 (randomization test). 因为 $X^{(\cdot)}$ 是完全**充分统计量** (sufficient statistic), 则相似检验族 (见**相似检验** (similar test)) 与排列检验族重合.

参考文献

[1] Hájek, J. and Sidák, Z., Theory of rank test, Acad. Press, 1967.

[2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

值域 (函数的) [range of values of a function; область значений функции], 函数的值集 (set of values of a function)

所有与给定函数的定义域中元素相对应的元素的集合; 即, 若 $f: X \to Y$, 则 f 的值集 Y_f 由所有如下的 $y \in Y$ 组成: 存在 $x \in X$ 使 $f(x) = y$. 所以函数的值域是它的定义域 (domain of definition) 的象, $Y_f = f(X)$.

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

极差(样本变易的)[range (of variation of a sample); размах (выборки)]

对同一随机变量 X 的 n 次独立测量得到的有序样本

$$(x_1, \cdots, x_n), \ x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$$

中最大值 $x_{max} = x_n$ 与最小值 $x_{min} = x_1$ 之差

$$w_n = x_{max} - x_{min}.$$

设 $F(x) = \mathrm{P}\{X \leqslant x\}$ 是随机变量 X 的分布函数, 则极差的概率分布为

$$\mathrm{P}\{w_n \leqslant t\} = n\int_{-\infty}^{\infty}(F(x+t) - F(x))^{n-1}dF(x),$$

$$0 \leqslant t \leqslant \infty.$$

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[2] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1983.

Т. Ю. Попова 撰

【补注】 样本变易极差亦称为样本极差(sample range).

参考文献

[A1] Owen, D. B., Handbook of statistical tables, Addison-Wesley, 1962.

周概容 译

秩[rank; ранг]

一个与**基**(basis)概念紧密联系的概念. 通常秩或者被定义为一个生成系的极小**基数**(cardinality)(例如, 引入一个代数系统的基本秩(basis rank of an algebraic system)), 或者被定义为在某种意义下是无关的元素的子系的极大基数.

除环上向量空间的一个向量组的秩(rank of a system of a vectors)是这组里线性无关向量的极大个数(见**线性无关**(linear independence)). 特别, 一个向量空间的秩(rank)或维数(dimension)等于这个空间的一个基里元素的个数(秩不依赖于基的选取: 所有的基都具有同一基数). 对于模来说, 情况要复杂得多. 存在这样的结合环 R, 使得 R 上的自由模也可能有两个含有不同个数元素的基(见**模的秩**(rank of module); **自由模**(free module)). 如果每一个自由 R 模都有唯一的秩, 则 R 称为具有不变基元素个数性质. 每一个有单位元的交换结合环都是这样的, 因此可以定义, 例如一个 **Abel 群**(Abelian group)的(Prufer)秩(这个群可以看成环 $\mathbf{Z}$ 上的模). 在非 Abel 情形, 一个群被引进两种秩的概念, 一般秩和特殊秩(见群的秩(rank of a group)). **代数群的秩**(rank of an algebraic group)和 **Lie 群的秩**(rank of a Lie group)是用特殊方式定义的.

(除环上)代数的秩(rank of an algebra)指的是它的加法向量空间的秩. 然而, 在 Lie 代数里, 存在与此无关的另一种秩的概念(见 **Lie 代数的秩**(rank of a Lie algebra)).

矩阵的秩(rank of a matrix)定义为它的行向量组的秩(行秩(row rank))或列向量组的秩(列秩(column rank)). 对于有单位元的交换环上的矩阵来说, 这两个秩的概念是一致的. 对于域上的矩阵来说, 秩也等于一个非零**子式**(minor)的最大阶数. 两个矩阵乘积的秩不大于每一因子的秩. 用一个非奇异矩阵去乘后, 矩阵的秩不改变.

一个线性映射的秩(rank of a linear mapping)是这个映射的像的维数. 在有限维情形, 它等于这个映射的矩阵的秩.

也引入双线性型的秩(见**双线性型**(bilinear form))和二次型的秩(见**二次型**(quadratic form)). 它们也等于(在有限维情形)对应的矩阵的秩.

О. А. Иванова 撰

【补注】不变基元素个数性质(invariant basis number property)也称为不变维数性质(invariant dimension property).

对于除环上的矩阵, 考虑两个秩, 它们不一定相等: 1)看成左向量空间的行秩(它等于看成右向量空间的列秩); 2)交换 1)中"左"和"右"所得的秩.

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1-3, Wiley, 1988.

[A2] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. II(译自法文).

郝钢新 译

群的秩[rank of a group; ранг группы], 群的一般秩和特殊秩(general and special rank of a group)

群论中的一个概念. 群 G 有有限一般秩(general rank)r, 若 r 是这样一个最小的数, 使得 G 的任意有限生成的子群都包含在一个具有 r' 个生成元的子群内($r' \leqslant r$). 群 G 有有限特殊秩(special rank)r, 若 r 是这样一个最小的数, 使得 G 的任意有限生成的子群都有一个最多由 r 个元素组成的生成元系. 若不存在这样的有限数, 则该群的一般(或特殊)秩就是无限的.

一个群的一般秩总小于或等于它的特殊秩. 存在这样的群, 它有有限的一般秩(甚至该秩为 2)而其特殊秩是无限的. 例如, 可数对称群就是如此. 对 Abel 群而言, 一般秩与特殊秩都等于它的 Prüfer 秩(见 **Abel 群**(Abelian group)).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 1982).

О. А. Иванова 撰

李慧陵 译

Lie 代数的秩 [rank of a Lie algebra; ранг алгебры Ли]

线性算子 $\mathrm{ad}_L x$ 的本征值 $\lambda=0$ 的极小重数, 这里 x 取遍整个 Lie 代数 L. 假定 L 是有限维代数. 重数为极小的元素 x 称为正则的 (regular). Lie 代数的正则元的集合是开集 (在 **Zariski 拓扑** (Zariski topology) 下). Lie 代数的秩等于它的任一 **Cartan 子代数** (Cartan subalgebra) 的维数. 非零 Lie 代数 L 的秩 $\mathrm{rk}\,L$ 满足不等式

$$1 \leqslant \mathrm{rk}\,L \leqslant \dim L,$$

而等式 $\mathrm{rk}\,L=\dim L$ 成立, 当且仅当 L 是幂零的 (见**幂零 Lie 代数** (Lie algebra, nilpotent)). 对域 k 上的**半单 Lie 代数** (Lie algebra, semi-simple), 这个秩与 L 上有理函数域的由自同态 $\mathrm{ad}_L x$ 的特征多项式的所有系数生成的子域在 k 上的超越次数相同.

如果 R 是 L 的根, 则 L/R 的秩称为代数 L 的半单秩 (semi-simple rank of the algebra).

例. 设 L 是下述 Lie 代数中的一个: 1) 元素在 k 中的所有 n 阶方阵的代数 $\mathfrak{gl}_n$; 2) 所有迹为零的矩阵的代数 $\mathfrak{sg}_n$; 3) 所有上三角矩阵的代数; 4) 所有对角矩阵的代数; 5) 主对角线上为零的所有上三角矩阵的代数. 这些代数的秩是 $n, n-1, n, n, n(n-1)/2$, 而半单秩是 $n-1, n-1, 0, 0, 0$.

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

[2] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965 (译自法文).

[3] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 3, Harmann, 1955.

В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.

[A2] Bourbaki, N., Eléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie, Hermann, 1975, Chapt, 7.

蔡传仁 译

Lie 群的秩 [rank of a Lie group; ранг группы Ли], 实的或复的

一个 Lie 群的任意 **Cartan 子群** (Cartan subgroup) 的 (实或复) 维数. 一个 Lie 群的秩与它的 **Lie 代数的秩** (rank of a Lie algebra) 是一致的. 如果一个 Lie 群 G 与一个**线性代数群** (linear algebraic group) $\hat{G}$ 的实或复点的集合重合, 则 G 的秩与 $\hat{G}$ 的秩 (见**代数群的秩** (rank of an algebraic group)) 一致.

В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Carter, R. W., Simple groups of Lie type, Wiley, 1972.

[A2] Varadarajan, V. S., Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall, 1974.

[A3] Knapp, A. W., Representation theory of semi-simple groups, Princeton Univ. Press, 1986.

[A4] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

郝钢新 译

模的秩 [rank of a module; ранг модуля]

1) 设环 R 可嵌入体 k 中, R 上一个左模 M 的秩 (rank of a left module) 是张量积 $k\otimes_R M$ 作为 k 上向量空间的维数. 如果 R 是整数环 $\mathbf{Z}$, 则这个定义同通常的 Abel 群的秩的定义相同 (见**群的秩** (rank of a group)). 如果 k 是平坦 R 模 (比如说 k 是 R 的分式体, 参见**平坦模** (flat module)), 则正合序列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

中模的秩满足等式

$$\mathrm{rk}\,M = \mathrm{rk}\,M' + \mathrm{rk}\,M''.$$

2) 任意环 R 上的自由模 M 的秩 (rank of a free module) (见**自由模** (free module)) 定义为它的自由生成元的个数. 如果环 R 可嵌入体中, 则这个定义与 1) 相符. 在一般情况下, 自由模的秩不是唯一确定的. 存在一类环 (称为 n-FI 环), 这种环上的自由模的秩, 当自由生成元个数最多有 n 个时, 是唯一确定的; 而当生成元个数多于 n 个时, 则不是唯一确定的. 环 R 上自由模的秩可唯一确定的一个充分条件是存在 R 到某个体 k 的同态 $\varphi: R\to k$. 这时模的秩的概念可如下地扩充到投射模上. 同态 φ 诱导了投射类群的同态 $\varphi^*: K_0R \to K_0k \approx \mathbf{Z}$, 投射模 P 的秩 (rank of a projective module) 定义为 P 所代表的类在 $\mathbf{Z}$ 中的像. 这样的同态 φ 对任意交换环 R 都存在.

参考文献

[1] Cohn, P. M., Free rings and their relations, Acad. Press, 1971.

[2] Milnor, J., Introduction to algebraic K-theory, Princeton Univ. Press, 1971.

В. Е. Говоров 撰

【补注】 这里定义的投射模 P 的秩依赖于 φ 的选

取．　　　　　　　　　　　　裴定一 译　赵春来 校

奇点的秩［rank of a singular point；ранг особой точки］

见线性常微分方程的秩（rank of an ordinary linear differential equation）．

代数群的秩［rank of an algebraic group；ранг алгебраической группы］

代数群的一 **Cartan 子群**（Cartan subgroup）的维数（这个维数与 Cartan 子群的选取无关）．除了代数群 G 的秩外还考虑它的半单秩（semi-simple rank）和约化秩（reductive rank），按定义它们分别等于代数群 G/R 的秩和代数群 G/R_u 的秩，其中 R 为代数群 G 的根而 R_u 为它的幂幺根（见**群的根**（radical of a group）；**幂幺元**（unipotent element））．一个代数群的约化秩等于它的任一极大环面的维数（见**极大环面**（maximal torus））．定义在域 k 上的**线性代数群**（linear algebraic group）G 的约化 k 秩（reductive k-rank）（在 G 为约化群时（见**约化群**（reductive group））称为它的 k 秩（k-rank））是它的一个极大 k 分裂环面的维数（这一维数与环面的选取无关；见**分裂群**（split group））．若 k 上的约化线性代数群 G 的 k 秩为零（等于 G 的秩），则 G 称为在 k 上是非迷向的（anisotropic）．（相应地，分裂的（split））（亦见**非迷向群**（anisotropic group））．

例．1）所有 n 阶非奇异上三角方阵组成的代数群 T_n 的秩等于它的约化秩，等于 n；T_n 的半单秩是零．

2）所有主对角线上全为 1 的上三角方阵组成的代数群 U_n 的秩等于其维数 $n(n-1)/2$，而其约化秩和半单秩均为零．

3）域 k 上的一个 n 维向量空间的恒定**二次型**（quadratic form）f 的所有 k 自同构组成的代数群 $O_n(k,f)$ 的秩等于 $[n/2]$，而群 $O_n(k,f)$ 的 k 秩等于型 f 的 Witt 指数．

若基域的特征为 0，则代数群 G 的秩等于其 **Lie 代数的秩**（rank of a Lie algebra），都等于所有可能伴随算子 $Ad_L g$ 的特征值 $\lambda=1$ 的最小重数（对所有的 $g\in G$ 取极小值）．若对一元素 $g\in G$，这一重数正好等于代数群 G 的秩，则 g 称为正则的（regular）．G 的所有正则元的集合在 G 上的 **Zariski 拓扑**（Zariski topology）内是开集．

参考文献

［1］Chevalley，C.，Théorie des groupes de Lie，2－3，Hermann，1952－1955．

［2］Borel，A. and Tits，J.，Groupes réductifs，*Publ. Math. IHES*，**27**（1965），55－250．

［3］Borel，A.，Linear algebraic groups，Benjamin，1969．

［4］Humphreys，J.，Linear algebraic groups，Springer，1975．

В．Л．Попов 撰　李慧陵 译

线性常微分方程的秩［rank of an ordinary linear differential equation；ранг линейного обыкновенного дифференциального уравнения］

复域中的微分方程

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(z)w^{(n-j)}=0,\quad P_0(z)=1,\qquad(1)$$

秩即为数 $r=k+1$，其中

$$k=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{n_j}{j},$$

这里设（1）之系数是当 $|z|$ 很大时收敛的 Laurent 级数：

$$P_j(z)=\sum_{m=-\infty}^{n_j} p_{jm}z^m,\quad j=1,\cdots,n.$$

秩的概念只用于 $z=\infty$ 为微分方程（1）之**奇点**（singular point）的情况．微分方程的秩也称为奇点 $z=\infty$ 的秩（rank of the singular point）．若此点是一**正则奇点**（regular singular point），则 $r=0$；若它是一**非正则奇点**（irregular singular point），则 $r>0$．数 k 称为次秩（subrank）．方程的秩是一整数或有理数．若次秩是分母 $q\geqslant 2$ 的有理数，则由（1）作变量变换 $z=\zeta^q$ 所得的方程的次秩是整数．方程的秩在形如 $z=\zeta\varphi(\zeta)$ 的变量变换下是不变的，这里 φ 是在点 $\zeta=\infty$ 处为全纯且在此点不为零的函数．

方程的秩的概念是用来研究在 ∞ 处有奇点的方程（1）的解的构造的．令 $Q(z)$ 是一个 p 次多项式，再令

$$\Psi(\zeta)=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_m\zeta^{-m}$$

是一个形式级数，而 $s\geqslant 1$ 是一整数．级数

$$w=e^{Q(z^{1/s})}z^{\rho}\Psi(z^{1/s})\qquad(2)$$

当 $s=1$（或 $s\geqslant 2$）时是一个 p/s 阶的正规级数（normal series）（或相应为次正规级数（subnormal series））．若方程（1）的一解可以表为在 $z=\infty$ 域中收敛的正规（次正规）级数，就称此解为同样阶数的正规（次正规）解（normal（subnormal）solution）（见［2］，［3］）．

正规（次正规）解的阶数不超过方程之秩；对于形如（2）的形式解，此事也为真．若方程（1）之秩 r 是整数，则（1）至少有一个形状如（2）的 r 阶形式解．作变换 $w(z)=e^{Q(z)}u(z)$ 不会改变方程的秩．若次秩为 $k=p/q$ 而 p,q 是互素整数，$q\geqslant 2$，则方程有不少于 q 个形如（2）的 r 阶形式解．

Hamburger 方程（Hamburger equation）就是具有有理系数且恰有两个奇点的方程（1）．其中一个奇点 $z=0$ 是正则的，另一个 $z=\infty$ 是非正则的．对于 Hamburger 方程可以得到它具有正规解的充分条件；当 $n=2$ 时，则有正规解与非正规解存在的必要充分条件（见[2]）．

当方程（1）有有限多个奇点时，也可引进秩的概念（见[2]，[3]）．

对于复域中含 n 个方程的线性常微分方程组

$$w' = z^r A(z) w, \qquad (3)$$

其中 $r \geq -1$ 是一整数，$A(z)$ 是在 $z=\infty$ 全纯且 $A(\infty) \neq 0$ 的矩阵函数，数 $r+1$ 称为方程组(3)的秩（rank of the system），或称为奇点 $z=\infty$ 的秩（rank of the singular point），数 r 是其次秩（subrank）（见[4]－[6]）．若 $r=-1$，则点 $z=\infty$ 是一个正则奇点；与方程（1）为单个标量方程的情况不同，当 $r>-1$ 时，点 $z=\infty$ 也可能是正则奇点（见[4]）．

参考文献

[1] Poincaré, H., Sur les intégrales irregulières des équations linéaires, *Acta Math.*, 8 (1866), 295－344.

[2] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956.

[3] Латышева, К., Я., Терещенко, Н. И., Орел, Г. С., Нормально-регулярные решения и их приложения, К., 1974.

[4] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[5] Kamke, E., Handbuch der gewöhnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1947.

[6] Wasow, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965.

M. B. Федорюк 撰

【补注】 有时也用级（grade）一词代替秩这个词．可以证明下面的结果，见[A1]．对于每个 r 均有解 $w(z)$ 存在，使得除了沿有限多个方向外

$$\lim_{|z|\to\infty} |z|^{-r} \log|w(z)| > 0.$$

参考文献

[A1] Hille, E., Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1969.

齐民友 译

秩统计量[rank statistic; ранговая статистика]

由秩向量（rank vector）构造的统计量（statistic）．如果 $R=(R_1,\cdots,R_n)$ 是基于随机观测向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的秩向量，则作为 R 的函数的任何统计量 $T=T(R)$ 称为秩统计量（rank statistic）．由公式

$$\tau = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i\neq j} \operatorname{sign}(i-j)\operatorname{sign}(R_i - R_j)$$

定义的向量 R 和 $I=(1,\cdots,n)$ 间的 Kendall 等级相关系数（Kendall coefficient of rank correlation）τ，是秩统计量的典型例子．所谓线性秩统计量在一切秩统计量类中占有特殊位置，其定义如下．设 $A=\|a(i,j)\|$ 是任一 n 阶方阵．那么，统计量

$$T = \sum_{i=1}^{n} a(i, R_i)$$

称为线性秩统计量（linear rank statistic）．例如，由公式

$$\rho = \frac{12}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)$$

定义的 Spearman 等级相关系数（Spearman coefficient of rank correlation）ρ 就是线性秩统计量．

线性秩统计通常计算简便，其概率分布也不难求得．正因如此，秩统计量在线性秩统计量族中投影的概念，在秩统计量理论中起重要作用．设 T 是基于随机向量 X 的一秩统计量，关于其概率分布提出假设 H_0，则在 H_0 成立的情形下使 $\mathsf{E}\{(T-\hat{T})^2\}$ 最小的线性秩统计量 $\hat{T}=\hat{T}(R)$，称为秩统计量 T 在线性秩统计量族中的投影（projection）．通常，投影 $\hat{T}$ 可以相当好地逼近秩统计量 T，且当 $n\to\infty$ 时差 $T-\hat{T}$ 可以小到忽略不计．在假设 H_0："随机向量 X 的分量 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同分布随机变量"成立的情形下，秩统计量 T 的投影 $\hat{T}$ 由以下公式确定：

$$\hat{T} = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{a}(i, R_i) - (n-2)\mathsf{E}\{T\}, \quad (*)$$

其中 $\hat{a}(i,j)=\mathsf{E}\{T|R_i=j\}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$（见[1]）．

在秩统计量 τ 与 ρ 之间存在内在联系．在[1]中证明，Kendall 系数 τ 在线性秩统计量族中的投影 $\hat{\tau}$，精确到一个常数因子与 Spearman 系数 ρ 等同；具体地，有

$$\hat{\tau} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho.$$

由此等式，可见 ρ 和 τ 间的相关系数（correlation coefficient）

$$\operatorname{corr}(\rho,\tau) = \sqrt{\frac{\mathsf{D}\hat{\tau}}{\mathsf{D}\tau}} = \frac{2(n+1)}{\sqrt{2n(2n+5)}},$$

即对于充分大的 n，秩统计量 ρ 和 τ 渐近等价（见[2]）．

参考文献

[1] Hájek, J. and Sidák, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

[2] Kendall, M. G., Rank correlation methods, Griffin, 1970

M. C. Никулин 撰　周概容 译

秩和检验[rank sum test; суммы рангов критерий]

两个样本 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_m$ 的齐一性的检验，基于**秩统计量**(rank statistic)——秩和 $R_1+\cdots+R_m$，其中 R_j 是随机变量 Y_j 在 X_i 和 Y_j 联合的**顺序统计量**(order statistic)序列中的秩（两样本的元素相互独立且服从连续型分布）．此乃 **Wilcoxon 检验**(Wilcoxon test)的变形． A．B．Прохоров 撰

【译注】 这里应假设 $m \leqslant n$．否则用 X_i 和 Y_j 联合的顺序统计量序列中 $X_1,\cdots,X_n$ 的秩之和作检验的统计量．

参考文献

[B1] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957. 周概容 译

秩检验[rank test; ранговый критерий]

基于**秩统计量**(rank statistic)的统计检验．**Wilcoxon 检验**(Wilcoxon test)和 **Mann-Whitney 检验**(Mann-Whitney test)是秩检验的例子．关于一切由连续严格递增函数决定的变换的族 G，秩检验是不变的；从而，秩检验关于移位参数和尺度参数的变化是不变的．此外，在许多统计假设检验问题中，最大功效不变检验可由秩检验很好地逼近．

亦见**非参数检验**(nonparametric test)．

参考文献

[1] Hájek, J. and Sidák, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

[2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1986. М. С. Никулин 撰 周概容 译

秩向量[rank vector; рангов вектор]

基于随机观测向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的向量统计量(statistics)，其第 i 分量 $R_i=R_i(X)(i=1,\cdots,n)$ 定义为

$$R_i=\sum_{j=1}^{n}\delta(X_i-X_j),$$

其中 $\delta(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 的特征函数（指示函数），即

$$\delta(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\geqslant 0,\\ 0, & 若\ x<0.\end{cases}$$

统计量 R_i 称为随机向量 X 的第 i 分量 $X_i(i=1,\cdots,n)$ 的秩(rank)．在满足条件

$$\mathrm{P}\{X_i=X_j\}=0,\ i\neq j,$$

的情形下，秩向量的定义是适定的；而该条件显然成立，如果随机向量 X 的概率分布由密度 $p(x)=p(x_1,\cdots,x_n)$ 决定．在此条件下，由秩向量的定义，可见统计量 R 在由数 $1,\cdots,n$ 之一切排列 $r=(r_1,\cdots,r_n)$ 构成的空间 $\mathfrak{R}=\{r\}$ 中取值，而秩 R_i 的实现 r_i，等于向量 X 的分量中观测值不大于第 i 分量 $X_i(i=1,\cdots,n)$ 的实现的分量个数．

设 $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 是基于观测向量 X 的**顺序统计量**(order statistic)向量．那么，向量偶 $(R,X^{(\cdot)})$ 是向量 X 的分布的**充分统计量**(sufficient statistic)，而 X 本身可以唯一地通过 $(R,X^{(\cdot)})$ 再现．此外，在随机向量 X 的概率密度 $p(x)$ 关于其自变量的排列对称这一补充条件下，充分统计量 $(R,X^{(\cdot)})$ 的分量 R 与 $X^{(\cdot)}$ 独立，且有

$$\mathrm{P}\{R=r\}=\frac{1}{n!},\ r\in\mathfrak{R}.$$

特别地，如果

$$p(x)=p(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i),\qquad(1)$$

即分量 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同分布随机变量（$f(x_i)$ 是 X_i 的密度），则对于任意 $k=1,\cdots,n$，有

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{P}\{R_i=k\}=\frac{1}{n},\ i=1,\cdots,n,\\ &\mathrm{P}\{R_i=k,R_j=m\}=\frac{1}{n(n-1)},\ i\neq j,k\neq m,\\ &\mathrm{E}\{R_i\}=\frac{n+1}{2},\ \mathrm{D}\{R_i\}=\frac{n^2-1}{12},\ i=1,\cdots,n.\end{aligned}\right\}(2)$$

如果(1)成立，则 X_i 和 R_i 有联合密度 $q(x_i,k)$ $(k=1,\cdots,n)$ 由如下公式表示：

$$q(x_i,k)=\qquad(3)$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x_i)]^{k-1}[1-F(x_i)]^{n-k}f(x_i),$$

其中 $F(x_i)$ 是 X_i 的分布函数．由(2)和(3)可见，X_i 关于给定 $R_i=k(k=1,\cdots,n)$ 的条件密度 $q(x_i|R_i=k)$ 由如下公式表示：

$$q(x_i|R_i=k)=\qquad(4)$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x_i)]^{k-1}[1-F(x_i)]^{n-k}f(x_i).$$

利用该式可以深入考察观测向量 X、秩向量 R 和顺序统计量向量 $X^{(\cdot)}$ 之间的内在联系，因为(4)恰好是第 k 顺序统计量 $X_{(nk)}(k=1,\cdots,n)$ 的概率密度．此外，由(3)可见，秩 R 的条件分布为

$$\mathrm{P}\{R_i=k|X_i\}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}[F(X_i)]^{k-1}[1-F(X_i)]^{n-k}.$$

最后，在矩 $\mathrm{E}\{X_i\}$ 和 $\mathrm{D}\{X_i\}$ 存在及(1)成立的条件下，由(2)和(3)可见，X_i 和 R_i 间的相关系数 $\rho(X_i,R_i)$ 为

$$\rho(X_i,R_i)=$$

$$=\sqrt{\frac{12(n-1)}{(n+1)D\{X_i\}}}\int_{-\infty}^{\infty}x_i\left[F(x_i)-\frac{1}{2}\right]dF(x_i).$$

特别地，假如 X_i 在 $[0,1]$ 上均匀分布，则

$$\rho(X_i,R_i)=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\ .$$

如果 X 服从**正态分布**（normal distribution）$N(\mu,\sigma^2)$，则

$$\rho(X_i,R_i)=\sqrt{\frac{3(n-1)}{\pi(n+1)}}\ ,$$

且 $\rho(X_i,R_i)$ 不依赖于正态分布的参数．

参考文献

[1] Hoeffding, W., 'Optimum' nonparametric tests, Proc 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Probab. 1950, Univ. Calif. Press, 1951, 83－92.

[2] Hájek, J. and Sidák, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

[3] Тарасенко, Ф. П., Непараметрическая статистика, Томск, 1976.

М. С. Никулин 撰

周概容 译

Rao-Blackwell-Колмогоров 定理 [**Rao-Blackwell-Kolmogorov theorem; Рао-Блэкуэлла-Колмогорова теорема**]

统计估计理论的命题，以其为基础建立了改进无偏统计估计的方法．

设 X 是一随机变量，取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathscr{B},\mathsf{P}_\theta)$ $(\theta\in\Theta)$，其中概率分布族 $\{\mathsf{P}_\theta,\theta\in\Theta\}$ 具有**充分统计量**（sufficient statistic）$T=T(X)$; $\varphi=\varphi(X)$ 是具有有限二阶矩矩阵的向量统计量．那么，φ 的数学期望 $\mathsf{E}_\theta\varphi$ 存在，而且条件数学期望 $\varphi^*=\mathsf{E}_\theta(\varphi|T)$ 是 $\mathsf{E}_\theta\{\varphi\}$ 的**无偏估计量**（unbiased estimator），即

$$\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\}=\mathsf{E}_\theta\{\mathsf{E}_\theta\{\varphi|T\}\}=\mathsf{E}_\theta\{\varphi\}.$$

Rao-Blackwell-Колмогоров 定理说明，在上述条件下，统计量 φ^* 的平方风险关于一切 $\theta\in\Theta$ 一致不大于 φ 的平方风险，即对于与统计量 φ 有相同维数的任意向量 z 和一切 $\theta\in\Theta$，有不等式

$$z\mathsf{E}_\theta\{(\varphi-\mathsf{E}_\theta\{\varphi\})^T(\varphi-\mathsf{E}_\theta\{\varphi\})\}z^T\geqslant$$

$$\geqslant z\mathsf{E}_\theta\{(\varphi^*-\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\})^T(\varphi^*-\mathsf{E}_\theta\{\varphi^*\})\}z^T.$$

特别地，当 φ 是一维统计量时，对于任意 $\theta\in\Theta$，统计量 φ^* 的方差 $\mathsf{D}_\theta\varphi^*$ 不大于统计量 φ 的方差 $\mathsf{D}_\theta\varphi$．

在最一般条件下，Rao-Blackwell-Колмогоров 定理断言，在充分统计量范围内求平均，不会增加关于任一凸损失函数的风险．由此可见，好的统计估计只需借助充分统计量来求，即只需在充分估计量类中来求．

在族 $\{\mathsf{P}_\theta T^{-1}\}$ 完全的情形下，即零基于 T的唯一无偏估计量是 T 的几乎处处为 0 的函数时，由 Rao-Blackwell-Колмогоров 定理得到的、具有一致最小风险的无偏估计量是唯一的．因此，Rao-Blackwell-Колмогоров 定理提供了构造最优无偏估计量的方法：需要选取任一无偏估计量，然后关于充分统计量求平均．在下面的例中，A. Н. Колмогоров 正是用这种方法建立了正态分布律的分布函数的最优无偏估计．

例．给定随机向量的实现 $X=(X_1,\cdots,X_n)$，其分量 $X_i(i=1,\cdots,n;\ n\geqslant 3)$ 是独立服从同一正态律 $N_1(\xi,\sigma^2)$ 的随机变量，需要估计分布函数

$$\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(u-\xi)^2}{2\sigma^2}}du,$$

$$|\xi|<\infty,\ \sigma>0.$$

假设参数 ξ 和 σ^2 未知．因为正态分布族

$$\left\{\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right),|\xi|<\infty,\sigma>0\right\}$$

有完全充分统计量 $T=(\bar{X},S^2)$，其中

$$\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$

而

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$

则为建立分布函数 $\Phi((x-\xi)/\sigma)$ 的最优无偏估计量应利用 Rao-Blackwell-Колмогоров 定理．作为初始统计量，例如可以取根据向量 X 的某个分量（如 X_1）建立的经验分布函数，即

$$\varphi=\begin{cases}0, & 若\ x<X_1,\\ 1, & 若\ x\geqslant X_1;\end{cases}$$

因为

$$\mathsf{E}\{\varphi\}=\mathsf{P}\{X_1\leqslant x\}=\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right),$$

可见 φ 是 $\Phi((x-\xi)/\sigma)$ 的平凡无偏估计．关于充分统计量 T 对估计量 φ 求平均，得估计量

$$\varphi^*=\mathsf{E}\{\varphi|T\}=\mathsf{P}\{X_1\leqslant x|\bar{X},S^2\}=$$

$$=\mathsf{P}\left\{\frac{X_1-\bar{X}}{S}\leqslant\frac{x-\bar{X}}{S}\ \middle|\ \bar{X},S^2\right\}.\qquad(1)$$

因为统计量

$$V=\left(\frac{X_1-\bar{X}}{S},\cdots,\frac{X_n-\bar{X}}{S}\right)$$

作为 T 的补余，在半径为 n 的 $(n-2)$ 维球面上有均匀分布，因而它既不依赖于未知参数 ξ 和 σ^2，也不依赖于充分统计量 T，所以 $(X_1-\bar{X})/S$ 也不依赖于 ξ，σ^2 和 T，并且

$$\mathrm{P}\left\{\frac{X_1-\bar{X}}{S}\leqslant u\right\}=T_{n-2}(u),\ |u|<\sqrt{n-1}, \quad (2)$$

其中

$$T_f(u)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(f+1)}}\frac{\Gamma((f+1)/2)}{\Gamma(f/2)}\times$$

$$\times\int_{-\sqrt{f+1}}^{u}\left(1-\frac{t^2}{f+1}\right)^{(f-2)/2}du \quad (3)$$

是自由度为 f 的 Thompson 分布函数．于是，由(1)－(3)可见，

$$\varphi^*=T_{n-2}\left(\frac{x-\bar{X}}{S}\right)=$$

$$=S_{n-2}\left(\frac{x-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n-2}{n-1-[(x-\bar{X})/S]^2}}\right)$$

是由 n 次独立观测 $X_1,\cdots,X_n$ 建立的 $\Phi((x-\xi)/\sigma)$ 的最优无偏估计量，其中 $S_f(\cdot)$ 是自由度为 f 的 Student 分布函数．

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н. 《Изв. АН СССР., Сер. матем.》, 14(1950), 4, 303－326.

[2] Rao, C. R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965(中译本：C. R. 劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1987).

[3] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[4] Blackwell, D., Conditional expectation and unbiased sequential estimation, *Ann. Math. Stat.*, 18 (1947), 105－110.

М. С. Никулин 撰

【补注】 在西方文献中，此定理一般称做 Rao-Blackwell 定理(Rao-Blackwell theorem).

周概容 王健 译

Rao-Cramér 不等式[**Rao-Cramér inequality; Рао-Крамера неравенство**], Cramér-Rao 不等式(Cramér-Rao inequality), Fréchet 不等式(Fréchet inequality), 信息不等式(information inequality).

数理统计中的不等式，在未知参数的估计问题中，它确立关于平方损失函数的风险的下界．

假设随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 取值于 n 维空间 $\mathbf{R}^n$，其概率分布由密度 $p(x|\theta)$ 决定，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，$\theta\in\Theta\subset\mathbf{R}^1$．设统计量 $T=T(X)$ 满足条件

$$\mathrm{E}_\theta T=\theta+b(\theta),$$

其中 $b(\theta)$ 是可微函数．现用 T 作未知数值参数 θ 的估计量，并称 $b(\theta)$ 为 T 的偏倚(bias)．那么，在关于族 $\{p(x|\theta)\}$ 的一定正则性条件下，其中包括 Fisher 信息量(Fisher information)

$$I(\theta)=\mathrm{E}\left[\frac{\partial\ln p(X|\theta)}{\partial\theta}\right]^2$$

不为 0，Cramér-Rao 不等式(Cramér-Rao inequality)为

$$\mathrm{E}_\theta|T-\theta|^2\geqslant\frac{[1+b'(\theta)]^2}{I(\theta)}+b^2(\theta). \quad (1)$$

对于具有同一偏倚函数 $b(\theta)$ 的、未知参数 θ 的一切估计量 T，此不等式给出了均方误差 $\mathrm{E}_\theta|T-\theta|^2$ 的下界．

特别地，如果 T 是 θ 的**无偏估计量**(unbiased estimator)，即 $\mathrm{E}_\theta T=\theta$，则由(1)，得

$$\mathrm{D}\,T=\mathrm{E}_\theta|T-\theta|^2\geqslant\frac{1}{I(\theta)}. \quad (2)$$

这样，在此情形下，Cramér-Rao 不等式提供了参数 θ 的无偏估计量 T 之方差的下界 $1/I(\theta)$．此外，Cramér-Rao 不等式表明，**相合估计量**(consistent estimator)的存在性，与当 $n\to\infty$ 时 Fisher 信息量 $I(\theta)$ 的无限增大有关．如果 Cramér-Rao 不等式(2)对于某个无偏估计量 T 为等式，则在所有无偏估计的类中在最小平方风险意义下 T 是最优的，这样的估计量 T 称为有效估计量(efficient estimator)．例如，如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立随机变量，服从同一正态律 $N(\theta,1)$，则 $T=(X_1+\cdots+X_n)/n$ 是未知均值 θ 的有效估计量．

在一般情形下，式(2)中的等式成立，当且仅当 $\{p(x|\theta)\}$ 是指数分布族(exponential family)，即随机向量 X 的概率密度可以表示为

$$p(x|\theta)=c(x)\exp\{u(\theta)\varphi(x)-v(\theta)\},$$

这时充分统计量 $T=\varphi(X)$ 是其期望 $v'(\theta)/u'(\theta)$ 的有效估计量．如果不存在有效估计量，则无偏估计量之方差的下界可以精确化，因为 Cramér-Rao 不等式给出的只是下界而不是下确界．例如，若 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立随机变量，服从同一正态律 $N(a^{1/3},1)$，则参数 a 的无偏估计量之方差的下界为

$$\frac{9a^4}{n}+\frac{18a^2}{n^2}+\frac{6}{n^3},$$

而

$$\frac{1}{I(a)}=\frac{9a^4}{n}.$$

一般，若 Cramér-Rao 不等式(2)达不到等式，则并不说明所得估计量不最优，因为它可能是唯一无偏估计量．

在向量参数情形下，Cramér-Rao 不等式有不同的推广，并且可以推广到估计此参数的函数的情形．

恰好是在这些情形下，Cramér-Rao 不等式中下界的精确化有重要作用．

不等式（1）独立地分别由 M．Fréchet，C．R．Rao 和 H．Cramér 得到．

参考文献

[1] Cramér，H．，Mathematical methods of statistics，Princeton Univ Press，1946（中译本：H 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）．

[2] Waerden，B．L van der，Mathematische statistik，Springer，1957．

[3] Большев，Л．Н．，《Теория вероятностей и её применения》，6（1961），3，319－326．

[4A] Bhattacharyya，A．，On some analogues of the amount of information and their uses in statistical estimation，Chap．Ⅰ，*Sankhyā*，8（1946），1，1－14．

[4B] Bhattacharyya，A．，On some analogues of the amount of information and their uses in statistical estimation，Chap．Ⅱ－Ⅲ，*Sankhyā*，8（1947），3，201－218．

[4C] Bhattacharyya，A．，On some analogues of the amount of information and their uses in statistical estimation，Chap．Ⅳ，*Sankhyā*，8（1948），4，315－328．

М．С．Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lehmann，E．L．，Theory of point estimation，Wiley，1983．

周概容 王健 译

收敛速率［rate of convergence；сходимости скорость］

迭代法的一个指标，它可以使人们对于第 n 次迭代方法的误差依赖于 n 的情况作出评价（见［1］－［3］）．例如，如果 $\|z^n\| \leqslant q^n \|z^0\|$，其中 $\|z^n\|$ 是第 n 次迭代的误差的范数，当 $q<1$ 时，则称方法关于因子 q 以**等比数列**（geometric progression）的速率收敛，而 $-\ln q$ 则称为渐近收敛速率（asymptotic rate of convergence）．

在已知 $\|z^{n+1}\| \leqslant C\|z^n\|^k$ 这类不等式的时候，可称之为多项式的 k 阶收敛速率（例如，Newton-Канторович 迭代法的 2 阶收敛速率，见 **Канторович 方法**（Kantorovich process））．

参考文献

[1] Бахвалов，Н．С．，Численные методы，2 изд．，М．，1975（英译本：Bakhvalov，N．S．，Numerical methods：analysis，algebra，ordinary differential equations，Mir，1977）．

[2] Марчук，Г．И．，Методы вычислительной математики，2 изд．，М．，1980（英译本：Marchuk，G．I．，Methods of numerical mathematics，Springer，1982）．

[3] Самарский，А．А．，Николаев，Е．С．，Методы решения сеточных уравнений，М．，1978（英译本：Samarskii，A．A．and Nikolaev，E．S．，Numerical methods for grid equations．1－2，Birkhauser，1989）．

[4] Hageman，L．A．and Young，D．M．，Applied iterative methods，Acad．Press，1981．

[5] Traub，J．F．，Iterative methods for the solution of equations，Prentice-Hall，1964．

Е．Г．Дьяконов 撰

【补注】 当然，人们也可谈及使用收敛概念的任何过程（不一定是迭代）的收敛速率．见**函数逼近**（approximation of functions）（及有关论文）．

张宝琳 袁国兴 译

有理曲线［rational curve；рациональная кривая］

定义在代数闭域 k 上的一维**代数簇**（algebraic variety），它的有理函数域是 k 上 1 次纯**超越扩张**（transcendental extension）．非奇异完全有理曲线同构于射影直线 $\mathbf{P}^1$．完全的奇异曲线 X 是有理的，当且仅当它的几何亏格 g 等于零，也就是说，X 上没有正则微分形式．

当 k 为复数域 $\mathbf{C}$ 时，（仅有的）非奇异完全有理曲线 X 是 Riemann 球面 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$．

Вик．С．Куликов 撰

【补注】 在经典文献中有理曲线亦称单行曲线（unicursal curve）．

如果 X 定义在一个不必代数闭的域 k 上，且 X 在 k 上双有理等价于 $\mathbf{P}^1_k$，则称 X 为 k 有理曲线（k-rational curve）．

参考文献

[A1] Fulton，W．，Algebraic curves，Benjamin，1969．

[A2] Shafarevich，I．R．，Basic algebraic geometry，Springer，1977（译自俄文）．

陈志杰 译

有理函数［rational function；рациональная функция］

1）有理函数是函数 $w=R(z)$，其中 $R(z)$ 是 z 的有理表达式，也就是说，这个表达式是从自变量 z 和某有限个（实或复）数，通过有限次算术运算得到的．有理函数可以（不唯一地）写成

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

的形式，其中 P,Q 为多项式，且 $Q(z)\not\equiv 0$．这些多项式的系数称为有理函数的系数（coefficients of the rational function）．函数 P/Q 称为不可约的，如果 P 和 Q 没有公共零点（即，P 和 Q 为互素的多项式）．任意有理函数都可写成不可约分式 $R(z)=P(z)/Q(z)$；若 P 和 Q 的次数分别为 m 和 n，那么 $R(z)$ 的次数可以认为是对 (m,n) 或是数

$$N=\max\{m,n\}.$$

当 $n=0$ 时，(m,n) 次有理函数，即**多项式**（polynomial），也称为整有理函数（entire rational func-

tion). 否则，称为分式有理函数 (fractional-rational function). 恒为 0 的有理函数 $R(z)\equiv 0$ 的次数是不定义的. 如果 $m<n$, 函数 P/Q 称为真分式，否则称为假分式. 一个假分式必可唯一地写成

$$\frac{P}{Q}=P_1+\frac{P_2}{Q}$$

的形式，其中 P_1 为多项式，称为分式 P/Q 的整部 (integral part)，而 P_2/Q 为真分式. 如果真分式 $R(z)=P(z)/Q(z)$ 是不可约的，且

$$Q(z)=b_0(z-b_1)^{n_1}\cdots(z-b_l)^{n_l},$$

那么 $R(z)$ 可以唯一地写成若干个简单分式之和:

$$R(z)=\sum_{i=1}^{l}\left[\frac{c_{i1}}{z-b_i}+\cdots+\frac{c_{in_i}}{(z-b_i)^{n_i}}\right]. \quad (1)$$

如果 $P(x)/Q(x)$ 是实系数的真分式，且

$$Q(x)=$$

$$=b_0(x-b_1)^{l_1}\cdots(x-b_r)^{l_r}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdots$$

$$\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s},$$

其中 $b_0,\cdots,b_r,p_1,q_1,\cdots,p_s,q_s$ 为满足条件 $p_j^2-4q_j<0$ 的实数，$j=1,\cdots,s$，则 $P(x)/Q(x)$ 可唯一地写成形式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{c_{i1}}{x-b_i}+\cdots+\frac{c_{il_i}}{(x-b_i)^{l_i}}\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{D_{j1}x+E_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\cdots+\frac{D_{jt_j}x+E_{jt_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{t_j}}\right]. \quad (2)$$

其中所有系数都是实的. 这些系数，类似于 (1) 中的 c_{ij}，均可用待定系数法求得 (见**待定系数法** (undetermined coefficients, method of)).

(m,n) 次不可约有理函数，在扩充的复平面 (即复平面连同 ∞ 点) 上，除了有限个奇点，极点：分母为 0 的点，以及当 $m>n$ 时 ∞ 点之外，都是有定义的而且还是解析的. 注意，当 $m>n$ 时，R 的极点的重数之和等于它的次数 N. 反之，如果 R 是一个解析函数，在扩充的复平面上，它仅有的奇点是有限多个极点，那么 R 必为有理函数.

有理函数经过算术运算 (不能用 $R(z)\equiv 0$ 去除) 仍得有理函数，因此全体有理函数构成一个域. 一般地说，系数在某一域内的有理函数全体构成一个域. 若 $R_1(z)$, $R_2(z)$ 为有理函数，则 $R_1(R_2(z))$ 仍为有理函数. 次数为 N 的有理函数的 p 阶导数是次数不超过 $(p+1)N$ 的有理函数. 有理函数的不定积分 (或原函数) 必为某有理函数与形如 $c_i\log(z-b_i)$ 的一些表达式之和. 如果有理函数对一切实数 x 均是实的，那么不定积分 $\int R(x)dx$ 必能写成一个实系数的有理函数 $R_0(x)$ 与如下形式

$$c_{i1}\log|x-b_i|,\ M_j\log(x^2+p_jx+q_j),$$

$$N_j\operatorname{arctg}\frac{2x+p_j}{\sqrt{4q_j-p_j^2}},\ i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,s$$

的表达式以及一任意常数 C 之和 (其中 c_{i1},b_i,p_j,q_j 如 (2) 所示，而 M_j,N_j 为实数). 函数 $R_0(x)$ 可用 **Остроградский 法** (Ostrogradski method) 求出，这样做可以省去将 $R(x)$ 分解成部分分式 (2) 的运算.

为了计算方便，可以用有理函数来逼近已给的函数. 已有许多研究涉及多个实变量或多个复变量的有理函数 $R=P/Q$，其中 P 与 Q 是这些变量的多项式，而 $Q\neq 0$. 此外也有对抽象有理函数

$$R=\frac{A_1\Phi_1+\cdots+A_m\Phi_m}{B_1\Phi_1+\cdots+B_n\Phi_n}$$

的许多研究，这里 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots$ 是某个紧空间 X 上的线性无关函数，$A_1,\cdots,A_m$, $B_1,\cdots,B_n$ 均为常数. 亦见**分式线性函数** (fractional-linear function); **Жуковский 函数** (Zhukovskiĭ function).

参考文献

[1] Привалов, И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 Изд., М., 1977 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫，复变函数引论，人民教育出版社，1956).

[2] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры, 11 Изд., М. 1975 (中译本: А. Г. 库洛什，高等代数教程，高等教育出版社，1962).

Е. П. Долженко 撰

【补注】 有关逼近结果，见 **Padé 逼近** (Padé approximation).

参考文献

[A1] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1973 (中译本: J. B. 康威，复变函数，上海科学技术出版社，1985).

[A2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

2) 代数簇上的有理函数 (rational functions on an algebraic variety) 是有理函数经典概念的一种推广 (见第一节). 一个不可约**代数簇** (algebraic variety) X 上的有理函数，是对 (U,f) 的一个等价类，其中 U 是 X 中的非空开子集，而 f 是 U 上的**正则函数** (regular function). 两个对 (U,f) 与 (V,g) 是等价的，是指在 $U\cap V$ 上，$f=g$. X 上有理函数全体构成一个域，记为 $k(X)$.

在 $X=\operatorname{spec}R$ 是一个不可约**仿射簇** (affine variety) 的情形，X 上有理函数构成的域与环 R 上分式函数构成的域重合. k 上 $k(X)$ 的超越次数称为簇 X 的维数 (dimension of the variety).

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Вик. С. Куликов 撰 王斯雷 译

有理同伦论 [rational homotopy theory]

【补注】 同伦范畴是研究**代数拓扑学** (algebraic topology) 的自然范畴. 把注意力集中在单连通同伦型以及它们之间的映射使得有可能做局部化 (见**范畴中的局部化** (localization in categories)) 这样的代数运算. 如果把所有素数变为可逆, 就得到有理同伦论.

D. Quillen 用微分 Lie 代数代数地描述了这个理论 ([A1]), 这儿的模型是**闭路空间** (loop space). 它也可以用从有理 de Rham 理论 ([A2]) 得来的微分代数来描述. 陈国才 ([A3]) 则结合前两种描述方法发展了闭路空间上的 de Rham 理论.

以下是从上述理论导出的一个简单命题. 给定单连通紧流形 M, 设 Λ 是微分分次代数, 从 Λ 到 M 上的微分形式有一个映射满足: i) Λ在 0 次是实数域 **R**, 在正次数是自由分次交换代数, ii) 上述映射导出实系数上同调的同构. 则: a) M 的同伦群与 **R** 的张量积自然同构于 Λ 的不可分解空间的对偶. b) 微分给出 M 上 Постников 系统的 k 不变量的实形式. c) Λ差一个微分分次代数的同构是唯一确定的.

Λ, 映到微分形式, 也称为极小模型, 的存在性可用一个简单的归纳步骤来证明. 上述理论很容易推广到幂零空间 (nilpotent space) 的情形 (**幂零空间**是指它的基本群是幂零群, 且基本群在高维同伦上的作用也是幂零的). 通过从平坦联络得来的表示可以将上述理论推广到更一般的基本群, 但此时极小代数也更复杂. 上述理论对 Kähler 流形有应用, 见 [A2] 和 [A4].

参考文献

[A1] Quillen, D., Rational homotopy theory, *Ann. of Math.*, **90** (1969), 209 – 295.

[A2] Sullivan, D., Infinitesimal computations in topology, *Publ. Math. IHES*, **47** (1977), 269 – 332.

[A3] Chen, K.-T., Iterated path integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 831 – 879.

[A4] Morgan, J. W. and Griffiths, P. A., Rational homotopy theory and differential forms, Birkhäuser, 1981.

D. Sullivan 撰 潘建中 译 沈信耀 校

有理映射 [rational mapping; рациональное отображение]

代数簇 (algebraic variety) 上**有理函数** (rational function) 概念的推广. 也就是说, 从不可约代数簇 X 到代数簇 Y (两者均定义在域 k 上) 的有理映射 (rational mapping) 是二元组 (U, φ_U) 的等价类, 这里 U 是 X 的非空开子集, φ_U 是从 U 到 Y 的态射. 如果 φ_U 和 ψ_V 在 $U\cap V$ 上重合, 就称二元组 (U, φ_U) 与 (V, ψ_V) 等价. 特别地, 从簇 X 到仿射直线的有理映射就是 X 上有理函数. 对于每个有理映射 $\varphi: X\to Y$ 存在二元组 $(\widetilde{U}, \varphi_{\widetilde{U}})$, 使得对所有等价的二元组 (U, φ_U) 有 $U\subseteq\widetilde{U}$, 并且 φ_U 是 $\varphi_{\widetilde{U}}$ 在 U 上的限制. 开子集 $\widetilde{U}$ 称为有理映射 φ 的正则区域 (domain of regularity), $\varphi(\widetilde{U})$ 是簇 X 在 φ 下的象 (image) (记为 $\varphi(X)$).

如果 $\varphi: X\to Y$ 是代数簇的有理映射且 $\varphi(X)$ 在 Y 内稠密, 则 φ 确定了域的嵌入 $\varphi^*: k(Y)\to k(X)$. 反之, 有理函数域的嵌入 $\varphi^*: k(Y)\to k(X)$ 确定了从 X 到 Y 的有理映射. 如果 φ 诱导了有理函数域 $k(X)$ 和 $k(Y)$ 的同构, 则称 φ 是双有理映射 (birational mapping).

一般说来, X 的使有理映射 $\varphi: X\to Y$ 不正则的点的集合的余维数等于 1. 但若 Y 完全且 X 为光滑不可约, 则这个集合的余维数至少 2. 如果 X 和 Y 是特征数 0 的代数闭域上的完全不可约簇, 则有理映射 $\varphi: X\to Y$ 可被包含在一个交换图中 (见 [2]):

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \eta\swarrow & & \searrow f \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array} \qquad (*)$$

这里 η, f 是代数簇 Z 的态射且 η 是**单项变换** (monoidal transformation) 的复合. 如果 $\varphi: X\to Y$ 是完全非奇异曲面的**双有理映射** (birational mapping), 则存在图 (*) 使得其中的 η 和 f 都是具有非奇异中心的单项变换的复合 (Zariski 定理 (Zariski theorem)), 也就是说, 完全非奇异曲面的双有理变换都可以分解为具有非奇异中心的单项变换及其逆的复合. 当 $\dim X\geqslant 3$ 时, 是否每个双有理变换都可如此分解仍是一个未解决的问题 (1990).

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[2] Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, *Ann. of Math.*, **79** (1964), 1 – 2, 109 – 326.

Вик. С. Куликов 撰 陈志杰 译

有理数 [rational number; рациональное число]

可表示为整数分式的数. 有理数的正式理论是由整数对引出的. 考虑整数 a 和 $b(b\neq 0)$ 的有序对 (a, b). 两个如此数对 (a, b) 和 (c, d) 称为等价的 (equivalent) (相等的 (equal)) 当且仅当 $ad=bc$. 这是一等价关系, 是自反的、对称的和传递的.

所有这种数对按等价关系划分为等价类．有理数（rational number）由数对的等价类定义．数对（a, b）亦称有理分式（rational fraction）（或整数分式（fraction of integers））．不同的类定义不同的有理数．所有有理数的集合是可数集．含有形式为 $0/b$ 的数对的有理数称为零（zero）．若 r 是有理数，$a/b \in r$，则含有 $-a/b$ 的有理数称为 r 的（加法的）逆，记为 $-r$．有理数 r 称为正的（positive）（负的（negative）），若它含有一有理分式 a/b，其中 a, b 同号（异号）．若一有理数是正的（负的），则它的（加法）逆是负的（正的）．有理数集可以下法排序：每一负有理数小于每一正有理数；一正有理数 r' 小于另一正有理数 r''（写为 $r' < r''$），若存在有理分式 $a/b \in r'$, $c/d \in r''$, $a, b, c, d > 0$，使得 $ad < bc$；每一负（正）有理数 r 小（大）于零：$r < 0 (r > 0)$；一负有理数 r' 小于另一负有理数 r''，若正有理数 $-r'$ 大于正有理数 $-r''$：$-r' > -r''$．有理数 r 的绝对值 $|r|$ 按通常方法定义：若 $r \geqslant 0$, $|r| = r$；若 $r < 0$, $|r| = -r$．

两个有理分式 a/b 和 c/d 之和由有理分式 $(ad+bc)/bd$ 定义，乘积由 ac/bd 定义．两个有理数 r' 和 r'' 的和（sum）（积（product））由含有属于 r' 和 r'' 的两个有理分式 a/b 和 c/d 之和（积）的有理分式等价类定义．有理数 r' 和 r'' 的序、和、积不依赖于对应等价类的代表的选择，即它们由 r' 和 r'' 自身唯一确定．有理数形成一**有序域**（ordered field），以 $\mathbf{Q}$ 表示．

有理数 r 由其等价类中任一有理分式 a/b 表示，即 $a/b \in r$．因此，同一个有理数可以写成不同的（却是等价的）有理分式．

如果使每个含有形如 $a/1$ 的有理分式的有理数对应整数 a，则得到这种有理数的集合到整数环 $\mathbf{Z}$ 上的同构．因此，含有形式为 $a/1$ 的有理分式的有理数用 a 表示．

形如

$$\varphi(r) = |r|^{\alpha},\ 0 < \alpha \leqslant 1 \qquad (1)$$

的每个函数是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的一范数，即它满足条件：

1）对任一 $r \neq 0$, $\varphi(r) > 0$; $\varphi(0) = 0$;

2）$\varphi(r' + r'') \leqslant \varphi(r') + \varphi(r'')$;

3）$\varphi(r' \cdot r'') = \varphi(r')\varphi(r'')$, $r', r'' \in \mathbf{Q}$.

有理数域关于范数（1）并非完全的．$\mathbf{Q}$ 关于范数（1）的完全化产生实数域．

考虑函数

$$\Psi_p(r) = \rho^{\nu(r)}, \qquad (2)$$

其中 p 为素数，r 为有理数，$\nu(r)$ 由

$$r = p^{\nu(r)} \frac{a}{b}$$

确定，$\nu(r)$ 是一整数，a/b 为一不可约有理分式，使得 a 和 b 都不能被 p 整除，ρ 为一固定数，$0 < \rho < 1$．Ψ_p 为 $\mathbf{Q}$ 上一范数．它引出所谓的 p 进度量（p-adic metric）．$\mathbf{Q}$ 关于此度量并非完全的．将 $\mathbf{Q}$ 关于范数（2）完全化，得到 p 进数域（见 **p 进数**（p-adic number））．由（1）和（2）引进的度量（对所有素数）穷竭 $\mathbf{Q}$ 上全部非平凡度量．

按十进制小数的记号，只有有理数可被表示为循环小数．

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич, И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972（英译本：Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1987）.

[2] Pisot, C. and Zamansky, M., Mathématiques générales: algèbre-analyse, Dunod, 1966.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 有理数另一个特征性质是它们的**连分数**（continued fraction）有限．数论中一个非常重要的课题是求诸如 $y^2 = x^3 - 7$, $x^3 + y^3 + z^3 = 4$ 等方程（见 **Diophantus 方程**（Diophantine equations））的有理解．最后，"有理数"问题是和**无理数**（irrational number）问题密切联系的．例如 $e\pi$, $e + \pi$ 或者 **Euler 常数**（Euler constant）γ 是不是有理数，尚不清楚．

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

[A2] Bachman, G., Introduction to p-adic numbers and valuation theory, Acad. Press, 1964.

[A3] Waerden, B. L. van der, Algebra, 2, Springer, 1967（中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学 II，科学出版社，1976）.

沈海玉 译

有理表示 [**rational representation**; **рациональное представление**]，代数封闭域 k 上代数群 G 的

G 到 k 上有限维向量空间 V 上的一**线性表示**（linear representation）而它同时又是 G 到 $GL(V)$ 内的有理同态．也可称 V 是一个有理 G 模（rational G-module）．G 的有限个有理表示的直接和及张量积还是有理表示．任意有理表示的子表示和商表示仍为有理表示．任意有理表示的对称幂和外幂是有理表示．一有理表示的逆步表示是有理表示．

若 G 为有限的，则它的每个线性表示都是有理表示，此时有理表示论就是有限群的表示论（见**群的表示**（representation of a group））．线性代数群理论中的各种特殊方法是用于研究有理表示的，如果所考查的

群是连通的．而且最充分发展的理论是连通半单代数群的有理表示的理论．设 G 为这样的一个群．T 为一**极大环面**(maximal torus)，$X(T)$ 是它的有理特征标的群(写成加法)，Σ 为 G 相对于 T 的**根系**(root system)，W 为其 **Weyl 群**(Weyl group)，而 $(\,,\,)$ 是 $X(T)\otimes\mathbf{R}$ 上的一个 W 不变的正定非退化标量积．现设 $\varphi: G\to \mathrm{GL}(V)$ 是一有理表示．φ 到 T 上的限制分解成为一维表示的直和，确切地说

$$V=\bigoplus_{\chi\in P_\varphi} V(\chi),$$

这里 $P_\varphi\subset X(T)$ 是 T 中特征标的某个集合，称作表示的**权**(weight)，而

$$V(\chi)=\{v\in V:\varphi(t)v=\chi(t)v\quad \forall t\in T\}\neq 0.$$

权的集合 P_φ 是在 W 作用下不变的．

如果 $\operatorname{char}k=0$，则 G 的每个有理表示是完全可约的．但若 $\operatorname{char}k>0$，情况就不同了(见 **Mumford 假设**(Mumford hypothesis))．但不管 k 的特征如何，有一个关于不可约有理表示的完全的描述．

设 B 为 G 中包含 T 的一个 **Borel 子群**(Borel subgroup)，并设 Δ 为 Σ 内由 B 定义的单根的集合．把 B 的有理特征标群 $X(B)$ 与 $X(T)$ 视为等同．对任一不可约有理表示 $\varphi: G\to\mathrm{GL}(V)$，在 V 内有唯一的一个一维权子空间 $V(\delta_\varphi)$，$\delta_\varphi\in P_\varphi$，在 B 下不变．特征标 δ_φ 称为不可约有理表示 φ 的最高权(the highest weight of the irreducible rational representation)；它是支配权，即对任意 $\alpha\in\Delta$，$(\delta_\varphi,\alpha)\geqslant 0$，并且每个其他的权 $\chi\in P_\varphi$ 有形状

$$\chi=\delta_\varphi-\sum_{\alpha\in\Delta}m_\alpha\alpha,\ m_\alpha\in\mathbf{Z},\ m_\alpha\geqslant 0.$$

映射 $\varphi\mapsto\delta_\varphi$ 定义了不可约有理表示的等价类和 $X(T)$ 中的支配元素之间的一一对应．所有不可约有理表示可由下列方法构造．设 $k[G]$ 为 G 上正则函数的代数．给定任一 $\chi\in X(T)=X(B)$，考虑子空间

$$k[G]_\chi=\{f\in k[G]:f(gb)=\chi(b)f(g)\ \forall b\in B,\ g\in G\}.$$

它是有限维的并且在 G 的左平移作用下是有理 G 模．这个空间的几何解释如下：它可以自然地等同于由特征标 $-\chi$ 所决定的 G/B 上的一维齐次向量丛的正则截断的集合．令 $w_0\in W$ 为把正根全映到负根的元素．若 $k[G]_{-w_0(\chi)}\neq 0$，则 χ 为支配特征标，而 $k[G]_{-w_0(\chi)}$ 中的极小非零 G 子模就是以 χ 为最高权的不可约有理 G 模．每个不可约有理 G 模都可如此得到．若 $\operatorname{char}k=0$，则 G 模 $k[G]_{-w_0(\chi)}$ 本身就是不可约的．

为了得到各不可约有理表示，常常对一些给定的有理表示使用上面所说的程序．例如，设 φ_i $(i=1,2,\cdots,d)$ 是不可约有理表示并以 χ_i 为最高权，则 $\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_d$ 的某个商表示就是有最高权 $\chi_1+\cdots+\chi_d$ 的不可约有理表示(它称为 $\varphi_1,\cdots,\varphi_d$ 的 Cartan 积(Cartan product))．若 φ 是有最高权 χ 的不可约有理表示，则 S^d_φ 的某个商表示是有最高权 $d\chi$ 的不可约有理表示．而且 φ^* 是不可约的，其最高权为 $-w_0(\chi)$．

设 $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数(见**代数群的 Lie 代数**(Lie algebra of an algebraic group))．若 $\varphi: G\to\mathrm{GL}(V)$ 为一有理表示，则它的微分 $d\varphi$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个表示．有理表示 φ 称为无穷小不可约的(infinitesimally irreducible)，如果 $d\varphi$ 是代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示．无穷小不可约的有理表示是不可约的，而当 $\operatorname{char}k=0$ 时反过来也是对的(这在很大程度上把群的有理表示理论归结为它的 Lie 代数的表示论)．但当 $\operatorname{char}k=p>0$ 时情况并非如此．此时无穷小不可约有理表示仅仅是那些有最大权 χ，并且

$$0\leqslant\frac{2(\chi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}<p,\ \text{对一切}\ \alpha\in\Delta$$

的不可约有理表示．并且所有不可约有理表示可以用无穷小不可约表示构造出来．确切地说，如果 G 是单连通的，即 $X(T)$ 与根系 Σ 的权的格相重合，则每个不可约有理表示可以唯一地分解成为形如

$$\varphi_0\otimes\varphi_1^{\mathrm{F}r}\otimes\cdots\otimes\varphi_d^{\mathrm{F}r^d}$$

的张量积，其中 $\varphi_0,\cdots,\varphi_d$ 为无穷小不可约的，而 $\varphi_i^{\mathrm{F}r^i}$ 是对表示 φ_i 的矩阵元素施行 Frobenius 自同构 $a\mapsto a^{p^i}$ $(a\in k,\ p=\operatorname{char}k)$ 所得到的表示．

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Borel, A., Linear representations of semi-simple algebraic groups, in R. Hartshorne (ed.): Algebraic Geometry (Arcata, 1974), Proc. Symp. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 421 – 440.

[3] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

[4] Borel, A. et al (eds.), Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lecture notes in math., 131, Springer, 1970.

[5] Steinberg, R., Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Press, 1968.

[6] Steinberg, R., Representations of algebraic groups, *Nagoya Math. J.*, 22 (1963), 33 – 56.

[7] Hochschild, G., The structure of Lie groups. Holden Day, 1965.

[8] Humphreys, J., E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972.

В. Л. Попов 撰

【补注】 关于 $\operatorname{char} k > 0$ 的复杂情况，见[A1].

参考文献

[A1] Jantzen, J. C., Representations of algebraic groups, Acad. Press, 1987.

李慧陵 译

有理奇点 [**rational singularity**; **рациональная особенность**]

代数簇(algebraic variety)或复解析空间 X 的正规**奇点**(singular point) P，它允许有一个分解(见**奇点的分解**(resolution of singularities) $\pi: Y \to X$，使得结构层 $\mathcal{O}_Y$ 的正象 $R^i\pi_*\mathcal{O}_Y$ 当 $i \geq 1$ 时等于零. 从而给定奇点的任何一种分解都有这个性质. 如果基域的特征数是零，则奇点是有理的，当且仅当 X 是 Cohen-Macauley 簇，并且对偶层的嵌入 $\pi_*: \omega_Y \to \omega_X$ 是一个同构([5]).

有理奇点的一些例子是商空间 $\mathbf{C}^n/G$ 的奇点，这里 G 是线性变换的有限群；超曲面 $x_0^{k_0} + \cdots + x_n^{k_n} = 0$ 的奇点 0 其中 $\sum_{i=1}^{n} k_i^{-1} > 1$(见[8])以及环面奇点.

如果 $P \in X$ 是域 $\mathbf{C}$ 上的 Gorenstein 孤立奇点(Gorenstein isolated singularity)(即层 ω_X 是局部自由的)，ω 是 ω_X 的生成截面，则 P 是有理奇点，当且仅当在 P 的充分小邻域 U 里有(见[7])

$$\int_U \omega \wedge \bar{\omega} < \infty .$$

在 $\dim X = 2$ 时，奇点 P 是有理的，当且仅当对于分解 π 的例外曲线 $E = \pi^{-1}(P)$ 上的每个闭链 D 有 $h^1(\mathcal{O}_D) = 0$. 在这种情形下，E 的所有分支 E_i 同构于射影直线 $\mathbf{P}^1$，E 是具有正规交的除子而且分解的图 Γ 是树.

奇点的基本闭链(fundamental cycle of a singularity)定义为 E 上使 $Z \cdot E_i \leq 0$ 对所有 i 成立的极小闭链(cycle) $Z > 0$. 有一个利用 Z 的有理性判则：$h^1(\mathcal{O}_Z) = 0$，并且可计算奇点的重数以及切空间的维数([1]).

记 号	方 程	图	G
$A_n,\ n \geq 1$	$x^{n+1} + y^2 + z^2$	○—○—⋯—○—○	C_{n-1}
$D_n,\ n \geq 4$	$xy^2 + x^{n+1} + z^2$	○—○—⋯—○<(分叉)	D_{n-2}
E_6	$x^3 + y^4 + z^2$	○—○—○—○—○，中间点下接 ○	T
E_7	$x^3 + xy^3 + z^2$	○—○—○—○—○—○，第三点下接 ○	O
E_8	$x^3 + y^5 + z^2$	○—○—○—○—○—○—○，第三点下接 ○	I

三维仿射空间 A^3 里的超曲面 X 的有理奇点，或等价地，2 重二维有理奇点被称为有理二重点(rational double point). 有理二重点有各种等价的刻画，而且有不同的名称，如 Klein 奇点(Klein singularities)，Du Val 奇点(Du Val singularities)以及简单奇点(simple singularities). 有理二重点的方程来源于**正多面体**(regular polyhedra)对称群的不变量的方程(见[6]). 这对应于把有理二重点作为商空间 $X = \mathbf{C}^2/G \subset \mathbf{C}^3$ 的奇点的刻画，这里 G 是 $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ 的有限子群，也就是说，在共轭的意义下，G 是 n 阶循环群 C_n、二面体群 D_n、四面体群 T、八面体群 O 或二十面体群 I. 如果 π 是有理二重点的极小分解，则 $E_i^2 = -2$ 对所有的 i，而且加权(分解)图 Γ 等同于半单 Lie 代数 A_n, D_n, E_6, E_7 或 E_8 之一的单根的图，这些符号也被用来标注奇点(见**半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple)). 这样的奇点可被它的加权图 Γ 确定到差一个同构([3], [11])，如上表所示. 有理二重点可被刻画为二维 Gorenstein 有理奇点. 它们亦被称为典范奇点(canonical singularities)，因为出现在一般型代数曲面的典范模型里的奇点就是这一些.

如果 $P \in X$ 是任意维数的 Gorenstein 有理奇点，则它的一般超曲面截面或是有理的，或是椭圆 Gorenstein 奇点，这可导出三维有理奇点的一种刻画(见[8]).

下列断言对所有维数都正确(见[4]).

1) 有理奇点的形变仍为有理奇点.

2) 如果 $f: X \to S$ 是平坦态射，$x \in X$ 使得 $s = f(x)$ 是 S 内有理奇点且 x 是纤维 $X_s = f^{-1}(s)$ 的有理奇点，则 x 是 X 内有理奇点.

3) 如果形变 $f: X \to S$ 有光滑基 S，且容许奇点的同时分解，则点 $x \in X$ 为有理奇点，当且仅当 x 在它本身所在的纤维 $f^{-1}(f(x))$ 里是有理奇点.

在 $\dim X = 2$ 的情形下，设簇 Y 分解了有理奇点 $P \in X$，则对 Y 的每个形变，通过收缩它的纤维的例外曲线即可定义 P 的一个形变. 作为其结果即可得到簇 Y 和奇点 P 的通用形变的基的态射 $\varphi: \mathrm{Def}\, Y \to \mathrm{Def}\, X$. 象 $A = \varphi(\mathrm{Def}\, Y)$ 是 $\mathrm{Def}\, X$ 的非奇异不可约分支，称为 Artin 分支(Artin component)，且 $\varphi: \mathrm{Def}\, Y \to A$ 是 Galois 覆叠，它的群 W 可利用奇点 P 的图 Γ 得到(见[2], [10]). 特别对于有理二重点，φ 是满的且 W 等同于对应 Lie 代数的 **Weyl 群**(Weyl group)，也就是说，有理奇点的通用形变可通过具有 Weyl 群 W 的形变的基的 Galois 覆叠被同时分解(见[9]).

参考文献

[1] Artin, M., On isolated rational singularities of surfaces, *Amer. J. Math.*, **88** (1966), 129 – 136.

[2] Artin, M., Algebraic construction of Brieskorn's resolutions, *J. Algebra*, **29** (1974), 2, 330 – 348.

[3] Brieskorn, E., Rationale singularitäten komplexer Flächen, *Invent. Math.*, 4 (1968), 336 – 358.

[4] Elkik, R., Singularités rationelles et déformations, *Invent. Math.*, 47 (1978), 139 – 147

[5] Kempf, G., Cohomology and convexity, in G. Kempf, et al. (ed.): Toroidal Embeddings Ⅰ, Lectures notes in math., vol. 339, Springer, 1973, 41 – 52

[6] Klein, F., Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree, Dover, reprint 1956(译自德文).

[7] Laufer, H. B., On rational singularities, *Amer. J. Math.*, 94 (1972), 597 – 608.

[8] Reid, M., Canonical 3-folds, *J. Geom. Alg. Angers* (1980), 273 – 310.

[9] Slodowy, P. J., Simple singularities and simple algebraic groups, Lecture notes in math., 815, Springer, 1980.

[10] Wahl, J. M., Simultaneous resolution of rational singularities, *Compos. Math.*, 38 (1979), 43 – 54.

[11] Тюрина, Г. Н., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 32 (1968), 943 – 970

Вал. С. Куликов 撰

【补注】 亦见 Дынкин 图 (Dynkin diagram).

[A1] Demazure, M., Pinkham, H. and Teissier, B. (eds.), Sém. singularités des surfaces, Lecture notes in math., 777, Springer, 1980.

[A2] Durfee, A., Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points, *Ens. Math.*, 25 (1979), 131 – 163.

陈志杰 译

有理曲面 [rational surface; рациональная поверхность]

定义在代数闭域 k 上的二维代数簇 (algebraic variety), 它的有理函数域是 k 的二次纯超越扩张 (transcendental extension). 有理曲面 X 双有理同构于射影空间 $\mathbf{P}^2$.

完全光滑有理曲面 X 的几何亏格 (geometric genus) p_g 和非正则性 (irregularity) q 等于 0, 也就是说, 在 X 上没有正则微分 2 形式或 1 形式. 光滑完全有理曲面 X 的多重亏格 $P_n = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X))$ 也等于 0, 这里 K_X 是曲面 X 的典范除子. 这些双有理不变量使有理曲面区别于其他代数曲面, 换句话说, 不变量 $p_g = q = P_2 = 0$ 的光滑完全代数曲面是有理曲面 (Castelnuovo 有理性准则 (Castelnuovo rationality criterion)). 根据另一个有理性准则 (rationality criterion), 光滑代数曲面 X 是有理曲面, 当且仅当 X 上存在自相交数 $(C^2)_X > 0$ 的非奇异有理曲线 C.

除了有理曲面和直纹面外, 每个代数曲面都双有理同构于唯一的极小模型. 在有理曲面类中有可数多个极小模型, 它们是射影空间 $\mathbf{P}^2$ 以及曲面 $F_n \simeq P(\mathscr{E}_n)$ (射影直线 $\mathbf{P}^1$ 上两维向量丛的射影化), 这里 $\mathscr{E}_n \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-n)$, $n \geqslant 0$, $n \neq 1$. 换句话说, 曲面 F_n 是有理曲线上的有理曲线纤维化, 它具有一个截面 S_n 是自相交数 $(S_n^2)_F = -n$ 的光滑有理曲线. 曲面 F_0 同构于直积 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, 曲面 F_n 可从 F_0 通过一系列初等变换而得到 (见[1]).

有理曲面有一个很大的双有理变换群 (称为 Cremona 变换群 (group of Cremona transformations)).

如果一个光滑完全有理曲面上的反典范层 $\mathcal{O}_X(-K_X)$ 是丰富层 (ample sheaf), 则称 X 为 Del Pezzo 曲面 (Del Pezzo surface). 使 $-K_X \sim rD$ 对 X 上某个除子 D 成立的最大整数 r 称为 Del Pezzo 曲面的指数. r 等于 1, 2 或 3 (见[2]). 指数 3 的 Del Pezzo 曲面同构于 $\mathbf{P}^2$. 对于指数 2 的 Del Pezzo 曲面 X, 由层 $\mathcal{O}_X(D)$ 定义的有理映射 $\varphi_{\mathcal{O}_X(D)}: X \to \mathbf{P}^3$ 给出了到 $\mathbf{P}^3$ 内二次曲面上的双有理同构. 指数 1 的 Del Pezzo 曲面可以通过对平面 $\mathbf{P}^2$ 作中心位于一般位置点上的 n 个单项变换 (monoidal transformation) 得到, 这里 $1 \leqslant n \leqslant 8$ (见[2]).

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 75 (1965).

[2] Исковских, В. А., в сб., Современные проблемы математики, т. 12, М., 1979, 59 – 157.

[3] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

Вик. С. Куликов 撰

【补注】 如果 X 定义在一个不一定代数闭的域上, 且 X 在 k 上双有理等价于 $\mathbf{P}_k^2$, 则称 X 为 k 有理曲面 (k-rational surface).

参考文献

[A1] Beauville, A., Surfaces algébriques complexes, *Astérisque*, 54 (1978).

[A2] Semple, J. and Roth, L., Introduction to algebraic geometry, Oxford, Univ. Press, 1985.

陈志杰 译

有理簇 [rational variety; рациональное многообразие]

定义在代数闭域 (algebraically closed field) k 上的代数簇 (algebraic variety) X, 它的有理函数域 $k(X)$ 同构于 k 上有限次纯超越扩张 (transcendental extension). 换句话说, 有理簇就是双有理同构于射影空间 $\mathbf{P}^n$ 的代数簇 X.

一个光滑完全有理簇具有下列双有理不变量. X 上正则微分 k 形式的空间 $H^0(X, \Omega_X^k)$ 的维数都等于 0. 此外, 多重亏格

$$P_n = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X)) = 0, \text{ 对 } n > 0,$$

这里 K_X 是代数簇 X 的典范除子，也就是说，有理簇 X 的小平维数（Kodaira dimension）等于 $-\infty$.

在低维的情形下上述不变量可唯一地从所有代数簇中区分出有理簇的类. 当 $\dim_k X = 1$ 且 X 的亏格等于0时，X 是**有理曲线**（rational curve）. 当 $\dim_k X = 2$ 时，算术亏格

$$p_a = \dim_k H^0(X, \Omega_X^2) - \dim_k H^0(X, \Omega_X^1) = 0$$

以及多重亏格 $P_2 = 0$，则 X 是**有理曲面**（rational surface）. 但当 $\dim_k X \geq 3$ 时没有好的有理性判则，这是由于 **Lüroth 问题**（Lüroth problem）的解答是否定的.

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）.

Вик. С. Куликов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beauville, A., Colliot-Hélène, J.-L., Sansuc, J. J. and Swinnerton-Dyer, P., Variétés stablement rationelles non-rationelles, *Ann. of Math.*, 121 (1985), 283－318.

陈志杰 译

有理性定理 [**rationality theorems**; **рациональности теоремы**]，对代数群的

关于各种代数群簇的有理性（单有理性）或非有理性的陈述（见**有理簇**（rational variety），**单有理簇**（unirational variety））. 因为Abel 簇不可能是有理的，主要兴趣在于线性代数群的有理性问题. 这里有理性问题有两个本质上不同的方面：几何的与算术的，按基域 K 是代数闭或否来分. 复数域 C 上第一个有理性定理事实上是 E. Picard 证明的，按当代的术语，建立了连通复数群的簇的单有理性. 群簇的有理性问题直至 1954 年才被 C. Chevalley（[1]）明确地加以叙述. 这个方向上的进展是与代数群结构理论的成果密切相关的. 因此 Levi 分解使得人们可把有理性问题化到约化群的情形. 并且 **Bruhat 分解**（Bruhat decomposition）是证明在任意代数闭域上**约化群**（reductive group）的簇的有理性的关键. 从而在几何的情形已得到了最终的结果.

代数非闭域 K 的情况则复杂得多. 代数环面提供了非有理 K 簇的例子. 例如对应于 K 的双二次扩张 $L = K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ 的三维环面 $T = R_{L/K}^{(1)}(G_m)$（见[1]）. 这个例子是最小的，因为维数 ≤ 2 的环面是有理的. 代数环面总是单有理的. 任意的连通 K 群不必是单有理的（[3]），但若 K 为完满的或 G 是约化的，则可证单有理性（见[1]－[4]）. 因此群簇的有理性问题具有代数非闭域上 **Lüroth 问题**（Lüroth problem）的特征.

由于任意的约化群是**环面**（torus）与**半单群**（semi-simple group）的几乎直积，因此可以自然地分为两种基本的情形：1) G 是环面；2) G 是半单群. 对第一种情形可利用各种上同调不变量作研究（对于半单群，这些不变量不那么有效）. 对于在基域的 Abel 扩域上分裂的环面已有了相当完全的结果（见[5]）. 在半单群的类中，第一个非有理簇的例子是非单连通群，其构造包含在[10]内. 由此得到的猜测：单连通群的簇总是有理的，被 В. П. Платонов 利用约化 K 理论（reduced K-theory）所否定（见[6]，[7]）. 当 D 是有限维中心单 K 代数时，已经证明如果 SL(1, D) 确定的簇是有理的，则约化 **Whitehead 群**（Whitehead group）平凡. 这个结果被平移到酉群（[12]）. 设 f 是 $K(\mathrm{char}\, K \neq 2)$ 上 n 个变量的非退化二次型，关于旋子簇 Spin(n, f) 的有理性也有一些结果. 当 $n \leq 5$ 或 K 是局部紧且非离散、或 K 是有理数域时，旋子簇是有理的（见[8]，[9]，[11]）. 当 $n \geq 6$ 时存在不是有理的旋子簇（[8]）. 考虑到 Spin(n, f) 是有理簇 SO(n, f) 的二叶覆叠，后一结论是令人惊讶的.

术语"有理性定理"有时在代数群理论中被用于略有不同的意义下，被用于与不必代数闭的域上的群的性质有关的断言中，譬如 Rosenlicht-Grothendieck 定理（Rosenlicht-Grothendieck theorem），它断言任何连通 K 群具有定义在 K 上的极大环面（见[4]）.

参考文献

[1] Chevalley, C., On algebraic group varieties, *J. Math. Soc. Japan*, 6 (1954), 3/4, 303－324.

[2] Demazure, M. and Grothendieck, A., Schemas en groupes, Ⅱ, Lecture notes in math., 152, Springer, 1970.

[3] Rosenlicht, M., Some rationality questions on algebraic groups, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 43 (1957), 25－50.

[4] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[5] Воскресенский, В. Е., Алгебраические торы, М., 1977.

[6] Платонов, В. П., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 142 (1976), 198－207.

[7] Платонов, В. П., 《Докл. АН БССР》, 21 (1977), 3, 197－198.

[8] Платонов, В. П., 《Докл. АН СССР》, 248 (1979), 3, 524－527.

[9] Платонов, В. П., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 157 (1981), 161－169.

[10] Serre, J.-P., Cohomologie Galoisienne, Springer, 1964.

[11] Черноусов, В. И., 《Докл. АН БССР》, 25 (1981), 4, 293 – 296.

[12] Янгевский, В. И., 《Матем. сб.》, 110 (1979), 4, 579 – 596.
А. С. Рапинчук 撰

【补注】 单有理性蕴含有理点的稠密性. 例如若 G 是无限域 K 上的连通约化群, 则 K 有理点的群 G_K 在 G 内是 Zariski 稠密的.

Rosenlicht-Grothendieck 定理常被简称为 Grothendieck 定理(Grothendieck theorem).

陈志杰 译

谷函数 [ravine function 或 valley function; овражная функция]

【补注】 一种多元实变函数, 它接近于极小值处的图形有谷型形状. 这样一些函数在极小化问题中可能引起困难. 关于更精确的定义和更详细情况见**极小化方法(强依赖于多个变量的函数的)**(minimization methods for functions depending strongly on a few variables).

葛显良 译 吴绍平 校

射线 [ray; луч]

同**半直线**(half-line).

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969.

射线函数 [ray function; лучевая функция]

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 上定义的实值函数 $F(x)$, 满足下述条件: $F(x)$ 是连续的、非负的和齐次的(即对于任何实数 $\tau \geqslant 0$, 有 $F(\tau x) = \tau F(x)$). 一个射线函数 $F(x)$ 称为正的(positive), 如果对于一切 $x \neq 0$, 有 $F(x) > 0$; 称为对称的(symmetric), 如果 $F(-x) = F(x)$. 一个射线函数称为凸的(convex), 如果对于任何 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 有

$$F(x+y) \leqslant F(x) + F(y).$$

对于任何射线函数 $F(x)$, 存在常数 $c = c_F$, 使得

$$F(x) \leqslant c|x|, \ x \in \mathbf{R}^n.$$

如果 $F(x)$ 是正的, 则还存在常数 $\tilde{c} = \tilde{c}_F > 0$, 使得

$$F(x) \geqslant \tilde{c}|x|, \ x \in \mathbf{R}^n.$$

满足条件

$$F(x) < 1$$

的点 $x (x \in \mathbf{R}^n)$ 的集合 $\mathfrak{C}$ 是一个**星形体**(star body). 反之, 对于任何开星形体 $\mathfrak{C}$, 存在唯一的射线函数 $F_{\mathfrak{C}}(x)$, 使得

$$\mathfrak{C} = \{x: F_{\mathfrak{C}}(x) < 1\}.$$

一个星形体 $\mathfrak{C}_F$ 是有界的, 当且仅当它的射线函数 $F(x)$ 是正的. 如果 $F(x)$ 是对称函数, 则 $\mathfrak{C}_F$ 关于点 O 是对称的; 反之亦真. 一个星形体是凸的, 当且仅当 $F(x)$ 是一个凸射线函数.

参考文献

[1] Cassels, J. W. S., An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1959.
А. В. Малышев 撰

【补注】 星形体通常定义为闭射线集. 射线函数通常称为距离函数(distance function).

参考文献

[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A2] Hlawka, E., Das inhomogene Problem in der Geometrie der Zahlen, in Proc. Internat. Congr. Math. Amsterdam, Vol. 3, 1954, 20 – 27. (Also: Selecta, Springer, 1990, 178 – 185.)

杜小杨 译

Ray-Knight 紧化 [Ray-Knight compactification]

【补注】 在某些一般假设下研究齐次强 **Марков 过程**(Markov process)的有力工具. 想法是把过程的状态空间 E 作为一个集合嵌入一个紧可度量空间 $\hat{E}$ 使得转移半群(见**转移算子半群**(transition-operator semigroup))$(P_t)_{t \geqslant 0}$ 的**预解式**(resolvent)$(U_p)_{p \geqslant 0}$ 有到 $\hat{E}$ 的唯一扩张, 作为一个预解式$(\hat{U}_p)$具有好的分析性质. 这个 Ray 预解式(Ray resolvent)同半群$(\hat{P}_t)$($\hat{P}_0$ 不需要是恒等算子, 存在分支点)相对应, 而$(\hat{P}_t)$与(P_t)在 E 上完全不可区别. Ray-Knight 紧化容许人们很容易地把 **Feller 过程**(Feller process)的大量重要结果推广到强 Марков 过程上, 定义流入边界等等.

参考文献

[A1] Dellacherie, C. and Meyer, P. A., Probabilities and potential. C, North-Holland. 1988, Chapt. XII (译自法文).

[A2] Getoor, R. K., Markov processes: Ray processes and right processes, Lecture notes in math., 440, Springer, 1975.

[A3] Sharpe, M. J., General theory of Markov processes, Acad. Press, 1988.

C. Dellacherie 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

射线法 [ray method; лучевой метод]

波的衍射和传播理论中, 形式地寻求问题的高频渐近近似解的一种方法. 射线法包括寻求对相应问题的解的**几何近似**(geometric approximation)各种变型的方法总和.

例如, 假定波动现象由波动方程(wave equation)

$$\frac{1}{c^2(x,y,z)} u_{tt} - \Delta u = 0$$

描述．如果对波动方程采用几何近似并使 $1/\omega$（参量 ω 对应于振荡频率）的逐次幂的系数等于零，则得出下列关系

$$(\nabla\tau)^2=c^{-2},\ 2\nabla\tau\nabla u_j+\Delta\tau u_j=\Delta u_{j-1},\ u_{-1}=0.$$

这些中的第一个是程函方程（eikonal equation），而其余方程称为输运方程（transport equations）．这是沿射线的线性方程递归序列，即，Fermat 泛函的极值曲线（见 **Fermat 原理**（Fermat principle））．

如果在给定曲面 Σ_S 上满足经典均匀边界条件，以及如果向量 $\nabla\tau$ 与 Σ_S 不相切，则对于波场的给定入射的几何近似，可以求得反射的或反射与折射的几何近似，它们总合一起形式上满足边界条件．例如，假定在 Σ 上满足 Dirichlet 边界条件 $u|_\Sigma=0$；则所寻求反射的几何近似为下列形式

$$u_{\text{refl}}\sim\exp[-i\omega(t-\tau_{\text{refl}})]\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u_j^{\text{refl}}}{(-i\omega)^j}.\quad(1)$$

形式上满足边界条件导致等式

$$\tau_{\text{refl}}|_\Sigma=\tau|_\Sigma,\ u_j^{\text{refl}}|_\Sigma=-u_j|_\Sigma,\ j=0,1,\cdots.$$

第一个条件蕴含射线的经典反射定律："入射角等于反射角"．对 u_j^{refl} 的等式规定 u_j^{refl} 须满足的输运方程的初始数据．因而，"入射波"的明细规定完全确定反射波（1）．人们可以类似地考虑两介质界面上的折射问题．

在射线场的奇点邻域几何近似不能应用，而必须应用更复杂的展开，例如某种唯一的渐近近似或者边界层法的某种变型（后者的最重要变型显然是**抛物型方程法**（parabolic-equation method））．

经过这种方式补充的射线法使之可能来构造对于充分广泛类型衍射问题的形式的高频渐近展开．

显然，实际上这样的展开总是解的渐近展开．这个断言尚未以这样的普遍性经过证明；其真实性仅对一些特殊情况得以确立（当人们在所考虑条件下构造一个显式解时，或者获得波动算子之逆算子的范数，对 ω 为均匀，的估计时）．射线法的一个一维变型是 **WKB 方法**（WKB method）；量子力学中的变型是**半经典近似**（semi-classical approximation）．射线法可以成功地应用于任何种类（例如，弹性的，电磁的）高频波的研究．射线法的更远些的类似是下列一些情况下的射线法，沿任何形状弹性体表面传播的 Rayleigh 波的，重液体表面上的波的，微曲弹性层或声学层的波的，等等．

如果将几何近似用级数

$$u\sim\exp[-ip\varphi(t,x)]\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u_j(t,x)}{(-ip)^j}\quad(2)$$

来代替，其中 p 是展开参数，则得到它的一种推广．这样展开的理论称为时空几何光学，或者频率和振幅均经调制的波动理论（见[2]）．形式（2）的展开也可用于下述情况，当描述波动现象的方程不再是对 t 的微分方程时（如对于色散介质）．展开式（2）用于微分方程和伪微分方程两种情况．**Fourier 积分算子**（Fourier integral operator）理论中（双曲型方程的情况）构造拟基本解的数学方法涉及时空几何光学的某种变型（见[3]）．同样也曾经发展过非线性类似（见[4]）．

射线法的其他变型与不连续方程的分析相联系：在许多情况下间断通过射线法的不定常变型和沿射线传播予以描述．射线法的不定常类似是所谓 Hadamard 方法的基础，后者用于研究二阶线性双曲型方程的 Cauchy 问题，并推广到线性双曲型微分或伪微分方程组．

参考文献

[1] Бабич, В. М., Булдырев, В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.
[2] Бабич, В. М., Булдырев, В. С., Молотков, И. А., Пространственновременной лучевой метод, Ленинград, 1985.
[3] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, 1–4, Springer, 1983–1985.
[4] Whitham, G. B., Linear and nonlinear waves, Wiley, 1974.
[5] Боровиков, В. А., Кинбер, Б. Е., Геометрическая теория дифракции, М., 1978.

В. М. Бабич 撰

【补注】

参考文献

[A1] Felsen, L. B. and Marcuntz, N., Radiation and scattering of waves, Prentice-Hall, 1973.
[A2] Kline, M. and Kay, I. W., Electromagnetic theory and geometrical optics, Interscience, 1965.

徐锡申 译

Rayleigh 分布[**Rayleigh distribution**; **Рэлея распределение**]

一种连续型**概率分布**（probability distribution），其密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中**尺度参数**（scale parameter）$\sigma>0$．Rayleigh 分布正对称，点 $x=\sigma$ 是其唯一众数．Rayleigh 分布的一切矩都有限，其数学期望和方差相应为 $\sigma\sqrt{\pi/2}$ 和 $2\sigma^2(1-\pi/4)$．Rayleigh 分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

Rayleigh 分布是密度为

$$\frac{1}{2^{n/2}\sigma^n\Gamma(n/2)} x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

的分布当 $n=2$ 时的特殊情形．于是，当 $\sigma=1$ 时，Rayleigh 分布与具有自由度为 2 的 χ^2 **分布**（'chi-squared' distribution）随机变量之平方根的分布相同．换句话说，Rayleigh 分布可以视为平面直角坐标系中向量长度的分布，假设向量的坐标独立都有参数为 0 和 σ^2 的**正态分布**（normal distribution）．在三维空间中 **Maxwell 分布**（Maxwell distribution）所起的作用与 Rayleigh 分布类似．

Rayleigh 分布主要应用于射击理论和通讯的统计理论．此分布最初由 Rayleigh 于 1880 年作为调和振动叠加所得振幅的分布提出．

参考文献

[1] Strutt, J. W. (Lord Rayleigh), Wave theory of light, Moscow-Leningrad, 1940.

A. B. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Papoulis, A., Probability, random variables and stochastic processes, McGraw-Hill, 1965.

周概容 译

Rayleigh 方程 [Rayleigh equation; Рэлея уравнение]

二阶非线性常微分方程

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+x=0,\ \dot{x}=\frac{dx}{dt}, \qquad (*)$$

其中函数 $F(u)$ 满足假设:

$$uF(u)<0,\ 对于小的\ |u|,$$

$$uF(u)>0,\ 对于大的\ |u|.$$

Rayleigh 方程描述一个典型的单自由度的非线性系统，其中可以发生**自振动**（auto-oscillation）．此方程因 Rayleigh 勋爵而得名，它研究了与声学问题有关的这一类方程（[1]）．

如果把方程（*）微分，并且设 $y=\dot{x}$，则得到 **Liénard 方程**（Liénard equation）

$$\ddot{y}+f(y)\dot{y}+y=0,\ f(u)=F'(u).$$

当

$$F(u)=-\lambda\left[u-\frac{u^3}{3}\right],\ \lambda=常数$$

时，得到 Rayleigh 方程的特殊情况 —— **van der Pol 方程**（van der Pol equation）．有时把方程（*）的下述特殊情况称为 Rayleigh 方程:

$$\ddot{x}-(a-b\dot{x}^2)\dot{x}+x=0,\ a,\ b>0.$$

对于 Rayleigh 方程的**极限环**（limit cycle）的存在和唯一性条件，即发生自振动的条件，已进行了大量研究．对于 Rayleigh 方程的各种推广，例如对于方程

$$\ddot{x}+F(x,\ \dot{x})\dot{x}+g(x)=e(t),$$

其中 $e(t)$ 是周期函数，还研究了周期解问题．

下述方程往往称为 Rayleigh 型系统（Rayleigh-type system）:

$$\ddot{x}+F(\dot{x})+G(x)=H(t,\ x,\ \dot{x}),$$

$$x\in\mathbf{R}^n,\ F:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\ G:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n;$$

并且通常假设

$$F=\operatorname{grad}f,\ f:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R},\ f\in C^1,$$

$$G=\operatorname{grad}g,\ g:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R},\ g\in C^2,$$

而 H 是有界向量函数，关于 t 为周期的．寻求这种系统存在周期解的充分条件的问题，具有重要意义．

参考文献

[1] Strutt, J. W. (Lord Rayleigh), Theory of sound, 1, Dover, reprint, 1949.
[2] Cesari, L., Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Springer, 1959.

亦见 **Liénard 方程**（Liénard equation）一条的参考文献．

H. X. Розов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stoker, J. J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, Interscience, 1950.

杜小杨 张鸿林 译

反应扩散方程 [reaction-diffusion equation; реакция-диффузии уравнение]

【补注】 形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u+f(u)$$

的偏微分方程组，其中 $u=u(x,\ t)=(u_1,\ \cdots,\ u_n)$，$\Delta$ 是关于空间变量 x 的 **Laplace 算子**（Laplace operator），D 是非负非零对角矩阵，f 是从 $\mathbf{R}^n$ 中一个区域到 $\mathbf{R}^n$ 中的函数．这些方程的许多推广也已得到研究，例如当 f 还依赖于 u 关于 x 的一阶导数时，当算子 Δ 由其他算子（可能是非线性的算子）代替时，或者当矩阵 D 不是对角矩阵时的研究成果．如果在方程组中还出现一阶偏导数项作为对流迁移效应的数学模型的话，这种方程组有时称为反应对流扩散方程（reaction-advection-diffusion equation）．

反应扩散方程是作为各种不同的自然现象的数学模型提出来的([A1])，但它们最自然的根源在于对化学系统的研究：向量 u 的分量可以表示出现于系统中的化学反应物的浓度，$D\Delta u$ 表示这些反应物在化学溶液中可能的扩散迁移，而 $f(u)$ 则表示由于反应物间的化学反应产生或失去的反应物（如果所有这些反应的反应率作为 u 的函数是已知的话，则可以写出 f 的显式形式）.

自变量 x 常限制在边界为 $\partial\Omega$ 的区域 Ω 上，从而要寻求在 $\partial\Omega$ 上满足特定边界条件的解．边界条件的一般形式为

$$a_i\frac{\partial u_i}{\partial v}+b_iu_i=h_i,\ x\in\partial\Omega,\ i=1,\cdots,n,$$

其中 $\partial/\partial v$ 表示在 $\partial\Omega$ 处的法向导数，a_i 和 b_i 不同时为零（除非 u_i 不"扩散"），而 h_i 是给定函数．边界条件也可有很多推广，例如非线性边界条件.

人们感兴趣的特定问题有：i) 初值问题 (initial value problem)，即 $u(x,0)$ 给定，求 $t\geqslant 0$ 时的解 $u(x,t)$；ii) 定常问题 (steady problem)，即求与 t 无关的解；以及 iii) 进行波问题 (travelling-wave problem)，这时 $\Omega=\mathbf{R}$ 而要寻求的是特殊形式 $u(x,t)=U(x-ct)$ 的解.

由于这些问题与应用科学有强烈的联系，而且这类难以驾驭的方程组共有的重要性质极为有限，因此该领域的研究动力更多的是来自把方程组看成是某些特定自然现象的模型而不是来自作为方程组本身数学方面的兴趣．例如，一种典型的动力是提问：通过对某些特定的自然效应的数学建模得到的某类方程组是否具有能反映人们感兴趣的已知自然现象的解，而造成这种自然现象的原因并不完全了解．于是人们就去探求与所研究实际问题的现象有类似性质的相应方程组（数学模型）的解的存在性和稳定性.

关于初值问题 i)，解析半群理论（这时有赖于算子 $D\Delta$ 是扇形算子）发展起来并成为研究解的存在唯一性的一种最常用的方法([A2])．关于定常解问题 ii) 的研究使用着多种方法，例如把问题改写为某个适当的函数空间中的一个映射的不动点问题，并应用拓扑度方法．当 $n=1$ 时或方程组具有某种单调性时，基于上、下解（亦见**上下函数法** (upper-and-lower functions method)）的方法提供另一种较为容易的方法（例如，见[A1] 和[A3]）.

进行波问题 iii) 可以看作是要寻求一个参数 c（波速）使得通过替换 $u=U(x-ct)$ 得到的常微分方程的两个临界点间有一条轨道把它们连接起来．这方面研究的一种主要工具是强有力的 Conley 指数 (Conley index) 法 ([A4], [A3])．以下将提及一些更为晚近研究出来的其他方法.

反应扩散方程组的理论可以看成是包含整个自治常微分方程组 $du/dt=f(u)$ 的理论（亦见**自治系统** (autonomous system)），因为当所加的是 Neumann 齐次边界条件时，自治系统的解自动成为与 x 无关的相应的反应扩散方程组的解．当然也提出了寻求具有引人注目的空间特征的解的问题；事实上，解的可能的空间结构是最常研究的诸多问题中的一个问题.

以下是一些已得到最好研究的反应扩散方程组的例子.

a) 标量 Fisher 方程 (Fisher equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(u)$$

([A5], [A6])，其中 f 恰好有两个零点．这个方程起初是在与群体遗传学有关的问题中提出来的.

b) 标量双稳态扩散方程 (bistable diffusion equation) ([A7], [A6], [A8])，该方程与 a) 中的方程的形式相同，但 $f(u)$ 恰有三个简单零点，并在头两个零点之间 $f(u)$ 取负值．这个方程也与群体遗传学有关，但是作为更为复杂的系统的一个组成部分的本方程所起的作用中有关本方程的性质的知识甚至更为重要.

c) FitzHugh-南云方程组 (FitzHugh-Nagumo system)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(u)-v,$$
$$\frac{\partial v}{t}=au-bv,$$

其中 f 具有 b) 中 f 所具有的性质（对此及其推广参见[A3], [A9] 中的参考文献）．本方程组是诸如在神经轴突上和心脏组织内信号传输模型中提出的 Hodgkin-Huxley 方程组 (Hodgkin-Huxley system) 这样的高阶方程组的简化.

d) 在化学反应器理论和燃烧问题中的热扩散模型 (thermal-diffusion model) ([A10], [A11])．在这类模型中 $u=(u_0,u_1,\cdots,u_n)$，u_0 表示温度，u 的其他分量表示化学反应物的浓度，f 的分量由

$$f_j(u)=\sum_l a_{jl}b_l(u_0)m_l(u)$$

给出，求和号是对发生于材料中的所有的反应来取的（这些反应用下标 l 表示）．这是 m_l 与第 l 个反应相应的关于 $u_1,\cdots,u_n$ 的（质量作用）单项式，b_l 是第 l 个反应的"反应常数"，而数 a_{jl} 是"化学计量参数"，规定了在反应 l 中产生或消耗的反应物 j（在 $j=0$ 时为热量）的量.

在上述所有例子中行波解的存在性和稳定性都是至关重要的；对情形 d)，其他的具有空间和时间布置结构的解也是重要的.

在许多应用中，出现具有前沿或界面性质的解

([A9]). 例如，可能存在三维空间中的一个移动的曲面，u 的某些分量在该曲面附近发生突然的变化. 这种变化形成了所研究问题在该曲面处的内边界层(interior layer). 这些在相-场方程(phase-field equation)(具非对角矩阵 D 的反应扩散方程组)等方面的工作中得到了研究. 在相-场方程中它们表示了相界面，在双稳态方程、FitzHugh-南雲方程及其推广中，它们可能代表了相态的改变，神经或心脏组织中电化学性质的改变，或介质中化学状态的改变.

对于 $n>1$ 的方程组在一个空间方向的波的稳定性问题是比其存在性要远为困难的研究领域. 多数研究工作是对 FitzHugh-南雲方程的([A12]). 近来一种新的技巧，即 J. Alexander, R. Gardner 和 C. Jones([A13])的稳定性指数(stability index)，已经研究出来并应用于一系列进行波问题.

对于具有界面的进行波解和定常解(见上)，为研究稳定性问题已经研究出了一种称为 SLEP 方法(SLEP method，奇异极限本征值问题方法)的技巧(见[A14]及其参考文献).

对于 FitzHugh-南雲方程组及相关的方程组，在两个空间变量的情形具有最重要模式的解是旋转螺线解，对 FitzHugh-南雲方程组和应激介质的许多其他模型来说，这种解是极其普遍的而且显然是极其结构稳定的. 尽管由于对这种旋转解的巨大兴趣以及大量的研究论文，概念已经推广(见[A9]中的参考文献)，但是它们的数学基础尚处于早期发展阶段. 三维的情形存在着类似的现象：绕着称为丝(filaments)的空间曲线旋转的结构，这些丝本身也按某种近似规律移动着. 未来的重要挑战是：一方面要更好了解在这种动态的空间模式及其运动规律之间的联系(并为之提供坚实的数学基础)，另一方面要更好地了解与之有关的基本偏微分方程组.

参考文献

[A1] Fife, P. C., Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, Lecture notes in biomathematics, 28, Springer, 1979.

[A2] Henry, D., Geometric theory of semilinear parabolic equations, Lecture notes in mathematics, 840, Springer, 1981(中译本：D. Henry，半线性抛物型方程的几何理论，高等教育出版社，1998).

[A3] Smoller, J., Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer, 1983.

[A4] Conley, C., Lsolated invariant sets and the Morse index, Amer. Math. Soc., 1978.

[A5] Kolmogorov, A. N., Petrovskiĭ, I. G. and Piskunov, N. S., A study of the diffusion equation with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem, *Byull. Moskov. Gos. Univ.*, **17** (1937), 1-72 (俄文).

[A6] Aronson, D. G. and Weinberger, H. F., Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics, *Adv. in Math.*, **30** (1978), 33-76.

[A7] Kanel, Ya. I., On the stability of solutions of the Cauchy problem for the equations arising in combustion theory, *Mat. Sb.*, **59** (1962), 245-288 (俄文).

[A8] Fife, P. C. and McLeod, J. B., The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **65** (1977), 335-361.

[A9] Fife, P. C., Dynamics of internal layers and diffusive interfaces, CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math., 53. SIAM, 1988.

[A10] Aris, R., The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, *1-2*, Clarendon Press, 1975.

[A11] Buckmaster, J. and Ludford, G. S. S., Theory of laminar flow, Cambridge Univ. Press, 1982.

[A12] Jones, C., Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **286** (1984), 431-469.

[A13] Alexander, J., Gardner, R. and Jones, C., A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves, *J. Reine Angew. Math.* (即将发表.)

[A14] Nishiura, Y., Mimura, M., Ikeda, H. and Fujii, H., Singular limit analysis of stability of travelling wave solutions in bistable reaction-diffusion systems, *SIAM J. Math. Anal.*, **21** (1990), 85-122.

【译注】 有关反应扩散方程的教材和专著还有

[B1] Rothe, F., Global solutions of reaction-diffusion systems, Lecture Notes in Mathematics, v. 1072, Springer-Verlag, 1984.

[B2] Britton, N. F., Reaction-diffusion equations and their applications to Biology, Academic Press, 1986.

[B3] Leung, A. W., Systems of nonlinear partial differential equations-Applications to biology and engineering, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[B4] 叶其孝，李正元，反应扩散方程引论，科学出版社，1990.

[B5] Pao, C. V., Nonlinear parabolic and elliptic equations, Plenum Press, 1992.

P. Fife 撰 叶其孝 译

实代数簇[real algebraic variety; действительное алгебраическое многообразие]

定义在实数域 **R** 上的**代数簇**(algebraic variety)的实数点的集合 $A=X(\mathbf{R})$. 如果 X 是非奇异的，则称此实代数簇为非奇异的(non-singular). 在这种情形下，A 是光滑簇，它的维数 $\dim A$ 等于复簇 $\mathbf{C}A=$

$X(\mathbf{C})$ 的维数，后者就是簇 A 的复化 (complexification of the variety).

非奇异正则完全交已有相当透彻的研究．它们是射影空间 $\mathbf{R}P^q$ 里的簇 X，是超曲面 $p_i(z)=0$ $(1\leqslant i\leqslant s)$ 的非奇异正则完全交，这里的 $p_i(z)$ 是 q 个变量的 m_i 次齐次实多项式．在这种情形下矩阵

$$\left\| \frac{\partial p_i}{\partial z_j} \right\|$$

在所有的点 $z\in \mathbf{C}A$ 的秩等于 s，$\dim A=n=q-s$.

设 B 表示由截断方程组

$$p_i(z)=0,\ 1\leqslant i\leqslant s-1,\ p(z)=p_s(z),\ m=m_s$$

所定义的实代数簇．正则完全交的例子是：

1) 平面实代数曲线；这里 $q=2$，$s=1$，$\mathbf{C}B=\mathbf{C}P^2$，$B=\mathbf{R}P^2$.

2) 实代数超曲面；这里 $s=1$，$\mathbf{C}B=\mathbf{C}P^q$，$B=\mathbf{R}P^q$，特别当 $q=3$ 时可得出实代数曲面.

3) 实代数空间曲线；这里 $q=3$，$s=2$．曲面 B 由方程 $p_1(z)=0$ 定义，而曲线 A 是由曲面 $p_2(z)=0$ 在 B 上相截而得.

平面 $\mathbf{R}P^2$ 内的 m_1 次实代数曲线 A 由有限多个微分同胚于圆周的分支组成．如果 m_1 是偶的，则这些分支都是双边嵌入于 $\mathbf{R}P^2$ 内；如果 m_1 是奇数，则一个分支是单边嵌入，其余分支是双边嵌入．A 的双边嵌入分支称为 A 的卵形线 (oval)．落在 A 的奇数个其他卵形线之内的卵形线称为奇的 (odd)，而其他卵形线称为偶的 (even).

m_1 次平面实代数曲线的分支数不超过 $(m_1-1)(m_1-2)/2+1$ (Harnack 定理 (Harnack theorem)) ([1])．对于每个 m_1 存在一条平面实代数曲线具有最大个数的分支，这条曲线称为 M 曲线 (M-curve)．(构造 M 曲线的方法可见 [1], [2], [3]；这些结果向空间曲线的推广见 [2]).

D. Hilbert 在 1900 年提出了下述问题：研究实代数簇的拓扑、实代数簇到 $\mathbf{R}P^q$ 里的嵌入以及一个实代数簇到另一个内的嵌入 (Hilbert 第十六问题 (Hilbert 16-th problem))．他也指出了困难的个别问题：研究 6 次曲线的卵形线的相互位置、4 次实代数曲面的拓扑以及到 $\mathbf{R}P^3$ 里的嵌入，这些个别问题已经解决 ([12], [13]).

对于偶数次 m_1 的平面实代数曲线 A，以下的精确不等式成立：

$$-\frac{1}{8}(3m_1^2-6m_1)\leqslant P-N\leqslant \frac{1}{8}(3m_1^2-6m_1)+1,$$

这里 P 是 A 的偶卵形线的个数，N 是奇卵形线的个数 (Петровский 定理 (Petrovskiĭ theorem))．如果 m_1 是奇数，则类似不等式对 $A\cup L$ 成立，这里 L 是处于一般位置的直线 ([4])．当这些结果被推广到偶数次实代数超曲面时，**Euler 示性数** (Euler characteristic) $\chi(B_+)$ 起着差 $P-N$ 的作用．这里 $B_+=\{z\in B: p(z)\geqslant 0\}$，而当 q 为奇数时，$\chi(A)$ 起着 $P-N$ 的作用．因此对于偶数 m_1 次实代数超曲面 A,

$$|\chi(B_+)|\leqslant \frac{(m_1-1)^q}{2}-s(q;m_1)+\frac{1}{2},$$

这里 $s(q;m_1)$ 是次数不超过 $(qm_1-2q-m_1)/2$ 的多项式

$$\prod_{i=1}^{q}(1+x_i+\cdots+x_i^{m-2})$$

的项数；如果 q 是奇数，则对任意的 m_1 有 ([5])：

$$|\chi(A)|\leqslant (m_1-1)^q-2s(q;m_1)+1,$$

对于偶数 m_1 的 ($\mathbf{R}P^3$ 里的) 空间实代数曲线有以下不等式：

$$|\chi(B_+)|\leqslant \frac{1}{3}m_1^3+\frac{3}{8}m_1m_2^2+\frac{1}{4}m_1^2m_2+$$
$$-m_1^2-m_1m_2+\frac{7}{6}m_1+\frac{|\chi(B)|}{2}$$

(当 $m_1=2$ 时这个估计是精确的 ([6]))．Петровский 定理已被推广到任意实代数簇 ([10]).

对于偶数 m_1 阶的平面实代数 M 曲线有以下同余式 ([8], [9], [13])：

$$P-N\equiv \left[\frac{m_1}{2}\right]^2 \bmod 8,$$

在证明这个同余式时 ([8], [9])，运用了微分拓扑的方法研究实代数簇，这样就开创了进一步探究的新路子．设平面实代数曲线 A 有偶数阶 $m=2k$ 且 $p(z)$ 的符号取得使 B_+ 可定向，而 P_+, P_0, P_- 则分别表示 A 的下述卵形线的个数：它们从外部界限集合 B_+ 的具正、零或负 Euler 示性数的分支．类似地，N_+, N_0, N_- 是 $B_-=\{z\in B: p(z)\leqslant 0\}$ 的上述奇卵形线的个数．则 ([8], [3]).

$$P_-+P_0\leqslant \frac{1}{2}(k-1)(k-2)+E(k),$$

$$N_-+N_0\leqslant \frac{1}{2}(k-1)(k-2),$$

$$P_-\geqslant N-\frac{3}{2}k(k-1),$$

$$N_-\geqslant P-\frac{3}{2}k(k-1).$$

这里

$$E(k)=\frac{1}{2}(1+(-1)^k).$$

对于 q 维射影空间里的任意实代数簇，有以下不

等式

$$\dim H_*(A;\ \mathbf{Z}_2) \leqslant \dim H_*(\mathrm{C}A;\ \mathbf{Z}_2),$$

这里 $H_*(A;\mathbf{Z}_2)=\sum H_i(A;\mathbf{Z}_2)$ 是簇 A 的系数在 $\mathbf{Z}_2$ 里的同调空间([9]). 这个不等式是 Harnack 定理的推广. 如果

$$\dim H_*(\mathrm{C}A;\ \mathbf{Z}_2)-\dim H_*(A;\ \mathbf{Z}_2)=2t.$$

这里 t 总是整数, 则称 A 为 $(M-t)$ 簇. 当 $t=0$ 时 A 是 M 簇.

下列同余式的正确性已经得到证明:

A) 对 M 簇 A 以及偶数 n:

$$\chi(A)\equiv\sigma(\mathrm{C}A) \bmod 16.$$

这里 $\sigma(\mathrm{C}A)$ 是簇 $\mathrm{C}A$ 的符号差(signature)([9]).

B) 对 $(M-1)$ 簇 A 以及偶数 n([13]):

$$\chi(A)\equiv\sigma(\mathrm{C}A)\pm 2 \bmod 16,$$

见综述[3].

C) 对正则完全交, 如果 n 是偶数, A 是 $(M-1)$ 簇, 包含同态

$$i_*:\ H_{n/2}(A;\ \mathbf{Z}_2)\to H_{n/2}(\mathbf{R}P^q;\ \mathbf{Z}_2)$$

是零, 则

$$d=m_1m_2\cdots\equiv 2 \bmod 4,$$

且

$$\chi(A)\equiv-\sigma(\mathbf{C}A)+\begin{cases}2 \bmod 16, & \text{如果 } d\equiv 2 \bmod 8,\\ -2 \bmod 16, & \text{如果 } d\equiv -2 \bmod 8.\end{cases}$$

在这种情形下, 当 n 是偶数时, A 是 $(M-2)$ 簇且 i_* 是零([1]):

如果 $d\equiv 0 \bmod 8$, 则 $\chi(A)\equiv\pm\sigma(\mathrm{C}A) \bmod 16$,

如果 $d\equiv 2 \bmod 8$, 则 $\chi(A)\equiv-\sigma(\mathrm{C}A)+4 \bmod 16$ 或 $\chi(A)\equiv\pm\sigma(\mathrm{C}A) \bmod 16$.

如果 $d\geqslant 2 \bmod 8$, 则 $\chi(A)\equiv-\sigma(\mathrm{C}A)-4 \bmod 16$ 或 $\chi(A)\equiv\pm\sigma(\mathrm{C}A) \bmod 16$.

特别对 m_1 次实代数曲面 A,

$$\dim H_*(\mathrm{C}A;\ \mathbf{Z}_2)=m_1^3-4m_1^2+6m_1.$$

如果 A 是 M 曲面, 则

$$\chi(A)\equiv\frac{1}{3}(4m_1-m_1^3) \bmod 16,$$

如果 A 是 $(M-1)$ 曲面, 则

$$\chi(A)\equiv\frac{1}{3}(4m_1-m_1^3)\pm 2 \bmod 16.$$

如果 A 是 $(M-1)$ 曲面且在 $\mathbf{R}P^3$ 内收缩成一个点, 则 $m_1\equiv 2 \bmod 4$ 且

$$\chi(A)\equiv\begin{cases}2 \bmod 16, & \text{如果 } m_1\equiv 2 \bmod 8,\\ -2 \bmod 16, & \text{如果 } m_1\equiv -2 \bmod 8.\end{cases}$$

如果 A 是 $(M-2)$ 曲面且在 $\mathbf{R}P^3$ 内收缩到一个点, 则

$$\chi(A)\equiv\begin{cases}0 \bmod 16, & \text{如果 } m_1\equiv 0 \bmod 8,\\ 0,\ 4 \bmod 16, & \text{如果 } m_1\equiv 2 \bmod 8,\\ 0,\ -4 \bmod 16, & \text{如果 } m_1\equiv -2 \bmod 8.\end{cases}$$

某些同余式对于奇数 n 也已经证明([9],[13]). 特别对于作为偶数 m_1 次 $(M-1)$ 曲线的平面实代数曲线 A:

$$P-N\equiv\left[\frac{m_1}{2}\right]^2\pm 1 \bmod 8.$$

对于有奇点的实代数簇也已得到某些结果([13]). 对于研究实代数簇的有趣的方法可见[14].

参考文献

[1] Harnack, A., Ueber die Vielheitigkeit der ebenen algebraischen Kurven, *Math. Ann.*, **10** (1876), 189 – 198.

[2] Hilbert, D., Ueber die reellen Züge algebraischer Kurven, *Math. Ann.*, **38** (1891), 115 – 138.

[3] Hilbert, D., Mathematische Probleme, *Arch. Math. Phys.*, **1** (1901), 213 – 237.

[4] Petrovskiĭ, I. G., On the topology of real plane algebraic curves, *Ann. of Math.*, **39** (1938), 1, 189 – 209.

[5] Олейник, О. А., Петровский, И. Г., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **13** (1949), 389 – 402.

[6] Олейник, О. А., 《Матем. сб.》, **29** (1951), 133 – 156.

[7] Проблемы Гильберта, М., 1969.

[8] Арнольд, В. И., 《Функциональный анализ》, **5** (1971), 3, 1 – 9.

[9A] Рохлин, В. А., 《Функциональный анализ》, **6** (1972), 4, 58 – 64.

[9B] Рохлин, В. А., 《Функциональный анализ》, **7** (1973), 2, 91 – 92.

[10A] Харламов, В. М., 《Функциональный анализ》, **8** (1975), 2, 50 – 56.

[10B] Харламов, В. М., 《Функциональный анализ》, **9** (1975), 3, 93 – 94.

[11] Харламов, В. М., 《Функциональный анализ》, **9** (1975), 2, 51 – 60.

[12] Харламов, В. М., 《Функциональный анализ》, **10** (1976), 4, 55 – 68.

[13] Гудков, Д. А., 《Успехи матем наук》, **29** (1974), 4, 3 – 79.

[14] Sullivan, D., Geometric topology, I, Localization,

periodicity, and Galois symmetry, M. I. T., 1971.

Д. А. Гудков 撰

【补注】

[A1] Viro, O., Successes of the last five years in the topology of real algebraic varieties, in *Proc. Internat Congress Mathematicians* Warszawa 1983, PWN & North-Holland, 1984, 603 – 619

[A2] Wilson, G., Hilbert's sixteenth problem, *Topology*, 17 (1978), 53 – 74.

陈志杰 译

实解析空间 [real-analytic space; вещественное аналитическое пространство]

一个在实数域 **R** 上的**解析空间** (analytic space). 和复解析空间的情形不同, 实解析空间的结构层不必是凝聚的 (见**凝聚层** (coherent sheaf)). 实解析空间称为凝聚的 (coherent), 如果它的结构层是凝聚的. 所有实解析流形 (即光滑实解析空间) 都是凝聚实解析空间.

令 V_a 为 $\mathbf{R}^n$ 的一实解析子集 (见**解析集** (analytic set)) 在一点 a 的芽. 它以下列等价性质定义了空间 $\mathbf{C}^n$ 的一复解析子集在 a 的芽 $\widetilde{V}_a$: 1) $\widetilde{V}_a$ 是所有包含 V_a 的复解析集的芽的交; 2) 如果 $\mathcal{O}_{V_a}$ 是芽 V_a 的解析代数, 那么 $\mathcal{O}_{V_a}\otimes\mathbf{C}$ 是芽 $\widetilde{V}_a$ 的解析代数. 芽 $\widetilde{V}_a$ 称为芽 V_a 的复化 (complexification of the germ), 而 V_a 称为芽 $\widetilde{V}_a$ 的实部. 类似地, 对任何凝聚实解析可数无限空间 X 都可以构造复化 $\widetilde{X}$, 它是一复解析空间. 于是 X 在 $\widetilde{X}$ 中有一邻域的基本系, 它们是 **Stein 空间** (Stein space).

实解析空间的凝聚理论类似于复 Stein 空间的理论. 在一凝聚实解析可数无限空间 X 上的模 F 的任意**凝聚解析层** (coherent analytic sheaf) 的整体截面生成 X 上任意一点的截面的芽的模, 并且所有群 $H^q(X, F)$ 当 $q\geq 1$ 时为零.

对任何有限维的凝聚实解析可数无限空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 存在一态射

$$f=(f_0, f_1): (X, \mathcal{O}_X)\to(\mathbf{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{R}^n}),$$

当 f 是一在 X 的光滑点的嵌入时, 使得 f_0 是一 X 到 $\mathbf{R}^n$ 中一凝聚子空间的真一一映射. 特别地, 任何 (Hausdorff 和可数无限的) 实解析流形同构于 $\mathbf{R}^n$ 中的实解析子流形. 对于一约化凝聚实解析空间 X, 以 X 为底空间, 以容许复化的实结构 Lie 群的实解析主纤维丛同构类的集合, 和具有相同结构群 G 拓扑主纤维丛同构类的集合是一一对应的.

参考文献

[1] Tognoli, A., Some results in the theory of real analytic spaces, in M. Jurchesan (ed.), Espaces Analytiques (Bucharest 1969), Acad. Roumanie, 1971, 149 – 157.

Д. А. Пономарев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cartan, H., Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 77 – 99.

[A2] Bruhat, F. and Cartan, H., Sur la structure des sousensembles analytiques réels, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 988 – 990.

[A3] Bruhat, F. and Cartan, H., Sur les composantes irréductibles d'un sous-ensemble, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 1123 – 1126.

[A4] Bruhat, F. and Whitney, H., Quelques propriétés fondamantales des ensembles analytiques-réels, *Comm. Math. Helv.*, **33** (1959), 132 – 160.

[A5] Narasimhan, R., Introduction to the theory of analytic spaces, Lecture notes in math., 25, Springer, 1966.

[A6] Grauert, H. and Remmert, R., Theory of Stein spaces, Springer, 1979 (译自德文).

钟同德 译

实函数 [real function; действительная функция]

一个函数, 其定义域和值域都是实数集的子集.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 因此, 实函数被理解为实数子集上的实值函数 (real-valued function). 在西方的文献中, "实的" (real) 通常是指 "实值的" (real-valued).

杜小杨 译

实范数 [real norm; вещественное нормирование]

域 (或环) 上的、取值于实数域的乘法范数 (见**域上的范数** (norm on a field); 亦见**绝对值** (absolute value)).

实数 [real number; действительное число]

正数, 负数或零. 实数概念是以**有理数** (rational number) 概念的一种推广形式出现的. 这种推广既反映了数学实际应用, 即用确定的数表示给定量的值的需要, 也反映了数学自身内部发展的需要; 特别, 还反映了拓广数的某些运算 (开根, 计算对数, 解方程等) 的应用领域的愿望. 实数的一般概念早已被古代希腊数学家们在他们的不可公度线段理论中研究过, 但作为一个独立概念只表述于 17 世纪 I. Newton 的著作《普遍算术》 (Arithmetica Universalis) 中: "我们与其把数理解为单位的集合, 不如把数理解为某个量对另一个被取作单位的量的抽象的比." 严密的实数理论是在 19 世纪末由 K. Weierstrass, G. Cantor 和 R. Dedekind 建立的.

实数系（real numbers）形成一个非空的元素集合，这集合包含的元素多于一个，具有下列性质：

Ⅰ．有序性（property of being ordered）．任何两个数 a 和 b 具有确定的序关系，即下列关系中有一个且仅有一个成立：$a<b$，$a=b$，或者 $a>b$；而且若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$（序的传递性）．

Ⅱ．加法运算性质（property of an addition operation）．对任何有序数对 a 和 b，存在一个唯一的数，称为它们的和（sum），记为 $a+b$，使得下列性质成立：Ⅱ$_1$）$a+b=b+a$（交换性）；Ⅱ$_2$）对任何数 a，b 和 c，有 $a+(b+c)=(a+b)+c$（结合性）；Ⅱ$_3$）存在一个数，称为零（zero），记作 0，使得对任何 a 有 $a+0=a$；Ⅱ$_4$）对任一数 a，存在一数，称为 a 的逆（opposite），记为 $-a$，使得 $a+(-a)=0$；Ⅱ$_5$）若 $a<b$，则对任何 c，有 $a+c<b+c$．

零是唯一的．对任一给定的数，其逆是唯一的．对任一有序数对 a 和 b，数 $a+(-b)$ 称为数 a 和 b 的差（difference），记为 $a-b$．

Ⅲ．乘法运算性质（property of a multiplication operation）．对任一有序数对 a 和 b 存在唯一的数，称为它们的积（product），记为 ab，使得：Ⅲ$_1$）$ab=ba$（交换性）；Ⅲ$_2$）对任何数 a,b,c，$a(bc)=(ab)c$（结合性）；Ⅲ$_3$）存在一数，称为单位（unit），记为 1，使得对任何数 a 有 $a1=a$；Ⅲ$_4$）对任一非零数 a，存在一数，称为它的倒数（reciprocal），记为 $1/a$，使得 $a(1/a)=1$；Ⅲ$_5$）若 $a<b$ 且 $c>0$，则 $ac<bc$．

这些性质保证了单位和每个元素的倒数都是唯一的．对每一有序数对 a 和 b，$b\neq 0$，数 $a(1/b)$ 称为 a 被 b 除所得的商（quotient），记为 a/b．

数 $1+1$ 记为 2，数 $2+1$ 记为 3，等等．数 1，2，3，…，称为**自然数**（natural number）．大于零的数称为是正的（positive），小于零的数称为是负的（negative）．数 0，± 1，± 2，…称为**整数**（integer）（约定 $+a=a$）．m/n 类型的数（其中 m 是整数，n 是自然数）称为有理数（rational numbers）或分数（fractions）．它们包含所有整数．数（a）1 与 a 视为同一数．非有理数的实数亦称为无理数（irrational number）．

Ⅳ．乘法关于加法的分配性质（property of distributivity of multiplication with respect to addition）．对任意三个数 a，b 和 c，有 $(a+b)c=ac+bc$．

具有上述所有性质的非空元素集成为全序域（见**全序集**（totally ordered set）；**域**（field））．实数还具有另外两个重要性质．

Ⅴ．Archimedes 性质（Archimedean property）．对任一数 a，存在整数 n，使得 $n>a$．具有性质Ⅰ－Ⅴ的元素集合形成一 Archimedes 有序域．不仅实数域，还有有理数域，都是 Archimedes 有序域的例子．

实数系的一个重要性质是它的连续性；有理数系不具有此性质．

Ⅵ．连续性（property of continuity）．对任一区间套系

$$\{[a_n,b_n]\},\ a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\cdots\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n,$$

$$n=1,2,\cdots,$$

至少存在一数属于该系的所有区间．此性质亦称为 Cantor 区间套原理（Cantor principle of nested segments）．若当 $n\to\infty$ 时，系中区间的长度 b_n-a_n 趋于 0，则存在一个唯一的点属于所有这些区间．

上述实数的性质引出许多其他性质：由性质Ⅰ－Ⅴ得到 $1>0$；由此也得出有理数的运算规则，当实数相乘和相除时遵守正负号的运算规则，实数的**绝对值**（absolute value）的性质，进行等式和不等式转换的规则等等．性质Ⅰ－Ⅵ是实数域的完整的描述，只有实数域才具有这些性质；换言之，如果将这些性质作为公理，实数形成一个唯一的满足这些公理的元素集．这意味在同构的意义下，性质Ⅰ－Ⅵ决定了实数集：若有两个集合 X 和 Y 满足性质Ⅰ－Ⅵ，总存在 X 到 Y 上的关于序和加法、乘法运算的同构映射，即此映射（记为 $x\to y$，这里 $y\in Y$ 是元素 $x\in X$ 的对应元素）一一对应地映 X 于 Y 上，使得：若

$$x_1<x_2,\ x_1,x_2\in X \text{ 且 } x_1\to y_1,\ x_2\to y_2,$$

则

$$y_1<y_2,\ x_1+x_2\to y_1+y_2,\ x_1x_2\to y_1y_2.$$

上述结论的一个推论是实数域（例如，与有理数域不同），不能再扩充且同时保持性质Ⅰ－Ⅴ，即不存在按性质Ⅰ－Ⅴ具有序、加法和乘法性质的域，它包含一同构于实数域的子集而此子集又不恒同于实数域．

实数比有理数多很多；事实上，有理数形成实数集的一个可数子集，而实数集是不可数的（见**势**（cardinality））．有理数和无理数都在实数集中稠密（见**稠密集**（dense set））：对任意二实数 a 和 b，$a<b$，都可求得一有理数 r，使得 $a<r<b$，以及一无理数 ξ，使得 $a<\xi<b$．

实数的连续性和其完全性（completeness）紧密相连，即任一实数**基本序列**（fundamental sequence）收敛．应该注意，有理数域不再是完全的：它包含不收敛于任何有理数的基本序列．实数集的连续性（或完

全性）与实数在度量各类连续量中的应用密切相关，例如，在确定线段几何长度中，如果选定唯一的单位线段，则由实数集的连续性，就有可能将任一线段对应于一正实数——该线段的长度．实数集的连续性用直观的方式叙述可以说成是不包含"空余空间"的集合．实数集的连续性的一个推论是：任一正数都可开 n 次根（n 是自然数），任一正数有任意底 $a(a>0, a\neq 1)$ 的对数．

实数的连续性也可以不同的方式表述．

Ⅵ′．任一非空上有界的集合必有上确界（见上（下）界（upper and lower bounds））．

实数域中，分割 $A|B$（见 **Dedekind 分割**（Dedekind cut））的概念仍然可以使用．若对一切 $a\in A$，$b\in B$，$a\leqslant\alpha\leqslant b$，则说数 α 造成分割 $A|B$（这里或者 $\alpha\in A$，或者 $\alpha\in B$）．任一数都可造成一分割．

由于逆命题有效，连续性也称实数的 Dedekind 连续性（Dedekind continuity of the real numbers）．

Ⅵ″．实数的任一分割由某一数造成．这种数是唯一的，它或者是下类中的最大数，或者是上类中的最小数．

命题 Ⅵ，Ⅵ′以及 Ⅵ″按下述意义是互相等价的：如果取其中之一加上性质 Ⅰ－Ⅴ 作为公理，那么另两条可以由此推出．进一步，性质 Ⅵ′和性质 Ⅵ″中之一结合性质 Ⅰ－Ⅳ，不仅推出 Ⅵ，还可推出 Archimedes 性质 Ⅴ．实数集作为具有性质 Ⅰ－Ⅵ 的非空元素集合的定义是实数理论的公理式构造．存在几种基于有理数构造实数理论的方法．

首先是由 Dedekind 基于有理数域中分割（cut）$R_1|R_2$ 的概念而构造的实数理论．对给定的分割 $R_1|R_2$ 若在 R_1 中存在一最大的有理数，或者在 R_2 中存在一最小的有理数，就说分割 $R_1|R_2$ 由该数造成．任一有理数造成一分割．对既不存在下类中的最大数，也不存在上类中的最小数的分割，就说它是一个无理数（irrational number）．有理数和无理数都称为实数（real number）；为了一致起见，这里有理数看作由它们自己造成的分割．

令 $x=R_1|R_2$，$x'=R_1'|R_2'$．称实数 x 小于实数 x'（或者同样的，称 x' 大于 x），若 $R_1\subset R_1'$ 且 $R_1\neq R_1'$．正实数、负实数（见上）以及实数 x 的绝对值 $|x|$ 的概念以通常的方法引进．实数 x 和 x' 的和由满足下列条件的数 $x+x'$ 定义：对所有的 $r_1\in R_1$，$r_1'\in R_1'$，$r_2\in R_2$，$r_2'\in R_2'$，不等式

$$r_1+r_1'\leqslant x+x'\leqslant r_2+r_2'$$

成立．两个正实数 x 和 x' 的乘积是使得对所有正数 r_1，r_1'，r_2，r_2' 不等式 $r_1r_1'\leqslant xx'\leqslant r_2r_2'$ 满足的数 xx'．两个非零实数 x 和 x' 的乘积定义为这样的实数，它的绝对值等于 $|x||x'|$，当 x、x' 同号时取正，异号时取负．最后，对任何实数 x 假设 $0x=x0=0$．

实数的和与积恒存在且唯一，而且这样定义的实数集连同所引进的序以及加法、乘法运算显示出性质 Ⅰ－Ⅵ．

另一种理论是 G．Cantor 提出的．它基于有理数的基本序列（fundamental sequence）的概念，即——有理数列 $\{r_n\}$，使得对任何有理数 $\varepsilon>0$，存在足标 n_ε，使对一切 $n\geqslant n_\varepsilon$ 和 $m\geqslant n_\varepsilon$，不等式 $|r_n-r_m|<\varepsilon$ 成立．有理数列 $\{r_n\}$ 称为零序列（zero-sequence），若对任何有理数 $\varepsilon>0$，存在足标 n_ε，使得对所有 $n\geqslant n_\varepsilon$，不等式 $|r_n|<\varepsilon$ 成立．两个有理数基本序列 $\{r_n\}$ 和 $\{r_n'\}$ 称为等价的（equivalent），若序列 $\{r_n-r_n'\}$ 是零序列．上述等价的定义具有自反性、对称性和传递性，这就说明为什么有理数的基本序列全体所成的集合可以分解为等价类．这种情况下，所有这些等价类全体也称为实数（real number）集．根据此定义，任何实数都表示一有理数基本序列的等价类．每个这种序列是给定实数的一个代表．有理数基本序列称为是正的（positive）（负的（negative）），若存在有理数 $r>0$ $(r<0)$，使得此序列自某项之后的所有项大于 r（小于 $-r$）．任一有理数基本序列，或是零序列，或是正序列，或是负序列．若有理数基本序列是正的（负的），则任何等价于它的有理数基本序列也是正的（负的）．一实数称为是正的（positive）（负的（negative）），若它的某一个（从而任一个）有理数基本序列代表是正的（负的）．一实数称为零（zero），若它的某一个（从而任一个）代表是零序列．任一实数或为正，或为负，或为零．为了定义两实数 x 和 x' 相加或相乘，需要定义它们任意的代表 $\{r_n\}\in x$，$\{r_n'\}\in x'$ 的相加或相乘，这又一次由有理数基本序列 $\{r_n+r_n'\}$ 和 $\{r_nr_n'\}$ 得出．这种情况下称以它们为代表的等价类为这些数的和（sum）$x+x'$ 以及乘积（product）xx'．这些运算的定义不存在二义性，即它们不依赖于这些数的代表的选择．实数的减法和除法分别以加法和乘法的逆运算来定义．若两个实数 x 和 y，有 $x-y>0$，则称实数 x 大于（larger）实数 y．这样定义的实数全体，与上述的序以及加法、乘法运算一起，仍然具有性质 Ⅰ－Ⅵ．

还有另一种基于无穷十进制小数展开式的理论，是由 Weierstrass 发展的．按这种理论，实数（real number）是带正负号的无穷十进制小数展开式：

$$\pm\alpha_0\cdot\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots,$$

其中 α_0 是一非负整数（整数假设给定），每个 α_n $(n=1,2,\cdots)$ 是数字 $0,1,\cdots,9$ 中之一．若干项

之后全部为 9 的无穷小数展开式，即在 9 循环的小数：

$$\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n(9),\ \alpha_n \neq 9$$

被认为等于无穷小数展开式

$$\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}(\alpha_n + 1)00 \cdots 0 \cdots$$

（若 $n = 0$，它等于无穷小数展开式 $(\alpha_0 + 1) \cdot 00 \cdots 0 \cdots$）．此展开式也可写成有穷小数展开式

$$\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots (\alpha_n + 1)$$

称作小数点后有 n 位有效数字．不带循环（9）的无穷小数展开式称为容许的无穷小数展开式．显见，任一实数可唯一地写为一容许的无穷小数展开式．若实数 x 写成带正号（负号）的容许的无穷小数展开式，而且数字 α_n 中至少有一个非零，则说 x 是正的（positive）（负的（negative））．写作 $x > 0$ （$x < 0$）．若所有 $\alpha_n = 0$，$n = 0, 1, \cdots$，则说它是零（zero）：$x = 0$．对于数

$$x = \pm \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdots,$$

称数 $\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdots$ 是它的绝对值（absolute value），记为 $|x|$．带正号（负号）的数其符号用负号（正号）代替，称为原来给定数的相反数（opposite），记为 $-x$．若

$$x = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdots$$

是一容许的无穷小数展开式，则数

$$\underline{x_n} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

和

$$\overline{x_n} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n + 10^{-n}$$

分别称为数 x 的 n 阶下（上）小数近似式．设 x 和 y 是两个正数，写成容许的无穷小数展开式

$$x = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdots,$$

$$y = \beta_0 \cdot \beta_1 \cdots \beta_n \cdots.$$

则定义 $x < y$，若 $\alpha_0 < \beta_0$ 或者存在一数 n_0，$n_0 = 0, 1, \cdots$，使得 $\alpha_k = \beta_k$，$k = 0, \cdots, n_0$，但 $\alpha_{n_0+1} < \beta_{n_0+1}$．任一负数或者零均被认为小于任何正数．若 x 和 y 都为负且 $|y| < |x|$，则 $x < y$．

整数序列 n_k，$k = 1, 2, \cdots$ 称作稳定于数 m，若存在一数 k_0，使得对一切 $k \geqslant k_0$，$n_k = m$．无穷小数展开式序列

$$x^{(k)} = \alpha_0^{(k)} \cdot \alpha_1^{(k)} \cdots \alpha_n^{(k)} \cdots$$

称作稳定于数

$$x = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdots,$$

若无限矩阵 $\|\alpha_i^{(k)}\|$（这里 i 是列指标，k 是行指标）的第 i 列稳定于数 α_i，$i = 0, 1, \cdots$．若 $x > 0$，$y > 0$，则有穷小数展开式

$$\underline{x_n} + \underline{y_n},\ \underline{x_n} - \underline{y_n},\ [\underline{x_n}\,\underline{y_n}]_n,\ \left[\frac{\underline{x_n}}{\overline{y_n}}\right]_n$$

的小数点后有 n 位有效数字，它们形成的序列稳定于某些数．这些数分别称为 x 与 y 的和（sum）$x + y$、差（difference）$x - y$，积（product）xy 以及商（quotient）x / y．这些定义可扩展到带正负号的实数．例如，若 $x \leqslant 0$，$y \leqslant 0$，则 $x + y = -(|x| + |y|)$；若 x 和 y 不同号，则 $x + y = \pm ||x| - |y||$，其符号与 x 或 y 中绝对值较大者的符号相同，对任意数 x 和 y，定义 $x - y = x + (-y)$（当 $x > 0$，$y > 0$ 时，此定义与前面的相同），等等．容许的无穷小数展开式全体，连同这样定义的序关系和加、减、乘、除运算，满足公理 Ⅰ － Ⅵ．

也可以用非十进制，即基于二进制，三进制等等的小数计算系统构造实数理论．重要的不是上面所给出的实数理论的构造（公理化的，基于有理数分割的，基于有理数基本序列的或者基于无穷小数展开式的），而是实数集的（自身相容的）存在性的证明．基于此观点，所有这些方法都是等价的．

几何上，实数集可表示为有向直线，单个数以直线上的点表示．因此，实数全体也常称为数轴（number axis），单个数称为点．当这样表示实数时，a 小于 b（对应地，b 大于 a）可以说成点 a 位于点 b 的左边（对应地，点 b 位于点 a 的右边）．按位置排序的 Euclid 直线上的点和数轴上的元素之间存在保序的一一对应．这是实数集可表示为直线的一种证明．

参考文献

[1] Dedekind, R., Essays on the theory of numbers, Dover, reprint, 1963（译自德文）.

[2] Dantscher, V., Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen, Teubner, 1908.

[3] Cantor, G., Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Ann.*, **5** (1872), 123 – 130.

[4] Немыцкий, В. В., Слудская, М. И., Черкасов, А. Н., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1957.

[5] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, т. 1, 3 изд., М., 1971（英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1 – 2, Mir, 1982）.

[6] Кудрявцев, Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973.

[7] Никольский, С. М., Курс математического анализа, т. 1, М., 1973（中译本：С. М. 尼柯尔斯

基，数学分析教程，第一卷第一、二分册，人民教育出版社，1980，1981）.

[8] Фихтенгольц，Г. М.，Курс дифференциального и интегрального исчисления，7 изд.，т. 1，М.，1969（中译本：Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第一卷，人民教育出版社，1980）.

[9] Bourbaki，N.，General topology. Elements of mathematics，Addison-Wesley，1966，Chapts. 3－4（译自法文）.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 古代最重要的比例理论是由尼多斯的 Eudoxus（约公元前 400 年－公元前 347 年）给出的. 在 Euclid 的《几何原本》第五卷中可以找到该理论. 亦见 [A2]，[A3] 及 **Euclid 的《几何原本》**（Elements of Euclid）.

无理数可分为两个不同的类：代数数和超越数. **代数数**（algebraic number）是以（有理）整数为系数的代数方程的根. **超越数**（transcendental number）不是任何以（有理）整数为系数的代数方程的根. 有理数域通常记为 **Q**，实数域通常记为 **R**.

参考文献

[A1] Heath，T. L.，A history of Greek mathematics，Dover，reprint，1981.

[A2] Heath，T. L.，The thirteen books of Euclid's elements，1－3，Dover，reprint，1956（中译本：欧几里得，几何原本，陕西科学技术出版社，1990）.

[A3] Knorr，W. R.，The evolution of the Euclidean elements，Reidel，1975.

[A4] Landau，E.，Foundations of analysis，Chelsea，reprint，1951（中译本：E. 兰道，分析基础，高等教育出版社，1958）.

[A5] Rudin，W.，Principles of mathematical analysis，McGraw-Hill，1976（中译本：W. 卢丁，数学分析原理，人民教育出版社，1979）.

[A6] Gericke，H.，Geschichte des Zahlbegriffs，B. I. Mannheim，1970.

沈海玉 译

可实现性 [realizability；реализуемость]

逻辑语言和逻辑 - 数学语言的非经典**解释**（interpretation）的形式之一. 可实现类型的各种解释由下列模式定义. 对于一逻辑 - 数学语言的公式，定义关系"一个对象 e 实现一个闭公式 F"，简记为"erF". 定义是归纳的：首先对原子公式 F 定义关系 erF，然后对复合公式 F，在假定这个关系对于构成公式的子公式已经定义之下，定义相应关系 erF. 一个封闭公式 F 称为可实现的（realizable），或对一给定解释是真的，如果存在一个对象 e 使得 erF. 包含自由变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的公式 F 是可实现的，如果闭公式 $\forall x_1 \cdots \forall x_n F$ 是可实现的.

这样的一个**解释**，称为**递归可实现性**（recursive realizability），首先是由 S. C. Kleene 提出（见 [1]，[2]），旨在借助于**递归函数**（recursive function），给出形式算术语言的直觉主义（构造的）语义. 可实现性的其他形式是递归可实现性的修正.

关系 erF 的直观意思是：对象 e 编码了一个信息，由此可以推导出公式 F 的真假值. 例如，在递归可实现性中，自然数 0 实现一个形式为 $s=t$ 的基本公式，当且仅当这个公式是真的（即项 s 和 t 的值相同）；如果一个数 e 实现析取式 $A \vee B$ 则 e 编码了公式 A 或 B 中哪个是可实现性的，并产生一个实现这个公式的数. 如果一个数 e 实现公式 $\forall x A(x)$，则 e 编码了一个算法，使得对任何自然数 n，产生公式 $A(n)$ 的一个实现. 作为实现子，即实现公式的对象，总可以取为自然数. 然而，在数学分析语言的直觉主义解释下，其他对象也可作为实现子，例如一元数论函数（例如见 [3]）.

对于一个逻辑语言的公式，例如命题或谓词公式，可实现性通常是用某一逻辑 - 数学语言 Ω 的可实现性概念来定义. 一个逻辑公式 $\mathfrak{A}$ 称为可实现的，如果由 Ω 的公式代换 $\mathfrak{A}$ 中谓词变元所得到的 Ω 语言中的每个公式是可实现的.

可实现性解释在非经典的，特别是直觉主义的和构造的，逻辑和逻辑 - 数学理论的研究中有着广泛的应用. 关于各种可实现性概念的描述以及它们在证明论中研究直觉主义理论方面的应用，见 [3]，[4].

参考文献

[1] Kleene，S. C.，On the interpretation of intuitionistic number theory，*J. Symbolic Logic*，10（1945），109－124.

[2] Kleene，S. C.，Introduction to metamathematics，North-Holland，1951（中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册，1984；下册，1985）.

[3] Kleene，S. C.，and Vesley，R. E.，The foundations of intuitionistic mathematics：especially in relation to recursive functions，North-Holland，1965.

[4] Драгалин，А. Г.，Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств，М.，1979（英译本：Dragalin，A. G.，Mathematical intuitionism. Introduction to proof theory，Amer. Math. Soc.，1988）.

В. Е. Плиско 撰

【补注】 J. M. E. Hyland（[A1]）给出一个可实现性的"模型论的"形式，证明它是某一**拓扑斯**（topos），能行拓扑斯（effective topos）或 Hyland 可实现性拓扑斯（Hyland realizability topos）的内在逻辑.

参考文献

[A1] Hyland，J. M. E.，The effective topos，in A. S. Troelstra and D. van Dalen（eds），The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium，North-Holland，1982，165－216.

眭跃飞 译

互反方程 [**reciprocal equation**; **возвратное уравнение**]

形式为

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

的方程，其中任何与首尾距离相同的两项的系数都相等：$a_i = a_{n-i}$. $2n$ 次的互反方程通过设 $z = x \pm 1/x$ 可以化为 n 次方程．　БСЭ-3

互反律 [**reciprocity laws**; **взаимности законы**]

在**幂剩余**(power residue)符号之间或者**范剩余符号**(norm-residue symbol)之间的一些关系．

如下最简单表述的互反律，在 P. Fermat 时已知，能除得尽数 x^2+1 的素数只有 2 和算术级数 $4k+1$ 中的素数，换句话说，等式

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p,$$

其中 $p > 2$ 的素数可解，当且仅当 $p \equiv 1 \pmod 4$. 这个断言可借助于二次剩余符号（**Legendre 符号**(Legendre symbol)）(a/p) 表述为

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}.$$

在一般情形下，同余式的可解问题

$$x^2 \equiv a \pmod p \qquad (*)$$

可由 **Gauss 互反律**(Gauss reciprocity law)

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2 \cdot (q-1)/2},$$

其中 p, q 是不同的奇素数，再加上下面两个公式：

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-2)/2}, \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$$

而解决．这些关于 Legendre 符号的关系式表明，对一给定的非平方数 a，使(*)可解的那些素数 p 恰包含在模 $4|a|$ 的一半剩余类中．

C. F. Gauss 意识到这个互反律是极重要的，他给出了几个基于完全不同概念的证明([1])．特别是从 Gauss 互反律及其进一步推广（**Jacobi 符号**(Jacobi symbol)的互反律）可以得知，素数 p 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的二次扩张（见**二次域**(quadratic field)）$\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 中的分解由 $p \bmod 4|d|$ 的剩余类决定：

Gauss 互反律正推广到如下形式的同余式

$$x^n \equiv a \pmod p, \ n > 2.$$

但是，这里有一个从有理整数的算术到有理数域上的有限次扩张 K 上的整数的算术的转换．而且在 n 幂剩余的推广中，必须假定这种扩张包含有 n 次本原单位根 ζ. 在这假设下，满足同余式

$$N_{\mathfrak{P}} \equiv 1 \pmod n$$

的 K 的素除子 $\mathfrak{P}$（不是 n 的因子）的个数等于 K 模 $\mathfrak{P}$ 的极大导子的剩余类数，这里 $N_{\mathfrak{P}}$ 是除子 $\mathfrak{P}$ 的范数．Legendre 符号的类比由下述同余式定义

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{P}}\right) = \zeta^k \equiv a^{(N_{\mathfrak{P}}-1)/n} \pmod{\mathfrak{P}}.$$

对整数对 a, b，与 Jacobi 符号类似的幂剩余符号由公式

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \prod \left(\frac{a}{\mathfrak{P}_i}\right)^{m_i}$$

定义，这里设 $b = \prod \mathfrak{P}_i^{m_i}$ 是主除子 (b) 的素除子分解，并假定 b 与 an 是互素的．

在 $\mathbf{Q}(i)$ 中，$n=4$ 的互反律是 Gauss 建立的([2])，在 $\mathbf{Q}(e^{2\pi i/3})$, $n=3$ 是由 G. Eisenstein([3]) 建立的．E. Kummer 对于素数 n 在域 $\mathbf{Q}(e^{2\pi i/n})$ 中建立了幂剩余符号的一般互反律([4])．对于**正则素数**(regular prime number) n 的 Kummer 公式形式为

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \zeta^{l^1(a)l^{n-1}(b) - l^2(a)l^{n-2}(b) + \cdots - l^{n-1}(a)l^1(b)},$$

这里 a, b 为域 $\mathbf{Q}(e^{2\pi i/n})$ 中的整数，

$$a \equiv b \equiv 1 \pmod{(\zeta - 1)},$$

$$l^i(a) = \left[\frac{d^i \log f(e^u)}{du^i}\right]_{u=0}.$$

$f(t)$ 是 $n-1$ 次多项式，使得

$$a = f(\zeta), \ f(1) = 1.$$

一般互反律的进一步研究体现在 D. Hilbert 的工作中([5], [6])，他发现了它们的局部面貌．他得出，在一些情况下，互反律可有范剩余符号的乘积公式的形式：

$$\prod_{\mathfrak{P}} \left(\frac{a, b}{\mathfrak{P}}\right) = 1.$$

他还注意到这个公式与代数函数的剩余定理的类似：范剩余符号不为 1 的点 $\mathfrak{P}$ 对应于一 Riemann 曲面上的分支点．

对互反律的进一步研究作出贡献的有 Ph. Furtwängler([7])，高木贞治([8])，E. Artin([9]) 和 H. Hasse([10])．最一般形式的互反律是 И. Р. Шафаревич([11]) 得到的．

与 Gauss 互反律类似，一般互反律与给定域 k 中的素理想在 k 的代数扩张 K 中的分解规律密切相关．这里 K 对 k 的 Galois 群是 Abel 群．特别地，以 Шафаревич 互反律为基础的**类域论**(class field theory)提供了这问题的解答([12])．

参考文献

[1] Gauss, C. F., Untersuchungen über höhere Arithmetik, Springer, 1889(译自拉丁文).

[2] Gauss, C. F., Theoria residuorum biquadraticorum, in Werke, Vol 2, K. Gesellschaft Wissensch. Göttingen, 1876, P. 65.

[3] Eisenstein, G., Beweis des Reciprocitätssatzes für die cubischen Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen, *J. Math.*, **27**(1844), 289 – 310.

[4] Kummer, E. E., Allgemeine Reciprocitätsgesetze für beliebig hohe Potentzreste, Ber. K. Akad. Wiss Berlin (1850), 154 – 165.

[5] Hilbert, D., Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, **4**(1897), 175 – 546.

[6] Hilbert, D., Ueber die theorie der relativquadratischen Zahlkörpern, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, **6** (1899), 1, 88 – 94.

[7A] Furtwängler, Ph., Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern (Erster Teil), *Math. Ann.*, **67**(1909), 1 – 31.

[7B] Furtwängler, Ph., Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern (Zwiter Teil), *Math. Ann.*, **72**(1912), 346 – 386.

[7C] Furtwängler, Ph., Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern (Dritter und letzter Teil), *Math. Ann.*, **74** (1913), 413 – 429.

[8] Takagi, T., Ueber eine Theorie der relativ Abel'schen Zahlkörperns, *J. Coll. Sci. Tokyo*, **41**(1920), 9, 1 – 133.

[9] Artin, E., Beweis des allgemeinen Reziprocitätsgesetzes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **5**(1928), 353 – 363. (also: Collected papers, Addison-Wesley, 1965, 131 – 141).

[10] Hasse, H., Die Struktur der Brauerschen Algebrenklassengruppe über einen algebraischer Zahlkörper, *Math. Ann.*, **107**(1933), 731 – 760.

[11] Шафаревич И. Р., 《Успехи матем. наук》, **3** (1948), 3(25), 165.

[12] Лапин А. И. 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **18**(1954), 4, 335 – 378.

[13] Cassels, J. W. S. and Frohlich, A. (eds.), Algebraic number theory, Acad. Press, 1986.

[14] Фаддеев Д. К., в кн: Проблемы Гильберта, М. 1969, 131 – 140.

С. А. Степанов 撰

【补注】 现代类域论中关于互反律的讨论见[A1]及**类域论**(class field theory).

参考文献

[A1] Neukirch, J., Class field theory, Springer, 1986.

冯绪宁 译

识别问题[recognition problem; разрешения проблема]

一个**算法问题**(algorithmic problem): 给定一个集合 A, 要求构造一个**算法**(algorithm)使得关于另一个包含 A 的集合 $B(A \subseteq B)$ 识别 A. 即一个算法 $\mathfrak{A}$, 可作用于 B 的任何元素, 并使得如果 $x \in A$, 则 $\mathfrak{A}(x) = 1$, 且如果 $x \in B \setminus A$, 则 $\mathfrak{A}(x) = 0$. 形式理论的识别问题构成重要的一类算法问题, 即一个理论中所有可证公式的集合(集合 A)关于这个理论中所有公式的集合(集合 B)的识别问题.

识别问题应与判定问题相区别, 判定问题是某一数学问题(例如一个算法问题)是否可解的问题(见**判定问题**(decision problem)).

В. Е. Плиско 撰 邯跃飞 译

矩形[rectangle; прямоугольник], 亦称长方形

四个角都是直角(即等于 90°)的四角形(见**完全四角形**(quadrangle, complete). 矩形是**平行四边形**(parallelogram)的特殊情况.

矩形法则[rectangle rule; прямоугольников формула]

计算有限区间 $[a, b]$ 上的积分的公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong h\sum_{k=1}^{N} f(\alpha + (k-1)h), \qquad (*)$$

其中 $h = (b-a)/N$ 且 $\alpha \in [a, a+h]$. 若 $\alpha = a + h/2$, 其代数精度为 1, 其他情况为零.

对于如下三角函数, **求积公式**(quadrature formula)(*)是准确的:

$$\cos\frac{2\pi}{b-a}kx,\ \sin\frac{2\pi}{b-a}kx,\ k = 0, \cdots, N-1.$$

若 $b - a = 2\pi$, 则(*)对于所有阶数不超过 $N-1$ 的三角多项式是准确的; 并且, 其三角精度是 $N-1$. 不存在其他 N 个实节点的求积公式可具有大于 $N-1$ 的三角精度. 因此 $b - a = 2\pi$ 情形下的矩形法则有最高的三角精度.

令 $R(f, \alpha)$ 为矩形法则的误差, 即(*)式左右两端的差数. 如果被积函数 f 在 $[a, b]$ 上二次连续可微, 则对于 $\alpha = a + h/2$ 有

$$R[f, a + \frac{h}{2}] = \frac{b-a}{2\pi} h^2 f''(\xi),$$

其中 $\xi \in [a, b]$. 如果 f 为以 $b-a$ 为周期的周期函数, 且在整个实轴上具有 $2k$(k 为自然数)阶的连续导数, 则对于任意 $\alpha \in [a, a+h]$,

$$R(f, \alpha) = -(b-a)B_{2k}\frac{h^{2k}}{(2k)!}f^{(2k)}(\eta),$$

其中 $\eta \in [a, b]$, B_{2k} 为 **Bernoulli 数**(Bernoulli numbers).

И. П. Мысовских 撰

【补注】

参考文献

[A1] Young, D. M. and Gregory, R. T., A survey of numerical mathematics, Dover, reprint, 1988, p. 362ff.

张宝琳 袁国兴 译

可求长曲线[rectifiable curve; спрямляемая кривая]

具有有限长度的曲线(见线(曲线)(line (curve))). 设 Γ 是 3 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一条连续参数曲线, 即 $\Gamma=\{x_1=x_1(t), x_2=x_2(t), x_3=x_3(t)\}$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 这里 $x_k(t)$ $(k=1,2,3)$ 是区间$[\alpha,\beta]$上的连续函数. 设 $\Pi=\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta\}$ 是$[\alpha,\beta]$的一个分割. 并设 $A_j=(x_1(t_j), x_2(t_j), x_3(t_j))$ 是 Γ 上对应于 Π 的点列. 再设 Γ_Π 是内接于 Γ 而顶点在 $A_0,\cdots,A_n$ 处的多边形弧. 这个弧的长度是

$$s(\Gamma_\Pi)=\sum_{j=1}^{n}|A_{j-1}A_j|,$$

这里

$$|A_{j-1}A_j|=\sqrt{\sum_{k=1}^{3}(x_k(t_j)-x_j(t_{j-1}))^2},$$

那么

$$s(\Gamma)=\sup_{\Pi}s(\Gamma_\Pi)$$

称为曲线 Γ 的长度(length of the curve). $s(\Gamma)$ 与 Γ 的参数化无关. 如果 $s(\Gamma)<\infty$, 那么 Γ 称为一条可求长曲线(rectifiable curve). 可求长曲线在几乎每一点$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$处, 即对几乎所有的参数值 $t\in[\alpha,\beta]$, 都有切线. 可求长曲线的研究是由 L. Scheeffer 开创的([1]), 并由 C. Jordan([2]) 继续进行, 后者证明了 Γ 是可求长曲线, 当且仅当函数 $x_k(t)$ $(k=1,2,3)$ 是$[\alpha,\beta]$上的**有界变差函数**(function of bounded variation).

参考文献

[1] Scheeffer, L., Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven, *Acta Math.*, 5 (1885), 49–82.

[2] Jordan, C., Cours d'analyse, Gauthier-Villars, 1883.

Б. Н. Голубов 撰

【补注】 上述的一切对 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中的曲线可完全类似地进行.

潘养廉 译

从切平面[rectifying plane; спрямляющая плоскость]

曲线 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$(见线(曲线)(line (curve)))上给定点 A 处的 Frénet 标架(见 **Frénet 三棱形**(Frénet trihedron))中的一个平面, 由曲线在这个点的**切线**(tangent line) $\mathbf{t}$ **和副法线**(binormal) $\mathbf{b}$ 张成. 从切平面的方程可写成

$$\begin{vmatrix} X-x(A) & Y-y(A) & Z-z(A)\\ x'(A) & y'(A) & z'(A)\\ \begin{vmatrix} y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}\end{vmatrix}=0,$$

或

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{r}'[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']=0,$$

这里 $\mathbf{r}(t)=(x(t), y(t), z(t))$ 是曲线的方程

Д. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 2, Publish or Perish, 1970.

潘养廉 译

递推关系[recurrence relation; рекуррентное соотношение], 递推公式(recurrence formula)

形如

$$a_{n+p}=F(n, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+p-1})$$

的关系式, 使得当已知序列 $a_1, a_2, \cdots$ 的最初 p 项时, 就可以算出它所有的项. 递推关系的例子如: 1) $a_{n+1}=q\cdot a_n(q\neq 0)$——**等比数列**(geometric progression); 2) $a_{n+1}=a_n+d$——**等差数列**(arithmetic progression); 3) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$——**Fibonacci 数**(Fibonacci numbers)序列.

在递推关系是线性的情况下(见**递归序列**(recursive sequence)); 描述满足已知递推关系的所有序列的集合的问题与解常系数齐次线性常微分方程的问题相类似.

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Возвратные последовательности, 2 изд., М., 1975.

С. Н. Артемов 撰

【补注】 含有幺元素的交换环 R 中的元素序列 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$, 满足线性递推关系 $\alpha_n=p_1\alpha_{n-1}+\cdots+p_m\alpha_{n-m}(n\geqslant m)$的充分必要条件是, 形式幂级数 $\alpha(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots$ 是一形如 $\alpha(x)=p(x)/q(x)$ 的有理函数, 其中 $p(x)=1-p_1x-\cdots-p_mx^m$ 而 $q(x)$ 是次数 $\leqslant m-1$ 的多项式.

戚鸣皋 译 潘承彪 校

递归事件[recurrent events; рекуррентные события], 在有随机结果的重复试验序列中的

具有如下性质的事件序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$: A_n 的发生由前 n 次试验的结果所决定, $n=1,2,\cdots$, 而在每当 A_n 已经发生的条件下, $A_m(m>n)$ 的发生则由第 $n+1$, 第 $n+2$, $\cdots$ 直至第 m 个试验的结果所决定; 此外, 当 A_n 与 $A_m(m>n)$ 同时发生时, 前 n 次与最后 $m-n$ 次试验的结果是条件独立的.

说得更详细些，设 X 是一次实验的所有结果的（有限或可数）集合，$X^{[1,n]}$ 是 n 次试验结果的序列 $(x_1, \cdots, x_n)$，$x_i \in X(i=1, \cdots, n)$ 的空间，$n=1, 2, \cdots$，而 $X^{[1,\infty)}$ 是结果的无穷序列 $(x_1, x_2, \cdots)$，$x_i \in X(i=1, 2, \cdots)$ 的空间，并且在其中给定了某个概率分布 P. 设在每个空间 $X^{[1,n]}(n=1, 2, \cdots)$ 中选择一个子空间 $\varepsilon_n \subseteq X^{[1,n]}$，使得对于任何 n 与 $m(1 \leqslant n < m < \infty)$，序列 $\bar{x}=(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m) \in X^{[1,m]}$，若有 $\bar{x}|_1^n \equiv (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in \varepsilon_n$，则 $\bar{x} \in \varepsilon_m$，当且仅当序列

$$\bar{x}|_{n+1}^m \equiv (\bar{x}_{n+1}, \cdots, \bar{x}_m) \in \varepsilon_{m-n}.$$

如果上述条件满足且 $\bar{x} \in \varepsilon_m$，那么

$$\mathrm{P}\{x \in X^{[1,\infty)}: x|_1^m = \bar{x}\} =$$

$$= \mathrm{P}\{x \in X^{[1,\infty)}: x|_1^n = \bar{x}|_1^n\} \mathrm{P}\{x \in X^{[1,\infty)}: x|_{n+1}^m = \bar{x}|_{n+1}^m\}.$$

其中对于序列 $x=(x_1, x_2, \cdots) \in X^{[1,\infty)}$，用 $x|_i^j$ 表示序列

$$x|_i^j = (x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j), i \leqslant j, i, j = 1, 2, \cdots.$$

事件

$$A_n = \{x \in X^{[1,\infty)}: x|_1^n \in \varepsilon_n\}$$

称为递归事件（recurrent event），若它在 n 次试验后发生.

例. 1) 在独立投币序列中，n 次试验中正面与反面投出的次数相等这一事实组成的事件（它仅当 n 为偶数时才有可能）就是递归事件.

2) 在一维格点 $\mathbf{Z}^1$ 上由零点开始的**随机游动**（random walk）中（各步以概率 p 与 q 独立地跳到相邻的点，$p+q=1$），动点在第 $n(n=2, 4, \cdots)$ 步返回零点的事件是递归事件.

参考文献

[1] Feller, V., An Introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1968（中译本：W. 费勒，概率论及其应用，科学出版社，1964）.

Т. Ю. Попова 撰

【补注】 见递归 **Марков 链**（Markov chain, recurrent）；**Марков 链的正递归态类**（Markov-chain, class of positive states of a）.

参考文献

[A1] Bailey, N. T. J., The elements of stochastic processes, Wiley, 1964.

[A2] Chung, K. L., Markov chains with stationary transition probabilities, Springer, 1960.

[A3] *Gihman, I. I., Skorokhod, A. V.*, The theory of stochastic processes, 1, Springer, 1974（译自俄文）.

[A4] Spitzer, V., Principles of random walk, v. Nostrand, 1964.

潘一民 译

递推公式 [**recurrent formula** 或 recurrence formula; **рекуррентная формула**]

同递推关系（recurrence relation）.

递推函数 [**recurrent function**; **рекуррентная функция**]

成为**移位动力系统**（shift dynamical system）的**回复点**（recurrent point）的函数. 等价的定义如下：让 S 是度量空间，$\varphi: \mathbf{R} \to S$ 称为递推函数，如果它是一致连续的，其值集是准紧集，并且对于每个数列 $t_k \in \mathbf{R}$，如果极限

$$\tilde{\varphi}(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi(t_k + t)$$

（紧开拓扑下的极限（limit in the compact-open topology），即在每个线段上的一致收敛极限）存在，则可找到数列 $\tau_k \in \mathbf{R}$，使得在紧开拓扑下，

$$\varphi(t) = \lim_{k \to \infty} \tilde{\varphi}(\tau_k + t).$$

若 $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ 是有界的一致连续函数，则可找到数列 $t_k \in \mathbf{R}$，使得（在紧开拓扑下）极限

$$\tilde{\varphi}(t) = \lim_{k \to \infty} \varphi(t_k + t)$$

存在，并且是一个递推函数. 任何**殆周期函数**（almost-periodic function），特别是任何周期函数，都是递推函数.

参考文献

[1] Изобов, Н. А., **Итоги науки и техники**, *Математический анализ*, т. 12, М., 1974, с. 71－146.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 递推函数不过就是形如 $(C_c^*(\mathbf{R}, S), \{\rho^t\})$ 的动力系统的**紧极小集**（minimal set）中的一点，其中 $C_c^*(\mathbf{R}, S)$ 是连续函数 $f: \mathbf{R} \to S$ 组成的空间，使得 $f(\mathbf{R})$ 是 S 中的准紧集（S 是度量空间），配备了紧开拓扑，而 $(\rho^t f)(s) = f(s+t)$，$f \in C_c^*(\mathbf{R}, S)$，$s, t \in \mathbf{R}$. 若 $S = \mathbf{R}$，则此系统称为 Bebutov 系统（Bebutov system）. 在 [A1] 中，递推函数（按上述定义）称为极小函数（minimal function）.

参考文献

[A1] Auslander, J. and Hahn, F., Point transitive flows, algebras of functions and the Bebutov system, *Fund. Math.*, **60**(1967), 117－137.

胡师度、白苏华 译

回复点 [**recurrent point**; **рекуррентная точка**]，*动力系统的*

度量空间 S 中的**动力系统**（dynamical system）f^t（也记作 $f(t, \cdot)$，见 [2]）的满足以下条件的点 x：对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $T > 0$，使轨道 $f^t x$ 的所有点都包含在此轨道的任一时间长 T 的弧段的 ε 邻域

中（换言之，对任意 $\tau\in\mathbf{R}$、集合

$$\{f^t x: t\in[\tau, \tau+T]\}$$

的 ε 邻域包含了整个轨道 $f^t x$）. 这时 $f^t x$ 称为一个回复轨道（recurrent trajectory）.

Birkhoff 定理（Birkhoff theorem）：若空间 S 是完全的（例如 $S=\mathbf{R}^n$），则，1）一点为回复点的必要充分条件是它的轨道的闭包是一紧的**最小集**（minimal set）；2）为有回复点存在，只需存在一个 Lagrange 稳定点就够了（见 **Lagrange 稳定性**（Lagrange stability））.

回复点是 Poisson 稳定的（见 **Poisson 稳定性**（Poisson stability））；而若 S 是完全的，则是 Lagrange 稳定的（见 **Lagrange 稳定性**（Lagrange stability））. 动力系统的殆周期点（特别是不动点或周期点）是回复点. 一般说来，（完全空间中的）严格遍历动力系统的任一点是回复的，但是动力系统在回复轨道（一最小集）的闭包上的限制却不一定是严格遍历的动力系统（Марков 例子（Markov example），见[2]）.

参考文献

[1] Birkhoff, G. D., Dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1927.

[2] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949（中译本：В. В. 涅梅茨基，В. В. 斯捷巴诺夫，微分方程定性理论，上、下，科学出版社，1956，1959）.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 度量空间 (S,ρ) 中的动力系统 f^t 的殆周期点（almost-periodic point）就是具有以下性质的点 $x\in G$：对任意 $\varepsilon>0$，集合

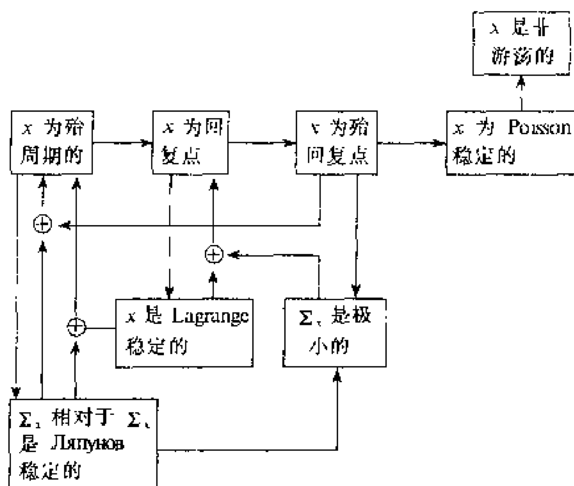
$$AP(x,\varepsilon)=\{t\in\mathbf{R}: \rho(f^{t+s}(x), f^s(x))<\varepsilon \text{ 对一切 } s\in\mathbf{R} \text{ 成立}\}$$

在 $\mathbf{R}$ 中是相对稠密的（relatively dense），即存在一个长度 $l(\varepsilon)$，使得 $\mathbf{R}$ 中每一个长度 $h\geq l(\varepsilon)$ 的区间都含有 $AP(x,\varepsilon)$ 中的点.（这样就可以说到一个函数 $t\mapsto f^t(x):\mathbf{R}\to S$ 是殆周期的（almost-periodic）；见**殆周期**（almost-period）.）

另一个重要的概念是殆回复点（almost-recurrent point）：一点 $x\in S$，使对每个 $\varepsilon>0$，集合

$$R(x, U_\varepsilon)=\{t\in\mathbf{R}: f^t(x)\in U_\varepsilon\}$$

在 $\mathbf{R}$ 中相对稠密，这里 U_ε 是以 x 为心的开 ε 球.（这个概念很容易推广到任意拓扑空间上的流或级联）. 这些概念与回复点，Birkhoff 定理之间以及许多其他蕴含关系可以图示如下：



用虚线表示的蕴含关系只在完全空间中成立，Σ_x 表示 x 的轨道的闭包. “Σ_x 相对于 Σ_x 是 Ляпунов 稳定的”一语表示由 Σ_x 到 Σ_x 的函数族 $\{f^t|_{\Sigma_x}\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是在 Σ_x 上等度连续的（见 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability））. [A3] 中有这个图的进一步的细化（包括伪回复点（pseudo-recurrent point）和一致 Poisson 稳定轨道（uniformly Poisson-stable trajectory）概念）.

在关于拓扑动力学的文献（特别是直接间接受到 [A2] 影响的文献）中，还使用了另一种术语：

上文，[2]，[A3]	[A2]	[A1]
殆周期	——	——
回复	——	——
殆回复	殆周期	一致回复
Poisson稳定的	回复	回复
（非）游荡	（非）区域回复	——

（准确些说，在 [A1] 中，“回复”表示正 Poisson 稳定，即 x 只属于其本身的轨道的 ω 极限集）.

参考文献

[A1] Furstenberg, H., Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory, Princeton Univ. Press, 1981.

[A2] Gottschalk, W. H. and Hedlund, G. A., Topological dynamics, Amer. Math. Soc., 1955.

[A3] Sibirsky, K. S. [K. S. Sibirskiĭ], Introduction to topological dynamics, Noordhoff, 1975（译自俄文）.

齐民友 译

递归 [**recursion**; **рекурсия**]

在算法论和其他的数理逻辑的分支研究中定义函数的一种方法. 这方法在算术中已使用了很长时间，用以定义数的序列（级数，Fibonacci 数，等等）. 递归在计算数学中起重要作用（递归方法）. 最后，集合论中常用**超限递归**（transfinite recursion）.

在很长时间里数学家们使用没有精确定义的“递

归"这个词，它的近似的直观意义可如下描述：所求函数 f 在某任意点 $\bar{x}$（所谓点是指变数值的数组）的值一般说来由这同一函数在 $\bar{x}$"前面"的诸点 $\bar{y}$ 的值所决定．递归的字根"recur"的意思是"回归"的意思．函数在起始点的值当然必须被直接定义．有时递归被用来同时定义几个函数；那么上面讲的定义要做相应的改动．下面给出不同类的递归的例子．在不同的递归类型（"递归格式"）中关系"$\bar{x}_1$ 在 $\bar{x}_2$ 前"（其中 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ 属于要计算的函数的定义域）可以有不同的含义．但是它必须是"良基的"（即不会有点 $x_n(n=0, 1, \cdots)$ 的无穷序列，使得 $\bar{x}_{n+1}$ 在 $\bar{x}_n$ 前）．另外，暗含地理解为关系是"充分自然的"（例如要求这关系可由一递归模式的确切描述中看出而不是由它的应用过程中看出）．这最后的条件有纯粹的启发式的价值（例如为决定任何特定的递归的相对简单的类型）．这个条件的更确切的定义与递归本身概念的更确切的描述分不开，为此主要是确定哪些形式表达式的类型可被认为是递归定义．

这里提出数值函数（即有自然数变量和自然数值的函数）的递归描述的问题，这通常蕴涵着定义计算被确定的函数的方式．这里和以后（除了在结论的详注中）"递归式"一词就严格按这意义来理解．最简单的和最广泛用的递归模式是**原始递归**（primitive recursion）：

$$f(0, x_1, \cdots, x_n)=g(x_1, \cdots, x_n),$$

$$f(y+1, x_1, \cdots, x_n)=$$

$$=h(y, f(y, x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n),$$

其中函数 g 和 h 是已知函数，f 是要确定的函数，y 是实施递归的变元，且 $x_1, \cdots, x_n$ 是不介入递归的参数．与这模式的最接近的推广被称之为"串值递归"（course of value recursion），它包括那些类型的递归定义在其中，像原始递归式那样，只有一个变元参与递归式．对应的前趋关系和自然数的正常顺序相重合（但是，有时此词用于更广泛的意义下）．最典型的串值递归形式如下：

$$f(0, x_1, \cdots, x_n)=g(x_1, \cdots, x_n),$$

$$f(y+1, x_1, \cdots, x_n)=h(y, f(\alpha_1(y), x_1, \cdots, x_n),$$

$$\cdots, f(\alpha_k(y), x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n),$$

其中 $\alpha_i(y)\leqslant y$，$i=1, \cdots, k$．数理逻辑经常涉及原始递归函数（primitive recursive function），即可由特别给出的基本函数（如 $f(x)=x+1$，$f(x, y)=y$ 等）出发经过有限次使用代入和原始递归而得的函数．描述如此一个结构的函数的等式的序列被称之为对应函数的原始递归描述（primitive recursive description），这些描述是有一个确定的可以能行地认识的结构的语法对象（即符号串）．事实上几乎一切数学中为了某个具体的目的而用的数值函数已证明了是原始递归函数．这大大地说明了这类函数的有趣之处．

当递归同时出现在几个变元时，所得到的递归定义类型更复杂，通常这类定义超出原始递归函数类，虽然对应的前趋关系可以是完全自然的．例如像出现在如下的双重递归（double recursion）的模式中 $f(u, v)$ 的值可以参与到 $f(x, y)$ 的定义之中，其中 $u<x$ 或者 $u=x$ 且 $v<y$：

$$f(x, y)=g(x, y)\ \text{若}\ x=0\ \text{或}\ y=0$$

$$f(x+1, y+1)=$$

$$=h(x, y, f(x, \alpha(x, y, f(x+1, y))),$$

$$f(x+1, y))\ .$$

这个模式尚未归约到原始递归．另一方面，大量递归定义归约到它（见[1]）．

与关于"一般意义下递归式"的含糊的近似数学的思想相反递归式的部分类型应用有精确数学的定义．这些思想的精细化被自然地想象成是寻找一适当的把一切可以想象到的不太广的递归的类型具体化的算法语言（即一描述可计算过程的形式语言）．人们可以合理地期望如此的精细化的发展可能会要求更多的附加的约定，这些约定给递归的直觉的理解带来一些新的东西．基于这种联想指出所有上面讲到的递归模式都是面向产生全（处处有定义）函数的，是有趣的．因此在一原始递归模式中函数 g，h 是全函数，那么 f 也是全函数．一般说来，定义出部分函数的递归定义直观上看起来是不自然的．但是这种递归是为了某种联系到称为对角线方法（diagonal method）的理由的分析而引人的．于是，设给定一个在其中只能定义全函数的**算法语言**（algorithmic language）L，且设 L 的语法结构不能延伸到直观理解的递归性的界限之外．当然这蕴涵在 L 中（描述函数的）表达式是算法地可认识的且有按它们的描述可在 L 中表示的一致地计算函数的方法．如果 L 中表达式只简单地当作符号串，那么每个这种串可被看成是在一适当的数的系统中一个自然数的表达式，给定表达式的"编码"．设函数 $G(m, x)$ 的定义如下：若 m 是（在 L 中）描述某个一元函数 $_m$ 的编码，那么 $G(m, x)=f_m(x)$．否则 $G(m, x)=\varphi(x)$，其中 φ 是某个在 L 中可表达的函数．显然 $G(m, x)$ 是可计算的（见**可计算函数**（computable function））且是全函数．同样地函数 $F(x)=G(x, x)+1$ 也是可计算的且是全的．但是 F 不能在 L 中表达，因为对任何 m 不可能有等式 $F(m)=$

$f_m(m)$.（这个论证中 F 是全函数的性质起重要作用.）这样就产生了问题：F 的给定描述是否是递归的. 如果 L 被取为原始递归描述的语言，那么这描述就可归约到一个二重递归的函数. 一般地说，由于递归的直观概念是含糊的，这情况是不清楚的，所以对这问题的肯定答案表现为是一个附加的约定. 如果这点可被接受（因为现代逻辑中可以暗含地做到），那么不可能存在详细描述"全"递归式的一切类型的语言 L.

同时，如果在 L 中也可表达部分函数（且若它们的描述是递归的），那么对角化不必要延伸到 L 之外，所以这语言对递归性的精确化是合适的语言. 的确，这涉及递归性这个概念的再思考，且这概念的当前的严格定义和最早的直观想法并不是完全相合的. 在新的精细化了的意义下，递归是（有固定解释的）各种算法语言中构造表达式的一种特殊运算. 若 L 是这些语言中的一个，可以自然地假设在 L 中有其他的语法的运算，L 中的递归描述的具体类型要依赖于它们. 一般说，L 中的表达式不必须只描写数值函数. 其中某些语言可以定义函数的运算和其他对象. 特别地，必须有定义递归的表达式. L 中递归的描述是形为 $f_i = T_i(f_1, \cdots, f_n)$, $i = 1, \cdots, n$, 的函数的等式，其中 f_i 是被定义的函数，且 T_i 是 L 中定义特定的一类运算的表达式. 但是 L 中一切可表达的运算必须是能行的（因为 L 是一个算法语言）且因此是单调的（即它们保持关系 $\varphi < \psi$, 它的意思是 ψ 提供 φ 的定义. 因此，每一给定型的系统（在关系 $\prec$ 的意义下）有一个极小解，并且根据定义，是构成这个解的函数的一个递归描述. 对 f_i 的同时计算的方法是用同样方式进行的. 这过程或多或少的定义了对变目的自然的前趋关系，它也在一定程度上说明了与"递归"这个词的关系.

为了在这定义中包括上述的递归模式，语言 L 有必要不能太贫乏. 因此，在原始递归式中已要求，有代入和"片段式定义"（即用几个等式来定义函数）. 另外与刚定义的递归式相联的两个语法运算已足以定义一切可计算函数了（要由基本函数出发，见**可计算函数**（computable function）. 对 L 有了适当的假定，人们可以确信所给出的递归的定义包括一切直观上可以想象得出的递归描述，同时给出的一般的定义，有现代数学中认为很基本的直观上所理解的递归性的特征性质.

所给出的递归的丰富性不只在于算法理论中是有意义的，而且在于允许人们在一些抽象的数学结构中寻求（在一般意义的）算法的观点下与"数值的"递归相仿的结构（超限递归，归纳定义，递归分层等等）.

参考文献

[1] Peter, R., Recursive functions, Acad. Press, 1967（译自德文）.

[2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965（英译本：Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970）

[3] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960（英译本：Uspenskii, V. A., Leçons sur les functions calculables, Hermann, 1966）.

[4] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951.

[5] Moschovakis, Y. N., Elementary introduction on abstract structures, North-Holland, 1974.

Н. В. Белякин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rogers, H. Jr., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

杨东屏 译

高阶递归 [**recursions of higher degrees; рекурсии высших ступеней**]

除了数函数外还用较高类型函数作为辅助对象的**递归定义**（recursive definition）. 例如在二阶递归（recursion of the second degree）情况有

$$V_{x_1, \cdots, x_n}(a_1, \cdots, a_n; f(x_1, \cdots, x_n)) =$$
$$= f(a_1, \cdots, a_n)$$

类型的"代入"泛函以及用它们经过递归可以得到的泛函. 高阶递归的有趣性质是多重递归可以归约成使用向高阶过度的单一递归. 这构成把**多重递归**（multiple recursion）归约为一范式的方法的基础. 要注意，这一领域的术语还未最后确定. 特别地，高阶递归这个词有时表示多重递归的范式.

参考文献

[1] Peter, R., Recursive functions, Acad. Press, 1967（译自德文）.

Н. В. Белякин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1950, p. 234.

[A2] Odifreddi, P., Classical recursion theory, North-Holland, 1989, Chapt. II; esp. pp. 199ff.

杨东屏 译

递归定义 [**recursive definition; рекурсивное определение**]

（数学中）经常使用的定义函数的方式，用此方式在一给定点寻求的函数值用（给定的适当前趋关系下）前面点的值来定义. 数论函数的递归定义是算法

(见递归(recursion))理论研究的主题.在集合论中递归定义被经常用来以超限递归(transfinite recursion),定义序数上的函数.在更大的范围内、在可允许集合理论中递归定义被研究.在它的基础上综合了集合论与算法论的思想(见[2]).

参考文献

[1] Rogers. Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[2] Barwise, J., Admissible sets and structures, Springer, 1975

Н. В. Белякин 撰 杨东屏 译

递归等价类型 [recursive equivalence type; рекурсивной эквивалентности тип]

递归等价关系的一个等价类,即一切自然数子集的类,其中的每个子集可用一个一一映射的部分递归函数(partial recursive function)映到另一个子集上.因此递归集合论(recursive set theory)中递归等价概念类似于经典集论中基数(cardinality)的概念.因为任何两个有限集是递归等价的,当且仅当它们的元素个数相同,有限集的递归等价类型完全由这个集合的基数刻画.对自然数的无限集情况就不同,尽管它们是等价的:所有这些集合的类分类到各种递归等价类型的连续统的基数的一个集合中.每个递归等价类型(除空集的递归等价类型外)本身是一可数集.属于同一递归等价类型的集合关于一定的算法性质是相似的.因此无穷递归可枚举集(见可枚举集(enumerable set))(包括递归的以及非递归的)组成单一的递归等价类型.由于递归等价于产生集的集本身也是产生集,包含一产生集(productive set)的每个递归等价类型只包含产生集.禁集(immune set)也有相似的情况.禁集的递归等价类型和有限集的递归等价类型的理论以孤立元(isol)而闻名,已被深入地研究了.

在递归等价类型上可以定义的代数运算中最重要是加法和乘法:若 A 和 B 是递归等价类型 $\alpha\in A$, $\beta\in B$,且 α 由偶数组成而 β 由奇数组成,则 $A+B$ 是集合 $\alpha\cup\beta$ 的递归等价类型;$A\cdot B$ 是集合 $j(\alpha\times\beta)$ 的递归等价类型,其中 j 是一个一般递归配对函数,它把自然数集的 Descartes 方形一一映射到自然数集本身之上.递归等价类型的代数和不含选择公理(axiom of choice)而发展的基数代数密切相关.孤立元的类对所说运算是封闭的.

曾有把递归等价类型概念移向集合类的企图.

参考文献

[1] Rogers. Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

[2] Dekker, J. C. E. and Myhill, J., Recursive equivalence types, Univ. California Publ., 3 (1960), 67–213.

В. А. Душский 撰 杨东屏 译

递归估计 [recursive estimation; рекурсивное оценивание]

【补注】 由序贯发生(从而构成随机过程(stochastic process))的数据估计参数的一类方法(亦见序贯分析(sequential analysis)).数据源于电子工程及医学记录仪实时测量系统.虽然算术平均数和极端值借助现代装置容易算出,但总体分位数(quantile)的估计并非简单问题.为此,L. Tierney([A1])和 U. Holst([A2])运用了 H. Robbins 和 S. Monro([A3])的随机逼近理论(亦见随机逼近(stochastic approximation)).另一种方法运用逐次子集的分位数([A4]),在此情形下,渐近分布由多项式的循环使用决定.在[A5]中描绘了具有交替极大和极小的三基法.

参考文献

[A1] Tierney, L., A space-efficient recursive procedure for estimating a quantile of unknown distribution, *SIAM J Scient. Statist. Comp.*, **4** (1983), 706–711.

[A2] Holst, U., Recursive estimation of quantiles using kernel density estimators, *Sequetial Anal.*, 6(1987), 219–237.

[A3] Robbins, H. and Monro, S., A stochastic approximation method, *Ann. Math. Stat.*, **22** (1951), 400–427.

[A4] Rousseeuw, P. J. and Bassett, G. W., The remedian: a robust averaging method for large data sets, *J Amer. Statist. Assoc.*, **85** (1990), 97–104.

[A5] Pearl, J., A space-efficient on-line method of computing quantile estimators, *J. Algorithms*, **2** (1981), 164–177.

P. J. Rousseeuw 撰 周概容 译

递归函数 [recursive function; рекурсивная функция], 部分递归函数(partial recursive function)

可计算函数(computabl function)直觉概念的一种数学的精确描述,其定义如下.人们研究定义在自然数上且取自然数为值的函数.一般说,如果它不是在每个自然数上都有定义时被称为部分的.如下函数被称为是基本的:

$$S(x)=x+1,\ o(x)=0,$$

$$I_m^n(x_1,\cdots,x_n)=x_m\ (1\leqslant m\leqslant n).$$

人们说一个 n 元函数 ψ 是由一个 m 元函数 φ 及 n 元函数 $f_1,\cdots,f_m$ 借助于复合(composition)而得来的,若对一切 $x_1,\cdots,x_n$ 如下等式成立

$$\psi(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$=\varphi(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n)).$$

人们说一 $(n+1)$ 元函数 f 是由一 n 元函数 φ 及 $(n+2)$ 元函数 ψ 经**原始递归**（primitive recursion）而得来的，若对 $x_1, \cdots, x_n, y$，下列等式成立：

$$f(x_1, \cdots, x_n, 0) = \varphi(x_1, \cdots, x_n),$$

$$f(x_1, \cdots, x_n, y+1) =$$

$$= \psi(x_1, \cdots, x_n, y, f(x_1, \cdots, x_n, y)).$$

人们说一 n 元函数 f 是由 $(n+1)$ 元函数 φ 借助于一个**极小化算子**（minimization operator），或**最小数算子**（least number operator）而得，若对任意 $x_1, \cdots, x_n, y$ 条件 $f(x_1, \cdots, x_n) = y$ 成立，当且仅当 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, 0), \cdots, \varphi(x_1, \cdots, x_n, y-1)$ 都有定义且值不是 0，而 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$. 一个部分函数称为**递归的**（recursive），若它可由基本函数经过有穷次应用复合、原始递归和极小化算子而得.

换言之，f 是一个递归函数，若有一部分函数的有穷序列 $g_1, \cdots, g_k$ 使得 $g_k = f$ 且序列中每个函数要么是基本的，要么是由前面的函数用复合、原始递归或极小化而得. 用**算术化**（arithmetization）方法可以得到如此描述的一切递归函数的一个枚举，实际上可以给出一个算法，它可以计算递归函数的描述和自然数之间的一一满射编码. 用这描述定义的递归函数通常记为 φ_x，且 x 称为它的 **Gödel 数**（Gödel number）.

一个处处有定义的递归函数称为**一般递归的**（general recursive）. 有一些递归函数不能扩充为一般递归函数.

对任意递归函数，人们可以给出计算它的值的一个算法，即一切递归函数的本质是可计算的. 一个普遍承认的假设，称为 Church **论题**（Church thesis），是说一切可计算函数都是递归的. 这论题由许多事实所证实. 这样，一切数学中研究的具体的函数，和直观上被认为是可计算的函数都被证明为递归的. 递归函数的概念和其他的可计算函数的数学的精确描述（如在一 **Turing 机**（Turing machine）上可计算的函数，用 Марков **正规算法**（normal algorithm）可计算的函数等等）相重合.

有一些用初始函数和生成算子得来的一切递归函数的类的定义. 特别地，每个递归函数可由函数

$$a(x, y) = x + y,\ m(x, y) = x \cdot y,\ I^n_m \text{ 以及}$$

$$k(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x < y, \\ 1 & \text{若 } x \geq y, \end{cases}$$

使用有限次复合和极小化算子得到.

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965（英译本：Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions. Wolters-Noordhoff, 1970）.

[2] Rogers, Jr. H., Theory of vecursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

В. Е. Плиско 撰　杨东屏 译

递归对策[**recursive game**; **рекурсивная игра**]

在对策结束时有支付的**随机对策**（stochastic game）（也见**动态对策**（dynamic game））. 因为递归对策可能从不结束，这就必须要确定无限对策情形下的局中人的支付. 任何 Shapley 对策的分析可归结为某个递归对策的分析，但是由于无限对策的可能性，研究递归对策一般要比研究随机对策来得复杂. 任何二人零和有限递归对策具有值，且两个局中人有定常的 ε 最优策略. H. Everett（[1]）已经指出一种既求对策的值，又求最优策略的方法.

参考文献

[1] Everett, H., Recurcive games, in H. W. Kuhn, et al. (ed.): Contributions to the theory of games, Vol. 3, Princeton Univ. Press, 1957, 47 – 87.

В. К. Доманский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Alpern, S., Games with repeated decisions, *SIAM J. Control Optim.*, **26**(1988), 2, 468 – 477.

史树中 译

递归模型论[**recursive model theory**; **конструктивных моделей теория**]，**递归表示模型论**（recursively presented model theory）

数学的一个分支，它是**模型论**（model theory），**代数学**（algebra）和**递归函数**（recursive function）之间的边缘学科，并且涉及到对模型和代数中的能行性问题的研究.

А. И. Мальцев 的论文"**构造代数**"（constructive algebras）[1] 是递归表示模型方面的第一篇综述性的著作. 在这篇论文中他系统地提出了这个理论的基本概念，并且指明了进一步的发展方向. 对数学的这个分支的建立和发展起了主要作用的是 Ю. Л. Ершов 和他的学生们，他们解决了递归模型论中一些基本问题，给出了新概念，并且确定了新的研究方向（见[2]）.

下面系统地阐述递归模型论中的基本概念和结果. 通常所有的考虑是在一个固定的表征

$$\sigma_0 = \langle p_0^{n_0}, \cdots, p_k^{n_k}, \cdots \rangle_{k<\omega}$$

中进行，而且函数 $f: f(k) = n_k$ 是递归的. 当考虑代

数系统时，表征中可以有函数符号出现．表征

$$\sigma_1 = \sigma_0 \cup \langle a_0, a_1, \cdots, a_k, \cdots \rangle_{k<\omega}$$

是由 σ_0 添加可数个个体常元而得，它也是常用的．总是认为 $n_0 = 2$，并且谓词 P_0^2 作为相等定义于任意模型上．设 $L_i (i = 0, 1)$ 是具有等号（P_0^2）的表征 $\sigma_i (i = 0, 1)$ 的狭义谓词演算的所有公式的集合，并且设 $g(g: \mathrm{N} \to L_1)$ 是 L_1 的一个固定的 Godel 枚举（见[3]）．子集 $S \subseteq L_1$ 称为可判定的（decidable），如果集合 $g^{-1}(s)$ 是递归的（见**递归集合论**（recursive set theory））．（表征 σ_0 的）一个枚举模型（enumerated model）是一个对（$\mathfrak{M}, \nu$），其中 $\mathfrak{M} = \langle M, P_0^{n_0}, \cdots, P_k^{n_k}, \cdots \rangle_{k<\omega}$ 是表征 σ_0 的一个模型，ν 是 $\mathfrak{M}$ 的支集 M 的一个枚举．一个枚举模型 $(\mathfrak{M}, \nu)$ 称为递归表示模型（recursively presented model），如果集合

$$\bar{D}(\mathfrak{M}, \nu) = \{\langle k, x_1, \cdots, x_{n_k} \rangle:$$

$$\mathfrak{M} \models P_k^{n_k}(\nu(x_1), \cdots, \nu(x_{n_k}))\}$$

是递归的．

对于每一个枚举模型 $(\mathfrak{M}, \nu)$，可以构造 $\mathfrak{M}$ 的某一个 σ_1 饱和模型（σ_1-saturation）$\mathfrak{M}_\nu$，也就是表征 σ_1 的一个模型，$\mathfrak{M}_\nu$ 的支集为 $\mathfrak{M}$ 的支集，σ_0 中的谓词在 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}_\nu$ 中的解释相同，并且常元定义为：对于 $a_k, k < \omega$, $\nu(k) \in M$．设 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ 是 $\mathfrak{M}$ 的初等理论，也就是表征 σ_0 的在 $\mathfrak{M}$ 中真的闭公式集．设 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu)$ 是枚举模型 $\mathfrak{M}_\nu$ 的初等理论．一个枚举模型（$\mathfrak{M}, \nu$）称为强递归表示的（strongly recursively presented）或可判定的（decidable），如果 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu)$ 是一个可判定理论．由定义显然可直接得到，一个强递归表示模型是递归表示的．

递归模型论的基本问题之一是具有各种初等性质（即用狭谓词演算的语言可描述的性质）的递归表示模型的存在性．在这方面已经得到一些有趣而且重要的定理（1990）．下述定理给出了一大类强递归表示模型的存在性：如果 $T \subseteq L_0$ 是一个可判定理论，那么存在一个强递归表示模型的序列

$$(\mathfrak{M}_0, \nu_0), \cdots, (\mathfrak{M}_k, \nu_k), \cdots, \kappa < \omega.$$

使得 $T = \bigcap_{k<\omega} \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_k)$，并且集合 $\{\langle x, y \rangle: g(y) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_x, \nu_x)\}$ 是递归的．已经注意到，有些公式没有递归表示模型．对于具有递归可枚举公理集合的理论，下面两个定理给出了递归表示模型的存在性的某些充分条件．

如果 T 是一个递归可枚举 $\forall\exists$ 理论，并且 T 有一具有递归可枚举 $\exists$ 理论的模型 $\mathfrak{M}$，那么 T 有一个递归表示模型．

有限表征 $\sigma = \langle P_0^{n_0}, \cdots, P_k^{n_k}, c_0, \cdots, c_l \rangle$ 的一个理论 T 称为 $\forall$ 有限的（$\forall$-finite），如果（同一表征的）任意扩张的全称理论 $T' \supset T$ 是（用全称命题）可有限公理化的．一个理论 $\tilde{T}$ 称为强有限的（strongly $\forall$-finite），如果对于个体常元的任意有限集合 $\langle c_{l+1}, \cdots, c_N \rangle$，理论 T^* 是 $\forall$ 有限的．这里的 T^* 只不过是定义于表征为 $\sigma^* = \sigma \cup \langle c_{l+1}, \cdots, c_N \rangle$ 的语言中的 T．

如果一个理论是强 $\forall$ 有限的，并且 $\tilde{T}$ 是 T 的一个递归可枚举扩张，那么 $\tilde{T}$ 有一个递归表示模型．

另一批问题是涉及对于给定的一个模型 $\mathfrak{M}$，使得 $(\mathfrak{M}, \nu)$ 成为一个（强）递归表示模型的枚举 ν 的存在性．如此枚举存在的模型，称为（强）递归可表示的（strongly）recursively presentable），而与其对应的枚举称为（强）递归表示（strong）recursive presentation）．对于涉及模型的可表示性的一些问题的解法，Ершов 的核心定理证明是有用的．把它应用到一些具体的代数系统，使人们能够解决一些自然的问题．特别是已经证明：1）任意递归表示局部幂零无挠群有一个递归表示完全化；2）如果 (F, ν) 是一个递归表示域，F_0 是 F 的一个代数扩张，那么 ν 可扩充为 F_0 的一个递归表示，当且仅当 F 上可数个变元的，并且在 F_0 中有根的多项式的有限集构成的簇是递归可枚举的．

下面的定理给出了递归表示模型的一个大类：一个 $\aleph_1$ 范畴（见对 κ **范畴性**（categoricity in cardinality））的可判定理论的任意可数模型是强递归可表示的．完全理论的特殊模型的，特别是单纯和万有模型的（强）递归可表示性问题，引起了人们的注意．对于完全理论的单纯模型（和可数饱和模型）的（强）递归可表示性的充分必要条件已经找到．不具备递归可表示单纯和万有模型的完全理论的例子已经构造出来．已经证明，一个有强递归可表示饱和模型、或具有有限个两两不同构的可数模型的完全可判定理论的单纯模型总是强递归可表示的．

对于一个给定模型的不等价的递归表示的个数问题已经研究过．一个模型 $\mathfrak{M}$ 的两个递归表示 ν 和 μ 称为（递归）φ 等价的（(recursively) equivalent），如果存在一个同构 φ（$\varphi = \mathrm{id}_{\mathfrak{M}}$）和一个递归函数 f，使得 $\varphi\nu = \mu f$．一个模型称为自稳定的（self-stable）（递归稳定的（recursively stable）），如果它的任意两个递归表示（递归）等价．

已经证明，对于一个大的代数系统类，（从等价的观点来看）或者仅有一个，或有可数个不等价的递归表示[4]，[5]．对于域论，布尔代数理论，无挠可

换群理论和某些其他代数系统类，不等价的递归表示的个数问题已经完全解决了([11])，并且自稳定模型已得到刻画([2])．已经证明自稳定性问题与递归表示模型类的可计算性有关．

参考文献

[1] Мальцев, А. И., «Успехи матем. наук», 16 (1961), 3, 3－16 (亦见 A. I. Mal'cev, The metamathematics of algebraic systems, North-Holland, 1971).

[2] Ершов, Ю. Л., Теория нумераций, ч. 3-Конструктивные модели, Новосиб., 1974.

[3] Ершов, Ю. Л., и др., «Успехи матем. наук», 20 (1965), 4, 37－108.

[4] Гончаров С. С., «Алгебра и логика», 14 (1975), 6, 647－680.

[5] Нуртазин, А. Т., «Алгебра и логика», 13 (1974), 3, 311－323.

[6] Cobham, A., Summaries of talks presented at the summer institute for symbolic logic Cornell University, 1957, Washington, 1960, 391－395.

[7] Fröhlich, A. and Shepherdson, J. C., Effective procedures in field theory, *Phil. Trans. Royal. Soc. London Ser. A.*, **2458** (1956), 407－428.

[8] Mostowski, A., A formula with no recursively enumerable model, *Fund. Math.*, **42** (1955), 1, 125－140.

[9] Rabin, M. O., Computable algebra, general theory and theory of computable fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 2, 341－360.

[10] Vaught, R. L., Sentences true in all constructive models, *J. Symb. Logic*, **25** (1960), 1, 39－58.

[11] Goncharov, S. S., Problem of the number of non-selfequivalent constructivizations, *Algebra and Logic*, **19** (1980), 6, 401－414 (*Alegebra i Logika*, **19** (1980), 6, 621－639.

С. С. Гончаров 撰

【补注】 递归函数论可以有几种方法与模型论相结合．首先，可以研究递归模型(recursive models)，也就是(对应于一个递归语言)定义于自然数之上，并且所有关系和函数都是递归的模型．根据 **Gödel 完全性定理**(Gödel completeness theorem)，每一个相容的(一阶)句子具有一个模型．然而并不是每一个那样的句子都有递归模型(Mostowski 定理)．有一些使得递归模型存在的条件，例如，每一个递归可枚举 ∀∃ 理论，只要它有一具有递归可枚举 ∃ 理论的模型，那么它也有一个递归模型，并且一个 $_1$范畴的可判定理论的每一个可数模型有一个与之等价的模型 $(\mathbf{N}, \cdots)$，在其膨胀 $(\mathbf{N}, \cdots, n)_{n\in\mathbf{N}}$ 的理论为可判定的意义下是强递归的(strongly recursive)．根据 **Gödel 不完全定理**(Gödel incompleteness theorem)．Peano 算术除了它的标准(递归)模型外，有很多模型，虽然这些模型中没有一个是递归的(Tennenbaum 定理)．然而研究的主题比仅仅研究递归模型更广泛了．例如，可以尝试一下"能行化"模型论的结果．例如，根据插值定理(interpolation theorem)：对于每一个恒真(一阶)蕴涵 $\varphi\to\psi$，存在一个"内插式"χ，使得 χ 的语言包含在 φ 的语言和 ψ 的语言的公共部分中，并且 $\varphi\to\chi$ 和 $\chi\to\psi$ 都是恒真式．那样一个内插式不是总能由 φ 和 ψ 递归得到(Friedman 定理)．根据 Lindenbaum 定理(Lindenbaum theorem)，每一个相容的(一阶)理论有一个完全扩张．假设初始理论(譬如说)是递归的，那么这个理论的扩张的复杂程度如何？(答案：Δ_1^2(见**描述集合论**(descriptive set theory))就足够了．注意，根据 Tarski 定理(Tarski theorem)，算术标准模型的完全理论甚至不是算术的．) 卢景波 译 罗里波 校

递归算子[recursive operator; рекурсивный оператор]

处处有定义的**部分递归算子**(partial recursive operator)．

递归谓词[recursive predicate; рекурсивный предикат]

在自然数上定义的一个**谓词**(predicate) $P(x_1, \cdots, x_n)$，使得在自然数上由条件

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\begin{cases}1, & \text{如果 } P(x_1, \cdots, x_n) \text{ 为真，}\\ 0, & \text{如果 } P(x_1, \cdots, x_n) \text{ 为假}\end{cases}$$

定义的函数 f 是一个**递归函数**(recursive function)．

В. Е. Плиско 撰 杜小杨 译

递归可实现性[recursive realizability; рекурсивная реализуемость]

在 S. C. Kleene(见[1]，[2])提出的**部分递归函数**(partial recursive function)概念的基础上，算术公式的直觉主义语义的一种更精确定义．对每个闭的算术公式 F，定义一个关系"自然数 e 实现公式 F"；记为 erF．根据公式 F 的结构，归纳定义关系 erF．

1) 如果 F 是一个不含自由变元的原子公式，即 F 具有形式 $s=t$，其中 s 和 t 是常项，则 erF，当且仅当 $e=0$ 且项 s 和 t 的值相同．

设 A 和 B 是不含自由变元的公式．

2) $er(A\&B)$，当且仅当 $e=2^a\cdot 3^b$，其中 arA，brB．

3) $er(A\vee B)$，当且仅当 $e=2^0\cdot 3^a$ 且 arA，或 $e=2^1\cdot 3^b$ 且 brB．

4) $er(A\supset B)$，当且仅当 e 是一个一元部分递归函数 φ 的 Gödel 数，使得对任何自然数 a，arA 蕴涵 φ 在点 a 有定义且 $\varphi(a)rB$．

5) $er(\neg A)$，当且仅当 $er(A \supset 1 = 0)$.

设 $A(x)$ 是只含自由变元 x 的公式；如果 n 是自然数，则 $\bar{n}$ 是一个表示形式算术中数 n 的项.

6) $er(\exists x A(x))$，当且仅当 $e = 2^n \cdot 3^a$ 且 $arA(\bar{n})$.

7) $er(\forall x A(x))$，当且仅当 e 是一个**递归函数**(recursive function) f 的 Gödel 数，使得对任何自然数 n，数 $f(n)$ 实现 $A(\bar{n})$.

一个闭公式 F 称为可实现的 (realizable)，如果存在一个数 e 实现 F. 一个包含自由变元 $y_1, \cdots, y_m$ 的公式 $A(y_1, \cdots, y_m)$ 可以看作是关于 $y_1, \cdots, y_m$ 的一个谓词 ("公式 $A(y_1, \cdots, y_m)$ 是可实现的"). 如果公式 F 在**直觉主义算术** (intuitionistic arithmetic) 中可由可实现公式推导出来，则 F 是可实现的 (见 [3]). 特别地，每个直觉主义算术中可证明的公式是可实现的. 存在一个公式 $A(x)$，使得公式 $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ 不是可实现的. 对这个公式 $A(x)$，公式 $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ 是可实现的，尽管它在经典意义下是假的.

每个在直觉主义谓词演算中可证的谓词公式 $\mathfrak{U}$ 有这样的性质：由代换规则从 $\mathfrak{U}$ 中得出的每个算术公式是可实现的. 具有这种性质的谓词公式称为可实现的 (realizable). 已经证明 ([4]) 命题公式

$$((\neg\neg D \supset D) \supset (\neg\neg D \vee \neg D)) \supset \supset (\neg\neg D \vee \neg D),$$

是可实现的，其中 D 表示公式 $\neg p \vee \neg q$，但在**直觉主义命题演算** (intuitionistic propositional calculus) 中不可推导.

参考文献

[1] Kleene, S. C., On the interpretation of intuitionistic number theory, *J. Symbolic Logic*, 10 (1945), 109 – 124.

[2] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951 (中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，上册，1984；下册，1985).

[3] Nelson, D., Recursive functions and intuitionistic number theory, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 307 – 368.

[4] Rose, G. F., Propositional calculus and realizability, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 1 – 19.

[5] Новиков, П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977.

В. Е. Плиско 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beeson, M. J., Foundations of constructive mathematics, Springer, 1985.

胜跃飞 译

递归关系 [recursive relation; рекурсивное отношение]

关系 (relation) $R \subseteq \mathbf{N}^n$，其中 $\mathbf{N}$ 是自然数集，使得在 $\mathbf{N}^n$ 上由条件

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in R, \\ 0, & \text{如果 } \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \notin R \end{cases}$$

定义的函数 f 是一个**递归函数** (recursive function). 特别是，对于任何 n，全关系 $\mathbf{N}^n$ 和零关系 $\varnothing$ 都是递归关系. 如果 R 和 S 是 n 元递归关系，则关系 $R \cup S$, $R \cap S$, $R^c = \mathbf{N}^n \setminus R$, $R \setminus S$ 也是递归关系. 关于运算 $\cup$, $\cap$, ^{c}，所有 n 元递归关系的系统构成一个 **Boole 代数** (Boolean algebra).

В. Е. Плиско 撰 杜小杨 译

递归序列 [recursive sequence 或 recurrent sequence; возвратная последовательность]

一个序列 $a_0, a_1, \cdots$，满足关系式

$$a_{n+p} + c_1 a_{n+p-1} + \cdots + c_p a_n = 0,$$

其中 $c_1, \cdots, c_p$ 是一些常数. 如果已知前 p 项，则根据上述关系式可以依次算出其余各项. 递归序列的一个经典例子是 Fibonacci 序列 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\cdots$ ($a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$). 一个递归级数是一个**幂级数** (power series) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$，其系数构成递归序列. 这种级数表示处处有定义的有理函数.

БСЭ-3

【补注】 从多方面研究递归序列的一篇很好的参考文献是 [A1].

参考文献

[A1] Poorten, A. J. van der, Some facts that should be better known, especially about rational functions, in R. A. Molin (ed.), Number Theory and Applications, Kluwer, 1989, 497 – 528.

杜小杨 译

递归集合论 [recursive set theory; рекурсивная теория множеств]

按算法的观点对自然数的子集进行研究和分类，并研究由此分类而产生的结构的递归函数论 (见**递归函数** (rercursive function) 的一个分支. 对一切自然数组成的集合 N 的每个子集 A，可提出如下的判定问题 (decision problem)：是否存在一个算法，人们可用此算法对任意 $x \in N$ 决定 x 是否是 A 的一个元素?

在 20 世纪 40 年代成功地陈述了 (算法) 可计算函数 (computabl function) 的直观概念之后，数学地陈述这类问题和发展递归集合论才成为可能. 这种函数的值域组成递归可枚举集 (recursively-enumerable set)

族（亦见**可枚举集**（enumerable set）．对上述问题可解的集合称为递归的（recursive）．事实上，A 是递归集，当且仅当集合 A 和集合 $\mathbf{N}\setminus A$ 都是递归 - 可枚举集．非递归的递归可枚举集的第一个例子出自所谓的创造集：一递归可枚举集 K 称为**创造集**（creative set），若有一个定义在与 K 不相交的递归可枚举集 A 的下标数上的可计算函数，并且其值属于 $\mathbf{N}\setminus(K\cup A)$ 的数．在发现创造集的同时，其他的非递归的递归可枚举集也被发现，特别是单集．一个递归可枚举集称为单的（simple），若它有不包含无穷递归可枚举集的无穷补集．这样产生了递归可枚举集的分类的判定问题的特殊的问题．对这种分类的一个手段是可归约性（reducibility）概念．直觉地讲，一个集合 A 可归约（reducible）到一个集合 B，若有一算法当有了特定的自然数对 B 的归属与否的信息后，此算法可以解决数对 A 的归属与否的问题．在这情况下，A 在特定的意义下相对于 B 是递归的，且通常的递归集相对于任何集都是递归的．在它的最广泛意义下的可归约性（它的详细陈述相当复杂）称为 Turing 可归约性（Turing reducibility）或 T 可归约性（T-reducibility）．在可归约性概念涉及的算法里加上一个或更多的限制可以得到其他可归约性的定义：例如 1 可归约性，多 - 一可归约性，btt 可归约性，或 tt 可归约性．特别地，A 可多 - 一归约到 B．若有一个全可计算函数 f，使得对一切 $\mathbf{N}$ 中的 x，有

$$x\in A \Leftrightarrow f(x)\in B.$$

当 f 是单射时，称 A 为 1 可归约到 B．

多 - 一可归约性的一推广是**真假值表可归约性**（truth-table reducibility）（tt- 可归约性（tt-reducibility））．集合 A 可 tt 归约到集合 B，若有一个算法、对每个 x 给出一组数 $\langle t_1^x, \cdots, t_{n(x)}^x\rangle$ 及一个 Boole 函数 $\beta_x(y_1, \cdots, y_{n(x)})$，使得

$$x\in A \Leftrightarrow \beta_x(\chi(t_1^x), \cdots, \chi(t_{n(x)}^x)) = 1,$$

且若 $t\in B$ 则 $\chi(t)=1$；若 $t\notin B$ 则 $\chi(t)=0$．如果 A 真假值表可归约到 B，在其中 $n(x)$ 被某一个常数界定，则称为 A 可有界真假值表可归约（bounded truth-table reducible）（btt 可归约（btt-reducible））到 B．设 r 是某一可归约性，$A\leqslant_r B$ 表示集合 A 可 r 归约到 B．关系 $\leqslant_r$ 是一个**前序**（pre-order）．如果假设

$$A \equiv_r B \Leftrightarrow (A\leqslant_r B \& B\leqslant_r A),$$

则 $\equiv_r$ 是一等价关系，它的每个类称为 r 度（r-degree）（且若这类含一递归 - 可枚举集则称之为递归 - 可枚举 r 度）．Turing 度在文献中为熟知的**不可判定性度**（degree of undecidability））．关系 $\leqslant_r$ 生成一切 r 度的一个偏序．可归约性 r' 弱于 r，若 $A\leqslant_r B$ 蕴涵 $A\leqslant_{r'} B$．对多 - 一或更弱的可归约性的 r 度（不包括 1 度）的偏序集组成具有最小元 $\mathbf{0}$（递归集的 r 度）的上半格．如果人们只限于研究递归 - 可枚举 r 度，那么也有称为完全 r 度的（complete r-degree）最大元素 $\mathbf{1}$．被包含在一完全 r 度中的递归可枚举集称为 r 完全的（r-complete）．极小 r 度（minimal r-degree）是那些其下只有一个严格较小的 r 度，实际上是 $\mathbf{0}$．

可归约性的研究沿两个方向发展．涉及的第一个问题是相对于定义的可归约性的度的上半格的描述．这种类型问题的有名例子是 Post 问题（Post problem）（[1]）：一切非递归的递归可枚举集是否真有相同的度？或者换言之，不可判定性的递归可枚举度的上半格是否真的只由两个元素组成？这问题的否定解已被找到（[2]）．关于递归 - 可枚举多 - 一、tt，和 T 度问题的解的上半格的结构确实是可归约性研究中的里程碑．在 20 世纪 60 年代初已证明了 T 度的半格（下面指递归可枚举度的半格）不是一个格且没有极小元素．在那时极小多 - 一度的存在性已被注意到了，完全多 - 一度不是二不可比较多 - 一度的最小上界．其后知道了对 btt 和更弱的可归约性这个事实不成立．Ю．Л．Ершов（Yu．L．Ershov）（[4]）证明了多 - 一度的上半格不是格，且它的某些元素中没有极小元素．对 btt 度和 tt 度的类似结果以及极小元素的存在性同样被得到（[5]）．已经证明，多 - 一度，btt 度，tt 度，T 度和其他度半格的初等理论是相互不同的．

第二个方向与下述问题相关联：什么是 r 度，有多少 r 度，r 度在比 r 相对更弱的可归约度中是怎样分布的？特别是，完全 T 度（tt 度、btt 度）分别包含可数多个递归可枚举 tt 度（btt 度，多 - 一度）．另外，有由一个 tt（多 - 一）度组成的非递归的 $T(btt)$ 度，但是每个非递归 tt 度至少包含两个 btt 度．

有其他与可归约性概念无关的研究递归可枚举集的途径．其中包括如下的一种．一切递归可枚举集关于并与交运算组成一格（lattice）$\mathscr{E}$．一个递归可枚举集的性质称为格论的（lattice-theoretic）性质，若它在 $\mathscr{E}$ 的一切自同构下被保持．例如是"递归的"、"是单的"、"是极大的"这些性质．一递归可枚举集称为极大的（maximal）（r 极大的（r-maximal）），若 A 的补集是无穷集且不能被一递归 - 可枚举集（递归集）划分为二无穷的部分．与 $\mathscr{E}$ 的研究有关的经典例子是关于极大集的存在性，关于任何非递归的递归可枚举集划分为二非递归的递归可枚举集的可能性（见[2]），以及存在不具有极大超集的 r 极大集的定理

(见[3]).

寻求非 T 完全集的期望产生了极大集的概念，这个事实曾经被作为对 Post 问题的一个自然解答. E. Post 本人藉对递归 - 可枚举集的补集强加上越来越严的限制定义出了超单集、超超单集的类，且证明了超单集不会是 tt 完全的. 于是一补集为无穷集的递归可枚举集 A 称为超单的(hyper-simple)(超超单的(hyper-hyper-simple))，如果不存在两两不相交的有穷(递归 - 可枚举)集的可计算序列使得每个集都和 A 的补集的交非空. 这些集类的定义不是用格论术语给出的，实际上已经证明"是超单集"不具有格论性质. 但是已经证明了一个具有无穷补集的递归 - 可枚举集 A 是超超单集，当且仅当对任意递归 - 可枚举集 B 存在递归集 R 使得 $R \subseteq B$ 且 $(B \setminus A) \subseteq R$，即已证明了"是超超单集"的性质是格论的性质. 已经构造出一个不具有极大超集的超超单集([3])并且也证明了对任意非递归的递归可枚举集 A 存在格 $\mathscr{E}$ 的一个自同构 Φ 使得 $\Phi(A)$ 是一个 T 完全集([6]). 所以已经证明了想找一个不含递归集和 T 完全集的格论性质是徒劳的.

也有(与[7]的看法相同的)观点，按照这观点，递归集合论要研究 **N** 的子集的在递归置换下不变的性质. 与此相一致，两个集合 A、B 称为有相同的**递归等价类型**(recursive equivalence type)，若有一个单射可计算函数 f 使得 $f(A) = B$ 且 $f^{-1}(B) = A$. 不含具有无穷递归可枚举子集的集合的那些递归等价类型称为孤立元(isol). 一旦对孤立元定义了方便的加法和乘法运算就可以开展孤立元的"算术"的研究.

递归 - 可枚举集和可归约性的性质的研究不仅和递归函数理论的其他方向有联系，而且也可以在逻辑、模型论和代数中找到应用. 递归集合论有它自己的研究方法，最有名的方法是所谓的**优先方法**(priority method)，这个方法已得到了极深奥的结果.

参考文献

[1] Post, E. L., Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 284 – 316.

[2] Friedberg, R. M., Three theorems on recursive enumeration: Ⅰ Decomposition, Ⅱ Maximal set, Ⅲ Enumeration without duplication. *J. Symbolic Logic*, **23** (1958), 309 – 316.

[3] Lachlan, A. H., On the lattice of recursively enumerable sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **130** (1968), 1, 1 – 37.

[4] Ершов, Ю. Л., 《Алгебра и логика》, **8** (1969), 5, 523 – 552.

[5] Дегтев, А. Н., 《Успехи матем. наук》, **34** (1979), 3, 137 – 168.

[6] Soare, R. I., Recursively enumerable sets and degrees, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84** (1978), 6, 1149 – 1181.

[7] Dekker, J. C. E. and Myhill, J., Recursive equivalence types, *Publ. Math. Univ. Calif*, 3 (1960), 3, 67 – 213.

[8] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965(英译本: Mal'tsev, A. I.: Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970).

[9] Rogers, Jr. H., Theory of vecursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

А. Н. Дегтев 撰

【补注】 由于算法可以用不同语言描述后，人们可以系统地对算法的描述赋之以自然数，方法很简单，就是把所用的语言的表达式枚举出来，首先按长度，其次按字母序排(见递归(recursion)). 因此可计算函数类和递归可枚举集类也可被枚举. 第 n 个可计算函数即是由被赋之以数 n 的算法所计算的函数，且第 n 个递归 - 可枚举集是第 n 个可计算函数的值域. 这里 n 称为递归可枚举集的数(number of the recursively-enumerable set)(亦见**递归函数**(recursive function)).

上面讲的 Post 问题的否定解通常称为 Мучник Friedberg 定理(Muchnik-Friedberg theorem)(见[2], [A1], [A4]). 这就是给出了优先方法的结果. 他们，А. А. Мучник 和 R. M. Friedberg，各自独立地得到了问题的解. 亦见**不可判定性度**(degree of undecidability).

也可见**算法的可归约性**(algorithmic reducibility); **产生集**(productive set); **Turing 机**(Turing machine).

参考文献

[A1] Muchnik, A. A., On the unsolvability of the reducibility problem in the theory of algorithms, *Dokl. Akad Nauk SSSR*, **108** (1956), 2, 194 – 197.

[A2] Soare, R. I., Recursive enumerable sets and degrees, a study of computable functions and generated sets, Springer, 1987.

[A3] Barwise, J. (ed.), Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1978.

[A4] Friedberg, R. M., Two recursively enumerable sets of incomparible degrees of unsolvability (solution of Post's problem), *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **43** (1957), 236 – 238.

杨东屏 译

简化范[reduced norm]

【补注】 设 A 是 **Z** 上有限维中心单代数(central simple algebra). **Z** 的有限扩域 K 是 A 的一个分裂域，即对某个 m，作为 K 代数 $A \otimes_Z K \cong \mathrm{Mat}_m(K)$，这里 Mat ($K$) 是 ($m \times m$) 矩阵的 K 代数. 选取

一个同构 $\varphi: A\otimes_{Z}K \to \mathrm{Mat}_m(K)$. **简化范**(reduced norm)映射 $\mathrm{Nrd}_{A/Z}: A \to \mathbf{Z}$ 定义为

$$\mathrm{Nrd}_{A/\mathbf{Z}}(a) = \det(\varphi(a\otimes 1)),$$

而**简化迹**(reduced trace)映射 $\mathrm{Trd}_{A/Z}$ 类似地定义为

$$\mathrm{Trd}_{A/\mathbf{Z}}(a) = \mathrm{trace}(\varphi(a\otimes 1)).$$

可以验证这些等式的右边其实在 $\mathbf{Z}$ 中(不仅在 K 中),而定义与 φ 的选取及 K 无关.

简化范是乘性的,并且 $a\in A$ 是可逆的,当且仅当 $\mathrm{Nrd}_{A/Z}(a)\neq 0$. 简化迹是 $\mathbf{Z}$ 向量空间的同态,而 $(x,y)\to \mathrm{Trd}_{A/Z}(xy)$ 定义 A 上一个非退化双线性型.

参考文献

[A1] Bass, H., Algebraic *K*-theory, Benjamin, 1967, p. 152 ff.

[A2] Hahn, A. J. and O'Meara, O. T., The classical groups and *K*-theory, Springer, 1979, § 2.2D.

蔡传仁 译

约化范式 [**reduced normal form**; **сокращенная нормальная форма**], Boole函数的

一种**析取范式**(disjunctive normal form),它是一个给定函数的所有简单蕴涵元的析取. 一个**合取**(conjunction)𝔄 称为一个 **Boole 函数**(Boolean function)f 的一个**蕴涵元**(implicant),如果关系 $\mathfrak{A}\to f\equiv 1$ 成立. 一个蕴涵元称为素的(prime),如果消去它的任意一个字母后就不再是一个蕴涵元. 因为一个极小析取范式是从约化析取范式去掉某些蕴涵元而得到的,所以约化范式构造法是 Boole 函数极小化(见 **Boole 函数的极小化**(Boolean functions, minimization of))中的第一步. 约化范式中合取项的个数是实现这一步的困难程度的度量. 这个数目的估计(见 **Boole 函数的范式**(Boole functions, normal form of))表明约化范式通常比函数的初始表示更复杂. 从一个**完满范式**(perfect normal form)过渡到一个约化范式仅仅简化了合取项的长度,然而它们的个数可能增加很多. 此外,约化范式中"几乎所有"Boole 函数不包含字母个数少于 $n-\log_2 n$ 的合取,并且大多数合取由 $n-\log_2\log_2 n$ 个字母构成.

В. В. Глаголев 撰 卢景波 译 罗里波 校

约化概形 [**reduced scheme**; **приведенная схема**]

在任何点的局部环都不含非零幂零元的**概形**(scheme). 对于任何概形 $(X, \mathcal{O}_X)$,存在一个极大的闭约化子概形 $(X_{\mathrm{red}}, \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}})$,它由下列关系式刻画:

$$\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},x} = \mathcal{O}_{X,x}/r_x,$$

这里 r_x 是环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的所有幂零元的理想. 在特征数 0 的域上的**群概形**(group scheme)是约化的([3]).

参考文献

[1] Artin, M., Algebraic approximation of structures over complete local rings, *Publ. Math. IHES*, **36** (1969), 23-58.

[2] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique. 1. Le langage des schémas, *Publ. Math. IHES*, 4 (1960).

[3] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.

С. Г. Танкеев 撰

【补注】 特征数 0 的域上的群概形是约化的称为 Cartier **定理**(Cartier theorem),亦见[A1].

可能发生这样的情况:基概形 S 上的概形 $X\to S$ 是约化的但 $X\times_S T$ 不是约化的(甚至 S 和 T 都是约化的). **代数几何学**(algebraic geometry)里的经典研究对象是约化的代数概形而且在基域作扩张后仍保持约化.

参考文献

[A1] Oort, F., Algebraic group schemes in characteristic zero are reduced, *Invent. Math.*, **2** (1969), 79-80.

[A2] Harshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

既约剩余系 [**reduced system of residues** 或 reduced residue system; **приведенная система вычетов**], 模 m 的

模 m 的**完全剩余系**(complete system of residues)中与 m 互素的数组成的集合. 模 m 的既约剩余系由 $\varphi(m)$ 个数组成,此处 $\varphi(m)$ 是 Euler φ 函数(见 **Euler 函数**(Euler function)). 通常取完全剩余系 $0,\cdots,m-1$ 中与 m 互素的数作为模 m 的既约剩余系. С. А. Степанов 撰 戚鸣皋 译 潘承彪 校

可约性公理 [**reducibility axiom**; **сводимости аксиома**]

由 B. Russell 和 A. N. Whitehead 添加到分歧类型论中的一条公理(见**类型论**(types, theory of)),目的是用于概念的层次处理(见**非直谓定义**(non-predicative definition)). 在分歧类型论中,给定类型的集合是分成不同的阶的. 于是代替自然数集合的概念,就有给定阶的自然数集合的概念. 由公式而没用任何集合定义的自然数集合属于一阶的,如果在定义中使用了一阶集合的总体,但没有更高阶集合的总体,那么如此定义的集合属于二阶的,等等. 例如,如果 S 是由给定阶集合构成的集族,那么集合

$$M=\{x:\exists y(y\in S\wedge x\in y)\}$$

必属于下一阶的，由于 M 的定义中包含给定阶集合上的一个量词. 可约性公理断言，对于每一个集合，存在一个一阶的等容（即由相同个数元素构成）的集合. 于是可约性公理实际上把分歧类型论归结到简单类型论.

参考文献

[1] Hilbert, D. and Ackerman, W., Grundzuge der theoretischen Logik, Dover, reprint, 1946（中译本：D. 希尔柏脱，W. 阿克曼，数理逻辑基础，科学出版社，1958）.

В. Н. Гришин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Russell, B. and Whitehead, A. N., Principia mathematica, 1－3, Cambridge Univ. Press, 1925 1927.

卢景波 译 罗里波 校

可约线性系统[**reducible linear system**; **приводимая линейная система**]，常微分方程的

一个线性系统

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbf{R}^n\quad(\text{或 }\mathbf{C}^n),\qquad(*)$$

$$A(*):\ \mathbf{R}\to\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)\ (\text{或 }\mathrm{Hom}(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^n)),$$

可以通过变量变换 $x=L(t)y$ 化为常系数系统 $\dot{y}=By$，其中 $L(t)$ 是 **Ляпунов 变换**（Lyapunov transformation）. 若映射 $A(t)$ 是连续的且对 t 为周期的，则（$*$）是一个可约系统（**Ляпунов 定理**（Lyapunov theorem））. 方程组（$*$）为可约的，当且仅当存在 **Ляпунов 变换** $L(t)$ 和一算子 B 使（$*$）之每个解均有以下形状：

$$x(t)=L(t)e^{tB}x(0).$$

（Еругин 准则（Erugin criterion））.

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, в его кн. Собр. соч., т. 2, М.-Л., 1956, 7－263（英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.

[2] Еругин, Н. П., Приводимые системы, Л.-М., 1946（Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 13）.

В. М. Миллионщиков 撰 齐民友 译

可约表示[**reducible representation**; **приводимое представление**]

在域 k 上向量空间 V 上的一**线性表示**（linear representation），使 V 包含真的非零**不变子空间**（invariant subspace）.

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Curtis, C. W. and Reiner, I. Method of representation theory, 1－2, Wiley (Interscience), 1981－1987

李慧陵 译

可约 Riemann 空间[**reducible Riemannian space**; **приводимое риманово пространство**]

一类 Riemann 空间，其线性（或换言之，齐次）**和乐群**（holonomy group）是可约的，即有非平凡的不变子空间. 具不可约和乐群的 Riemann 空间称为不可约的（irreducible）. 完全的单连通可约 Riemann 空间是可分解的（**de Rham 分解定理**（de Rham decomposition theorem）），即分解成一些正维数的 Riemann 空间的直积. 此外，任何完全的单连通 Riemann 空间等距于一个 Euclid 空间 M_0 和一些完全的单连通不可约 Riemann 空间 $M_i(i>0)$ 的直积 $M_0\times M_1\times\cdots\times M_k$；这个分解除了因子的次序外是唯一的.

对伪 Riemann 空间成立比这个定理稍弱的结论：一个伪 Riemann 空间称为弱不可约的，如果切空间的所有关于和乐群 Γ 不变的非平凡子空间是迷向的，即在它们上面诱导的内积是退化的. 任何完全的单连通伪 Riemann 空间分解成弱不可约的伪 Riemann 空间的直积. 如果在和乐群下不变的那些向量构成的子空间是非迷向的，那么这个分解除了因子的次序外是唯一的. 弱不可约伪 Riemann 空间则未必分解成伪 Riemann 空间的直积.

参考文献

[1] Lichnerowicz, A., Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976（译自法文）.

[2] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Wiley, 1963.

[3] Wu, H., On the de Rham decomposition theorem, *Illinois J. Math.*, **8**（1964）, 2, 291－311.

[4] Щапиро, Я. Л., «Докл. АН СССР», **206**（1972）, 4, 831－833.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 de Rham 的论文见[A1].

参考文献

[A1] Rham, G. de, Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, *Comm. Math. Helvetica*, **26**（1952）, 328－344.

潘养廉 译

归谬法[**reductio ad absurdum**; **приведение к абсурду**]

一个逻辑推导规则，可以得出下述结论：使得如果一个命题列 Γ 和命题 A 蕴涵命题 B 以及 $\neg B$，则 Γ 蕴涵 $\neg A$. 归谬法规则可以写为如下形式：

$$\frac{\Gamma,A\to B;\ \Gamma,A\to\neg B}{\Gamma\to\neg A}.$$

归谬法在大部分逻辑-数学演算中是一个**可靠规则**（sound rule）.

С. Ю. Маслов 撰

【补注】 非形式地，归谬法也用作这样的规则：如果 Γ 和 $\neg A$ 蕴涵一个矛盾，则 Γ 蕴涵 A. 这当然等价

于经典逻辑中上述的(因此可靠的)形式,但在直觉主义逻辑中它不是一个可靠的推理规则. 眭跃飞 译

约化群 [**reductive group**; **редуктивная группа**]

满足下边三个等价条件之一的(代数封闭域 K 上的)**线性代数群**(linear algebraic group):1)G 的单位元的连通分支 G^0 的根是一个**代数环面**(algebraic torus);2)G^0 的幂幺根是平凡的;3)群 G^0 是两个闭正规子群 S 和 T 的积,S 和 T 分别是**半单代数群**(semi-simple algebraic group)和代数环面. 在此情况下,S 是 G^0 的换位子群,而 T 是 G^0 的根,也是其中心的单位元的连通分支;$S \cap T$ 是有限的,且 G^0 的任一半单子群和幂幺子群都包含在 S 内.

一个线性代数群 G 称为线性约化的(linearly reductive),如果以下两个等价条件中的一个成立:a)G 的每一个有理线性表示是完全可约的(见**可约表示**(reducible representation);或 b)对每个有理线性表示 $\rho: G \to GL(W)$ 和每一个 $\rho(G)$ 不变向量 $w \in W \setminus \{0\}$,W 上有一个 $\rho(G)$ 不变的线性函数 f 使得 $f(w) \neq 0$. 每个线性约化群是约化群. 若域 K 的特征为 0,则反过来也对. 当 $\operatorname{char} K > 0$ 时情况两样:每个连通线性约化群是代数环面. 但是,即使在一般情况下约化群也可以由它的表示理论加以描述. 一个线性代数群 G 称为几何约化的(geometrically reductive)(或半约化的(semi-reductive)),如果对每个有理线性表示 $\rho: G \to GL(W)$ 和任意 $\rho(G)$ 不变向量 $w \in W \setminus \{0\}$,有一个 W 上的非常值的 $\rho(G)$ 不变的多项式函数 f 使得 $f(w) \neq 0$. 一个线性代数群是约化的,当且仅当它是几何约化的(见 **Mumford 假设**(Mumford hypothesis)).

关于不变量的广义 **Hilbert 定理**(Hilbert theorem)对约化群成立. 反过来也是对的:假设 G 是代数封闭域 K 上的线性代数群,并设对于任意到具单位元的有限生成的交换结合 K 代数 A 的自同构群的局部有限维有理表示,不变量代数 A^G 也是有限生成的,则 G 是约化群(见 [4]).

任意有限线性群是约化群,并且当它的阶不能被 $\operatorname{char} K$ 整除时,它还是线性约化的. 连通约化群有一个与约化 Lie 代数很相似的结构理论(**根系**(root system);**Weyl 群**(Weyl group)等等,见 [2]). 当 G 是定义在子域 $k \subset K$ 上的连通约化群时,这一理论还可延伸到 G_K 上,这里 G_K 为 k 有理点群(见 [3]). 此时 **Borel 子群**(Borel subgroup),**极大环面**(maximal torus)以及 Weyl 群的角色由定义在 k 上的极小抛物子群(parabolic subgroup),在 k 上分裂的极大环面以及相对 **Weyl 群**(Weyl group)来分别扮演. 群 G 的任意两个定义在 k 上的极小抛物子群可通过 G_k 中的元素相互共轭;对任意两个极大的 k 分裂环面也是如此.

若 G 是定义在域 k 上的连通约化群,则 G 在 k 上一有限次可分扩张上是可分裂群;如果再假设 k 为无限域,则 G_k 在 Zariski 拓扑下在 G 内稠密. 如果 G 为约化群而 H 为它的闭子群,那么商空间 G/H 是仿射的,当且仅当 H 为约化的. 特征 0 的域上的线性代数群是约化群,当且仅当它的 Lie 代数是约化 Lie 代数(见**约化 Lie 代数**(Lie algebra, reductive)). 若 $K = \mathbf{C}$,这等价于 G 是一紧 Lie 群的复化(见 **Lie 群的复化**(complexification of a Lie group)).

参考文献

[1] Springer, T., Invariant theory, Lecture notes in math., 585, Springer, 1977.

[2] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

[3] Borel, A and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, 27 (1965), 55 – 150.

[4] Попов, В. Л., 《Докл. АН СССР》, 249 (1979), 3, 551 – 555.

В. Л. Попов 撰 李慧陵 译

约化空间 [**reductive space**; **редуктивное пространство**]

连通 **Lie 群**(Lie group)G 的一个**齐性空间**(homogeneous space)G/H,使得在 G 的 **Lie 代数**(Lie algebra)$\mathfrak{g}$ 中存在与子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 互补的 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 不变子空间,这里 $\mathfrak{h}$ 是群 H 的 Lie 代数. 下述任一条件成立时齐性空间 G/H 成为约化的:1)线性群 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 是完全可约的;2)在 $\mathfrak{g}$ 中存在一个 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 不变的双线性型,它对 $\mathfrak{h}$ 的限制是非退化的. 特别地,任何齐性 Riemann 空间是约化的. 如果 $M = G/H$ 是约化空间,群 G 有效地作用在 M 上,则在流形 M 在点 $0 = eH \in M$ 处的切空间 M_0 中,稳定群 H 的线性表示是忠实的(见**忠实表示**(faithful representation)). M 上的两个重要的 G 不变仿射联络与一个同 $\mathfrak{h}$ 互补的 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 不变子空间 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ 有关:典范联络(canonical connection)和自然无挠联络(natural torsion-free connection). 给定 $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 不变分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{m}$,约化空间 $M = G/H$ 上的典范联络是 M 上唯一的 G 不变仿射联络,使得对任何向量 $X \in \mathfrak{m}$ 及点 0 处的任何标架 u,曲线 $(\exp tX)u$ 在 M 上的标架的主纤维化中是水平的. 典范联络是完全的,它的通过点 0 的测地线的集合与 $(\exp(X)0$ 型的曲线的集合重合,这里 $X \in \mathfrak{m}$. 将空间 $\mathfrak{m}$ 和 M_0 自然等同后,典范联络的曲率张量 R 和挠率张量 T 由公式 $(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]$ 和 $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_{\mathfrak{m}}$ 定义,这里 $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$,$W_{\mathfrak{h}}$ 和 $W_{\mathfrak{m}}$ 分别表示向量 $W \in \mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{m}$ 的投射.

张量场 R 和 T 平行于典范联络，如同 M 上任何其他 G 不变张量场一样．M 上支撑点为 0 的典范联络的线性和乐群（holonomy group）的 Lie 代数由集合 $\{\lambda([X,Y]_{\mathfrak{h}}):X,Y\in\mathfrak{m}\}$ 生成，这里 λ 是稳定 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 在空间 M_0 中的线性表示．带有平行的曲率场和挠率场的完全仿射联络的任何连通的单连通流形可以表示成一个约化空间，其典范联络与给出的仿射联络重合．在给定 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 不变分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus\mathfrak{m}$ 的约化空间 $M=G/H$ 中存在唯一的挠率为零的 G 不变仿射联络，与典范联络有着相同的测地线．这个联络称为 M 上（关于分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus\mathfrak{m}$）的**自然无挠联络**（natural torsion-free connection）．齐性 Riemann 或伪 Riemann 空间 $M=G/H$ 是**自然约化的**（naturally reductive），如果存在一个 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 不变分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus\mathfrak{m}$，使得对所有 $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$，

$$B(X,[Z,Y]_{\mathfrak{m}})+B([Z,X]_{\mathfrak{m}},Y)=0,\quad(*)$$

这里 B 是 $\mathfrak{m}$ 上的非退化对称双线性型，在空间 $\mathfrak{m}$ 和 M_0 的自然等同下由 M 上的 Riemann（伪 Riemann）结构导出．如果 $M=G/H$ 是自然约化的 Riemann 或伪 Riemann 空间，带有给定的 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 不变分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus\mathfrak{m}$，满足条件 $(*)$，则自然无挠联络同 M 上相应的 Riemann 或伪 Riemann 联络重合．如果 M 是单连通自然约化齐性 Riemann 空间，而 $M=M_0\times\cdots\times M_r$ 是它的 de Rham 分解，则 M 可以表示为 $M=G/H$；此外，$G=G_0\times\cdots\times G_r$，$H=H_0\times\cdots\times H_r$，$M_i=G_i/H_i(i=0,\cdots,r)$．

约化空间的一个重要推广是 ν 约化齐性空间（[4]）．齐性空间 G/H 称为 **ν 约化的**（ν-reductive），如果它的平稳子代数 $\mathfrak{h}$ 等于 $\mathfrak{h}_1\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{h}_\nu$，这里 $\mathfrak{h}_\nu\neq\{0\}$，并且在 $\mathfrak{g}$ 中存在同 $\mathfrak{h}$ 互补的子空间 $\mathfrak{m}$，使得 $[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}_{i-1}(i=1,\cdots,\nu)$，其中 $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{m}$．1 约化齐性空间实际上是约化空间；2 约化齐性空间的例子是射影（及共形）空间，射影（或共形）变换的群作用在其上．如果 $M=G/H$ 有一个 ν 约化齐性空间并且 $\nu>1$，则稳定 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 的线性表示不是忠实的（由于当 $i>1$ 时 $[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$）；因此，不存在 M 上的 G 不变仿射联络．然而，在以某个 ν 阶传递微分群的齐性空间作为纤维的 ν 约化齐性空间上存在一个典范 G 不变联络（见[4]）．约化和 ν 约化空间被刻画为适当类型的极大齐性 G 结构（G-structure）（见[6]）．

除约化空间外，也研究了**部分约化空间**（partially reductive spaces），即齐性空间 G/H，使得 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 能够分解成两个非零 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ 不变子空间的直和，其中一个包含子代数 $\mathfrak{h}$（见[5]）．

参考文献

[1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 2, Wiley, 1969.

[2] Rashevskii, P. K., On the geometry of homogeneous spaces, *Trudy Sem. Vektor. i Tenzor. Anal.*, 9 (1952), 49 – 74.

[3] Nomizu, K., Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, 76 (1954), 1, 33 – 65.

[4] Kantor, I. L., Transitive differential groups and invariant connections in homogeneous spaces, *Trude Sem. Vektor. i Tenzor. Anal.*, 13 (1966), 310 – 398.

[5] Винберг, Э. Б., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 9 (1960), 191 – 210.

[6] Alekseevskii, D. V., Maximally homogeneous G-structures and filtered Lie algebras, *Soviet Math. Dokl.*, 37 (1988), 2, 381 – 384. (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 299 (1988), 3, 521 – 526).

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wolff, J., Spaces of constant curvature, McGraw-Hill, 1967.

蔡传仁 译

冗余度［**redundancy**；**избыточность**］

信息传输速率的可能增加程度的一个度量．一般利用信息源各信息分量之间的统计相关性处理各分量，使信息传输速率得到提高．由平稳随机过程 $\xi_k(k=\cdots,-1,0,1,\cdots)$（其中 ξ_k 取值于某个含 N 个元素的有限集 X）产生的离散时间平稳信息源 $\xi=(\cdots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\cdots)$ 的冗余度定义为

$$1-\frac{\overline{H}(U)}{H_{\max}},$$

其中 $\overline{H}(U)$ 为给定信息源 U 的**信息产生率**（information, rate of generation），$H_{\max}=\log N$ 为离散时间信息源最大信息产生率，其中信息源各信息分量仅能在 N 个数中取值．

参考文献见**通信信道**（communication channel）文献[4]，[5]．

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【译注】 参考文献见 **Shannon 定理**（Shannon theorem）译注之参考文献．

骆 源 符方伟 沈世镒 译

Rees 矩阵型半群［**Rees semi-group of matrix type**；**Рисовская полугруппа матричного типа**］

按下法定义的一种半群结构．设 S 为任意一个半群（semi-group），I，Λ 为两个（指标）集合，而 $P=(p_{\lambda i})$ 为 S 上一个 $(\Lambda\times I)$ 矩阵，即由 Descartes 积 $\Lambda\times I$ 到 S 内的一映射．下列公式定义了集合 $M=I\times S\times\Lambda$ 上的一种运算：

$$(i,s,\lambda)\ (j,t,\mu)=(i,sp_{\lambda j}t,\mu).$$

则 M 是一半群，称为 S 上的Rees 矩阵型半群并记作 $\mathscr{M}(S;I,\Lambda;P)$；矩阵 P 称为 $\mathscr{M}(S;I,\Lambda;P)$ 的夹层矩阵（sandwich matrix）．若 S 为带零元 0 的半群，则 $Z=\{(i,0,\lambda): i\in I, \lambda\in\Lambda\}$ 是 $M=\mathscr{M}(S;I,\Lambda,P)$ 中的理想而 Rees 商半群（见半群（semi-group））M/Z 记作 $\mathscr{M}^0(S;I,\Lambda;P)$；此时若 $S=G^0$ 为带零元的群，则用符号 $\mathscr{M}^0(G;I,\Lambda;P)$ 代替 $\mathscr{M}^0(G^0;I,\Lambda;P)$ 并称为带零元的群 G^0 上的 Rees 矩阵型半群．群 G 称为半群 $\mathscr{M}(G;I,\Lambda;P)$ 和 $\mathscr{M}^0(G;I,\Lambda;P)$ 的结构群（structure group）.

在带零元的半群 S 上的有夹层（$\Lambda\times I$）矩阵 P 的矩阵型 Rees 半群也可由下法构造．S 上的（$I\times\Lambda$）矩阵称为 Rees 矩阵（Rees matrix），如果它只包含至多 1 个非零元．设 $\|a\|_{i\lambda}$ 表示 S 上的 Rees 矩阵，其第 i 行第 λ 个元素为 a 而其余元素为零．在 S 上全部（$I\times\Lambda$）Rees 矩阵的集合上定义运算：

$$A\circ B=APB, \tag{1}$$

其中右端为"通常"的矩阵乘积．于是上述集合在这一乘法下成为一半群．映射 $\|a\|_{i\lambda}\mapsto(i,a,\lambda)$ 为这一半群和半群 $\mathscr{M}^0(S;I,\Lambda;P)$ 之间的同构．记号 $\mathscr{M}^0(S;I,\Lambda;P)$ 于是可以用于这两个半群．公式（1）解释了 P 称为"夹层矩阵"的原因．若 G 为一个群，则半群 $\mathscr{M}^0(G;I,\Lambda;P)$ 为正则的，当且仅当矩阵 P 的每行每列中包含一个非零元；任意半群 $\mathscr{M}(G;I,\Lambda;P)$ 是完全单的（见完全单半群（completely simple semi-group）），任意正则半群（regular semi-group）$\mathscr{M}^0(G;I,\Lambda;P)$ 是完全 0 单的．上面两个结论的逆命题给出了 Rees 定理（Rees theorem）（[1]）的主要内容：任何完全单的（完全 0 单的）半群可以同构地表示成为群上的 Rees 矩阵型半群（相应地，表示成为一附带零元的群上的正则的 Rees 矩阵型半群）．若 $\mathscr{M}^0(G;I,\Lambda;P)$ 和 $\mathscr{M}^0(G';I',\Lambda';P')$ 是同构的，则群 G 和 G' 是同构的，I 和 I' 有相同的基数且 Λ 和 Λ' 有相同的基数．半群 $\mathscr{M}^0(G;I,\Lambda;P)$ 和 $\mathscr{M}^0(G';I';\Lambda';P')$ 同构的一些必要充分条件已经知道，除去刚刚提到的条件外，它们还要包含夹层矩阵 P 和 P' 之间的一个十分确切的关系（见[1]－[3]）．特别地，任意的完全 0 单半群可以同构地表示成一个 Rees 矩阵型半群，而在其夹层矩阵的一给定的行和给定的列中，每个元素不是为 0 就是为结构群中的单位元；这种夹层矩阵称为正规化的（normalized）．同样的性质对完全单半群也成立．

参考文献

[1] Rees, D., On semi-groups, *Proc. Cambridge philos Soc.*, 36(1940), 387－400.

[2] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1－2, Amer. Math. Soc., 1961－1967.

[3] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960.

Л. Н. Шеврин 撰　李慧陵 译

Refal 语言［**Refal; Рефал**］，递归函数的算法语言（algorithmic language of recursive functions）

面向符号信息转换问题的**算法语言**（algorithmic language）．在它的原始版本中，称为"元算法语言"（见[1]）．Refal 语言被创建为一个用于描述语言对象转换的通用元语言．它用于从一个语言到另一个语言的翻译，解析计算的机器实现，证明定理、自然语言之间的翻译，等等．

用 Refal 语言写算法由在一组表达式（expression）（即符号和括号的序列）上描述一定数目的递归函数组成，这些表达式的括号是正确构造的（在通常意义上）．Refal 语言中函数 φ 在变元 $\mathscr{E}$ 上的值用形如 $\mathbf{K}\varphi\mathscr{E}\doteq$ 表达，其中 $\mathbf{K}$ 是具体化的符号（sign for concretization），它用作需要计算函数值的特定指令，符号 $\doteq$ 表示 $\mathbf{K}$ 的闭括号．函数的描述分为几个命题（具体化的规则（rules of concretization）），相应于变元的特定形式．例如，函数加在递归算术中用 Refal 语言由两个命题描述：

1) $\mathbf{K}+(\mathbf{E}A)(0)\supseteq\mathbf{E}A$,

2) $\mathbf{K}+(\mathbf{E}A)(\mathbf{E}B_1)\supseteq\mathbf{K}+(\mathbf{E}A)+(\mathbf{E}B)\doteq 1$.

命题由左部和右部组成，中间用符号 $\supseteq$ 分开，它能包括自由变量（诸如 $\mathbf{E}A$ 和 $\mathbf{E}B$）．它被认为在形如 $\mathbf{K}\varphi\mathscr{E}\doteq$ 的表达式的具体化中是可用的，如果后者对包含在其中的自由变量的某些值能和命题的左部一致．命题的应用意为：用命题的右部代替要被具体化的公式，其中自由变量由它们的值代替．为了计算函数的值，各命题被相继考察，第一个合适的命题被使用．这个过程被重复直到符号 $\mathbf{K}$ 消失．

为了实现用 Refal 语言写的程序，有效的翻译程序已开发（见[3]，[4]；对于在理论物理中机器计算而使用 Refal 语言的例子见[5]）．

参考文献

[1] Турчин, В. Ф., 《Кибернетика》, 1968, No. 4, 45－54.

[2] Турчин, В. Ф., Сердобольский, В. И., 《Кибернетика》, 1969, No. 3, 58－62.

[3] Флоренцев, С. Н., Олюнин, В. Ю., Турчин, В. Ф., 《Тр. 1 Всесоюзн. конференции по программированию》, К., 1968, 114－133.

[4] Романенко, С. А., Турчин, В. Ф., 《Тр. 2-й. Всесоюзн. конференции по программированию》, Новосиб., 1970, 31－42.

[5] Будник, А. П. [и др.], 《Ядерная физика》, 14

(1971), 304－313.

B. Ф. Турчин 撰　程　虎 译　刘椿年 校

参考系 [**reference system**; **отсчета система**]

与一物体相联系的坐标系和时钟的总和相对于此研究任何其他质点或物体的运动(或平衡). 任何运动都是相对的, 一个物体仅当相对于另一个物体(参考物体)或一个物体系时, 才可以言其运动. 例如, 仅当相对于地球、太阳或其他星体时, 才可以讨论月球的运动.

用数学的术语来说, 一物体(或质点)相对于一选定参考系的运动可以用一些给出该物体(或质点)相对于该参考系的坐标随时间 t 改变的方程式加以描写. 例如, 在 Descartes 坐标系 (x, y, z) 中, 一点的运动可以用下面的方程式来定义:

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t),$$

称为运动方程.

参考系的选择取决于研究的目的. 在运动学研究中, 所有参考系都同样适用. 在动力学问题中, **惯性系** (inertial system) 最为重要, 相对于这样的参考系, 微分方程的形式通常较为简单. БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Levi-Civita, T. and Amaldi, U., Lezioni di meccanica razionale, Zanichelli, 1949.

王克仁 译　诸德超 校

加细 [**refinement**; **измельчение**], **广义展开** (generalized development)

广义展开是拓扑空间 X 的子集族的集合 F, 满足下列条件: 对所有 $x\in X$ 和 x 的所有邻域 O_x, 存在 $\gamma\in F$, 使得族 γ 中包含 x 的所有元素之并(称为 x 关于 γ 的星形 (star) $\mathrm{St}_\gamma(x)$) 含于 O_x.

由开覆盖构成的广义展开很重要. 在维数论、紧化理论、一致空间理论、连续映射理论以及度量化问题中, 广义展开起着本质的作用. 简言之, 开覆盖的集合是广义展开就意味着, 此集合在每一点附近逼近已知空间. 通常, 要求广义展开的诸族之间具有特殊关系——即要求如果: a) 对于集合中的每一个族, 存在此集合的另一个族, 它是前一个族的星加细; b) 对集合的任意两个族, 存在加细这两个族的第三个族, 则得到与给定拓扑相容的一致结构(的基)的定义.

涉及仿紧空间理论时要考虑由局部有限覆盖构成的广义展开, 而涉及紧空间理论时要考虑由有限开覆盖构成的广义展开. 在**维数论** (dimension theory) 中, 按"内接加细"的关系确定顺序的、由给定重数的开覆盖构成的广义展开具有特殊意义. 不加上诸如局部有限性之类限制的由闭覆盖构成的广义展开没有什么价值; 例如, T_1 空间的由单点子集组成的覆盖本身构成一个广义展开, 但由此得不到关于此空间的拓扑的知识.

由开覆盖构成的可数广义展开(简称展开(development)起重要作用; 通常的记法是: 将其成员按自然数编号成一序列, 使得序列中的每一个覆盖都被下一个加细. 第一次用到展开是在空间的可度量化问题中, 因为展开的存在性是可度量化的必要条件. 在完全正则空间类中, 这个条件不是充分的, 除非附加上仿紧性(那是可度量性的推论). 准确地说, 一个 T_1 空间是可度量化的, 当且仅当它是集体正规的且具有一个展开. 特别地, 具有展开的紧统是可度量化的. 如果没有进一步的公理假设, 还不知道是否存在一个具有展开而又不可度量化的正规空间. 但已经知道, 这种空间的存在性与 Zermelo-Fraenkel 公理是相容的, 虽然迄今尚未构造出一个"质朴的"例子.

具有展开的空间类具有良好的性质. 在取子空间和可数积运算下它是闭的, 而在完满映射下是不变的. 但是, 在可度量化空间类成立的全部正则性质, 对于具有展开的空间都不成立. 于是, 具有展开的可分空间不必具有可数基. 具有展开的空间是仿紧的, 当且仅当它是可度量化的. 具有展开的空间虽然一般不是可度量化的, 但它容许一类按满足 Cauchy 条件的差距的意义下的广义度量化. 具有展开的空间, 作为度量空间在满足下列要求的连续映射的象, 还有一个方便的特性: 每一点的逆象到该点的每个邻域的逆象之补集的距离都是正的.

参考文献

[1] Архангельский, А. В., Пономарев, В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974 (英译本: Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984).

A. B. Архангельский 撰

【补注】 上文定义的概念在西方并不称"加细"(见后述). 事实上, "广义展开"这个术语也很少使用, 通常使用的是"展开列".

"是否每个**正规空间** (normal space) 都具有展开列?"称为正规 Moore 空间问题 (normal Moore space problem) (具有展开列的**正则空间** (regular space) 称为 Moore 空间 (Moore space)). 此问题现已解决. 1978 年 P. Nyikos 证明了, 在积测度扩张公理 (product measure extension axiom (PMEA)) 的假设下, 所有正规 Moore 空间都是可度量化的. 要证明 PMEA 与通常的集合论公理相容, 必须假设大基数的存在性. 1983 年 W. G. Fleissner 证明了, 若每个正规 Moore 空间都是可度量化的, 则能证明可测基数的存在性与通常的集合论公理是相容的, 从而解决了上述

问题，见[A1].

加细．集合 X 的子集组成的集合 $\mathscr{V}$ 称为集合 $\mathscr{U}$ 的加细（refinement），若对每个 $F\in\mathscr{V}$，存在 $G\in\mathscr{U}$，使得 $F\subset G$.

最普通的情形是，X 为拓扑空间时，$\mathscr{U}$ 是 X 的一个开覆盖而 $\mathscr{V}$ 也是 X 的一个覆盖（事实上，若 $\bigcup\mathscr{V}\neq X$，则 $\mathscr{V}$ 通常称为 $\mathscr{U}$ 的部分加细（partial refinement））.

在每个开覆盖都有一个特殊类加细的要求下，可得到多种有趣的空间类，其中最熟知的多半是仿紧空间（paracompact space）类：一个空间称为仿紧的，如果它的每个开覆盖都有一个局部有限的开加细．

在维数论（dimension theory）中，定义一个正规空间的覆盖维数（covering dimension）至多为 n，如果每个有限开覆盖都有一个有限开加细，使得每一个点属于此加细的最多 $n+1$ 个元素之中．

参考文献

[A1] Fleissner, W. G., The normal Moore space conjecture and large cardinals, in K. Kunen and J. E. Vaughan (eds.): Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 1984, 733 – 760.

白苏华、胡师度 译

反射 [reflection; отражение]

常曲率的 n 维单连通空间 X^n（即 Euclid 或仿射空间 E^n，球面 S^n 或双曲（Лобачевский）空间 Λ^n）的一个映射 σ，其不动点集 Γ 是一个 $(n-1)$ 维超平面．集合 Γ 称为映射 σ 的镜（mirror of the mapping）；换句话说，σ 是一个关于 Γ 的反射．每一个反射由它的镜所唯一决定．X^n 的所有运动群中一个反射的阶（周期）等于 2；即 $\sigma^2=\mathrm{Id}_{X^n}$.

Euclid 或仿射空间 E^n 可等同于它的平行移动的向量空间 V^n．因此映射 σ 是在某一组正交基下，V^n 的一个具有矩阵

$$\left\|\begin{matrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1\end{matrix}\right\|$$

的线性正交变换，并且反过来，V^n 的每一个在某一组正交基下具有这个矩阵的正交变换是 E^n 中的一个反射．更一般地，特征不是 2 的域 k 上任意向量空间 W 的一个线性变换 φ 称为一个线性反射（linear reflection），如果 $\varphi^2=\mathrm{Id}_W$ 且变换 $\mathrm{Id}-\varphi$ 的秩等于 1．在这种情形，相对于 φ 不动的向量的子空间 W_1 在 W 中有余维数 1，本征值 -1 的本征向量的子空间 W_{-1} 有维数 1，并且 $W=W_1\oplus W_{-1}$．如果 α 是 W 上的一个线性型，使得当 $w\in W_1$ 时 $\alpha(w)=0$，且如果 $h\in W_{-1}$ 是使得 $\alpha(h)=2$ 的一个元素，那么 φ 用公式

$$\varphi w=w-\alpha(w)h\ ,\ w\in W$$

定义．任意常曲率单连通空间 X^n 中一个反射的描述可按以下方式归结为线性反射的描述．每一个这样的空间 X^n 可以作为一个超曲面嵌入一个实 $(n+1)$ 维向量空间 V^{n+1} 中，使得 X^n 的运动可以扩张为 V^{n+1} 的线性变换．进一步，在 V^{n+1} 的一个适当的坐标系中，超曲面的方程可以写为以下形式：

对于 S^n，$x_0^2+\cdots+x_n^2=1$；

对于 E^n，$x_0=1$；

对于 Λ^n，$x_0^2-\cdots-x_n^2=1$ 且 $x_0>0$.

给定这个嵌入，X^n 中的每一个超曲面是 V^{n+1} 中某个 n 维子空间与 X^n 的交，并且 X^n 中的每一个反射是由 V^{n+1} 中的一个线性反射所诱导的．

在线性反射的定义中，如果去掉 $\varphi^2=\mathrm{Id}_W$ 的要求，则得到更一般的伪反射（pseudo-reflection）的概念．如果 k 是复数域并且 φ 是一个有限阶（不必等于 2）的伪反射，则 φ 称为一个酉反射（unitary reflection）．复空间中有界对称域的每一个有限阶的双全纯自同构，其不动点的集合有复余维数 1，也称为一个酉反射．

亦见**反射群**（reflection group）.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Eléments de mathématiques, Hermann, 1968, Chapts, 4 – 6.

[2] Винберг, Э. Б., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 35(1971), 5, 1072 – 1112.

[3] Gottschling, E., Reflections in bounded symmetric domains, *Comm. Pure Appl. Math.*, 22(1969), 693 – 714.

[4] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

В. Л. Попов 撰

【补注】 文献中也可见到将 reflection（反射）拼写为 reflexion 的.

一个基本事实是反射生成**正交群**（orthogonal group）；见[A2]，8.12.12，13.7.12 节．

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988（译自俄文）.

[A2] Berger, M., Geometry, Spinger, 1987（中译本：M. 贝尔热，几何，第一 – 五卷，科学出版社，1987 – 1991）.

[A3] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A4] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometry, Freeman, 1980.

[A5] Astmann, B., Linear Algebra, Birkhäuser, 1986.

[A6] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.

林向岩 译 陆珊年 校

反射群 [reflection group; отражений группа]

超平面中由反射生成的一个离散变换群，研究得最多的是那些常曲率单连通完全 Riemann 流形，即 Euclid 空间 E^n，球面 S^n 或双曲（Лобачевский）空间 Λ^n 的映射所组成的群．

反射群的理论起源于**正多面体**（regular polyhedra）与 Euclid 平面和球面的正则划分（"装饰物（ornament）"）的研究．19 世纪后半叶，这一研究扩展到既包括 n 维情形，并且与单复变函数论问题相联系，也包括双曲平面；空间 Λ^n 分解为正多面体的正则划分也被描述．任何正多面体的对称群与空间分解为正多面体的正则划分的对称群都是反射群．1934 年（见 [1]），列出了 E^n 与 S^n 中所有的反射群（S^n 中的反射群可作为 E^{n+1} 中的反射群的一个特殊情形）．早在 1925 − 1927 年，在 E. Cartan 与 H. Weyl 的工作中，反射群作为半单 Lie 群的 **Weyl 群**（Weyl group）而出现．随后证实了 Weyl 群实际上是 E^n 中有单一不动点的反射群并且在某个基下可用整数矩阵表出，而仿射 Weyl 群是 E^n 中所有具有一个有界基本多面体的反射群（见**离散变换群**（discrete group of transformations））．

反射群理论的基本结果． 令 $X^n = S^n$, E^n 或 Λ^n．X^n 中的每一个反射群由关于超平面 H_i ($i \in I$) 的反射 r_i 生成，这些超平面围成一个基本多面体 P．关于这个生成元系，反射群是一个具有定义关系 $(r_i r_j)^{n_{ij}} = 1$ 的 **Coxeter 群**（Coxeter group），其中数 n_{ij} 由如下方式得到：如果面 $H_i \cap P$ 与 $H_j \cap P$ 是邻接的且它们之间的角等于 α_{ij}，则 $\alpha_{ij} = \pi / n_{ij}$；如果它们不是邻接的，则 $n_{ij} = \infty$（且超平面 H_i 与 H_j 不相交）．另一方面，X^n 中所有二面角是 π 的因数的任何凸多面体是由关于围成它的超平面的反射所生成的群的基本多面体．

E^n 中的每一个反射群（作为一个运动群）是作用在某个维数的 Euclid 空间的平凡群与以下两种类型的运动群的直积：（Ⅰ）其基本多面体是一个单纯锥的有限反射群；（Ⅱ）其基本多面体是一个单形的无限反射群．类型（Ⅰ）的群可看成中心在基本锥顶点的球面上的一个反射群；因此它的基本多面体是一个球面单形．类型（Ⅰ）的反射群由它的 Coxeter 矩阵唯一确定，由于这个原因这些群的分类与有限 Coxeter 群的分类一致．类型（Ⅱ）的反射群由它的 Coxeter 矩阵确定到相差一个位似．不计位似，这些群的分类与不可分解的抛物 Coxeter 群的分类一致．E^n 中每一个具有有界基本多面体的反射群（作为运动群）是类型（Ⅱ）的群的直积．

Λ^n 中反射群较少研究．由于多种理由，自然地区分基本多面体是有界的或只在有限个点趋向于绝对形（"无穷远处的球面"）（这等价于体积的有限性）．以下只考虑这些群．仅当 $n = 2, 3$ 时，它们或多或少地被清晰地描述．

Λ^2 里的一个反射群由具有角

$$\frac{\pi}{n_1}, \cdots, \frac{\pi}{n_k}$$

的一个 k 角形定义，其中 $1/n_1 + \cdots + 1/n_k < k - 2$（如果一个顶点在无穷远处，则认为它的角等于零）．具有这样给定角的多边形总存在并且依赖于 $k - 3$ 个参数．

当 $n \geqslant 3$ 时，Λ^n 中一个反射群的基本多面体由它的组合结构与二面角唯一确定．对于 $n = 3$，这些多面体因而其反射群的详尽描述已经得到（[5]）．对于 $n \geqslant 4$，只知道 Λ^n 中反射群的一些例子与一些一般构造方法（见 [6], [7]）．（1990 年时）还不知道 Λ^n 中当 $n \geqslant 9$ 时是否存在具有有界基本多面体的反射群以及当 $n \geqslant 22$ 时是否存在具有有限体积的基本多面体的反射群．

与常曲率空间中的反射群平行，考虑离散地作用于实向量空间的开凸锥上的线性反射群，这使得具有有限个生成元的所有 Coxeter 群的几何实现成为可能（见 [3], [4]）．

每一个有限反射群可看成一个线性群．在所有的有限线性群中，有限反射群由这些群的不变多项式的代数具有生成元的代数无关系的事实刻画（[4]）．例如，对于基向量的全体置换的群，这些生成元是初等对称多项式．令 $m_1 + 1, \cdots, m_n + 1$ 是有限反射群 G 的不变量的生成元的次数（n 是空间的维数）；数 $m_1, \cdots, m_n$ 称为群 G 的**指数**（exponents of the group）．公式

$$(1 + m_1 t) \cdots (1 + m_n t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$$

成立，这里 c_k 是 G 中其不动点的空间的维数为 $n - k$ 的元素的个数．特别地，$m_1 + \cdots + m_n$ 等于 G 中反射的个数；$(m_1 + 1) \cdots (m_n + 1)$ 等于该群的阶．如果 G 是不可约的，那么它的 Killing-Coxeter 元素（见 **Coxeter 群**（Coxeter group））的本征值等于 $\exp(2\pi i m_k / h)$，这里 h 是 Coxeter **数**（Coxeter number）：

$$h = \max\{m_k\} + 1.$$

除最后部分外，上段的断言也适用于特征为零的任意域上的线性群（见 [4]）．在这一情形，宜将反射理解为具有维数 $n - 1$ 的不动点空间的线性变换．[8] 中列出了复数域上所有的有限线性反射群．特征非零的域上的有限线性反射群已被发现（[9]）．

参考文献

[1] Coxeter, H. S. M., On complexes with transitive groups of automorphisms, *Ann. of Math.*, **35** (1934), 588 – 621.

[2] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., Generators and relations for discrete groups, Springer, 1984.

[3] Tits, J., Groupes simples et géométries associées, in Proc. Internat. Congress of Mathematicians 1962, Dursholm, Mittag-Leffler Institute, 1963, 197 – 221.

[4] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Eléments de mathématiques, Hermann, 1968. Chapts. 4 – 5.

[5A] Андреев, Е. М., 《Матем. сб》, **81** (1970), 445 – 478.

[5B] Андреев, Е. М., 《Матем. сб.》, **83** (1970), 256 – 260.

[6] Макаров, В. С., в кн.: Исследования по общей алгебре, в. 1, Киш., 1968, 120 – 129.

[7A] Винборг, Э. Б., 《Матем. сб.》, **72** (1967), 471 – 488.

[7B] Винберг, Э. Б, 《Матем. сб.》, **87** (1972), 18 – 36.

[8] Shephard, G. C. and Todd, J. A., Finite unitary reflection groups, *Canad. J. Math.*, **6** (1954), 274 – 304.

[9] Цалесски, А. И., Сережкин, В. Н., 《Изв. АН СССР. Сер. мат.》, **44** (1980), 1279 – 1307.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 [A1] 列出了实四元数除环上的所有有限线性反射群. 关于特征 $\neq 2$ 的域上的有限线性反射群的确定, 见 [A2] – [A4].

参考文献

[A1] Cohen, A. M., Finite quaternionic reflection groups, *J. of Algebra*, **64** (1980), 293 – 324.

[A2] Wagner, A., Determination of the finite primitive reflection groups over an arbitrary field of characteristic not 2, I, *Geom. Ded.*, **9** (1980), 239 – 253.

[A3] Wagner, A., Determination of the finite primitive reflection groups over an arbitrary field of characteristic not 2, II, *Geom. Ded.*, **10** (1981), 191 – 203.

[A4] Wagner, A., Determination of the finite primitive reflection groups over an arbitrary field of characteristic not 2, III, *Geom. Ded.*, **10** (1981), 475 – 523.

林向岩 译 陆珊年 校

范畴的对象的反射 [reflection of an object of a category; рефлектор объекта категории], 范畴的对象的反射子 (reflector of an object of a category)

令 $\mathfrak{C}$ 是范畴 $\mathfrak{K}$ 的一个子范畴; 对象 $B \in \mathfrak{C}$ 叫做对象 $A \in \mathfrak{K}$ 在 $\mathfrak{C}$ 中的反射 (reflection of an object), 或 $\mathfrak{C}$ 反射 ($\mathfrak{C}$-reflection), 是指有态射 $\pi: A \to B$, 使得取 $\mathfrak{C}$ 中的任意对象 X, 映射

$$H_X(\pi): H_{\mathfrak{C}}(B, X) \to H_{\mathfrak{K}}(A, X)$$

是一一的. 换言之, 对任意态射 $\alpha: A \to X$, 存在唯一态射 $\alpha': B \to X \in \mathfrak{C}$, 使得 $\alpha = \pi\alpha'$. 对象 A 的 $\mathfrak{C}$ 反射不是唯一的, 但是 A 的任意两个 $\mathfrak{C}$ 反射必同构. $\mathfrak{K}$ 中始对象的 $\mathfrak{C}$ 反射是 $\mathfrak{C}$ 中的始对象. 包含函子 $\mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ 的左伴随 (如果存在), 即将 $\mathfrak{K}$ 的每个对象对应到它在 $\mathfrak{C}$ 中的反射的函子叫做一个反射子 (reflector).

例. 在群范畴中, 任意群 G 的商群 G/G', 其中 G' 为 G 的换位子群, 是 G 在 Abel 群子范畴中的反射. 对于一个 Abel 群 A, 商群 $A/T(A)$ 是 A 在无扭 Abel 群的满子范畴中的反射, 其中 $T(A)$ 为 A 的挠群. 群 $A/T(A)$ 的内射包 $\widetilde{A}$ 是群 A 和 $A/T(A)$ 在无挠 Abel 群满子范畴中的反射.

反射通常在满子范畴中来考察. 范畴 $\mathfrak{K}$ 的一个满子范畴 $\mathfrak{C}$ 叫做自反的 (reflective), 若 $\mathfrak{K}$ 中所有的对象都有反射 (见**自反子范畴** (reflective subcategory)).

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 一个对象的反射解决一个**泛问题** (universal problems).

张英伯 译

反射原理 [reflection principle; отражения принцип]

调和函数的**对称原理** (symmetry principle) 对任意个数自变量的调和函数的推广. 反射原理的一些陈述如下:

1) 令 G 是 k 维 ($k \geqslant 1$) Euclid 空间中的一个域, 它由包含有 $k-1$ 维超平面 L 的 $k-1$ 维子域 σ 的 Jordan 曲面 Γ (特别, 是光滑的或分块光滑的自己不相交的曲面 Γ) 所围. 如果函数 $U(x_1, \cdots, x_k)$ 在 G 中是调和的, 在 $G \cup \sigma$ 上连续且在 σ 上处处等于零, 那么 $U(x_1, \cdots, x_k)$ 可以像**调和函数** (harmonic function) 那样利用等式

$$U(x_1^*, \cdots, x_k^*) = -U(x_1, \cdots, x_k)$$

通过 σ 拓展到域 G^*, 它是关于 L 对称于 G 的, 这里点 $(x_1^*, \cdots, x_k^*) \in G^*$ 和 $(x_1, \cdots, x_k) \in G$ 关于 L 是对称的.

2) 令 G 是 $k(k \geqslant 1)$ 维 Euclid 空间的一个域, 它由 Jordan 曲面 Γ 所围, Γ 包含有以 $R > 0$ 为半径、以点 $M^0 = (x_1^0, \cdots, x_k^0)$ 为中心的 $k-1$ 维球面 Σ 的一个 $k-1$ 维子域 σ. 如果 $U(x_1, \cdots, x_k)$ 在 G 中是调和的, 在 $G \cup \sigma$ 上连续且在 σ 上处处等于零, 那么 $U(x_1, \cdots, x_k)$ 可以像调和函数那样通过 σ 拓展到域 G^*, 后者关于 Σ 是对称于 G 的 (即它是从 G 利用半径之逆关于球面 Σ 的反演变换而得到的). 这个连续性是借助于 U 关于 Σ 取反号的 **Kelvin**

变换(Kelvin transformation)达到的，即

$$U(x_1^*,\cdots,x_k^*)=$$

$$=-\frac{R^{k-2}}{r^{k-2}}U\left(x_1^0+R^2\frac{x_1^*-x_1^0}{r^2},\cdots,\right.$$

$$\left.x_k^0+R^2\frac{x_k^*-x_k^0}{r^2}\right),$$

其中 $(x_1^*,\cdots,x_k^*)\in G^*$,

$r=\sqrt{(x_1^*-x_1^0)^2+\cdots+(x_k^*-x_k^0)^2}$. 在半径之逆关于球面 Σ 的反演变换下，点 $M^*=(x_1^*,\cdots,x_k^*)$ 映射到点 $M(x_1,\cdots,x_k)$，有对应关系

$$x_1-x_1^0=R^2\frac{x_1^*-x_1^0}{r^2},\cdots,x_k-x_k^0=R^2\frac{x_k^*-x_k^0}{r^2},$$

使得如果 $M^*\in G^*$，那么 M 属于域 G(其中 U 是已给的)，且如果 $M^*\in\sigma$，那么 $M=M^*$.

参考文献

[1] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Partial differential equations, 2, Interscience, 1965(译自德文)(中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特著，数学物理方法Ⅱ，科学出版社，1977).

Е. П. Долженко 撰

【补注】 在非苏联的文献中，"反射原理"还涉及到 **Riemann-Schwarz 原理**(Riemann-Schwarz principle)及其对 C^n 的推广.

亦见 **Schwarz 对称定理**(Schwarz symmetry theorem).

孙和生 译 陆柱家 校

自反子范畴[reflective subcategory 或 reflexive subcategory; рефлективная подкатегория]

含有给定范畴的任意对象的"最大"模型的一个子范畴. 更确切地说，范畴 $\mathfrak{K}$ 的一个满子范畴 $\mathfrak{C}$ 叫作自反的(reflective)，是指它包含 $\mathfrak{K}$ 的每个对象的一个反射(见**范畴对象的反射**(reflection of an object of a category)). 等价地，$\mathfrak{C}$ 在 $\mathfrak{K}$ 中是自反的，当且仅当包含函子 $\mathfrak{C}\to\mathfrak{K}$ 有一个左伴随 $S:\mathfrak{K}\to\mathfrak{C}$. 函子 S 将 $\mathfrak{K}$ 的每一个对象 A 映射为它的 $\mathfrak{C}$ 反射 $S(A)$; 出现在反射定义中的态射 $\pi_A:A\to S(A)$ 构成从 $\mathfrak{K}$ 上的恒等函子到 S 与包含函子的合成函子，即伴随单位之间的自然变换(见**伴随函子**(adjoint functor)). 自反子范畴的对偶概念叫作余自反子范畴(coreflective subcategory).

自反子范畴 $\mathfrak{C}$ 从环绕范畴 $\mathfrak{K}$ 中继承了许多性质. 例如 $\mathfrak{C}$ 中的态射 μ 在 $\mathfrak{C}$ 中是**单态射**(monomorphism)，当且仅当在 $\mathfrak{K}$ 中是单态射. 因而每一个良势范畴的自反子范畴是良势的. 自反子范畴在积下封闭，从而它们在环绕范畴中存在. 此事对一般的极限亦成立. 一个自反子范畴在上极限下不一定封闭，但函子 S 将 $\mathfrak{K}$ 中的上极限变换到 $\mathfrak{C}$ 中的上极限. 这样，完全(上完全)范畴的自反子范畴是完全的(上完全的).

设 $\mathfrak{K}$ 是完全的，且有**双范畴**(bicategory)(因子分解)结构，其中每个对象仅有一个容许商对象的集合，则 $\mathfrak{K}$ 中每个在积和容许子对象下封闭的满子范畴 $\mathfrak{C}$ 是自反的. 这时，可以如下构造 $\mathfrak{K}$ 中对象 A 的 $\mathfrak{C}$ 反射: 选择 A 的属于 $\mathfrak{C}$ 的商对象的代表元集 $(\gamma_i:A\to A_i)$, $i\in I$. 积 $P=\prod_{i\in I}A_i$ 属于 $\mathfrak{C}$，且 $\mathfrak{C}$ 反射 $S(A)$ 是唯一的态射 $\gamma:A\to P$ 的象，此处 γ 满足 $\pi_i\gamma=\gamma_i$, $i\in I$.

例. 1) 令 R 是整区. 无扭内射模的满子范畴在无扭 R 模范畴中是自反的; 反射是无扭模的内射包. 特别地，可除无扭 Abel 群的满子范畴在无扭 Abel 群范畴中是自反的.

2) 紧 Hansdorff 拓扑空间的满子范畴在完全正则拓扑空间范畴中是自反的. Stone-Čech 紧化提供了反射.

3) 拓扑空间上的层范畴在预-层范畴中是自反的. 反射由所结合的层化函子定义(层化(sheafication)).

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 少数作者将"自反子范畴"这一术语扩展到包含函子有左伴随的非满子范畴.

一个自反子范畴叫作满自反的(epireflective)，指对每一个 A，典范态射 $\pi_A:A\to S(A)$ 均为满态射. 如果 $\mathfrak{K}$ 中的任意态射可以分解成一个满态射与一个单态射的合成，则 $\mathfrak{K}$ 的自反子范畴必为满自反的，只要它在 $\mathfrak{K}$ 的任意子对象下为闭的. 上文中列出的三个例子不是满自反的，但是(例如)Abel 群范畴在群范畴中是满自反的. 满自反的对偶概念是单余自反子范畴(monocoreflective subcategory)，例如，扭 Abel 群范畴是 Abel 群范畴的单余自反子范畴.

张英伯 译

反射子[reflector; рефлектор]，范畴的对象的

见**范畴的对象的反射**(reflection of an object of a category).

自反空间[reflexive space; рефлексивное пространство]

在典范嵌入下与其第二对偶 X^{**}(见**伴随空间**(adjoint space))重合的一种 **Banach 空间**(Banach space). 更确切地，设 X^* 是对偶于 X 的空间，即 X 中所有连续线性泛函的集合. 如果 $\langle x,f\rangle$ 是泛函 $f\in X^*$ 在元素 $x\in X$ 上的值，则对固定的 x 而 f 跑遍 X^* 时，公式 $\langle x,f\rangle=\mathscr{F}_x(f)$ 定义了一个 X^* 上的连续

线性泛函，即空间 X^{**} 的一个元素．设 $\widetilde{X}\subset X^{**}$ 是这样的泛函的集合．对应关系 $x\to\mathscr{F}_x$ 是一个不改变范数的同构：$\|x\|=\|\mathscr{F}_x\|$．如果 $\widetilde{X}=X^{**}$，则空间 X 称为自反的．空间 l_p 和 $L_p(a,b)$，$p>1$ 是自反的，而空间 $C[a,b]$ 不是自反的．

空间 X 是自反的，当且仅当空间 X' 是自反的．Banach 空间 X 的自反性的另一准则是此空间的单位球的弱紧性（见**弱拓扑**（weak topology））．

自反空间是弱完全的且自反空间中的闭子空间是自反的．

自反性概念自然地推广到**局部凸空间**（locally convex space）．

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, I, Interscience, 1958.

[2] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）．

[3] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977（中译本：Л. В. Канторович，Г. П. Акилов，泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1982）．

В. И. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Beauzamy, B., Introduction to Banach spaces and their geometry, North-Holland, 1982.

[A2] Day, M. M., Normed linear spaces, Springer, 1973.

[A3] Dulst, D. van, Reflexive and supperreflexive Banach spaces, MC Tracts, 102, Math. Centre, 1978.

葛显良 译　吴绍平 校

自反性 [reflexivity; рефлексивность]

二元关系的一个性质．集合 A 上的**二元关系**（binary relation）R 是自反的（reflexive），如果对所有的 $a\in A$ 有 aRa．自反关系的例子有相等关系，等价关系，序关系．

Т. С. Фофанова 撰　赵希顺 译

可驳公式 [refutable formula; опровержимая формула]，形式可驳公式（formally refutable formula），在给定公式系统中

其否定可以在给定系统中推导出的闭公式．

В. Н. Гришин 撰

【补注】 给定逻辑系统中的闭公式 A 是形式可判定的（decidable）（见**可判定公式**（decidable formula）），如果 A 是可证的或可驳的．

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland & Noordhoff, 1959（中译本：S. C. 克林，元数学导论，科学出版社，（上册 1984，下册 1985）．

胡荣芳 译　罗里波 校

回归 [regression; регрессия]

一个随机变量的均值对另一随机变量或另外若干随机变量的依赖关系．例如，若对于每个值 $x=x_i$，观测随机变量 Y 的 n_i 个值 $y_{i1},\cdots,y_{in_i}$，则就此术语的统计含义而言，这些观测值的算术平均值

$$\bar{y}_i=\frac{1}{n_i}(y_{i1}+\cdots+y_{in_i})$$

对 x_i 的相依关系就是回归．如果随 x 的变化 $\bar{y}$ 呈现系统变化，则假设被观测现象遵从概率相依性：对于每一固定 x 值，随机变量 Y 有确定概率分布，其数学期望是 x 的函数

$$\mathrm{E}(Y|x)=m(x).$$

以 x 为"自"变量的相依关系 $y=m(x)$，在概率意义下称为 Y 对 x 的回归（regression）或回归函数（regression function）．函数 $m(x)$ 的图形称为 Y 对 x 的回归线（regression line）或回归曲线（regression curve）．变量 x 称为回归变量（regression variable）或回归量（regressor）．由 Y 对 x 的回归曲线所反映的、Y 随 x 变化而平均变动的精度，用变量 Y 关于每个 x 值的**方差**（dispersion）

$$\mathrm{D}(Y|x)=\sigma^2(x)$$

度量．$\sigma^2(x)$ 对 x 相依关系的图形，称为方差曲线（scedastic curve）．如果对于一切 x 有 $\sigma^2(x)=0$，则变量 Y 与 x 间以概率 1 为严格函数关系．假如对于任何 x 值，$\sigma^2(x)\neq 0$ 且 $m(x)$ 与 x 无关，则 Y 对 x 的回归不存在．

概率论中，解回归问题亦适用于如下情形．假设回归变量 x 的值是某一随机变量 X 的取值，而 X 和 Y 的联合概率分布已知；那么，数学期望 $\mathrm{E}(Y|x)$ 和方差 $\mathrm{D}(Y|x)$，分别是 Y 在给定值 $X=x$ 条件下的条件数学期望和条件方差．在这种情形下，有两种回归：Y 对 x 的回归和 X 对 y 的回归；也可以利用回归的概念，引出随机变量 X 和 Y 间相依程度的某种度量，它定义为分布在回归曲线近旁集中程度的特征（见**相关（统计学中的）**（correlation (in statistics)）．回归函数有如下性质：对于一切实函数 $f(x)$，当 $f(x)=m(x)$ 时数学期望 $\mathrm{E}[Y-f(x)]^2$ 达到最小值，即在此意义下 Y 对 x 的回归是随机变量 Y 的最佳表现．Y 对 x 的回归为线性的（linear）情形，即情形

$$\mathrm{E}(Y|x)=\beta_0+\beta_1 x$$

最为重要．这里，β_0 和 β_1 称为回归系数（regression coefficient），它们很容易计算：

$$\beta_0=m_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}m_X,\ \beta_1=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

其中 ρ 是 X 和 Y 的**相关系数**(correlation coefficient), $m_X = \mathrm{E}\,X$, $m_Y = \mathrm{E}\,Y$, $\sigma_X^2 = \mathrm{D}\,X$, $\sigma_Y^2 = \mathrm{D}\,Y$. 这时, Y 对 x 的回归曲线(regression curves)为

$$y = m_Y + \rho\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,(x - m_X);$$

同样可以求出 X 对 y 的回归曲线. 当 X 和 Y 的联合分布是二维正态分布时, 线性回归是精确的. 在统计应用条件下, 当为精确地确定回归但不充分掌握联合分布的形式时, 就出现求近似回归的问题. 问题的解决办法是, 在给定函数类的一切函数 $g(x)$ 中, 选择一个能最佳表现 Y 的函数, 即使数学期望 $\mathrm{E}[Y - g(X)]^2$ 最小化的函数. 这样求得的函数称为均方回归(mean-square (mean-quadratic) regression).

线性均方回归(linear mean-square regression)是最简单的情形. 在这种情形下, 寻求 Y 由 X 的最优线性逼近, 即求一线性函数 $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$, 使得 $\mathrm{E}[Y - g(X)]^2$ 取最小可能值. 这一极值问题有唯一解:

$$\beta_0 = m_Y - \beta_1 m_X,\ \beta_1 = \rho\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \qquad (*)$$

即近似回归线的计算与精确线性回归

$$y = m_Y + \rho\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,(x - m_X)$$

有相同的结果. 将按 (*) 计算的 β_0 和 β_1 代入 $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$, 得 $\mathrm{E}[Y - g(X)]^2$ 的最小值, 等于 $\sigma_Y^2(1-\rho^2)$. 如果回归 $m(x)$ 存在, 则对于任意 β_0 和 β_1, 有

$$\mathrm{E}[Y - \beta_0 - \beta_1 X]^2 =$$

$$= \mathrm{E}[Y - m(X)]^2 + \mathrm{E}[m(X) - \beta_0 - \beta_1 X]^2.$$

由此可见, 按 y 轴方向上的距离, 均方回归线 $y = \beta_0 + \beta_1 x$ 是 $m(x)$ 的最优逼近. 若 $m(x)$ 是一条直线, 则它与均分回归线重合.

在一般情形下, 如果回归远不是线性的, 可以设法对于某个 m, 寻求一个 m 阶多项式 $g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m$, 使 $\mathrm{E}[Y - g(x)]^2$ 取尽可能小的值.

上述问题的求解对应于 m 阶多项式均方回归(polynomial mean-square regression; 见抛物回归(parabolic regression)). 函数 $y = g(x)$ 是 m 阶多项式, 它是精确回归曲线的最优逼近. 用某些给定函数的线性组合

$$g(x) = \beta_0\varphi_0(x) + \cdots + \beta_m\varphi_m(x)$$

表示的回归函数, 是多项式回归的推广. 下面的情形特别重要: $\varphi_0(x), \cdots, \varphi_m(x)$ 是由 X 的分布构造的相应阶正交多项式. 非线性(曲线)回归(non-linear (curvilinear) regression)的其他例子, 有三角函数回归、指数函数回归等等.

回归的概念, 可以由一个回归变量自然地推广到一组变量的情形. 假如随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 有联合概率分布, 则多重回归(multiple regression)可以作为 X_1 对 $x_2, \cdots, x_n$ 的回归定义为

$$\mathrm{E}(X_1 \mid X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = m_1(x_2, \cdots, x_n).$$

该方程决定 X_1 对 $x_2, \cdots, x_n$ 的回归曲面(regression surface). X_1 对 $x_2, \cdots, x_n$ 的线性回归形如

$$\mathrm{E}(X_1 \mid x_2, \cdots, x_n) = \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n,$$

其中 $\beta_2, \cdots, \beta_n$ 是回归系数(假设 $\mathrm{E}\,X_k = 0$). 变量 X_1 对 $x_2, \cdots, x_n$ 的线性均方回归, 是由变量 $X_2, \cdots, X_n$ 对变量 X_1 的最优线性估计量, 最优性指

$$\mathrm{E}(X_1 - \beta_2 X_2 - \cdots - \beta_n X_n)^2$$

取最小值. 只要回归曲面 $x_1 = m_1(x_2, \cdots, x_n)$ 存在, 则相应的回归平面(regression plane)是它的最优逼近. 如果回归面是一平面, 则它就是均方回归平面(当全部 n 个变量的联合分布是正态分布时, 就是这种情形).

Y 对 X 的回归的一个简单例子是由 $Y = u(x) + \delta$ 表示 Y 对 X 的相依关系, 其中 $u(x) = \mathrm{E}(Y \mid X = x)$, 而随机变量 X 和 δ 相互独立. 在设计研究非随机变量 y 和 x 间函数关系的试验时, 这种表示方法可用. 在许多应用中, 研究随机变量 Y 对非随机变量 x 的相依性质也运用这种方法. 在实际中, 运用**回归分析**(regression analysis)方法, 根据试验数据进行函数 $y = u(x)$ 的选择和未知回归系数的估计.

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946(中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Inference and relationship, Griffin, 1979.

A. B. Прохоров 撰 周概容、王健 译

回归分析[regression analysis; регрессионный анализ]

数理统计的分支, 它包罗根据统计数据研究变量间回归相依性的一切实际方法(见回归(regression)). 数理统计中回归问题的特点是, 对于所研究变量的分布缺乏充分的信息. 例如, 假设有理由认为, 随机变量 Y 在另一变量取固定值 x 的情形下具有某种概率分布, 那么

$$\mathrm{E}(Y \mid x) = g(x, \beta),$$

其中 β 是决定函数 $g(x)$ 的一组未知参数, 且需要根据观测结果确定这些参数的值. 依问题的性质和分析目的不同, 试验结果 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 相对于 x 有不同解释. 为建立变量间的函数关系, 在试验中使

用基于简化假设的模型：变量 x 是可以控制的变量，其值事先在设计试验时就已给定，而观测值 y 表示为

$$y_i = g(x_i, \beta) + \varepsilon_i,\ i = 1, \cdots, n,$$

其中变量 ε_i 表示误差，在不同测量中相互独立、有相同分布且均值为 0、方差为同一常数．在非可控变量的情形下，观测结果 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 是来自某一二维总体的样本．回归分析方法在两种情形下是相同的，不过结果的解释不同（在后一种情形下，分析本质上由**相关（统计学中的）**（correlation (in statistics)）理论的方法来充实）．

根据试验数据研究回归，基于建立在均方回归原则上的方法．回归分析解决如下基本问题：1）选择回归模型，包括回归函数对 x 和 β 的依赖关系；2）用最小二乘法估计所选模型中的参数 β；3）检验关于回归的统计假设．

从未知参数估计的统一方法的角度看，最自然的是关于这些参数线性的回归模型：

$$g(x, \beta) = \beta_0 g_0(x) + \cdots + \beta_m g_m(x).$$

函数 $g_i(x)$ 的选择，有时决定于试验值 (x, y) 在散点图上的分布，通常基于理论的考虑．此外，假设观测结果的方差 σ^2 为常数（或与 x 的已知函数成比例）．估计回归的基本方法是，利用某一 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$ 阶多项式：

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_m x^m,$$

或在最简单的场合利用线性函数（见**线性回归**（linear regression））：

$$g(x, \beta) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

存在检验线性性和选择逼近多项式次数的准则．

根据均方回归原则，用最小二乘法来估计未知回归**系数**（regression coefficient）$\beta_0, \cdots, \beta_m$ 和**方差**（dispersion）σ^2．根据最小二乘法，用使

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - g(x_i))^2$$

取最小值的 $\hat{\beta}_0, \cdots, \hat{\beta}_m$ 做参数 $\beta_0, \cdots, \beta_m$ 的估计值．用最小二乘法建立的多项式 $\hat{g}(x) = \hat{\beta}_0 + \cdots + \hat{\beta}_m x^m$ 称为经验回归曲线（empirical regression curve），它是未知的真实回归曲线的统计估计．在回归的线性性假设下，经验回归曲线形如：

$$\hat{g}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x,$$

其中

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x},\ \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2},$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i.$$

随机变量 $\hat{\beta}_0, \cdots, \hat{\beta}_m$ 称为样本回归系数（sample regression coefficients）或估计的回归系数（estimated regression coefficients）．参数 σ^2 的**无偏估计量**（unbiased estimator）为

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{g}(x_i))^2}{n - m}.$$

如果方差依赖于 x，则可以利用最小二乘法的某些变形．

如果研究随机变量 Y 对几个变量 $x_1, \cdots, x_k$ 的依赖关系，则一般线性回归模型宜表为矩阵形式：具有独立分量 $y_1, \cdots, y_n$ 的观测（列）向量 y 的均值和协方差矩阵相应为：

$$\mathsf{E}(Y|x_1, \cdots, x_n) = X\beta,\ \mathsf{D}(Y|x_1, \cdots, x_n) = \sigma^2 I,\ (*)$$

其中 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_k)^T$ 是回归系数向量；$X = \| x_{ij} \|$ $(i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, k)$ 是已知量的矩阵（一般，这些变量是以某种形式相互联系的）；I 是 n 阶单位矩阵；这里，假设 $n > k$ 且 $|X^T X| \neq 0$．在更一般的情形下，假设观测值 y_i 间存在相关：

$$\mathsf{E}(Y|x_1, \cdots, x_k) = X\beta,\ \mathsf{D}(Y|x_1, \cdots, x_k) = \sigma^2 A,$$

其中矩阵 A 已知，但是此种概形可以化为模型（$*$）．β 的最小二乘无偏估计是

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y,$$

而 σ^2 的无偏估计是

$$s^2 = \frac{1}{n-k}\ (y^T y - \beta^T X^T y).$$

模型（$*$）是最一般的线性模型，因此它适用于各种不同回归情形，包括 Y 对 $x_1, \cdots, x_k$ 的多项式回归的一切形式（特别地，上面讨论的 Y 对 x 的 m 阶多项式回归可以归结为模型（$*$），其中 m 个回归变量是函数相依的）．在回归分析的这种线性意义下，参数 β 的估计和其估计量协方差矩阵 $\mathsf{D}\hat{\beta} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$ 的计算问题，归结为矩阵 $X^T X$ 的求逆问题．

在观测结果服从正态分布的假设下，用上述构造经验回归方法得到的 β 和 σ^2 的估计量，与最大似然估计量相同．不过，在偏离正态性的情形下，只要样本容量充分大，用最小二乘法得到的估计量在某种意义下仍然是最优的．

在这样的矩阵形式下，一般线性回归模型（$*$）可以简单地推广到被观测量 y_i 是随机向量的情形．在此情形下不产生任何新的统计问题（见**回归矩阵**（regression matrix））．

回归分析的问题不局限于求一般线性模型（*）中参数 β 和 σ^2 的点估计．在观测向量 y 服从正态分布的条件下，可以很有效地解决所建经验关系的精确性问题．假如向量 y 服从正态分布，则由于估计量 $\hat{\beta}$ 是 y 的线性函数，可见变量 $\hat{\beta}_i$ 服从正态分布，均值为 β_i 而方差为 $\mathrm{D}\hat{\beta}_i=\sigma^2 b_{ii}$，其中 b_{ii} 是矩阵 $(X^TX)^{-1}$ 主对角线元素．此外，σ^2 的估计量 s^2 的分布与 $\hat{\beta}$ 的各分量无关，且变量 $(n-k)s^2/\sigma^2$ 服从自由度为 $n-k$ 的 χ^2 **分布**（'chi-squared' distribution）．由此可见，统计量

$$t=\frac{(\hat{\beta}_i-\beta_i)}{[s^2 b_{ii}]^{1/2}}$$

服从自由度为 $n-k$ 的 **Student 分布**（Student distribution）．这一事实可以用来建立参数 β_i 的置信区间，以及检验关于参数 β_i 取值的假设．此外，在所有回归变量取固定值的情形下，可以建立 $\mathrm{E}(Y|x_1,\cdots,x_k)$ 的置信区间，以及建立含 y 的下一个即第 $n+1$ 个值的置信区间（称之为预测区间）．最后，可以基于样本回归系数 $\hat{\beta}$，建立向量 β 或任意一组回归系数的置信椭球，以及建立整条回归曲线（或直线）的置信区域．

在物理学、生物学、经济学、技术和其他各种不同领域中，回归分析是处理试验数据的最常用方法之一．像**方差分析**（dispersion analysis）和**试验设计**（design of experiments）这样一些数理统计的分支都以回归分析模型为基础，而且这些模型广泛应用于**多维统计分析**（multi-dimensional statistical analysis）．

参考文献

[1] Kendall, M. G, and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2. Inference and relationship, Griffin, 1979

[2] Смирнов, Н. В., Дунин-Барковский, И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

[3] Айвазян, С. А., Статистическое исследование зависимостей, М., 1968.

[4] Rao, C. R., Linear statistical inference and its applications, Wiley, 1965（中译本：C. R. 劳，线性统计推断及其应用，科学出版社，1985）.

[5] Draper, N. R. and Smith, H., Applied regression analysis, Wiley, 1981（中译本：王学仁，温忠粦编译，应用回归分析，重庆大学出版社，1991）.

А. В. Прохоров 撰

【补注】 鉴于现代计算技术的应用，现代研究工作针对回归分析的传统假设不成立的情形，改进回归分析方法．例如，只基于平滑性假设，利用由**密度估计**（density estimation）的自适应方法，来估计函数 $\mathrm{E}(Y|X=x)$；或者在线性模型中，由对回归线的绝对偏差之和（而不是其平方和）的最小化，来获取**稳健估计**（robust estimators）（见**稳健统计**（robust statistics））．

参考文献

[A1] Härdle, W., Applied nonparametric regression, Cambridge Univ. Press, 1990.

周概容 译

回归系数 [regression coefficient; регрессии коэффициент]

回归（regression）方程中自变量的系数．例如，在联系随机变量 Y 与 X 的线性回归方程 $\mathrm{E}(Y|X=x)=\beta_0+\beta_1 x$ 中，回归系数 β_0 和 β_1 为

$$\beta_0=m_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1,\ \beta_1=\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

其中 ρ 是 X 和 Y 的**相关系数**（correlation coefficient），$m_1=\mathrm{E}X$，$m_2=\mathrm{E}Y$，$\sigma_1^2=\mathrm{D}X$，$\sigma_2^2=\mathrm{D}Y$．计算回归系数的估计量（样本回归系数（sample regression coefficient））是**回归分析**（regression analysis）的基本问题．

А. В. Прохоров 撰 周概容 译

回归矩阵 [regression matrix; регрессии матрица]

多维线性回归（regression）模型

$$X=BZ+\varepsilon \qquad (*)$$

中，**回归系数**（regression coefficient）β_{ji}，$(j=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,r)$ 的矩阵 B．模型（*）中，X 是元素为 $X_{jk}(j=1,\cdots,m;\ k=1,\cdots,n)$ 的矩阵，其中 $X_{jk}(k=1,\cdots,n)$ 是对原 m 维随机变量的第 j 分量的观测值；Z 是已知回归变量 $z_{ik}(i=1,\cdots,r;\ k=1,\cdots,n)$ 的矩阵；ε 是误差 $\varepsilon_{jk}(\mathrm{E}\varepsilon_{jk}=0;\ j=1,\cdots,m;\ k=1,\cdots,n)$ 的矩阵．回归矩阵 B 的元素 β_{ji} 是未知的和待估计的．模型（*）是**回归分析**（regression analysis）的**一般线性模型**（general linear model）推广到 m 维的情形．

参考文献

[1] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 3. Design and analysis, and time series, Griffin, 1983.

А. В. Прохоров 撰

【补注】 例如，在经济计量学中常使用如下模型：m 个变量 $y_1,\cdots,y_m$ 是被解释变量（**内生变量**（endogenous variables）），通过 n 个解释变量（**外生变量**（exogenous variables）），表示为线性关系 $y=Ax$．给出 N 对（含误差的）测量结果 (y_t,x_t)，需要估计系数矩阵 A．模型为

$$y_t=Ax_t+\varepsilon_t.$$

在 ε_t 的均值为 0，相互独立且服从同一正态分布（normal distribution）的条件下，称为**标准线性多重回归模型**（standard linear multiple regression model），简称为**线性模型**（linear model）或**标准线性模型**（standard linear model）．由最小二乘法得最优估计为：

$$\hat{A}=M_{yx}M_{xx}^{-1},$$

其中 $M_{xx}=N^{-1}(\sum_{t=1}^{N}x_t x_t^T)$, $M_{yx}=N^{-1}(\sum_{t=1}^{N}y_t x_t^T)$. 在只有一个内生变量的情形下, $y=a^T x$, 该估计宜表示为

$$\hat{a}=(X^T X)^{-1}X^T Y,$$

其中 Y 是观测列向量 $(y_1,\cdots,y_N)^T$, X 是 n 维行向量 $x_t^T(t=1,\cdots,N)$ 构成的 $(N\times n)$ 观测矩阵. 在[A1], [A2]中研究了许多类型和推广. 亦见**回归分析**(regression analysis).

参考文献

[A1] Mulinvaud, E., Statistical methods of econometrics, North-Holland, 1970.

[A2] Theil, H., Principles of econometrics, North-Holland, 1971.

周概容 译

回归谱 [regression spectrum; регрессии спектр]

平稳时间序列的回归概形中随机过程的谱. 具体地说, 设在 $t=1,\cdots,n$ 时被观测的**随机过程**(stochastic process)表示为

$$y_t=m_t+x_t, \tag{1}$$

其中 x_t 是**平稳随机过程**(stationary stochastic process), $\mathsf{E}x_t\equiv 0$, 而均值 $\mathsf{E}y_t=m_t$ 表示为线性回归(regression)

$$m_t=\sum_{k=1}^{s}\beta_k\varphi_t^{(k)}, \tag{2}$$

其中 $\varphi^{(k)}=(\varphi_1^{(k)},\cdots,\varphi_n^{(k)})(k=1,\cdots,s)$ 是已知回归向量, 而 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是未知**回归系数**(regression coefficient). 设 $M(\lambda)$ 是回归向量 $\varphi^{(1)},\cdots,\varphi^{(s)}$ 的谱分布函数(见**平稳随机过程的谱分析**(spectral analysis of a stationary stochastic process)). $M(\lambda)$ 的回归谱(regression spectrum)指满足下列条件的一切 λ 的集合: 对于任意含 λ 的区间 (λ_1,λ_2), 即对于任意 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_1<\lambda<\lambda_2)$, 有 $M(\lambda_2)-M(\lambda_1)>0$.

回归谱在概形(1)-(2)的回归系数的估计问题中起重要作用. 例如, β 的最小二乘估计量渐近有效性的充分必要条件, 通过回归谱的元素来表述.

参考文献

[1] Grenander, U. and Rosenblatt, M., Statistical analysis of stationary time series, Wiley, 1957.

А. В. Прохоров 撰 周概容 译

回归曲面 [regression surface; регрессии поверхность], 回归超曲面(regression hypersurface)

回归(regression)方程的一般几何表现. 对于随机变量 $X_1,\cdots,X_n$, 设

$$f(x_2,\cdots,x_n)=\mathsf{E}(X_1\mid X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)$$

是 X_1 对 $X_2,\cdots,X_n$ 的回归, 则方程 $y=f(x_2,\cdots,x_n)$ 在 n 维空间中描绘相应的回归超曲面. 当 $n=2$ 时, 回归超曲面自然称做回归曲线(regression curve). 这些术语有时用来强调相应的回归方程是非线性的. 在线性情形下, 回归超曲面和回归曲线分别称为回归平面(regression plane)和回归直线(regression line). 见回归(regression).

А. В. Прохоров 撰 周概容 译

正则自同构 [regular automorphism; регулярный автоморфизм]

群(group) G 的**自同构**(automorphism) φ, 它对 G 的每个非单位元 g 满足 $g\varphi\neq g$ (即群的每个非单位元在一正则自同构下的象不同于该元素). 若 φ 为有限群 G 的一个正则自同构, 则对能整除 G 的阶的每个素数 p, φ 保持 G 中刚好一个 Sylow p 子群 S_p 不动(即 φ 把它映到自身), 而 G 的每个在 φ 下不动的 p 子群包含在 S_p 内. 有素数阶正则自同构的有限群是**幂零群**(nilpotent group)([2]). 但存在可解的(见**可解群**(solvable group))非幂零群, 它有合数阶的正则自同构.

参考文献

[1] Gorenstein, D., Finite groups, Chelsea, reprint, 1980.

[2] Thompson, J. G., Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **45**(1959), 578-581.

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】 正则自同构亦称无不动点自同构(fixed-point-free automorphism).

李慧陵 译

正则边界点 [regular boundary point; регулярная граничная точка]

Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中区域 D 的边界 Γ 上的一点 y_0, 使得对 Γ 上任意连续函数 $f(z)$, 在 Wiener-Perron 意义下(见 **Perron 法**(Perron method))的 **Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)的广义解 $u(x)$ 于该点取边界值 $f(y_0)$, 即

$$\lim_{\substack{x\to y_0\\ x\in D}}u(x)=f(y_0).$$

D 的正则边界点组成一个集合 R, 其余集 $D^c=\mathbf{R}^n\setminus D$ 不是**薄集**(thin set); **非正则边界点**(irregular boundary point)全体构成的集合 $\Gamma\setminus R$ 是 F_σ 型的**极集**(polar set). 若 Γ 的所有点都是正则边界点, 那么称区域 D 关于 Dirichlet 问题是正则的(regular).

$y_0\in\Gamma$ 为正则边界点的必要与充分条件是, 在 D 与 y_0 的任意邻域 U 的交集 $U_0=U\cap D$ 里存在上调和的**闸函数**(barrier)(在 U_0 里的一个函数 $\omega(x)>0$ 使得 $\lim_{x\to y_0}\omega(x)=0$, 这是闸函数的 Lebesgue 判别准则(Lebesgue criterion for a barrier)). H. Lebesgue

在 1912 年首先证明，当 $n \geq 3$ 时，对于位于 D^c 中的一个充分尖的角，其顶点未必是正则边界点．

令

$$E_k = \{x \in D^c : 2^{-k} \leq |x - y_0| \leq 2^{-k+1}\},$$

又设 $c_k = C(E_k)$ 为集合 E_k 的容量（capacity）．那么 $y_0 \in \Gamma$ 为正则边界点，当且仅当级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(n-2)} c_k, \ n \geq 3,$$

发散；或者，当 $n = 2$ 时，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k c_k$$

发散，其中

$$E_k = \{x \in D^c : 2^k \leq \ln \frac{1}{|x - y_0|} \leq 2^{k+1}\}$$

（Wiener 准则（Wiener criterion））．

当 $n = 2$ 时，点 $y_0 \in \Gamma$ 是正则边界点，如果存在连续路径 $x(t)$; $0 \leq t \leq 1$，使得 $x(1) = y_0$ 且 $x(t) \in D^c$, $0 \leq t < 1$．当 $n \geq 3$ 时，$y_0 \in \Gamma$ 是正则边界点，如果在 y_0 的一个充分小的邻域里，y_0 可以成为落在 D^c 的一个正圆锥的顶点．在紧化空间 $\overline{\mathbf{R}}^n (n \geq 3)$ 的区域 D 的情况，无穷远点 $\infty \in \Gamma$ 总是正则边界点；当 $n = 2$ 时，无穷远点 $\infty \in \Gamma$ 是正则边界点，如果存在连续路径 $x(t)$ $(0 \leq t < 1)$ 使得 $x(t) \in D^c$, $0 \leq t < 1$ 且 $\lim_{t \uparrow 1} x(t) = \infty$．

参考文献

[1] Келдыш, М. В., 《Успехи матем. наук》, 8 (1941), 171 – 232.

[2] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966（英译本：Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972）.

[3] Hayman, W. K. and Kennedy, P., Subharmonic function, Acad. Press, 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 非正则边界点集的极性见诸于 **Kellogg-Evans 定理**（Kellogg-Evans theorem）．关于抽象位势论中的非正则边界点，例如见[A1]．

参考文献

[A1] Bliedtner, J. and Hansen, W., Potential theory. An analytic and probabilistic approach to balayage, Springer, 1986（中译本：J. 波里特诺，W. 汉森，位势理论——扫除的分析与概率方法，厦门大学出版社，1994）.

[A2] Lebesgue, H., Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire, *C. R. Séances Soc. Math. France*, 41 (1913), 17.

[A3] Lebesgue, H., Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 178 (1924), 349 – 354.

[A4] Wiener, N., The Dirichlet problem, *J. Math. Phys.*, 3 (1924), 127 – 146.

[A5] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A6] Wermer, J., Potential theory, Lecture notes in math., 408, Springer, 1981.

高琪仁 吴炯圻 译

正则元[**regular element**; **регулярный элемент**]，半群的

一个元素 a，有给定半群的某元素 x 使得 $a = axa$；若附加地还有 $ax = xa$（对同一个 x），则 a 称为完全正则的（complete regular）．设 a 是半群 S 的正则元，则 S 中由 a 生成的主右（左）理想可由某幂等元生成；反之，这些对称的性质的每一个都蕴涵 a 的正则性．若 $aba = a$ 及 $bab = b$，则元素 a 及 b 称为互逆的（mutually inverse）（亦称为广义逆的（generalized inverse）或正则共轭的（regular conjugate））．每个正则元皆有逆于它的元素；一般说来，它不是唯一的（见**逆半群**（inversion semi-group））．任意两个元素皆互逆的半群实际上是矩形半群（见**幂等元的半群**（idempotents, semi-group of））．每个完全正则元皆有一个与它交换的元素逆于它．一个元素是完全正则的，当且仅当它属于半群的某个子群（见 **Clifford 半群**（Clifford semi-group））．对正则 $\mathscr{D}$ 类，见 **Green 等价关系**（Green equivalence relations）．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1 – 2, Amer. Math. Soc., 1961 – 1967.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960.

Л. Н. Шеврин 撰

【补注】 完全由正则元组成的半群称为**正则半群**（regular semi-group）．

石生明 译 王杰 校

正则事件[**regular event**; **регулярное событие**]

一个能用被称为正则表达式（regular expressions）的特殊形式的表达式定义的有限字母表上的字的集合．设 A 为一有限字母表并且设 $\cup, \circ, *$ 是分别称为并（union），毗联（concatenation）和迭代（iteration）的运算符号．在一字母表 A 上的正则表达式（regular expressions）的归纳定义如下：1）每一个 A 的字母是正则表达式；2）如果，R_1，R_2 和 R 是正则表达式，则 $(R_1 \cup R_2)$，$(R_1 \circ R_2)$ 和 R^* 也是．正则表达式的语言的解释如下．

设 A^* 是字母表 A 上所有字的集合，并且设 $\mathfrak{A}_1 \subseteq A^*$，$\mathfrak{A}_2 \subseteq A^*$．$A$ 中的任何字母符号被看作由一个字母组成的集合，而 $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ 被看作是通常集合论中

的并．集合 $\mathfrak{A}_1\circ\mathfrak{A}_2$ 由所有可表成 $\alpha_1\alpha_2$ 形式的字组成，此处，$\alpha_1\in\mathfrak{A}_1$，$\alpha_2\in\mathfrak{A}_2$；如果 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$ 中都包含空字 Λ，则 $\Lambda\alpha_2=\alpha_2$，$\alpha_1\Lambda=\alpha_1$ 且 $\Lambda\Lambda=\Lambda$. 设 $\mathfrak{A}\subseteq A^*$，且对于任何 $n\geq 2$，有 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\circ\cdots\circ\mathfrak{A}$（$n$ 次）．此时，$\mathfrak{A}^*$ 就是 $\mathfrak{A}\cup\mathfrak{A}^2\cup\mathfrak{A}^3\cup\cdots$，即 $\alpha\in\mathfrak{A}^*$，当且仅当存在一个 $m\geq 1$ 使得 α 可表示成 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ 的形式，此处对所有 $i=1,\cdots,m$，$\alpha_i\in\mathfrak{A}^*$. 因此一有限字母表上的字的集合是正则事件（regular event），当且仅当它能由单字母集用有限次的并、毗联和迭代运算得到．正则事件也能用其他保持正则性的运算（例如，交，补等）定义，也可通过给出在半 Thue 系统（见 **Thue 系统**（Thue system））类型的形式系统中可推导出的字的集合、文法等来定义．

正则事件的概念是在研究被看作接受器的**有限自动机**（automaton, finite）的行为时引入的．有限自动机理论中有下面一个基本的结果：一个事件可以用一个自动机表示，当且仅当它是正则的．由此在自动机理论中引起两个问题：分析的问题（problem of analysis），即给定的一个表示某个事件的自动机，构造定义该事件的正则表达式；综合的问题（problem of synthesis），即给定某个正则表达式，构造一个表示相应事件的自动机．

一个事件的有限字母表 A 上的字的集合和该集上的运算一起形成某种事件代数（algebra of events）．其中最重要的是具有能使所有正则事件可从单字母集得到的运算的正则事件代数．最有意义的是正则事件代数的有限可公理化性问题，也就是在这样的恒等式的有限完全系统的代数中的存在性问题．在最一般的形式化中，虽然在一些正则事件代数的子代数中恒等式的有限完全集存在，对此问题的回答还是否定的．

亦见**自动机**（automaton）；**自动机的描述方法**（automata, methods of specification of）；**综合问题**（synthesis problems）．

参考文献

[1] Кудрявцев, В. Б., Алешин, С. В., Подколзин, А. С., Элементы теории автоматов, М., 1978.

[2] Саломаа, А., 《Проблемы кибернетики》, 17 (1966), 237 – 249.

[3] Янов, Ю. И., 《Проблемы кибернетики》, 12 (1964), 253 – 258; 17 (1966), 255 – 258.

[4] Ушчумлич, Ш., 《Докл. АН СССР》, 247 (1979), 3, 561 – 565.

В. А. Буевич 撰

【补注】 正则事件也被称为可认识集（recognizable sets）（见 [A3]）．

参考文献

[A1] Salomaa, A., Theory of automata, Pergamon Press, 1969.

[A2] Conway, J. H., Regular algebra and finite machines, Chapman & Hall, 1971.

[A3] Eilenberg, S., Automata, languages and machines. A. Acad. Press, 1974.

[A4] Robin, M. O. and Scott, O., Finite automata and their decision problems, *IBM J. Res. Devel.*, 3 (1959), 114 – 125.

丁德成 译

正则极值曲线 [**regular extremal**; **регулярная экстремаль**]，非奇异极值曲线（non-singular extremal）

一条**极值曲线**（extremal）$y(x)$，在其所有的点上以下条件成立：

$$F_{y'y'}(x,\ y(x),\ y'(x))\neq 0, \qquad (1)$$

这里 $F(x,y,y')$ 是出现在被极小化的泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ y,\ y')\,dx$$

中的被积函数．像任一极值曲线一样，正则极值曲线按定义是 **Euler 方程**（Euler equation）

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

的一个光滑解．在极值曲线上使得（1）成立的点称为正则点（regular points）．已知在每一个正则点上，极值曲线 $y(x)$ 有连续的二阶导数 $y''(x)$．在正则极值曲线上，二阶导数是连续的．对正则极值曲线，Euler 方程

$$F_y-F_{y'x}-F_{y'y}y'-F_{y'y'}y''=0$$

可写成以下形式（即对最高阶导数解出）：

$$y''=f(x,\ y,\ y').$$

正则性质（1）直接与必要的 **Legendre 条件**（Legendre condition）（按强形式）相联系，按此条件在该极值曲线的所有点上以下不等式成立：

$$F_{y'y'}(x,\ y(x),\ y'(x))<0.$$

当证明极值曲线 $y(x)$ 可包含在围绕它的一个极值曲线场中时，实质上用到了正则性．如果条件（1）即使在一个点上受违背，则该极值曲线不总是被包含在一个场中．包含极值曲线于一个场中的这个条件是成为极值曲线的充分条件之一．

正则极值曲线的以上定义是对变分法最简单问题给出的，它涉及依赖于一个未知函数的泛函．对依赖于 n 个未知函数的泛函，

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n,\ y_1',\ \cdots,\ y_n')\,dx,$$

正则极值曲线是在其每一点 n 阶行列式

$$|F_{y'y'}| \neq 0 \qquad (2)$$

的一条极值曲线.

关于条件极值的变分法的某些一般问题(见 **Bolza 问题**(Bolza problem))中, 正则极值曲线以类似方式定义, 除了在(2)中必须用 **Lagrange 函数**(Lagrange function) L 代替 F.

使得正则条件((1)或(2))在其某段的每一点上被违背的一条极值曲线称为奇异极值曲线(singular extremal), 且该段称为奇异模态的段(section of singular regime). 对奇异模态有一些必要条件, 补充熟知的经典极值必要条件(见**最优奇异模态**(optimal singular regime)).

参考文献

[1] Bliss, G. A., Lectures on the calculus of variations, Chicago Univ. Press, 1947.

[2] Лаврентьев, М. А., Люстерник, Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: М. А. 拉弗林契叶夫, Л. А. 留斯切尔涅克, 变分学教程, 高等教育出版社, 1955).

И. Б. Вапнярский 撰

【补注】 区域 D 中一族曲线称为曲线场(field of curves), 如果对 D 的每一点, 恰好存在该族中一条曲线通过此点. 关于变分法中的场论(field theory in the calculus of variations)和极值曲线场(fields of extremals)的作用的描述见[A2]和**极值曲线场**(extremal field).

参考文献

[A1] Cesari, L., Optimization-theory and applications. Problems with ordinary differential equations, Springer, 1983.

[A2] Petrov, Yu. P., Variational methods in optimum control theory, Acad. Press, 1968, Chapt. IV (译自俄文).

葛显良 译 吴绍平 校

正则函数[regular function; регулярная функция], 区域内的

复变量 z 的函数 $f(z)$, 它在该区域内单值并且在每一点具有有限导数(见**解析函数**(analytic function)). 在点 a 的正则函数是指在点 a 的某个邻域内正则的函数.

Ю. Д. Максимов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Springer, G. Introduction to Riemann surfaces, Addison Wesley, 1957, p. 60; 169; 173.

杨维奇 译

正则理想[regular ideal; регулярный идеал]

同模理想(modular ideal).

正则格[regular lattice; регулярная решетка]

一种条件完全格(conditionally-complete lattice), 其中以下条件(也称为正则性公理(axiom of regularity))成立: 对任何满足条件

$$\sup E_n \xrightarrow{(o)} a, \ \inf E_n \xrightarrow{(o)} b$$

的有界集的序列 $\{E_n\}$, 存在具有同样性质的有限子集 $E_n' \subset E_n$ (其中 $\xrightarrow{(o)}$ 表示按序收敛, 亦见 **Riesz 空间**(Riesz space)). 这样的格在泛函分析和在测度论中最常见(例如, 正则 K 空间和 Boole 代数). 它们在扩张同态和正线性泛函的问题中自然地出现. 在一个正则格中以下两原理成立: a) 对角线原理(如果 $x_{nm} \xrightarrow{(o)} x_n$ 且 $x_n \xrightarrow{(o)} x$, 则对指标的某序列 m_n, $x_{nm_n} \xrightarrow{(o)} x$); 和 b) 型的可数性原理(每一有界无限集包含一个具有同样界的可数子集). 反之, a) 和 b) 一起蕴涵正则性公理. 正则格的例子有: 任何 KB 空间, 特别是任何的 L_p, $1 \leq p < +\infty$; 在一个具有有限可数加性测度的任意空间中模零测集的可测集的 Boole 代数. 正则 Boole 代数的其他例子基于 **Суслин 假设**(Suslin hypothesis)的否定上.

参考文献

[1] Канторович, Л. В., Вулих, Б. З., Пинскер, А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.-Л., 1950 (中译本: Л. В. 康托洛维奇等, 半序空间泛函分析, 上、下册, 高等教育出版社, 1960).

Д. А. Владимиров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., Theory of Riesz spaces, 1, North-Holland, 1972.

葛显良 译 吴绍平 校

正则线性系统[regular linear system; правильная линейная система], 常微分方程的

形式为

$$\dot{x} = A(t)x, \ x \in \mathbf{R}^n \qquad (1)$$

的一个系统(其中 $A(\cdot)$ 是在每个区间上可和的映射 $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$), 且具有以下性质:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{Tr}\, A(\tau)\, d\tau$$

存在, 且等于 $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$, 其中 $\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ 是系统(1)的 **Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponents).

为使三角形系统

$$\dot{u}^i = \sum_{j=i}^n p_{ij}(t) u^j, \ i = 1, \cdots, n$$

是正则的，必要充分条件是极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)d\tau,\ i=1,\cdots,n$$

存在（Ляпунов 准则（Lyapunov criterion））．每个可约线性系统（reducible linear system）和殆可约线性系统（almost-reducible linear system）都是正则的．

下述 Ляпунов 定理（Lyapunov theorem）说明了正则线性系统这一概念的作用．设系统（1）是正则的，它的 k 个 Ляпунов 特征指数是负的：

$$0>\bar{\lambda}_{n-k+1}(A)\geqslant\cdots\geqslant\bar{\lambda}_n(A).$$

这时，对于每个系统

$$\dot{x}=A(t)x+g(t,x),\qquad(2)$$

如果 $g(t,x)$ 满足条件：g 和 g_x' 是连续的，$g(t,0)=0$，$\sup_{t\geqslant0}\|g_x'(t,x)\|=O(|x|^\varepsilon)$，其中 $\varepsilon=$ 常数 >0，则存在包含点 $x=0$ 的 k 维流形 $V^k\subset\mathbf{R}^n$，使得系统（2）的在 V^k 上出发的每个解 $x(t)$（即 $x(0)\in V^k$）当 $t\to\infty$ 时按指数方式减小；更确切地说，对每个 $\delta>0$，存在一个 C_δ，使得不等式

$$|x(t)|\leqslant C_\delta e^{[\bar{\lambda}_{n-k+1}(A)+\delta]t}|x(0)|$$

成立．

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, Хар., 1892（英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966）.

[2] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966.

[3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 71－146.

В. М. Миллионщиков 撰　杜小杨 译

正则测度［regular measure; регулярная мера］

定义在拓扑空间 T 中 Borel σ 代数 $\mathfrak{B}(T)$ 上的一种测度（measure），它对任一 Borel 集 $X\in\mathfrak{B}(T)$ 和任意的 $\varepsilon>0$，存在包含 X 的开集 $G\subset T$，使得 $\mu(G\setminus X)<\varepsilon$．一个等价的定义是：对任一 $X\in\mathfrak{B}(T)$ 和任意的 $\varepsilon>0$，存在闭集 $F\subset X$，使得 $\mu(X\setminus F)<\varepsilon$．

П. А. Минлос 撰

【补注】 亦见正则集函数（regular set function）．

这一正则测度的概念不应与正则外测度（regular outer measure）概念混淆，后者是一个外测度（outer measure）μ^*（亦见测度（measure）），它是对任一 $A\subset\Omega$，存在可测集 $E\supseteq A$，使得 $\mu(E)=\mu^*(A)$．

参考文献

[A1] Munroe, M. E., Introduction to measure and integration, Addison-Wesley, 1953, 111.

周民强 译

正则 p 群［regular p-group; регулярная p-группа］

一个 p 群（p-group）G，对任何 $a,b\in G$ 及任何整数 $n=p^\alpha$ 有下列等式成立：

$$(ab)^n=a^nb^ns_1^n\cdots s_t^n,$$

其中 $s_1,\cdots,s_t$ 是由 a,b 生成的子群的换位子群（commutator subgroup）中的元素．正则 p 群的子群和商群仍是正则的．有限 p 群 G 是正则的，当且仅当对所有 $a,b\in G$ 有

$$a^pb^p=(ab)^ps^p,$$

其中 s 是 a,b 生成的子群的换位子群中的元素．

在正则 p 群 G 中，形如 a^{p^α}（$a\in G$）的元素形成特征子群（characteristic subgroup）$C^\alpha(G)$，而阶至多为 p^α 的元素形成全特征子群（fully-characteristic subgroup）$C_\alpha(G)$．

正则 p 群的例子有幂零类至多为 $p-1$ 的 p 群和阶至多为 p^p 的 p 群．对任何 p，存在 p^{p+1} 阶的非正则 p 群 S_p，它是 p^2 次对称群 $S(p^2)$ 的 Sylow p 子群（它同构于 p 阶循环群和自身的圈积（wreath product））．

参考文献

[1] Hall, M., The theory of groups, Macmillan, 1959（中译本：M．赫尔，群论，科学出版社，1981）.

Н. Н. Вильямс 撰　石生明 译　王　杰 校

正多边形［regular polygons; правильные многоугольники］

所有的角都相等、所有的边都相等的多边形．详见多边形（polygon）．

【补注】 换句话说，正多面形是这样的多边形：它的所有顶点都在一个圆上，所有的边都与另一个圆相切，而这两个圆是同心圆．如果正多边形是凸的，且具有 n 个顶点，则称为 n 边形（n-gon），记为 $\{n\}$．如果它是非凸的，且它的边绕过中心 d 次，则称为密度为 d 的星形多边形（star polygon）或星形 n 边形（star n-gon），记为 $\{n/d\}$．例如，五角星形（pentagram）是 $\{5/2\}$．

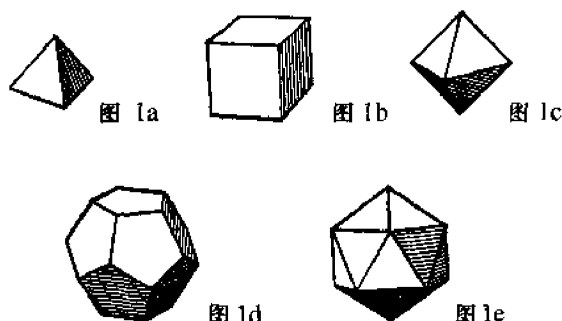
参考文献

[1] Coxeter, H. S. M., Regular complex polytopes, Cambridge Univ. Press, 1990.

杜小杨 译

正多面体［regular polyhedra; правильные многогранники］，Plato 立体（Platonic solids）

满足下述条件的凸多面体：所有的面都是全等的正多边形，所有顶点上的多面角都是正的、相等的（图 1a－1e）


图 1a　图 1b　图 1c　图 1d　图 1e

在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中，存在五种正多面体，有关资料在表 1 中给出，其中 Schläfli 符号（Schläfli symbol）$\{p, q\}$ 表示具有 p 边形的面、q 面角的正多面体（见**多面体群**（polyhedron group））.

表 1. $\mathbf{R}^3$ 中的正凸多面体

	图号	Schläfli 符号	顶点数	棱　数	面　数
四　面　体	1a	{3, 3}	4	6	4
立方体(六面体)	1b	{4, 3}	8	12	6
八　面　体	1c	{3, 4}	6	12	8
十二面体	1d	{5, 3}	20	30	12
二十面体	1e	{3, 5}	12	30	20

对偶多面体（dual polyhedra）或互易多面体（reciprocal polyhedra）$\{p, q\}$ 和 $\{q, p\}$，定义为这样一对多面体，它们在关于任何同心球的互易变换下相互变换．四面体和四面体是对偶的，六面体和八面体是对偶的，十二面体和二十面体是对偶的．

高于三维的空间中的多面体称为多胞形（polytopes）.

在 $\mathbf{R}^4$ 中存在六种正多胞形，有关资料在表 2 中给出．

表 2. $\mathbf{R}^4$ 中的正多胞形

	Schläfli 符号	顶点数	棱　数	二维面数	三维面数
单　形	{3, 3, 3}	5	10	10	5
4 维立方体	{4, 3, 3}	16	32	24	8
16 胞腔	{3, 3, 4}	8	24	32	16
24 胞腔	{3, 4, 3}	24	96	96	24
120 胞腔	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
600 胞腔	{3, 3, 5}	120	720	1200	600

在 $\mathbf{R}^n (n > 4)$ 中存在三种正多胞形：四面体、立方体和八面体的推广；它们的 Schläfli 符号是 $\{3, \cdots, 3\}$，$\{4, 3, \cdots, 3\}$ 和 $\{3, \cdots, 3, 4\}$.

在 $\mathbf{R}^3$ 中，如果允许自相交，则还有四种正多面体，即 Kepler－Poinsot 立体（Kepler－Poinsot solids）或正星形多面体（regular star polyhedra）．在这些多面体中，或者面彼此相交，或者面本身是自相交多边形（图 2a－2d）．有关这些立体的资料列于表 3．

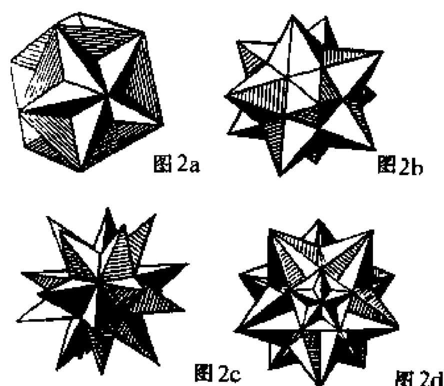

图 2a　图 2b　图 2c　图 2d

表 3. $\mathbf{R}^3$ 中的正星形多面体

	图　号	顶点数	棱　数	面　数
大十二面体	2a	12	30	12
小星形十二面体	2b	12	30	12
大星形十二面体	2c	20	30	12
大二十面体	2d	12	30	20

参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 — Геометрия, М., 1965.

[2] Люстерник, Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956.

[3] Шклярский, Д. О., Ченцов, Н. Н., Яглом, И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, М., 1954（英译本：Shklyarskiĭ, D. O., Chentsov, N. N. and Yaglom, I. M., The USSR Olympiad book: selected problems and theorems of elementary mathematics, Freeman, 1962）.

[4] Coxeter, H. S. M., Regular complex polytopes, Cambridge Univ. Press, 1990.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 在四种 Kepler－Poinsot 立体中至少有两种在 Kepler 和 Poinsot 时代以前很久就已被发现（见[A2]，[A3]）.

参考文献

[A1] Grünbaum, B., Regular polyhedra — old and new, *Aequat. Math.*, 16 (1970), 1－20.

[A2] Senechal, M. and Flede, G. (eds.), Shaping space, Birkhäuser, 1988.

[A3] Saffaro, L., Dai cinqui poliedri platonici all'infinito, *Encicl. Sci. e Tecn. Mondadori*, 76 (1976), 474 – 484.

[A4] Fejes Toth, L., Regular figurs, Pergamon, 1964 (译自德文).

杜小杨 张鸿林 译

正则素数 [**regular prime number; регулярное простое число**]

使分圆域 (cyclotomic field) $\mathbf{R}(e^{2\pi i/p})$ 的理想类数 (见**类域论** (class field theory)) 不能被 p 整除的奇素数 p. 所有其他的奇素数称为非正则的 (irregular) (见**非正则素数** (irregular prime number)).

О. А. Иванова 撰

【补注】 正则素数的另一个等价但更为具体的定义如下: 可把 **Bernoulli 数** (Bernoulli numbers) $B_1, \cdots, B_{(p-3)/2}$ (它们是有理数) 写成既约分数, 如果素数 p 不能整除它们的任何一个分子, 那么它称做正则的 (见[A1]).

由于与 Fermat 大定理的联系, 正则素数是重要的. 已知如果 p 是正则素数, 那么 $x^p + y^p = z^p$ 没有正整数解 x, y, z (Kummer 定理 (Kummer theorem)). 还不知道是否存在无穷多个正则素数. 而非正则素数的个数, 已经知道是无穷的. 对于更多的信息, 见 **Fermat 大定理** (Fermat great theorem).

参考文献

[A1] Shanks, D., Solved and unsolved problems in number theory, Chelsea, 1978.

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

正则表示 [**regular representation; регулярное представление**]

1) 代数 A 的 (左) 正则表示 ((left) **regular** representation of an algebra) 是 A 在向量空间 $E = A$ 上的**线性表示** (linear representation) L, 其定义公式为 $L(a)b = ab$, 对所有 $a, b \in A$. 类似地, 公式 $R(a)b = ba$, $a, b \in A$, 定义了 A 的 (反) 表示, 其空间仍是 $E = A$, 称为 A 的 (右) 正则表示. 若 A 是拓扑代数 (乘法对所有变量是连续的), 则 L 和 R 也是连续表示. 若 A 是有单位元的代数或半单代数, 则其正则表示是忠实的 (见**忠实表示** (faithful representation)).

2) 群 G 的 (右) 正则表示 ((right) regular representation of a group) 是 G 的线性表示 R, 作用空间是 G 上一些复值函数的空间 E, 定义公式为

$$(R(g)f)(g_1) = f(g_1 g),\ g, g_1 \in G,\ f \in E,$$

这里要求 E 能分离 G 的点, 并且对所有的 $f \in E$ 及 $g \in G$, 函数 $g_1 \mapsto f(g_1 g)$, $g_1 \in G$, 仍属于 E. 类似地, 由公式

$$(L(g)f)(g_1) = f(g^{-1} g_1),\ g, g_1 \in G,\ f \in E,$$

定义了 G 在 E 上的 (左) 正则表示. 这里需假定对所有 $f \in E$ 及 $g \in G$, 函数 $g_1 \mapsto f(g^{-1}g_1)$ $(g_1 \in G)$ 仍属于 E. 若 G 是拓扑群, 通常要求 E 是 G 上连续函数的空间. 若 G 是局部紧的, 则 G 的 (右) 正则表示是指 G 在空间 $L_2(G)$ 上的 (右) 正则表示, 它是藉助于 G 上右不变 **Haar 测度** (Haar measure) 所构造的; 局部紧群的正则表示是连续**酉表示** (unitary representation), 且左及右正则表示是酉等价的.

А. И. Штерн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Methods of representation theory. 1 – 2, Wiley (Interscience), 1981 – 1987.

石生明 译 王 杰 校

正则环 (交换代数中的) [**regular ring (in commutative algebra); регулярное кольцо**]

一个 **Noether 环** (Noetherian ring) A, 其局部化 (见**交换代数中的局部化** (localization in a commutative algebra)) $A_\mathfrak{p}$ 都是正则的 (此处 $\mathfrak{p}$ 是 A 中的素理想). 一个具有极大理想 $\mathfrak{m}$ 的局部 Noether 环 (见**局部环** (local ring)) 称作正则的 (regular), 如果 $\mathfrak{m}$ 被 n 个元素生成, 其中 $n = \dim A$, 即如果切空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (作为剩余域 k 上的向量空间) 维数等于 $\dim A$, 这等价于在**概形** (scheme) Spec A 中没有奇异性. 正则局部环总是整的和正规的, 也是唯一分解的 (见**唯一分解环** (factorial ring); Auslander-Buchsbaum 定理 (Auslander-Buchsbaum theorem)), 且它的深度等于 $\dim A$ (见**模的深度** (depth of a module)). 其相伴分次环

$$G_\mathfrak{m}(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1}$$

同构于多项式环 $k[X_1, \cdots, X_n]$. 一个局部 Noether 环 A 是正则的, 当且仅当它的完全化 $\hat{A}$ 是正则的; 一般而言, 如果 $A \subset B$ 是局部环的平坦扩张且 B 是正则的, 则 A 也是正则的. 对于完全正则局部环, Cohen 结构定理 (Cohen structure theorem) 成立: 这种环形如 $R[[X_1, \cdots, X_n]]$, 其中 R 是域或离散赋值环. 正则局部环上的任一有限型模具有有限的自由化解 (见关于合冲的 **Hilbert 定理** (Hilbert theorem)); 其逆亦成立 (见[2]).

域和 Dedekind 环都是正则环. 如果 A 是正则的, 则 A 上的多项式环 $A[X_1, \cdots, X_n]$ 和形式幂级数环 $A[[X_1, \cdots, X_n]]$ 也都是正则的. 如果 $a \in A$ 是局部正则环中的非可逆元素, 则 A/aA 是正则的当且仅当 $a \notin \mathfrak{m}^2$.

参考文献

[1] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra. 2, Springer, 1975.

[2] Serre, J.-P., Algèbre locale. Multiplicités. Springer, 1965.

[3] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique. 1. Le langage des schémas, *Publ Math IHES*, 4(1964).

В. И. Данилов 撰 赵春来 译

正则环(von Neumann 意义下的)[regular ring (in the sense of von Neumann); регулярное кольцо (в смысле Неймана)]

一个结合环 R(通常含单位元),对任意 a,方程 $axa=a$ 在 R 中有解(见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras)). 下述性质等价: a)R 是正则环; b)R 的每个主左理想由一个幂等元生成; c)R 的主左理想在所有左理想的格(是一个完全模格)中形成一个子格; d)R 的每个主左理想在所有左理想的格中有一个补; e)所有左 R 模是平坦的; f)性质 b)-e)的右侧类似性质成立(见[3],[4],[5],[8],[10]). 由 e)可见,正则环有时称为绝对平坦的(absolutely flat). 一个交换环是正则的,当且仅当它的所有单模是内射的(见[5]). 正则环的每个有限生成左(右)理想是主左(右)理想,因而是一个直和项. 正则环中每个非零因子元是可逆元. 正则环的 **Jacobson 根**(Jacobson radical)等于零. 正则环上的矩阵环也是正则环. 正则环的类在直积和取商环时是闭的. 正则环的理想是正则环(可能没有单位元). 若正则环是 Noether 的或完满的(左或右的),则它是一个**经典半单环**(classical semi-simple ring). 每一个经典半单环是正则的. 此外,除环上向量空间的自同态环是正则的(甚至在无限维的情况下),并且任何环上的任何内射左(右)模的自同态环关于它的 Jacobson 根的商环也是正则的(见[3]). 特别地,Jacobson 根为零的任何左(右)自内射环是正则的. 群 G 在正则环上的群环是正则的,当且仅当 G 的每个有限生成子群是有限的. 并且每个这样的子群的阶在原来的正则环中是可逆的(见[3]). 仅当 R 是经典半单环时,所有自由左 R 模的自同态环是正则的([6]). 正则环的可数生成单侧理想是投射的([8]).

若 R 是正则环,则左 R 模 R^n 的有限生成子模形成一个有补模格 L,它是模 R^n 的所有子模格的一个子格. 格 L 含有一个齐次基(homogeneous basis) $a_1,\cdots,a_n$,即这些元素是无关的(见**模格**(modular lattice)),它们的和等于 L 的最大元(即 R^n),而每一对 a_i,a_j 是透视的(perspective),即它们有共同的补. 反之,每个带有至少四个元素的齐次基的有补模格. 对某个正则环 R,同构于这样一个格 L. 格 L 同构于 R 上 $(n\times n)$ 全矩阵环的主左理想的格(见[4],[10]).

正则环的一种重要的特殊情形是严格正则环(strictly-regular ring). 根据定义,在这种环内,方程 $a^2x=a$ 总是可解的. 正则环 R 的以下性质等价: 1)R 是严格正则环; 2)R 没有非零的幂零元; 3)R 的所有幂等元是中心的; 4)R 的每个左(或右)理想是双侧理想; 5)R 的主左(右)理想的格是分配格; 6)R 的乘法半群是一个逆半群(见[7],[8]).

正则环类的另一个子类由 u 正则环(u-regular ring)组成,根据定义,在这种环内,方程 $axa=a$ 总有一个可逆元作为解. 在正则环类中,u 正则环在基环的二重直和的有限生成子模的格中由透视的传递性来刻画,也由有限生成投射模上直和可收缩这一事实来刻画(见[4],[8]).

一个正则环称为左连续的(left continuous),如果主左理想格是一个连续几何(见**正交模格**(orthomodular lattice)). 连续正则环是 u 正则的,并分解成严格正则环和**自内射环**(self-injective ring)的直和. 可定义正则环上的伪秩函数,类似于 Bool 代数的测度. 这定义了一个**伪度量**(pseudo-metric). 正则环关于这个度量的完全化,成为自内射正则环(见[8]).

正则环是 π 正则环(π-regular ring)的特殊情形,根据定义,在 π 正则环中,对每个元素 a,存在元素 x 和正整数 n,使得 $a^nxa^n=a^n$.

作为正则环的双侧类似,可考虑双正则环(biregular ring),根据定义,在这种环内,每个主双侧理想由一个中心幂等元生成(见**中心代数**(central algebra)). 双正则环的每个双侧理想是极大双侧理想的交. 有单位元的双正则环同构于一个整体瓣环,它带有全不连通紧 Hausdorff 空间上的单纯环层的紧支撑,而任何这样的整体瓣环是双正则的(见[2]). 在交换情形下,双正则环类,严格正则环类和正则环类重合,而在上述最后一个定理中必须用域来代替单环.

Baer 环(Baer ring)与正则环接近,定义为每个左(或右,当有单位元时,它们是等价的)零化子由一个幂等元生成. 除环上向量空间的自同态环和 Hilbert 空间上的有界算子环都是 Baer 环的例子. 一个 Baer 环称为 Abel 的(Abelian),若它的所有幂等元都是中心的;称为(Dedekind)有限的(finite),若 $xy=1$ 蕴涵 $yx=1$. Baer 环 R 的一个幂等元 e 称为 Abel 的(Abelian)(有限的(finite)),若环 eRe 是 Abel 的(Dedekind 有限的). 可以区别下述 Baer 环类: I_{fin},含有一个不属于任何真直和项的 Abel 幂等元的有限环; I_{inf},含有一个不属于任何真直和项的 Abel 幂等元的 Dedekind 无限环(即不含非零有限中

心幂等元的环）; II_{fin}（或 II_1），没有非零 Abel 幂等元，但含有一个不属于任何真直和项的有限幂等元的 Dedekind 有限环; II_{inf}，带有 II_{fin} 中条件的 Dedekind 无限环; 以及 III，没有非零有限幂等元的环．每个 Baer 环唯一地分解成这些环的直和（见[9]）．

正则环的引入是为了连续几何的坐标化，双正则环涉及环的函数表示的研究，Baer（和 Rickart）环涉及算子环的研究．

非结合的正则环也被研究．亦见 * 正则环（*-regular ring）; **Rickart 环**（Rickart ring）.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algèbre commutative, Masson, 1983.

[2] Dauns, J. and Hofmann, K., The representation of biregular rings by sheaves, *Math. Z.*, 91(1966), 103－123.

[3] Lambek, J., Lectures on rings and modules, Blaisdell, 1966.

[4] Скорняков, Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, М., 1961（英译本: Skornyakov, L. A., Complemented modular lattices and regular rings, Oliver & Boyd, 1962）.

[5] Faith, C., Algebra, 1－2, Springer, 1973－1976.

[6] Tsukerman, G. M., Ring of endomorphisms of a free module, *Sib. Math., J.* 7(1966), 5, 923－927. (*Sibirsk. Mat. Zh.*, 7(1966), 5, 1161－1167)

[7] Шайн, Б. М., 《Изв. ВУЗов. Математика》, 1966, 2, 111－122.

[8] Goodearl, K. R., Von Neumann regular rings, Pitman, 1979.

[9] Kaplansky, L., Rings of operators, Benjamin, 1968.

[10] Neumann, J. von, Continuous geometries, Princeton Univ. Press, 1960.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 更一般地，**偏序集**（partially ordered set）P 上的**秩函数**（rank function）或**水平函数**（level function）是函数 $\varphi: P \to \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{N}$（或另一个全序集），使得 $\varphi(a) \leq \varphi(b)$，若在 P 中 $a<b$．在数学中满足这个性质的函数很多．例如，σ 代数的度量是（许多中的）一个秩函数．因此，P 上的秩函数只不过是到全序集的一个保序映射．

设 P 是带有最小元 0 的偏序集，在 P 中两个给定元素间的所有链是有限的，且满足 Jordan-Dedekind 链条件（Jordan-Dedekind chain condition）：两个给定元素间的所有极大链有相同的长度．则定义 $\rho(a)=$ 连接 0 到 a 的极大链的长，得到一个秩函数 $\rho: P \to \mathbf{N}\cup\{0\}$，满足 $\rho(0)=0$ 和 $\rho(b)=\rho(a)+1$，若 a 是 b 的直接前元．称值 $\rho(a)$ 为 a 的秩．

有限集 M 的所有子集的集合到 $\mathbf{N}\cup\{0\}$ 的秩函数 ρ 是一个拟阵（matroid），若除了保序性外还满足 $\rho(\varnothing)=0$, $\rho(N\cup\{e\}) \leq \rho(N)+1$，而当 $\{e_1,e_2\}\cap N=\varnothing$ 并且 $\rho(N)=\rho(N\cup\{e_1\})=\rho(N\cup\{e_2\})$ 时，$\rho(N\cup\{e_1,e_2\})=\rho(N)$（[A1]）.

在各种不同的情况下，有附加结构的有序集上的秩函数要求满足一些附加的性质．Boole 代数 A 到序数的映射 r 称为秩函数，如果 r 满足

i) $b \leq a \Rightarrow r(b) \leq r(a)$;

ii) 若 $a=b+c$, b 和 c 不相交且非零，则 $r(b)<r(a)$ 或 $r(c)<r(a)$.

这里，A 上的序关系定义为：$b \leq a \Leftrightarrow ba=b$; 见[A3].

带基点的幺半群（pointed monoid）是带有一个例外指定元素 m_0 的交换幺半群（monoid）$(M,+,0)$. Boole 代数 A 由带基点的幺半群 $(M,+,0,m_0)$ 度量，若存在称为**测度**（measure）的函数 $\mu: A \to M$，使得对所有 $a,b\in A$, $m,n,\in M$:

iii) $\mu(a)=0$，当且仅当 $a=0$;

iv) $\mu(1)=m_0$;

v) $\mu(a \dot{+} b)=\mu(a)+\mu(b)$;

vi) 若 $\mu(a)=m+n$，则有某个 $b,c\in A$，使得 $\mu(b)=m$, $\mu(c)=n$, $a=b\dot{+}c$.

这里 $a=b\dot{+}c$ 意味着 a 是 b 和 c 的不交并．Boole 代数的**测度同构定理**（measure isomorphism theorem for Boolean algebras）认为由相同的带基点的幺半群度量的可数 Boole 代数是同构的（[A4]）.

von Neumann 正则环 R 上的**伪秩函数**（pseudo-rank function）是映射 $N: R \to [0,1]$，使得

vii) $N(1)=1$;

viii) $N(xy) \leq N(x)$, $N(xy) \leq N(y)$ 对所有 $x, y\in R$;

ix) $N(e+f)=N(e)+N(f)$ 对所有正交幂等元 $e, f\in R$（这样 $N(0)=0$）.

它是**秩函数**（rank function），若还有

x) $N(x)>0$，对 R 中所有 $x\neq 0$.

给定 R 上一个伪秩函数 N，指定 $\delta(x,y)=N(x-y)$ 定义 R 上的一个**伪度量**（pseudo-metric），当 N 是秩函数时这是一个度量（metric）; 关于这些概念及其应用的说明，见[8]，p.226ff.

参考文献

[A1] Whitney, H., On the abstract properties of linear dependence, *Amer. J. Math.*, 57(1935), 509－533（再版: Joseph, P. S. Kung (ed.), A source book in matroid theory, Birkhäuser, 1986, 55－80）.

[A2] Aigner, M., Combinatorial theory, Springer, 1979, Chapt. II（译自德文）.

[A3] Koppelberg, S., General theory of Boolean algebras, in J. D. Monk and R. Bonnet (eds.), Handbook of Boolean Algebras, Vol. 1, North-Holland, 1989, 283.

[A4] Myers, D. de, Lindenbaum-Tarski algebras, in J. D. Monk and R. Bonnet (eds.), Handbook of Boolean Algebras, Vol. 3, North-Holland, 1989, 1167 – 1195.

蔡传仁 译

正则概形 [**regular scheme**; **регулярная схема**]

每个点的局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 都是正则的(见**正则环**(regular ring (in commutative algebra))**概形**(scheme).对于代数闭域 k 上有限型的概形,正则性等价于微分层 $\Omega^1_{X/k}$ 是局部自由的.正则局部环是**唯一分解环**(factorial ring),所以在正则概形 $(X, \mathcal{O}_X)$ 里的任何余维数 1 的闭约化不可约子概形局部地由一个方程给出(见[2]).一个重要的问题是构造一个正则概形 $(X, \mathcal{O}_X)$,使它具有给定的有理函数域以及带有到某个基概形 S 上的**真态射**(proper morphism) $X \to S$.当 S 是特征数 0 的域的谱时,已经解决(见[3]).对于素特征数的低维概形以及 S 是 $\dim X/S \leq 1$ 的 Dedekind 整环的谱时也已经解决(见[1]).

参考文献

[1] Abhyankar, S. S., On the problem of resolution of singularities, in I. G. Petrovskiĭ (ed.): Proc. Internat. Congress of Mathematicians Moscow, 1966, Moscow, 1968, 469 – 481.

[2] Mumford, D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton Univ. Press, 1966.

[3] Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II, *Ann. of Math.*, 79 (1964), 109 – 203, 205 – 326.

С. Г. Танкеев 撰

【补注】 有时正则概形称为**光滑概形**(smooth scheme),这意味着结构态射 $X \to S$ 是**光滑态射**(smooth morphism)(这里 S 是域的谱,见**环的谱**(spectrum of a ring)).

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

正则半群 [**regular semi-group**; **регулярная полугруппа**]

每个元素都是**正则元**(regular element)的半群.

任意正则半群 S 包含**幂等元**(idempotent),S 的结构在某种程度上由 S 的幂等元集 $E(S)$(见**幂等元半群**(idempotents, semi-group of))的"结构"和 $E(S)$ 在 S 中的"分布"所决定.仅有一个幂等元的正则半群恰为群.首先,$E(S)$ 能够用一种自然的方法被视为偏序集.刻画正则半群 S 的若干结构定理都带有在其幂等元集 $E(S)$ 上的自然限制.(关于带零半群的)这些限制之一是所有非零幂等元是本原的(见**完全单半群**(completely-simple semi-group));具有此性质的半群称为本原的(primitive).半群 S 上的下述条件是等价的:a)S 是本原正则半群;b)S 是正则半群,且 S 是其 0 极小(右)理想(见**极小理想**(minimal ideal))的并;c)S 是完全 0 单半群的 O **直并**(O-direct union).当 $E(S)$ 关于负整数序型成链时,正则半群的结构也是已知的([2]).

若按如下方法定义 $E(S)$ 上的一个部分运算 $\circ$,则可获得 $E(S)$ 的一个更大的信息来源.如果 $e, f \in E(S)$ 使得积 ef、fe 中至少有一个等于 e 或 f,那么 $ef \in E(S)$;此时规定 $e \circ f = ef$.由此得到的部分代数可以借助两个拟序关系 ω^r 和 ω^l 公理化.这两个关系与给定的部分运算密切相关(这两个关系在 $E(S)$ 中的实现如下:$e\omega^r f$ 意指 $fe = e$,$e\omega^l f$ 意指 $ef = e$;那么 $\omega^r \cap \omega^l$ 是 $E(S)$ 上的自然偏序).这一部分代数称为双序集(bi-ordered set)(见[5]).任意正则半群可由一双序集和若干群用一特定的方法构作起来.因此借助双序集对正则半群进行分类成为可能.利用这种方法研究的一类半群是组合正则半群(combinatorial regular semi-group),即只含平凡子群的正则半群(见[7]).

正则半群的同态象是正则的.正则半群的每个形成子半群的**正规复形**(normal complex)包含幂等元.正则半群上的任意同余(见**合同**(congruence (in algebra))(**代数学中的**))被其包含幂等元的类所唯一确定.正则半群 S 上的同余分离幂等元,当且仅当它包含在关系 $\mathscr{H}$ 中(见 **Green 等价关系**(Green equivalence relations)).这些同余的集合形成 S 的同余格的具有零元和单位元的模子格(亦见**模格**(modular lattice)).正则半群称为基本的(fundamental),如果这个子格仅包含相等关系.每个组合正则半群是基本的.基本正则半群的重要性不仅在于它是一类更具体的正则半群,而且也在于它在所有正则半群类中所具有的"泛"性质.更确切地,关于任意双序集 E 利用一种典范方法可构作一个基本正则半群 T_E,使得 E 是所有幂等元的双序集,且关于任意具有 $E(S) = E$ 的正则半群 S,存在幂等元分离同态 $\varphi: S \to T_E$ 使得 $\varphi(S)$ 是 T_E 的包含 E 的子半群(关于 T_E 的各种构作,见[3],[5],[8],[10]).正则半群 S 是基本的,当且仅当 φ 是单的.

若 S 为正则半群,则由 S 的幂等元生成的子半群 $\langle E(S) \rangle$ 也是正则的.子半群 $\langle E(S) \rangle$ 对 S 的结构有着本质的影响.正则半群是幂等元生成的,当且仅当其每一主因子也是幂等元生成的([10]).在幂等元生成的正则半群 S 中,任何元素 x 可写为 $x = e_1 \cdots e_n$ 的形式,其中 $e_i \in E(S)$ 且 $e_i (\mathscr{L} \cup \mathscr{R}) e_{i+1}$,$i = 1, \cdots, n-1$(这里 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{R}$ 是 Green 等价关系,([5])).具有如上性质的幂等元序列 $e_1, \cdots, e_n$ 称为 E 链(E-chain).在双单幂等元生成的半群中,任意两

个幂等元被一个 E 链所连接，且如果两者关于自然偏序可比，那么这个链的长度 $\geqslant 4$.

正则半群 S 称为纯正的（orthodox），如果 $\langle E(S)\rangle = E(S)$，即任意两个幂等元的积仍为幂等元．纯正半群类包含所有逆半群．半群是纯正的，当且仅当其每一主因子是纯正的．关于纯正半群已有若干结构定理（见[4]，[9]）．

$E(S)$ 上的自然偏序可用下列方法扩张到正则半群 S 上：$x \leqslant y$，如果存在幂等元 e 和 f 使得 $x = ey = yf$．如果 S 是逆半群，那么关系 $\leqslant$ 成为逆半群上的自然偏序．对任意正则半群，这种关系也称为自然偏序（natural partial order）．正则半群 S 上的关系 $\leqslant$ 关于乘法相容，当且仅当对任意幂等元 e，子半群 eSe 是**逆半群**（inversion semi-group）（[6]）．具此性质的正则半群称为伪逆半群（pseudo-inverse semi-group）．所有伪纯正半群（pseudo-orthodox semi-group）（对任意幂等元 e，子半群 eSe 是纯正半群）形成一个更大的类．上述两个半群类也分别称为"局部逆半群类"和"局部纯正半群类"．正则半群称为自然的（natural），如果它的所有群元（见**正则元**（regular element））的集合形成子半群．关于伪逆半群，伪纯正半群（[11]）和自然正则半群（[12]）已有若干结构定理．

关于各种类型的正则半群的众多结构定理是 **Rees 矩阵型半群**（Rees semi-group of matrix type）或群的直谱和（见 **Clifford 半群**（Clifford semi-group））的结构的推广和修正（有时是很不直接的），并且基于半群的各种表示和它们到子直积的分解（见[1]，[13]）．亦见**半群**（semi-group）．

参考文献

[1] Clifford, A. and Preston, G., Algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer. Math. Soc., 1961-1967.

[2] Munn, W. D., Regular ω-semigroups, *Glasgow Math. J.*, **9** (1968), 1, 46-66.

[3] Clifford, A., The fundamental representation of a regular semigroup, *Semigroup Forum*, **10** (1975), 84-92.

[4] Clifford, A., A structure theorem for orthogroups, *J. Pure Appl. Algebra*, **8** (1976), 23-50.

[5] Nambooripad, K. S. S., Structure of regular semigroups, I, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **22** (1979), 224.

[6] Nambooripad, K. S. S., The natural partial order on a regular semigroup, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **23** (1980), 3, 249-260.

[7] Nambooripad, K. S. S. and Rajan, A. R., Structure of combinatorial regular semigroups, *Quart. J. Math.*, **29** (1978), 116, 489-504.

[8] Grillet, P. A., The structure of regular semigroups, I-IV, *Semigroup Forum*, **8** (1974), 177-183; 254-265; 368-373.

[9] Hall, T. E., Orthodox semigroups, *Pacific J. Math.*, **39** (1971), 677-686.

[10] Hall, T. E., On regular semigroups, *J. of Algebra*, **24** (1973), 1-24.

[11] Meakin, J. and Nambooripad, K. S. S., Coextensions of pseudo-inverse semigroups by rectangular bands, *J. Austral. Math. Soc.*, **30** (1980/81), 73-86.

[12] Warne, R. J., Natural regular semigroups, in G. Pollak (ed.): Algebraic Theory of Semigroups, North-Holland, 1979, 685-720.

[13] Lallement, G., Structure theorems for regular semigroups, *Semigroup Forum*, **4** (1972), 95-123.

Л. Н. Шеврин 撰

郑恒武 田振际 译 郭聿琦 校

正则集函数［regular set function; регулярная функция множества］

定义在拓扑空间中集合族上的**加性函数**（additive function）μ，其全变差 $|\mu|$（见**函数的全变差**（total variation of a function））满足条件

$$|\mu|(E) = \inf|\mu|(G) = \sup|\mu|(F),\quad \mathring{G} \supset E \supset \overline{F}.$$

这里的 $\mathring{G}$ 表示集合 G 的内核，$\overline{F}$ 表示集合 F 的闭包（E, G, F 均属于 μ 的定义域）．任一定义在紧拓扑空间中集合的半环上的有界加性正则集函数是可数可加的（Александров 定理（Aleksandrov theorem））．

作为集函数的一个特殊情形，正则性也可用于描述测度，说定义在拓扑空间上的正则测度（regular measure）．例如，**Lebesgue 测度**（Lebesgue measure）是正则的．

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J., Linear operators, 1, General theory, Wiley, 1988.

[2] Александров, А. Д., 《Матем. сб.》, 9 (1941), 563-628.

А. П. Терехин 撰

【补注】虽然一个集函数在满足用"良"集从内或外来逼近的性质时称为正则的，但"正则"的明确意义通常是依据上、下文来界定的（以及由作者约定）．例如，一个（Carathéodory）**外测度**（outer measure）μ 称为正则的，如果对 E 的每一部分 A，有 $\mu(A) = \mu(B)$，其中 B 是包含 A 的可测集；当 E 是拓扑空间时，其外测度 μ 称为 Borel 正则的（Borel regular），如果 Borel 集是可测的且上述之 B 可取成 Borel 集．另一方面，如果 E 是一个可度量化空间，且 μ 是其 Borel σ 域上的一个有限测度，那么按上列文献中所述的意义 μ 总是正则的．在这样的设定下，μ 常被称作是内正则的（inner regular），或恰当正则的，如果对任一 Borel 子集 A，有 $\mu(A) = \mu(L)$，L 是可数个含于 A 的紧集的并集，就是说，如果 μ 是一

个 Radon 测度（Radon measure）. 现今，替代 μ 是 Radon 的这一称谓，人们大都称它为胎紧的（tight）.

周民强 译

正则奇点 [**regular singular point; регулярная особая точка**]

单个复自变量的线性常微分方程理论中的一个概念. 一点 $a \in \mathbf{C}$ 称为具有解析系数的方程

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = 0 \qquad (1)$$

或方程组

$$\dot{z} = A(t)z, \quad z \in \mathbf{C}^n \qquad (2)$$

的正则奇点，如果 a 是系数的孤立奇点且（1）或（2）的每个解对某个 $d \in \mathbf{R}$ 增长速度不快于 $|t-a|^d$，这里 t 在以 a 为顶点的任一锐角中趋向 a. 后一限制之所以必要是由于以下事实，即在正则奇点的邻域中解是非单值解析函数，而当 t 沿着任一曲线趋于 a 时比沿一以 a 为顶点的射线趋于 a 时，解的增长本质上更快.

为使（1）或（2）的系数的奇点是（1）或（2）的正则奇点，它必须是系数的**极点（函数的）**（pole (of a function)），而不是**本质奇点**（essential singular point）. 对于方程（1）有以下的 Fuchs 条件（Fuchs condition）：方程（1）的系数 $a_j(t)$ 之奇点 $t=a$ 是（1）的正则奇点，当且仅当函数 $(t-a)^j a_j(t)(j=1,\cdots,n)$ 在 a 点为全纯. 对于方程组（2）则有以下的充分条件：若矩阵 $A(t)$ 之元素在点 a 有单极点，则此点是（2）的正则奇点.

参考文献

[1] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950（中译本：戈鲁别夫，微分方程解析理论讲义，高等教育出版社，1956）.

[2] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[3] Levelt, A. H. M., Hypergeometric functions, I－IV. *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. Ser. A*, **64** (1961), 4, 362 － 403.

[4] Deligne, P., Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture notes in math., 163, Springer, 1970.

[5] Plemelj, J., Problems in the sense of Riemann and Klein, Wiley, 1964.

[6] Arnol'd, V. I. and Il'yashenko, Yu. S., Ordinary differential equations, Dynamical System, 1, Springer 1988（译自俄文）.

Ю. С. Ильяшенко 撰

【补注】 任一具有三个正则奇点的二阶方程（1）都可化为**超几何方程**（hypergeometric equation）. 四个正则奇点时则可化为 Heun 方程（[A1]，第 15.3 节），此文中还有 **Lamé 方程**（Lamé equation）的代数形式. 这个概念在偏微分方程组中的推广在条目**超几何方程**（hypergeometric equation）的补注中提到.

参考文献

[A1] Bateman, H. and Erdélyi, A., Higher transcendental functions, 3. Automorphic functions, McGraw-Hill, 1955（中译本：A. 爱尔台里（主编），高级超越函数，第三册，自守函数，上海科学技术出版社，1958）.

齐民友 译

正则空间 [**regular space; регулярное пространство**]

一个**拓扑空间**（topological space），其中任何一点 x 以及任何不含 x 的闭集 A 均有互不相交的集合 U 和 V，使得 $x \in U$，$A \subseteq V$. **完全正则空间**（completely-regular space），特别是**度量空间**（metric space）都是正则空间.

一个正则空间中所有单点子集如果都是闭集（并不尽然!），则此空间称为 T_3 空间（T_3-space）. 并非任何正则空间都是完全正则的：存在一个无限的 T_3 空间，其上的任何连续实值函数均为常值函数. 此外，并非任何正则空间都是**正规空间**（normal space）. 不过，如果正则空间的每个开覆盖均含有可数子覆盖，则此空间是正规的. 具有可数基的空间可度量化的充要条件是：它是一个 T_3 空间. 正则性由任何子空间所继承，而且是可乘的.

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975（中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982）.

[2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М. 1974（英译本：Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: problems and exercises, Reidel, 1984）.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 $T_0, T_1, \cdots$ 的蕴涵关系见**分离公理**（separation axiom）. 一个拓扑性质称为乘性的（multiplicative），如果空间 X 和 Y 都具有该性质时乘积空间 $X \times Y$ 也具有该性质. 这不应同"乘性子集组"（multiplicative system of subsets）的说法相混，后者有时用来表示在有限交运算下封闭的一组子集.

参考文献

[A1] Čech, E., Topological spaces, Wiley, 1966, p. 492 ff.

【译注】 上述正则空间及 T_3 空间的定义与通常的定义相反. 这里的正则空间通常称为 T_3 空间，而这里的 T_3 空间通常称为正则空间.

参考文献

[B1] Steen, L. A. etc., Counterexamplees in Topology, Springer-Verlag, 1978.

胡师度、白苏华 译

正则求和法 [**regular summation methods; регулярные методы суммирования**], 永久求和法 (permanent summation methods)

求级数(序列)和的方法, 任何收敛级数(序列)都有它所收敛的同一个和. 正则求和法是守恒求和法(conservative summation methods)的特例, 守恒求和法对于任何收敛级数(序列)都有有限和, 尽管与它收敛的和可能不相同. 若正则求和法是由序列 $\{s_n\}$, 借助一个无穷矩阵 $\|a_{nk}\|$ 变成序列 $\{\sigma_n\}$ 所定义的:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k,\ n = 1, 2, \cdots \qquad (*)$$

(见**矩阵求和法**(matrix summation method)), 则变换 (*) 及这个变换的矩阵 $\|a_{nk}\|$ 都称为正则的 (regular).

许多熟知的求和法都是正则的. 它包括当 $k \geqslant 0$ 时的 **Cesàro 求和法** (Cesàro summation methods) (C, k), **Hölder 求和法** (Hölder summation methods), **Abel 求和法** (Abel summation method) 等等. 也有非正则求和法, 如 $k < 0$ 时的 Cesàro 求和法 (C, k), **Riemann 求和法** (Riemann summation method).

求和法称为完全正则的 (completely regular), 如果它是正则的, 并且具有实项的任何收敛于 $+\infty$ (或 $-\infty$) 的级数(序列)的和为 $+\infty$ (相应地, $-\infty$). 由正矩阵定义的正则求和法是完全正则的 (亦见**正则性准则** (regularity criteria)).

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.

[3] Кангро, Г. Ф., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, 5 – 70 (英译本: Kangro, G. F., Theory of summability of sequences and series, *J. Soviet Math.*, **5** (1976), 1, 1 – 45).

[4] Барон, С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

正则环面 [**regular torus; регулярный тор**]

(代数闭域上)连通**代数群** (algebraic group) G 内的**代数环面** (algebraic torus), 它仅包含在有限多个 **Borel 子群** (Borel subgroup) 内. G 内的**极大环面** (maximal torus) 总是正则的. 一般说来, 环面 $S \subset G$ 为正则, 当且仅当它的中心化子 $C_G(S)$ 是**可解群** (solvable group). 一维正则环面 S 及其相应的单参数子群 $\lambda: G_m \to S$ (也称为正则的 (regular)) 在代数群理论中起着重要的作用. 不是正则的环面称为奇异的 (singular). 对于**约化群** (reductive group) G, 环面 $S \subset G$ 的一个奇异性判则可借助根系给出. 如果 T 是 G 内含 S 的极大环面且 $\varphi(T, G)$ 是对应的根系, 则 S 为奇异当且仅当 $S \subset \operatorname{Ker}\alpha$ 对某个 $\alpha \in \varphi(T, G)$.

G 内正则环面有时被定义为含有正则元 (regular element) (如果元素 $s \in G$ 在 G 内的中心化子 $C_G(s)$ 的维数为极小, 则称 s 为正则元) 的环面 S, 这时在原始意义下正则的环面被称为半正则的 (semi-regular) (见[1]). 这两个定义对于约化群是等价的.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[2] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

В. П. Платонов 撰 陈志杰 译

正则性准则 [**regularity criteria; регулярности признаки**], 关于求和法的

求和法 (summation methods) 正则性的条件.

对于借助矩阵 $\|a_{nk}\| (n, k = 1, 2, \cdots)$ 将序列变换成另一序列所定义的**矩阵求和法** (matrix summation method), 正则性的充要条件是:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M; \\ 2) & \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0; \\ 3) & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

对于借助矩阵 $\|g_{nk}\| (n, k = 1, 2, \cdots)$ 将级数变换成序列所定义的矩阵求和法, 其正则性的充要条件如下:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \sum_{k=1}^{\infty} |g_{n,k} - g_{n,k-1}| \leqslant M; \\ 2) & \lim_{n\to\infty} g_{nk} = 1. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

条件 (1) 是 O. Toeplitz 首先对于三角求和法建立的 ([1]), 其后由 H. Steinhaus 推广到任意矩阵求和法 ([2]). 为了表明这种联系, 有时将满足条件 (1) 的矩阵称为 Toeplitz 矩阵 (Toeplitz matrix) 或 T 矩阵 (T-matrix).

对于借助半连续矩阵 $\|a_k(\omega)\|$ 将序列变换成函数, 或者借助半连续矩阵 $\|g_k(\omega)\|$ 将级数变换成函数所定义的**半连续求和法** (semi-continuous summation method), 存在分别类似于条件 (1) 和 (2) 的正则性准则.

正则矩阵求和法是完全正则的 (completely regular), 如果变换矩阵的所有表值非负. 这个条件对

于完全正则性一般不是必要的.

参考文献

[1] Toeplitz, O., *Prace Mat. Fiz.*, **22** (1911), 113 – 119.

[2] Steinhaus, H., Some remarks on the generalization of the concept of limit, in Sel. Math. Papers, Polish Acad Sci., 1985, 88 – 100.

[3] Hardy, G. H., Divergent series. Clarendon, 1949.

[4] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950.

И. И. Волков 撰

【补注】 亦见**正则求和法** (regular summation methods).

Toeplitz 矩阵 (Toeplitz matrix) 这个用语通常看成矩阵 (a_{ij}), 它对所有满足 $i-j=k-l$ 的 i, j, k, l, 有 $a_{ij}=a_{kl}$.

罗嵩龄 译

正则化 [regularization; регуляризация]

对于**不适定问题** (ill-posed problems) 构造关于初始数据的小扰动是稳定的近似解法 (亦见**正则化方法** (regularization method)).

В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов 撰

【补注】 "正则化" 概念在数学中是相当一般的, 它的含意已远远超过了处理不适定问题的正则化方法本身. 它至少包含着下面两个交织在一起的思想.

1) 数学对象 A 由一个更正则的对象 A^{reg} 作系统代换, 一般要使得 $(A^{\text{reg}})^{\text{reg}}=A^{\text{reg}}$.

2) 定义函数的值或对象的其他概念, 而该值或概念是事先未予定义的 (或者为无穷大, 不确定, ……). 为此经常用一个合适的族 (一个**形变** (deformation)), 将上述对象置于族中, 对该族中一切接近上述对象的对象定义函数值或者概念, 然后取合适的极限. 另一个技巧是除去 "系统无穷大". 所使用的各种正则化方法的细节主要取决于特定的情况. 也经常使用其他术语代替 "正则化", 用来描述这种方法和技巧, 譬如 "正规化", "重正规化", "非奇异化", "奇异性分解", …….

上面 1) 或 2) (或两者) 意义下的正则化例子有: 正则化序列 (参见**序列的正则化** (regularization of sequences)), 正则化算子和正则化解法 (见**不适定问题** (ill-posed problems); **正则化方法** (regularization method); **积分方程, 数值方法** (integral equations, numerical methods); **Fredholm 方程, 数值方法** (Fredholm equation, numerical methods)), 最优化理论中的罚函数和其他正则化技术 (见**数学规划** (mathematical programming); **罚函数法** (penalty functions, method of)), 各种重正规化方案 (见**重正规化** (renormalization)), 正规化和非奇异化格式及其变形 (见**正规概形** (normal scheme); **奇点的分解** (resolution of singularities)), 分布的正则化 (见**广义函数** (generalized function)), Sturm-Liouville 算子的正规化的迹 (见 **Sturm Liouville 问题** (Sturm Liouville problem)), 和 **Hilbert-Schmidt 算子** (Hilbert-Schmidt operator) 的正则化特征行列式.

还有一个例子是用来定义泛函积分和量子场论中的某些无穷行列式 (或其商) 的 *ζ 函数正则化* (zeta-function regularization). 其作法如下: 令 A 是一个合适的算子, 例如 Laplace 或 Laplace-Beltrami 算子. 定义它的*广义 ζ 函数* (generalized zeta-function)

$$\zeta_A(s)=\sum_n \lambda_n^{-s},$$

其中 λ_n 在 A 的谱上取值 (计算重数). 至少在形式上有 $\zeta'(s)|_{s=0}=-\sum_n \log(\lambda_n)$, 这就提供了一个机会, 由下式来定义 *ζ 函数正则化行列式* (zeta-function regularized determinant)

$$\det(A)=\exp(-\zeta'(s))|_{s=0}.$$

至于更详细的情况 (以及其他有关格式) 见 [A1], [A2].

数学中词汇 "正则化" 有两个有点不同的用法:

如果 K 是两赋范空间之间的有界线性算子, 那么一个有界线性算子 R 称为一个 "*K 的正规化子*" (regularizer), 倘若存在紧算子 A, B 使得 $RK=I-A$, $KR=I-B$. 这个概念在奇异积分算子研究中具有重要性, 例如见 [A3]. 即, R 是 K 模紧算子的一个逆.

类似的概念以不同的术语出现在拟微分算子理论中, 在那里一个 (拟微分, 积分) 算子称为*正则化* (regularizing), 如果它取 (推广到一个算子时*所取*) 光滑函数为分布. 已知一个拟微分算子 P, 算子 R 称为 P 的一个右 (左) *拟基本解*, 如果 $PR=I+K$ ($RP=I+K'$), 其中 K (*相应地*, K') 已正则化; 关于拟基本解的许多严密的叙述和结果可见 [A4].

参考文献

[A1] Hawking, S. W., Zeta function regularization of path integrals, *Comm. Math. Phys.*, **55** (1977), 133 – 148.

[A2] Gamboa Saravi, R. E. Muschietti, M. A. and Solomin, J. E., On the quotient of the regularized determinant of two elliptic operators, *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 641 – 654.

[A3] Kress, R., Linear integral equations, Springer, 1989, Chapt. 5.

[A4] Treves, F., Pseudodifferential and Fourier integral operators, 1 – 2, Plenum, 1980.

张宝琳 袁国兴 译

正则化方法 [regularization method; регуляризации метод]

以下列方式构造不适定问题（ill-posed problems）的近似解的方法：一个不适定问题的近似解可取为关于初始数据的逼近特性的正则化算子的值．

为了确定起见，考虑求形式为 $Az=u$ 的泛函方程的解的问题，其中 z 和 u 是度量空间 F 和 U 中的元素，距离函数分别为 $\rho_F(,)$ 和 $\rho_U(,)$．例如，设 A 是**完全连续算子**（completely continuous operator），那么这样一个方程的解关于右端 u 的微小变化不必是稳定的．假设用逼近值 $(\widetilde{A},\widetilde{u})$ 代替初始数据的准确值 $(\overline{A},\overline{u})$．在这种情形下只能求方程 $\overline{A}z=\overline{u}$ 的解 z 的近似解．作为这种类型的不适定问题的近似解，近似初始数据 $(\widetilde{A},\widetilde{u})$ 不能使人们取到方程 $\widetilde{A}z=\widetilde{u}$ 的准确解，这是由于这样的解没有必要存在，即使存在，它关于初始数据的微小变化也没有必要是稳定的，于是这种"解"可能没有合理的物理上的解释．下面为简单计，只假设右端的 u 是近似的，而算子 A 规定为准确的．

令 δ 是从 $\overline{u}$ 到 $\widetilde{u}$ 的偏差即距离 $\rho_U(\widetilde{u},\overline{u})$ 的界限，且令 $F_0\subset F$ 为已知的一类可能解（比较模型）．自然要从元素 $z\in F_0$ 中来挑选与初始数据相容的方程 $Az=\widetilde{u}$ 的近似解，即使得 $\rho_U(Az,\widetilde{u})\leqslant\delta$．令 F_δ 为 F_0 所含一切这种元素的集合．如果，在所选取的可能解类 F_0 中不存在与初始数据相容的元素（例如，函数 $z(s)$），那么这意味着元素 $z\in F_0$ 具有一个超简单化（太粗）结构．在这种情况下有必要扩充 F_0，如果必要可取递增序列 $F_0\subset F_1\subset\cdots$ 直至类 F_n，它将包含与初始数据相容的元素（例如，函数）．

如果 F_n 非空，则它可能包含本质上彼此不同的元素（函数），在此种情形，一个可能解与初始数据的相容性的简单要求不能够作为寻找方程 $Az=\widetilde{u}$ 完善定义的近似解的仅有准则，这是由于从 F 的相容元素中选取近似解不能提供一个足够大的范围．

为求得完善定义的稳定解，需要选取与 $\widetilde{u}$ 相容的解的某项准则，该准则的确立通常随问题的性质而变化．作为一个例子，可以把选取元素（F_n 中的函数）具有最小的复杂性定为一条选择的准则，一个元素 z 的复杂性，譬如可使用复杂性泛函 $\Omega[z]$——满足一些特殊要求的连续、非负泛函表示（见[1]），元素 z 的复杂性度量取为泛函 $\Omega[z]$ 的值．这样，若元素 z 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $z(s)$，属于 W_2^1，则可取复杂性泛函 $\Omega[z]$ 为

$$\Omega[z]=\int_a^b\left\{z^2+\left[\frac{dz}{ds}\right]^2\right\}ds.$$

在与初始数据相容的最简单元素（函数）中，选取方程 $Az=\widetilde{u}$ 的近似解，引出了求 F_0 的一个元素，使得在 F_δ 上 $\Omega[z]$ 极小的问题．如果 A 是一个线性算子，$\Omega[z]$ 在它的定义域 F_Ω 内没有局部极小值，那么这个问题可以化为（详见[1]）在集合 $F_\delta\cap F_\Omega$ 中求得一个元素 z_α，使下述泛函极小化

$$M^\alpha[z,A,\widetilde{u}]=\rho_U^2(Az,\widetilde{u})+\alpha\Omega[z].$$

参数（正则化参数）α 的值必须选取得与初始数据的误差水平一致．例如，可由偏差的界限，即对已知的 δ，使用条件 $\rho_U(Az_\alpha,\widetilde{u})=\delta$ 来确定．但还有其他确定 α 的方法（见[1]）．所以，α 可能依赖于 δ 和 $\widetilde{u}$，$\alpha=\alpha(\delta,\widetilde{u})$．于是元素 $z_\alpha(\delta,\widetilde{u})$ 就取作方程 $Az=\widetilde{u}$ 的一个近似解，这也是在[2]、[3]中发展的正则化方法的形式之一．在 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{u}$ 两者都近似地给出时，通过类似的途径可以建立方程 $\widetilde{A}z=\widetilde{u}$ 的近似解法．此时一个 $M^\alpha[z,\widetilde{A},\widetilde{u}]$ 类型的泛函被极小化（例如见[1]）．还有其他一些可能的正则化方法，应用于另外一些类型的问题（见[1]）．正则化方法也已被发展用来求解非线性问题（见[1]，[4]）．

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., Арсенин, В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979（中译本：А. Н. 吉洪诺夫，不适定问题的解法，地质出版社，1979）.

[2] Тихонов, А. Н.,《Докл. АН СССР》, **151**(1963), 3, 501－504.

[3] Тихонов, А. Н.,《Докл. АН СССР》, **153**(1963), 1, 49－52.

[4] Лаврентьев, М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб, 1962（英译本：Lavrentiev, M. M. [M. M. Lavrent'ev], Some improperly posed problems of mathematical physics, Springer, 1967）.

В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов 撰

【补注】 其他正则化方法及其收敛性质见**不适定问题**（ill-posed problems）的补注．其中还讨论了引出不适定问题的许多应用领域所提出的"反问题"，有许多参考文献．那里讨论的谱理论的方法还包括了一些迭代法．可以看作正则化方法的另一种迭代法是**共轭梯度法**（conjugate gradients, method of）；它是从 H. Brakhage 和 L. Louis 的论文（[A2]）中（亦见[A6]）的观点出发来讨论的．非线性不适定问题 Тихонов 正则化（Tikhonov regularization）的收敛性和收敛速度的讨论见期刊《Inverse problems》第 5 卷（1989）中的一些文章，该卷还刊有正则化方法一般研究的许多论文．

正则化的另一条途径建立在统计研究上（见[A1]，[A5]），它来源于岭回归（ridge regression）（[A4]）．统计正则化（statistical regularization）的一个熟知的参数选取策略是广义交叉核实（generalized cross-validation）

（见[A2]中 G. Wahba 的论文及所引参考文献）.

关于正则化中 Hilbert 空间再生核的应用见[A3]和[A7]. 各种正则化方法的实际比较由[A8]给出.

参考文献

[A1] Bertero, M. and Viano, G., On probabilistic methods for the solution of improperly posed problems, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 15 - **B**(1978), 483 - 508.

[A2] Engl, H. W. and Groetsch, C. W. (eds.). Inverse and ill-posed problems, Acad. Press, 1987.

[A3] Hilgers, J., On the equivalence of regularization and certain reproducing kernel Hilbert space approaches for solving first kind problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 13(1976), 172 - 184.

[A4] Hoerl, A. and Kennard, R., Ridge regression, *Technometrics*, **12**(1970), 55 - 82.

[A5] Hofmann, B., Regularization for applied inverse and ill-posed problems, Teubner, 1986.

[A6] Louis, A., Inverse und schlecht gestellte probleme, Teubner, 1989.

[A7] Nashed, M. Z. and Wahba, G., Convergence rates of approximate least squares solutions of linear integral and operator equations of the first kind, *Math. Comp.*, 28(1974), 69 - 80.

[A8] Varah, J., A practical examination of some numerical methods for linear discrete ill-posed problems, *SIAM Rev.*, **21**(1979), 100 - 111.

张宝琳 袁国兴 译

序列的正则化[regularization of sequences; регуляризация последовательностей]

【补注】 设 $a_n(n=0, 1, \cdots)$ 是实数列（下标为非负整数）. $\{a_n\}$ 的一个正则化是由 $\{a_n\}$ 如下地得出的序列 $\{a_n^{(r)}\}$：使相对于别的项为"过高"的某些 a_n 代之以适当的较低的值. 正则化序列（regularized sequence）的一个重要应用是把它用于 C^∞ 函数类的等价性问题（problem of equivalence），即何时两个数列确定相同的拟解析函数类的问题，其解答可由下述形式给出：如果两个序列 $\{M_n\}$ 和 $\{L_n\}$ 的适当的正则化序列 $\{M_n^{(r)}\}$ 和 $\{L_n^{(r)}\}$ 相同，则它们确定相同的拟解析类（quasi-analytic class），见[A1]，[A2].

某些重要的正则化程序如下所述. 称实数列 $\{a_n\}$ 为凸序列（convex sequence），如果函数 $n \mapsto a_n$ 是凸的，即如果对所有 $0 \leqslant r < i < s$，有

$$a_i \leqslant \frac{i-r}{s-r}\, a_s + \frac{s-i}{s-r}\, a_r;$$

也即点 (i, a_i) 位于平面上连接 (r, a_r) 和 (s, a_s) 的连线之下或其上（见**凸函数（实变量的）**（convex function (of a real variable)）.

$\{a_n\}$ 的凸正则化（convex regularization）或 Newton 正则化（Newton regularization）$\{a_n^{(c)}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的最大凸弱序列（见**强函数和弱函数**（majorant and minorant），1））.

正数列 $\{a_n\}$ 的对数凸正则化（log-convex regularization 或 convex regularization by means of the logarithm）是正数列 $\{a_n^{(lc)}\}$，使得 $\{\log a_n^{(lc)}\}$ 是 $\{\log a_n\}$ 的凸正则化. 它由关系式

$$T_a(r) = \sup_{n>0} \frac{r^n}{a_n}, \quad a_n^{(lc)} = \sup_{r>0} \frac{r^n}{T_a(r)}$$

定义.

$\{a_n\}$ 的指数正则化（exponential regularization）$\{a_n^{(e)}\}$ 由关系式

$$S_a(r) = \max_{n \leqslant r} \frac{r^n}{a_n} \ (r \geqslant 1), \quad a_n^{(e)} = \sup_{r \geqslant n} \frac{r^n}{S_a(r)}$$

定义.

序列 $\{a_n\}$ 的 Newton 正则化与 $\{a_n\}$ 的 Newton 多边形（Newton polygon）紧密相联（这解释了 Newton 正则化取名的缘起，亦见 **Newton 图形**（Newton diagram），其中讨论了 Newton 多边形首次出现的来龙去脉）. 对于有限序列 $\{a_n\}_{n=0}^{N}$，其 Newton 多边形是 $\mathbf{R}^2$ 中连接 $(0, a_0)$ 与 (N, a_N) 的最高凸折线，即由连接 $(i, a_i^{(c)})$ 与 $(i+1, a_{i+1}^{(c)})$ $(i=0, 1, \cdots, N-1)$ 的线段组成的折线. 这样，数 $a_i^{(c)}$ 是 $\{a_i\}$ 的 Newton 多边形的横坐标为 i 的点的纵坐标.

对于序列 $(1, 1, -2, 1, -4/3, 1/3, 0)$，$N=6$ 这例子，其凸正则化 $(1, -1/2, -2, -5/3, -4/3, -2/3, 0)$ 给出于图 1 中.

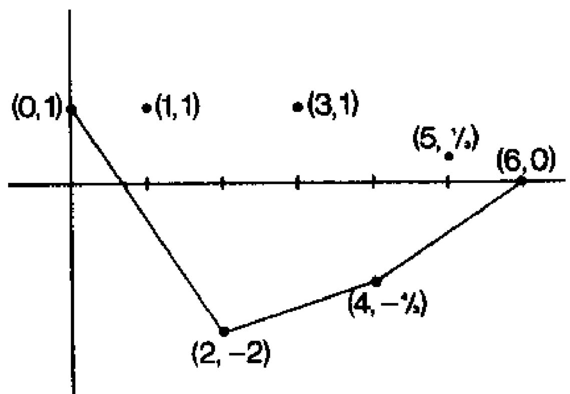


图 1

为避免某些反常情形（例如对所有 $i>0$ 有 $a_i^{(c)} = -\infty$），设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 下方有界. 此序列的 Newton 多边形定义为有限序列 $\{a_n\}_{n=0}^{N}$ 的 Newton 多边形当 $N \to \infty$ 时的极限. $a_i^{(c)}$ 由 $(i, a_i^{(c)})$ 位于 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的 Newton 多边形上这一条件确定仍然为真.

设 K 是具有赋值（valuation）v 的非 Archimedes

赋值域（亦见**域上的范数**（norm on a field））．令 $1+a_1X+\cdots+a_NX^N=f(X)$ 是 K 上的 N 次多项式．多项式 $f(X)$ 的 Newton 多边形（Newton polygon of the polynomial）是指序列 $(v(1), v(a_1), \cdots, v(a_N))$ 的 Newton 折线．它含有关于 $f(X)$（在 K 的一个完全代数闭包中）的根的赋值的直接信息．事实上，如果 λ 是 Newton 多边形的（横坐标）长为 r 的线段的斜率，则恰有 r 个赋值为 $-\lambda$ 的根（计及重数）；类似结果对幂级数的根成立（这与 p 进 Weierstrass 预备定理有关，见 **Weierstrass 定理**（Weierstrass theorem）的补注和[A3]）．

序列 $\{a_n\}$ 的 Newton 多边形可如下几何地得到：对所有 $t, c\in(-\infty, \infty)$，考虑 $\mathbf{R}^2$ 中过 $(0, c)$ 的斜率为 t 的直线 $l(t, c)$，它由方程 $y=tx+c$ 给出．令 $U(t, c)=\{(x, y): x\geqslant 0, y\geqslant tx+c\}$ 是 $l(t, c)$ 的**母图**（supergraph），A 是 $\{a_n\}$ 的图即 $A=\{(i, a_i): i=0, 1, \cdots\}$，则 Newton 多边形是凸集

$$\bigcap_{A\subset U(t, c)} U(t, c)$$

的下边界．

上面已指出，序列 $\{a_n\}$ 的 Newton 正则化（凸正则化）由其 Newton 多边形确定．可以推广这一构造．设 $\omega(t)$ 是 t 的取值于 $[0, \infty]$ 中的非减函数，令

$$U^{\omega}(t, c)=U(t, c)\cup\{(x, y): x>\omega(t)\}.$$

$$\bigcap_{A\subset U^{\omega}(t, c)} U^{\omega}(t, c)$$

的下边界定义了 $\{a_n\}$ 的 ω 正则化序列 $\{a_n^{(\omega)}\}$．Newton 正则化和指数正则化是分别对应于 $\omega(t)\equiv\infty$ 和 $\omega(t)=\exp t$ 的 ω 正则化．

参考文献

[A1] Mandelbrojt, S., Séries adhérentes, régularisations des suites, applications, Gauthier-Villars, 1952.

[A2] Siddigi, J. A., On the equivalence of classes of infinitely differentiable functions, *Soviet J. Contemp. Math. Anal. Arm. Acad. Sci.*, 19 (1984), 1, 18－29 (*Izv. Akad. Nauk Arm. SSR Mat.*, 19 (1984), 1, 19－30).

[A3] Koblitz, N., *p*-adic numbers, *p*-adic analysis, and zeta-functions, Springer, 1977, Chapt. Ⅳ, §3－4.

沈永欢 译

代数数域 K 的调整子[**regulator of an algebraic number field; регулятор поля алгебраических чисел**]

数 R_K，按定义，当 K 为有理数域 $\mathbf{Q}$ 或 $\mathbf{Q}$ 的虚二次扩域时，它等于 1，在其他情况下，它等于 $v/\sqrt{r+1}$，这里 r 是 K 的单位群（见**代数数**（algebraic number）；**代数数论**（algebraic number theory））E 的秩，v 是 $\mathbf{R}^{r+1}$ 中 r 维格的基本平行四边形的 r 维体积，该基本平行四边形是 E 在对数映射（logarithmic mapping）l 下映到 $\mathbf{R}^{r+1}$ 中的象．同态 l 如下定义：设 $\sigma_1, \cdots, \sigma_s$ 是 K 到 $\mathbf{C}$ 的所有实同构，$\sigma_{s+1}, \cdots, \sigma_{s+t}$ 是 K 到 $\mathbf{C}$ 的所有两两互不共轭的复同构，$s+2t=\dim_{\mathbf{Q}}K$，则 $r+1=s+t$（见**单位元的 Dirichlet 定理**（Dirichlet theorem）），$l: E\to\mathbf{R}^{r+1}$ 由公式

$$l(\alpha)=(l_1(\alpha), \cdots, l_{s+t}(\alpha))$$

定义，其中

$$l_i(\alpha)=\begin{cases}\ln|\sigma_i(\alpha)|, & 若\ 1\leqslant i\leqslant s,\\ \ln|\sigma_i(\alpha)|^2, & 若\ s+1\leqslant i\leqslant s+t.\end{cases}$$

E 在 l 下的象是 $\mathbf{R}^{r+1}$ 的一个位于平面 $\sum_{i=1}^{r+1}x_i=0$ 上的 r 维格（这里 x_i 是典范坐标）．

当 $l(\varepsilon_1), \cdots, l(\varepsilon_r)$ 构成格 $l(E)$ 的一组基时，$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r$ 称为 K 的基本单位（fundamental units），且有

$$R_K=|\det(l_i(\varepsilon_j))_{i,j=1}^{r}|.$$

此外，还有其他的公式将域 K 的调整子与它的其他不变量相联系（例如，见**判别式**（discriminant），3）．

代替 E，若考虑该群与 K 的一个序（order）模 $\mathcal{O}$ 的交，则 $\mathcal{O}$ 的调整子 $R_{\mathcal{O}}$ 可按同样方法定义．

参考文献

[1] Боревич, З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд. М., 1972 (英译本：Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., Number theory, Acad. Press, 1987).

[2] Lang, S., Algebraic number theory, Addison-Wesley, 1970.

В. Л. Попов 撰　裴定一 译　赵春来 校

Reidemeister 挠率[**Reidemeister torsion; Рейдемейстера кручение**]，de Rham 挠率（de Rham torsion），Franz 挠率（Franz torsion）

使人们辨别微分拓扑中许多结构的不变量，例如在流形上，特别在透镜空间上的纽结和光滑结构．Reidemeister 挠率首先是由 K. Reidemeister（见[1]）在研究三维透镜时引进的，对 n 维透镜的推广在[2]和[3]中独立地得到．

设 C 是左 A 模的自由复形，其中 A 是具有单位元的结合环．进一步，令 h 是 A 的矩阵表示，即从 A 到所有实的 $n\times n$ 矩阵的环 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的同态．设 c_k 是在复形 C 的模 C_k 中的辨别基．设 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 模的复形 $C'=\mathbf{R}^{n\times n}\otimes_A C$ 是非循环的，则 **Whitehead 挠率**（Whitehead torsion）定义为 $\tau(C')\in\bar{K}_1\mathbf{R}^{n\times n}=\bar{K}_1\mathbf{R}=\mathbf{R}_+$，其中 $\mathbf{R}_+$ 是实数域的乘法群．数目 $\tau(C')$ 称为复形 C' 的 Reidemeister 挠率（Reidemeister

torsion)，也称为实 Reidemeister 挠率(real Reidemeister torsion).

将 Whitehead 挠率转变成 Reidemeister 挠率的用处是基于 Bass 定理(Bass theorem)([4])：如果 π 是一个有限群，对任何表示 h，如果 $h_*(\omega)=1$，则元素 $\omega\in Wh(\pi)$ 有有限阶，其中 $h_*(\omega)$ 是由元素 ω 导出的 Reidemeister 挠率.

参考文献

[1] Reidemeister, K., Homotopieringe und Linsenräume, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11(1935), 102–109.

[2] Franz, W., Ueber die Torsion einer Ueberdeckung, *J. Reine Angew. Math.*, 173(1935), 245–254.

[3] Rham, G. de. Sur les nouveaux invariants de M. Reidemeister, *Mat. Sb.*, 1(1936), 5, 737–743.

[4] Bass, H., *K*-theory and stable algebra, *Publ. Math. IHES*, 22(1964), 5–60.

А. С. Мищенко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Milnor, J., Whitehead torsion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72(1966), 358–426.

徐森林 译

Reinhardt 区域[Reinhardt domain; кратно круговая область]，多圆域(multiple-circled domain).

在复空间 $\mathbf{C}^n(n\geqslant 1)$ 中的一区域，中心在点 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^n$，具有下列性质：和任意点 $z^0=(z_1^0,\cdots,z_n^0)\in D$ 一起，区域也包含集合

$$\{z=(z_1,\cdots,z_n):|z_\nu-a_\nu|=|z_\nu^0-a_\nu|,\ \nu=1,\cdots,n\}.$$

对 $a=0$ 的 Reinhardt 区域 D 在变换 $\{z^0\}\to\{z_\nu^0e^{i\theta_\nu}\}(0\leqslant\theta_\nu<2\pi,\ \nu=1,\cdots,n)$ 下不变. Reinhardt 区域构成 **Hartogs 区域**(Hartogs domain)的一子类，也是圆形区域(circular domains)的子类，它由下列条件定义：和任意点 $z^0\in D$ 一起，区域包含集合

$$\{z=(z_1,\cdots,z_n):z=a+(z^0-a)e^{i\theta},\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\},$$

即位于通过 a 和 z^0 的复线上具有中心 a 和半径 $|z^0-a|=(\sum_{\nu=1}^n|z_\nu^0-a_\nu|^2)^{1/2}$ 的圆的所有点.

一 Reinhardt 区域 D 称为完全 Reinhardt 区域(complete Reinhardt domain)，如果和任意点 $z^0\in D$ 一起，它也包含多圆盘

$$\{z=(z_1,\cdots,z_n):|z_\nu-a_\nu|\leqslant|z_\nu^0-a_\nu|,\ \nu=1,\cdots,n\}.$$

完全 Reinhardt 区域关于它的中心 a 是星形的(见星形区域(star-like domain)).

完全 Reinhardt 区域的例子是 $\mathbf{C}^n$ 中的球和多圆盘. 一圆形区域 D 称为完全圆形区域(complete circular domain)，如果和任意点 $z^0\in D$ 一起，它也包含整个圆盘 $\{z=a+(z^0-a)\zeta:|\zeta|<1\}$.

一 Reinhardt 区域 D 称为对数凸的(logarithmically convex)，如果集合

$$D^*=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in D:z_1\cdots z_n\neq 0\}$$

在映射

$$\lambda:z\to\lambda(z)=(\ln|z_1|,\cdots,\ln|z_n|)$$

下的象 $\lambda(D^*)$ 在实空间 $\mathbf{R}^n$ 是一凸集. 对数凸 Reinhardt 区域的一个重要性质是：$\mathbf{C}^n$ 中的每一这样的区域都是 $z_1-a_1,\cdots,z_n-a_n$ 的某一幂级数的绝对收敛点集(即收敛域)的内部，反之：任何 $z_1,\cdots,z_n$ 的幂级数的收敛区域都是一具有中心 $a=0$ 的对数凸 Reinhardt 区域.

参考文献

[1] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本：Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of many complex variables, M. I. T., 1966).

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

最后一段归结为：一 Reinhardt 区域是全纯区域(domain of holomorphy)，当且仅当它是对数凸的.

参考文献

[A1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

[A2] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

钟同德 译

关系[relation; отношение]

给定集合 A 的有限 Descartes 幂 $A^n=A\times\cdots\times A$ 的子集，即 A 中元素的 n 元组 $(a_1,\cdots,a_n)$ 的集合.

子集 $R\subseteq A^n$ 称作 A 上的 n 目关系(n-place relation)或 n 元关系(n-ary relation). 数 n 称作关系 R 的秩(rank)或型(type). 子集 $R\subseteq A^n$ 也称作 A 上的 n 目谓词(n-place predicate)或 n 元谓词(n-ary predicate). 记号 $R(a_1,\cdots,a_n)$ 表示 $(a_1,\cdots,a_n)\in R$.

一目关系称为性质(property). 二目关系称为二元的(binary)，三目关系称为三元的(ternary)，等等.

集合 A^n 和 A^n 的空子集 $\varnothing$ 分别称为 A 上的秩为 n 的全关系(universal relation)和零关系(zero relation). 集合 A^n 的对角线，即集合

$$\Delta=\{(a,\cdots,a):a\in A\}$$

称作 A 上的相等关系（equality relation）.

如果 R 和 S 是 A 上的 n 目关系，则 A^n 的下列子集也是 A 上的 n 目关系：

$$R \cup S,\ R \cup S,\ R' = A^n \setminus R \text{ 及 } R \setminus S.$$

A 上的所有 n 元关系组成的集合关于运算 $\cup$, $\cap$, $'$ 是一个 **Boole 代数**（Boolean algebra）. 称 A 上的 $n+1$ 目关系 F 为函数（function），如果对 A 中任意元素 $a_1, \cdots, a_n, a, b$ 可由 $(a_1, \cdots, a_n, a) \in F$ 和 $(a_1, \cdots, a_n, b) \in F$ 得到 $a = b$.

亦见**二元关系**（binary relation）；**对应**（correspondence）.

Д. М. Смирнов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bell, J. and Machover, M., A course in mathematical logic, North-Holland, 1977.

赵希顺 译

相对几何学 [relative geometry; релятивная геометрия]

由彼此成 **Петерсон 对应**（Peterson correspondence）的两曲面 S_0: $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u^1, u^2)$ 和 S: $\mathbf{r}(u^1, u^2)$ 组成的构形的几何学. 这种对应类似于**球面映射**（spherical map），因而可以引入诸如相对面积、相对 Gauss 曲率和相对中曲率等概念，特别有相对极小曲面的概念（见[1]）.

研究参考标架 $\partial\mathbf{r}/\partial u^1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u^2$, $\mathbf{n}$ 的方程的导数可导出曲面 S 的内部相对几何学的有关概念（见[2]）. 这是一种无挠仿射联络（更精确些，无挠等仿射联络）几何学. 一种与球面映射的几何学相仿的二阶几何学的思想也曾被引入过（见[3]）.

在相对几何学的范围内，可以做到在一个整体概形中不仅包括 Euclid 曲面和伪 Euclid 空间的几何学，而且也包括仿射微分几何的几何学. 仿射法线向量 $\mathbf{n}$ 用曲面 S 的渐近线网成为 **Чебышев 网**这个特征来刻画（见[3]）.

相对几何学的进一步推广是**正规化曲面**（normalized surfaces）**理论**（见[4]）. 射影空间中曲面 S 上的每一点 A 联系着两条直线：通过点 A 但和切平面 α 无别的公共点的一阶法线和属于 α 但不通过 A 的二阶法线. 在 S 上定义了关于渐近线网共轭的两种内部几何学. 相对几何学的构造还有许多种推广（见[4]）.

参考文献

[1] Müller, E., Monatsh. Math. und Physik, 31 (1921), 3–19.

[2] Norden, A. P., Sur l'inclusion des théories métriques et affines des surfaces dans la géométrie des systèmes spécifiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 192 (1931), 135–137.

[3] Norden, A. P. (Норден, А. П.), 《Изв. ВУЗов. Математика》, 1958, 4, 172–183.

[4] Norden, A. P. (Норден, А. П.), Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.

А. П. Норден 撰 潘养廉 译

相对同调代数 [relative homological algebra; относительная гомологическая алгебра]

与 Abel 范畴对 $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ 和一个固定函子 Δ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$（见 **Abel 范畴**（Abelian category））相伴的一个同调代数. 函子 Δ 是加性的，正合的，忠实的. $\mathfrak{A}$ 中对象的一个短正合序列

$$O \to A \to B \to C \to O$$

叫作**容许的**（admissible），是指正合序列

$$O \to \Delta A \to \Delta B \to \Delta C \to O$$

在 $\mathfrak{M}$ 中分裂（见**分裂序列**（split sequence））. 借助于容许正合序列类 $\mathscr{E}$，可将 $\mathscr{E}$ 投射（$\mathscr{E}$ 内射）对象类定义为对象 P（对象 Q）的类，使得函子 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(P, -)$ ($\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(-, Q)$) 作用在容许短正合序列上仍然正合.

$\mathfrak{A}$ 的任意投射对象 P 是 $\mathscr{E}$ 投射的，虽然这并不意味着 $\mathfrak{A}$ 中有足够的相对投射对象（即任取 $\mathfrak{A}$ 的对象 A，有 $\mathfrak{A}$ 中某个 $\mathscr{E}$ 投射对象的容许满态射 $P \to A$）. 若 $\mathfrak{A}$ 中包含足够的 $\mathscr{E}$ 投射或 $\mathscr{E}$ 内射对象，则可用同调代数的通常结构在此范畴中构造导出函子，叫作**相对导出函子**（relative derived functors）.

例. 令 R 是有 1 的结合环，$\mathfrak{A}$ 是 R 上的 R 模范畴，$\mathfrak{M}$ 是 Abel 群范畴，Δ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$ 是"遗忘"了模结构的函子. 此时，所有的正合序列都是容许的，因而得到了"绝对的"（即通常的）同调代数.

如果 G 是群，则每个 G 模是一个 Abel 群. 若 R 是交换环 k 上的代数，则每个 R 模是一个 k 模. 若 R 和 S 是环，且 $R \supset S$，则每个 R 模是一个 S 模. 在所有这些情况下，均有 Abel 范畴间的函子可以用来定义相对导出函子.

参考文献

[1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

[2] Moore, J. C., Eilenberg, S., Fundations of relative homological algebra, Amer. Math. Soc., 1965.

В. Е. Говоров, А. В. Михалев 撰 张英伯 译

相对同调 [relative homology; относительные гомологии]

空间偶 (X, A) 的**同调群**（homology group）$H_p^c(X, A; G)$. 它们是用系数在群 G 中的链复形 X 模掉支集落在 A 中的所有链组成的子复形所得的商复形来定义的. 通常这些群经过"切除"手术后并不改变，

即将 (X, A) 换为 ($X\setminus U$, $A\setminus U$) 的手术, 其中 U 是 X 的包含在 A 中的开子集. 相对上同调群 (relative cohomology group) $H^p(X, A; G)$ 则是由链复形 X 中由支集落在 $X\setminus A$ 中的所有上链组成的子复形定义的, 而商复形通常定义了 X 的子集 A 的上同调群.

参考文献

[1] Скляренко, Е. Г., 《Успехи матем. наук》, 34 (1979), 6, 90 – 118. Е. Г. Скляренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987)

[A2] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975.

潘建中 译 沈信耀 校

相对度量 [relative metric; относительная метрика]

度量空间 (metric space) X 的**度量** (metric) ρ 在其一个子集 A 上的限制, 即是乘积 $X\times X$ 上的映射 ρ 在乘积 $A\times A\subset X\times X$ 上的限制. 这个概念可以使度量空间的任何子集也成为度量空间.

Б. А. Пасынков 撰 胡师度、白苏华 译

相对根系 [relative root system; относительная система корней], 定义在域 k 上的连通约化代数群 G 的

群 G 的极大 k 分裂环面 S 在该群的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示的非零权系 $\varphi_k(S,G)$ (见 **Lie 代数表示的权** (weight of a representation of a Lie algebra)). 权本身称为 G 关于 S 的根 (roots of G relative to S). 相对根系 $\varphi_k(S,G)$ 是一个**根系** (root system), 可以视为它在空间 $X(S)\otimes_Z \mathbf{R}$ 中的线性包络 L 的一个子集, 这里 $X(S)$ 是环面 S 的有理特征标群. 设 $N(S)$ 和 $Z(S)$ 分别为 S 在 G 中的正规化子和中心化子, 则 $Z(S)$ 是群 $N(S)$ 的单位元的连通分支; 有限群 $W_k(S,G)=N(S)/Z(S)$ 称为 G 在 k 上的 Weyl 群 (Weyl group of G over k), 或相对 weyl 群 (relative Weyl group). $N(S)$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示确定了 $W_k(S,G)$ 在 L 中的一个线性表示. 这一表示是忠实的, 它的象是根系 $\varphi_k(S,G)$ 的 **Weyl 群** (Weyl group), 故可以将这两个群视为同一. 由于 G 的两个极大 k 分裂环面 S_1 和 S_2 在 k 上共轭, 相对根系 $\varphi_k(S_i,G)$ 和相对 Weyl 群 $W_k(S_i,G)(i=1,2)$ 分别是同构的, 因而它们常常被简记为 $\varphi_k(G)$ 和 $W_k(G)$. 当 G 在 k 上分裂时, 相对根系和相对 Weyl 群分别同 G 的通常的 (绝对) 根系和 Weyl 群相重. 设 $\mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 S 的对应于根 $\alpha\in\varphi_k(S,G)$ 的权子空间. 如果 G 在 k 上分裂, 则对任何 α, $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$, 并且 $\varphi_k(G)$ 是约化根系; 一般情形并非如此: $\varphi_k(G)$ 不必是约化的, 且 $\dim\mathfrak{g}_\alpha$ 可以大于 1. 当 G 在 k 上为单时, 相对根系 $\varphi_k(G)$ 是不可约的.

相对根系在刻画 k 上半单代数群的结构及分类时起重要作用. 设 G 是半单的, T 是定义在 k 上的包含 S 的极大环面. 设 $X(S)$ 和 $X(T)$ 是环面 S 和 T 的带有给定相容序关系的有理特征标群, Δ 是 G 关于 T 的相应的单根系, Δ_0 是由在 S 上平凡的特征标组成的 Δ 的子系. 此外, 设 Δ_k 是相对根系 $\varphi_k(S,G)$ 中由 $X(S)$ 上选定的序关系所确定的单根系; 它由 Δ 的特征标在 S 上的限制组成. Galois 群 $\Gamma=\mathrm{Gal}(k_s/k)$ 自然地作用在 Δ 上, 集合 { Δ,Δ_0,Γ 在 Δ 上的作用 } 称为半单群 G 的 k 指标 (index of the semi-simple group G). 下述定理说明了 k 指标的作用: 精确到 k 同构, k 上每个半单群由它在 k_s 上的同构类, 它的 k 指标和它的**非迷向核** (anisotropic kernel) 唯一确定. 相对根系 $\varphi_k(G)$ 由 Δ_k 和使得 $n_\alpha\alpha\in\varphi_k(G)$ 但 $(n_\alpha+1)\notin\varphi_k(G)(\alpha\in\Delta_k)$ 的自然数 n_α (等于 1 或 2) 的集合完全确定. 反之, Δ_k 和 n_α 可以由 k 指标决定. 特别地, $\Delta\setminus\Delta_0$ 中的两个元素在 S 上的限制相同, 当且仅当它们位于 Γ 的同一轨道中; 这就定义了 Δ_k 和 Γ 在 $\Delta\setminus\Delta_0$ 中的轨道的集合之间的一个双射.

如果 $\gamma\in\Delta_k$, $O_\gamma\subset\Delta\setminus\Delta_0$ 是对应的轨道, $\Delta(\gamma)$ 是 $\Delta_0\cup O_\gamma$ 中的任一连通分支, 但不是所有的顶点都在 Δ_0 中, 则 n_γ 是 $\Delta(\gamma)$ 的最高根的单根分解式中根 $\alpha\in\Delta(\gamma)\cap O_\gamma$ 的系数之和.

如果 $k=\mathbf{R}$, $\bar{k}=\mathbf{C}$, 则上述相对根系和相对 Weyl 群分别与对应的对称空间的根系和 Weyl 群自然等同.

参考文献

[1] Tits, J., Sur la classification des groupes algébriques semisimples, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 249 (1959), 1438 – 1440.

[2] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, 27 (1965), 55 – 150.

[3] Tits, J., Classification of algebraic simple groups, in Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 33 – 62.

В. Л. Попов 撰 蔡传仁 译

相对拓扑 [relative topology; относительная топология], 拓扑空间 (X,τ) 的子集 A 的

(X,τ) 的一切可能的开子集 (即拓扑 τ 的所有元素) 与 A 之交组成的系统. 相对拓扑经常称为诱导拓扑 (induced topology).

拓扑空间 (X,τ) 的一个子集配备了相对拓扑后则称为 (X,τ) 的一个子空间. T_i 空间 $(i=0,1,2,3,$

$3\frac{1}{2}$，见分离公理（separation axiom））的子空间也是 T_1 空间．可度量化空间（metrizable space）的子空间也是可度量化空间．一个 Тихонов 空间，如果它的权 $\leqslant\theta$，则同胚于权 $\leqslant\theta$ 的某个 Hausdorff 紧统的一个子空间（Тихонов 定理（Tikhonov theorem））．

Б．А．Пасынков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kelley, J. L., General topology, v. Nostrand, 1955, p. 50 ff（中译本：J．L．凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982）．　　胡师度、白苏华 译

相对紧集 [**relatively-compact set**; **относительно бикомпактное множество**]

拓扑空间（topological space）X 的一个子集，其闭包为紧集（见**集合的闭包**（closure of a set））．

М．И．Войцеховский 撰　胡师度、白苏华 译

相对开（闭）集 [**relatively-open (-closed) set**; **относительно открытое (замкнутое) множество**]，相对于（或关于）拓扑空间 X 中某个集合 E 的开（闭）集

X 中的集合 M，使得

$$M=E\backslash(\overline{E\backslash M})\quad(M=E\cap\overline{M})$$

（横线表示闭包运算，见**集合的闭包**（closure of a set））．要使 M 是相对于 E 的开（闭）集，充要条件是：M 是 E 和 X 中某个开（闭）集之交．

М．И．Войцеховский 撰

【补注】 拓扑空间中集合 M 是关于 E 的相对开（相对闭）集，充要条件是：就 E 上的**相对拓扑**（relative topology）而言，$M\cap E$ 是 E 中的开（闭）集．

参考文献

[A1] Alexandroff, P. [P. S. Aleksandrov] and Hopf, H., Topologie, Chelsea, reprint, 1972, p. 33ff, 44ff.

[A2] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961, p. 128 ff（译自法文）．

胡师度、白苏华 译

相对论性天体物理学中的数学问题 [**relativistic astrophysics, mathematical problems in**; **релятивистской астрофизики математические задачи**]

天体物理现象的研究中相对论性效应，即狭义或广义相对论（见**相对论**（relativity theory））效应，显著时出现的数学问题．

相对论性天体物理学中的数学问题通常分成与宇宙学——宇宙的结构和演化的科学——有关的问题和某些个别天体的天体物理学问题．А．А．Friedman 的解（见**宇宙模型**（cosmological models））是描述均匀各向同性宇宙的膨胀（或收缩）的宇宙学解的一个例子．对均匀各向异性宇宙学解曾经进行过分类（曾经证认出 9 种 Bianchi 类型）并且进行过充分研究．对于略微偏离 Friedman 解的各向异性和非均匀解（线性近似）曾经进行过详细研究，并且曾经构造出几个简单非线性解．

一个特别感兴趣的问题是一般宇宙学解中存在奇点，在该点达到无穷大物质密度和无穷大时空曲率．曾经证明从前在真实宇宙中所出现的条件下奇点不可避免，并曾构造出广义相对论方程的带有一个奇点的通解．关于偏离传统的广义相对论框架而构造没有奇点的宇宙学解的可能性正进行着积极研究．

一大类问题涉及宇宙膨胀期间（占据空间的）残遗辐射与物质的相互作用的研究，以及能够产生这种辐射的物理过程的研究．

对于某些个别天体的相对论性天体物理学中的数学问题涉及恒星和星团的平衡与稳定．曾经发现白矮星和中子星中的平衡质量，也研究了超重星的相对论性坍缩（它们转变为所谓"黑洞"——仅能通过其引力场可观测的对象）．与相对论性星体（中子星，"黑洞"，等等）的寻找和研究的问题有关，研究了在其中借助磁场的物质吸积问题．

相对论性天体物理学中的数学问题还包括关于引力辐射的研究，弱引力场下真空中的扰动，例如，曲率不变量，满足波动方程，而引力场像电磁波那样扩展于空间中．

参考文献

[1] Зельдович, Я. Б., Новиков, И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967.

[2] Зельдович, Я. Б., Новиков, И. Д., Релятивистская астрофизика, I. Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971（英译本：Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D., Relativistic astrophysics I. Stars and relativity, Chicago, 1971）．

[3] Зельдович, Я. Б., Новиков, И. Д., Релятивистская астрофизика, II. Строение и эволюция Вселенной, М., 1975（英译本：Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D., Relativistic astrophysics II. Structure and evolution of the Universe, Chicago, 1983）．

[4] Peebles, P. J. E., Physical cosmology, Princeton Univ. Press, 1971.

[5] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., Gravitation, Freeman, 1973, Chapt. 30.

[6] Лифшиц, Е. М.,《ЖЭТФ》, 16 (1946), 587－602.

[7] Белинский, В. А., Лифшиц, Е. М., Халатников, И. М.,《УФН》, 102 (1970), 463－500.

[8] Брагинский, В. Б.,《УФН》, 86 (1965), 433－446.

А．А．Рузмайкин 撰

【补注】 亦见**天体物理学的数学问题**（astrophysics, mathematical problems of）.

参考文献

[A1] Zeldovich, Ya. B., Ruzmaikin, A. A. and Sokoloff, D. D. [D. D. Sokolov], Magnetic fields in astrophysics, Gordon & Breach, 1983（译自俄文）.

[A2] Rees, M. J., Phys. Rev. Letters. **28** (1972), 1669–1671.

[A3] Penrose, R., Singularities and time-asymmetry, in S. Hawking and W. Israel (eds.), General Relativity, an Einstein Centenary Survey, Cambridge Univ. Press, 1979, 581–638.

[A4] Landsberg, P. T. and Evans, D. E., Mathematical cosmology, Clarendon Press, 1977.

[A5] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R., The large scale structure of space-time, Cambridge Univ. Press, 1973.

[A6] Weinberg, S., Gravitation and cosmology, Wiley, 1972.

[A7] Chandrasekhar, S., The mathematical theory of black holes, Oxford Univ. Press, 1983.

[A8] Ehlers, J. (ed.), Relativity theory and astrophysics, 1–3, Amer. Math. Soc., 1967.

[A9] Novikov, I. D. and Frolov, V. P., Physics of black holes, Kluwer, 1989（译自俄文）.

徐锡申 译

相对论性动力学 [relativistic dynamics; релятивистская динамика]

相对论（relativity theory）的一个分支，专门研究物体在施加于它们的力的作用下的运动.

在相对论中，自由质点，即不受力作用的质点，具有类时测地线或迷向测地线作为其世界线. 这个事实是相对论中**惯性律**（law of inertia）的一种表达方式.

如果有力作用于粒子，则其世界线与测地线并不重合. 为了描述粒子的运动，引进四维动量向量 p^μ 和四维力向量 g^μ 的概念（$\mu=0,1,2,3$）. 即

$$p^\mu=[E/c;\ \mathbf{p}],\qquad(1)$$

其中 E 是粒子的能量，$\mathbf{p}$ 是粒子的三维动量，而 c 为光速. 四维力向量 g^μ 定义为

$$g^\mu=\left[\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},\ \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right],$$

其中 $\mathbf{F}$ 是三维力而 v 是速度. 应用这些向量，相对论性动力学的基本方程可以写成类似于 Newton 第二定律的运动方程的形式

$$g^\mu=\frac{dp^\mu}{d\tau}=m\frac{du^\mu}{d\tau},\qquad(2)$$

其中 m 是粒子的静质量，u^μ 是四维速度（$p^\mu=mu^\mu$），而 τ 为固有时（$d\tau=\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt$）. 力 g^μ 的具体形式由相对论中研究各种相互作用具体性质的那些分支予以确定. 例如，电磁场中作用于粒子上的力——Lorentz 力（Lorentz force）——采取下列形式

$$g^\mu=-eF^{\mu\nu}u_\nu,$$

其中 e 是粒子电荷，$F^{\mu\nu}$ 是电磁场张量，而 u_ν 是四维速度协变矢量；这里采用 Einstein 求和约定（上下指标重复时对 0, 1, 2, 3 求和）.

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (Теоретич. физика, т. 2). (中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 莱弗西兹，场论，人民教育出版社，1959).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rindler, W., Essential Relativity, Springer, 1977.

徐锡申 译

相对论性流体动力学中的数学问题 [relativistic hydrodynamics, mathematical problems in; релятивистской гидродинамики математические задачи]

有关描述速度接近光速 c 的流体的流动及其与强重力场的相互作用的方程组的问题. 在速度很低 $v\ll c$ 和重力场很弱 $\varphi\ll c^2$（其中，φ 为重力势）的极端情况下，上述问题就化为**流体动力学中的数学问题**（hydrodynamics, mathematical problems in）. 相对论性流体动力学的方程组是通过令能量-动量张量和物质流密度向量的协变散度为零而得到的：

$$T_{ik}=(\varepsilon+p)u_iu_k-pg_{ik}+\tau_{ik},\qquad(1)$$

$$n_i=nu_i+v_i,\ i,k=1,2,3,4,\qquad(2)$$

其中，ε, p 和 n 分别为相对于所考虑的流体单元处于静止的参考系的能量密度、压力和粒子数密度，g_{ik} 为度量张量，u_i 为四维速度，τ_{ik} 和 v_i 为描写与粘性效应相关的那部分能量-动量张量和物质流向量（见[1]）.

下面是求解相对论性流体动力学中的数学问题的一个例子：当声音在以超相对论性状态方程 $p=\varepsilon/3$ 描写的物质中传播时，则对于压力或能量密度的扰动，就得到声速为 $u=c/\sqrt{3}$ 的波动方程（wave equation）.

当考察在具有强引力场的星体（中子星和所谓的"黑洞"）附近以及在充满辐射和物质的膨胀的宇宙中所发生的过程时，就会遇到相对论性流体动力学中的数学问题.

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Механика

сплошных сред, 2 изд., М., 1954 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹., 连续介质力学, 人民教育出版社, 1960).
[2] Зельдович, Я. Б., Новиков, И. Д., Теория тяготения и эволюция звезд, М., 1971. (英译本: Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D., Relativistic astrophysics, 1, Stars and relativity, Chicago, 1971).
[3] Зельдович, Я. Б., Новиков, И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975. (英译本: Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D., Relativistic astrophysics, 2, Structure and evolution of the Universe, Chicago, 1983).
[4] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., Gravitation, Freeman, 1973, Chapt. 22.

А. А. Рузмайкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lichnerowicz, A., Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics, Benjamin, 1967.
[A2] Anile, A. and Choquet-Bruhat, Y. (eds.), Relativistic fluid dynamics, Lecture notes in math., 1385, Springer, 1989.

王克仁 译 诸德超 校

相对论性不变性 [relativistic invariance; релятивистская инвариантность]

物理定律在 Lorentz 变换下保持其形式不变的性质. Lorentz 变换描述从一个惯性参考系到另一个惯性参考系的变换 (见 **Lorentz 变换** (Lorentz transformation)). 物理定律的这个性质通称 Lorentz 不变性 (Lorentz invariance). 当必须强调相对论性不变性包括时间和空间的平移不变性时, 人们说到 Poincaré 不变性 (Poincaré invariance). Lorentz 不变性表达所有惯性系的等价性和时空的均匀性.

广义相对论中从一个局部惯性参考系到另一个惯性参考系的变换下物理定律的不变性称为局部 Lorentz 不变性 (local Lorentz invariance). 广义相对论的有些分支也研究由给定等时线汇 (即由定义参考系) 所确定的量以及相对于空间截面选择的不变量. 这些量称为时间测量不变量 (chronometric invariants).

参考文献

[1] Фок, В. А., Теория Эйнштейна и физическая относительность, М., 1967.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rindler, W., Essential relativity, Springer, 1977.

徐锡申 译

相对论性热力学中的数学问题 [relativistic thermodynamics, mathematical problems in; релятивистской термодинамики математические задачи]

存在强引力场而且速度可与光速相比情况下, 表征物体宏观态的物理量 (热力学量) 之间关系的建立.

正规作法是研究具有给定化学成分的理想流体的平衡热力学. 非相对论性热力学中建立的热力学量之间的关系, 在组成物体的粒子的相对论性宏观运动中和在物体本身的相对论性运动中, 以及在强引力场中, 都保持不变, 如果热力学量是在相对于所研究流体体元或物体为静止的坐标系中取值, 以及如果能量和化学势中包括一切能量形式 (特别是静能).

相对论性热力学的基本方程表述如下:

$(nu^\nu)_{;\nu}=0$ (重子守恒定律);

$d\varepsilon=\mu dn+nTd\sigma$ (热力学第一定律);

$(\sigma u^\nu)_{;\nu}=0$ (绝热性条件);

其中 u^ν 是四维速度. (量 n 是重子密度, ε 是能量密度, T 是温度, $\mu=(\varepsilon+p)/n$ 是化学势, p 是压强, 而 σ 是熵密度. 这些量是与相对于所研究体积元为静止的参考系相联系的.) 在这个情况下, 压强和能量密度由关系式 $p\leqslant\varepsilon/3$ 相联系. 转换到相对于体积元或者 (存在引力场下) 局域观察者为运动的参考系时, 有些量 (例如, 重子固有密度 n 或熵 S) 并不改变, 即, 它们是标量; 但其他量发生改变, 例如

$$\widetilde{T}=Tu^0,\ \widetilde{\mu}=\mu u^0.$$

其中四维速度分量 u^0 沿由物体给定点所描述的世界线选取. 结果, 在恒定引力场情况下, 热平衡条件并不需要温度沿物体的恒定性, 而是需要 $T\sqrt{g_{00}}=$ 常数, 其中 g_{00} 是度规张量的一个分量, 在弱引力场中, $g_{00}=1-2\varphi/c^2$ (φ 是引力势, c 是光速). 在物体以速度 v 运动的参考系中所测得的温度等于

$$\widetilde{T}=\frac{T}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}.$$

熵 S 的相对论性不变性容许人们将热力学第二定律写成非相对论性热力学中通常采取的形式:

$$dS\geqslant\frac{\delta Q}{T},$$

其中供给物体的热量 δQ 和温度 T 以相同方式进行变换. 对于可逆过程取等号.

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Статистическая физика, часть 1, 3 изд., М., 1976 (Теоретич. физика, т. 5) (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹, 统计物理学, 人民教育出版社, 1964).
[2] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A., Gravitation, Freeman, 1973.
[3] Møller, C., The theory of relativity, Clarendon Press, 1952.

А. А. Рузмайкин 撰

【补注】 亦见**热力学中的数学问题** (thermodynamics, mathematical problems in).

参考文献

[A1] Yuen, C. K., *Amer. J. Phys*., 38 (1970), 246.

[A2] Anile, A. and Choquet-Bruhat, Y. (eds.), Relativistic fluid dynamics, Springer, 1989.

[A3] Kluitenberg, G. A. and Groot S. R. de, Relativistic thermodynamics of irreversible processes Ⅲ, *Physica*, 20 (1954), 199－209.

[A4] Tolman, R. C., Relativity, thermodynamics and cosmology, Clarendon Press, 1934. 徐锡申 译

相对性原理 [relativity principle; относительности принцип]

最基本物理定律之一．根据此原理，任何过程，在处于静止状态的物体系中进行和在另一个处于匀速直线运动的这种系统中进行，是完全同样的．运动状态或静止状态是相对于任意选定的**惯性系** (inertial system) 来定义的；用物理术语来说，这些态是完全等价的，相对性原理的一个等效表述如下：物理定律在所有惯性系中采取全同形式．

相对性原理和真空中光速与光源的运动无关的假设，形成狭义**相对论** (relativity theory) 的基础．

БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Rindler, W., Essential relativity, Springer, 1977, Chapt. 1.

[A2] Sachs, R. K. and Wu, H., General relativity for mathematicians, Springer, 1977.

[A3] Eddington, A. S., The mathematical theory of relativity, Cambridge Univ. Press, 1960.

[A4] Trench, A. P., Special relativity, Norton & Cy, 1968.

[A5] Bergmann, P. G., Introduction to the theory of relativity, Dover, reprint, 1976. 徐锡申 译

相对论 [relativity theory; относительности теория]

分析研究物理过程时空性质的物理理论．这些性质对一切物理过程都是共同的，通常简称**时空** (space-time) 性质．时空性质依赖于在给定区域中起作用的引力场．存在引力场时的时空性质在广义相对论 (general relativity theory) 中进行研究，它亦称引力理论 (gravitational theory)．狭义相对论 (special relativity theory) 中，时空性质以近似方式进行研究，其中与引力有关的效应可予以忽略．狭义相对论在下面予以阐述；对于广义相对论，见**引力理论** (gravitation, theory of)．相对论通常亦称 Einstein 相对论 (Einstein relativity theory)，以创立此理论的 A. Einstein 而得名 (见[1]，[2])．

相对论的基本特征． 能用相对论加以描述而与以前的物理理论相区别的特殊 (相对论) 效应，出现在物体速度接近真空中光速 $c \approx 3 \times 10^8 \mathrm{m/s}$ 时，在这些所谓相对论速度 (relativistic velocities) 下，质量为 m 的物体的能量 E 对其速度的依存关系由下列公式

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1}$$

予以描述．在速度 v 远小于 c 时，公式 (1) 取下列形式

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \tag{2}$$

公式 (2) 中右端第二项与经典力学中动能的公式一致，而第一项表明物体静止时具有能量 $E = mc^2$，它称为静能 (rest energy)．在核反应和基本粒子转变过程中，初始粒子的静能可以 (部分地或全部地) 转变为终末粒子的动能．由公式 (1) 可见，非零质量物体的能量当 $v \to c$ 时趋于无穷．如果 $m \neq 0$，物体速度总是小于 c．$m = 0$ 的粒子 (光子和中微子) 总以光速运动．有时说相对论速度下物体质量开始依赖于其速度，而量值

$$m_v = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

称为物体的运动质量 (mass of motion)，而 m 是其静质量 (rest mass)．由公式 (1) 可见，

$$E = m_v c^2.$$

相对论中真空光速是一极限速度，即，相互作用和信号从一点传递到另一点是在不超过光速的速度下发生的．

极限速度的存在与经典力学的概念是不相容的，因而经典时空概念的根本改造是不可避免的．

Einstein 相对性原理和其他不变性原理． 相对性原理是相对论的基础；它阐明：一个孤立物质系统，相对于一个任意选定的**惯性系** (inertial system) 处于静止状态，而另一个**参考系** (reference system) 相对于第一个惯性参考系作匀速直线运动，则在该系统中所进行的任何物理过程 (在给定全同起始条件下) 在两个参考系中是全同的．

相对性原理意味着仅靠任何物理实验不能分清不同惯性参考系．一个运动参考系可以从一个取作静止的参考系通过坐标变换而获得．根据相对性原理得出物理定律相对于这些坐标变换的不变性，它们在所有惯性参考系中采取同一形式．

除去变至运动参考系的变换外，已知还有三类变换并不改变物理过程的行为：空间平移，空间转动和时间平移．物理定律相对于这些变换的对称性仅在孤立系统中才严格满足，它们对应于动量、角动量和能量的守恒定律．

惯性参考系和 Lorentz 变换． 相对论中的惯性参

考系形成单独一类参考系，其中相对论效应具有最简单描述．

相对论中的最基本概念是点事件和光信号．在给定惯性参考系中，一个点事件可由 Descartes 坐标系中三个空间坐标 x, y, z 和一个时间坐标 t 予以表征．各种惯性参考系中的坐标 x, y, z, t 通过 **Lorentz 变换**（Lorentz transformation）相联系．Lorentz 变换的形式可根据相对性原理，对称性条件以及上述变换形成群的要求而获得．如果一个惯性参考系 L' 以速度 V 相对于另一惯性参考系 L 运动，使得 x 轴与 x' 轴重合并与 V 的方向一致，而 y 轴和 y' 轴（以及 z 轴和 z' 轴）相互平行，L 和 L' 中坐标原点在时刻 $t=0$ 重合，同时 $t=0$ 时 L' 中时钟在原点指示 $t'=0$，则 Lorentz 变换具有形式：

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \; z' = z, \\ t' &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

为了获得所有 Lorentz 变换，必须将绕原点的空间转动增加到形式（3）的变换中．Lorentz 变换形成群，称为 Lorentz 群（Lorentz group）．物理定律在 Lorentz 变换下的不变性称为 Lorentz 不变性（Lorentz invariance）或相对论性不变性．

由 Lorentz 变换可得出速度相加的相对论性定律．如果一个粒子在 L 中以速度 v 沿 x 轴运动，则此粒子在 L' 中的速度 v' 等于

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}. \quad (4)$$

公式（4）表明光速确实不依赖于光源的速度 v．

相对论的下列基本效应也是 Lorentz 变换的必然结果：同时性的相对性，时间延缓和物体纵向长度收缩．因而，惯性系 L 中在空间不同点 (x_A, y_A, z_A) 和 (x_B, y_B, z_B) 发生的两个同时事件 A 和 $B(t_A = t_B)$，结果证明在惯性系 L' 中是不同时的：

$$t'_A - t'_B = (x_B - x_A)\frac{V}{c^2}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \neq 0.$$

而且，当 L 系中静止在原点 $(0, 0, 0)$ 的时钟显示时间 t 时，则按照 L' 系中时钟，它此刻空间上与 L 系中时钟一致，时间 t' 等于

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

因而，按照 L' 中观察者的观点，L 中时钟走得慢．然而，根据相对性原理，按照 L 系中观察者的观点，L' 中时钟也走得慢．L 中静止的物体的尺度（所谓固有尺度（proper dimension））相对于 L 中的尺度当给定时刻 t' 在 L' 中测量时，V 方向的收缩因子 $\sqrt{1 - V^2/c^2}$，即

$$l' = l\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

在低速 V，Lorentz 变换（3）直至当 $V/c \to 0$ 时趋于零的量与 Galileo 变换

$$x' = x - Vt, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = t \quad (5)$$

重合．这些变换符合日常经验，其中不会碰到物体以相对论速度运动．特别是，Galileo 变换保持物体的空间尺度和物理过程的持续时间不变．变换（5）及其与空间转动的各种组合形成所谓 Galileo 群（Galileo group）．Lorentz 变换与 Galileo 变换之间的主要差别是 Lorentz 变换中空间坐标 x 出现在时间坐标 t 的变换公式中．因而修正了空间和时间的概念，不能够将物理过程的时间和空间性质彼此分开地予以考虑．这导致时空（space-time）的概念，即，这样一个对象，其几何性质给物理过程的空间和时间性质二者一起予以定义．在经典 Newton 力学中，物理过程的空间性质由三维 Euclid 空间的几何性质予以定义，而时间变量则在方程中作为参量出现．狭义相对论中，四维**伪 Euclid 空间**（pseudo-Euclid space）$E^4_{(1,3)}$，称为 **Minkowski 空间**（Minkowski space），是一个适当的时空模型．时空概念的产生为相对论数学工具的几何化扫清了道路，经证明这对广义相对论的发展具有关键性重要意义．

相对论的数学工具和 Minkowski 空间的几何学．在相对论的公理化描述中，确定相对论第一性概念（点事件和光信号）的性质的公理可从上面所给的基本陈述的非正式描述中引出．这个公理系统要补充上从物理观点看来很自然的公理，它们保证充分大量事件和光信号的存在，以及补充上关于光信号和点事件集合的某些连续性公理．换句话说，这些公理保证每组数 (t, x, y, z) 定义一个点事件．经过这个延伸后，相对论的公理系统经证明等价于 Minkowski 空间的公理系统．因而，Minkowski 空间可用作狭义相对论的一个时空模型．一个点事件在这个时空模型中被解释为 Minkowski 空间中的一个点，该空间的点因此称为世界点（world points）．Minkowski 空间中的每个直角坐标系 (t, x, y, z) 定义一个惯性系，因此相对论中的直角坐标系本身称为 Galileo 系（Galileo systems）．Minkowski 空间中 $t=$ 常数的一个平面称为空间截面（spatial section），对应于给定坐标系．坐标系 (t, x, y, z) 中 Minkowski 空间的线元可表示成下列形式

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

量 ds 称为间隔元（interval element），而量

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

称为间隔平方（square of the interval）.（具有线元

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

的伪 Euclid 空间 $E^4_{(3,1)}$ 也可用作狭义相对论的时空模型.）

这个模型中形成一般 Lorentz 群的变换是连接 Minkowski 空间两个 Galileo 坐标系的变换. 这些变换使间隔保持不变，它们类似于 Euclid 几何中的正交变换. 特别是，Lorentz 变换可取下列形式

$$x' = x\,\text{ch}\,\psi - ct\,\text{sh}\,\psi,$$

$$ct' = -x\,\text{sh}\,\psi + ct\,\text{ch}\,\psi,$$

其中

$$\psi = \text{arc sh}\,\frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

是 (ct, x) 平面内转动的双曲函数角，它具有不定度规.

Minkowski 空间中向量的分类是根据事件间隔平方的符号进行的. 对于 $s^2 > 0$ 的向量称为类时（time-like）向量；对于 $s^2 < 0$ 的向量称为类空（space-like）向量；对于 $s^2 = 0$ 的向量称为类光（light-like）或迷向（isotropic）向量. 如果在 Minkowski 空间中挑选出某点（例如，坐标原点），那么空间可分解为三个区域. 其中两个包含由类时向量与原点相连接的那些点，它们称为绝对未来和绝对过去区域（domains of absolute future and absolute past）. 这些名称与下列事实相联系，对于将给定 Galileo 坐标系与另一 Galileo 坐标系 (t', x', y', z') 相连接的完全 Lorentz 群中的任何变换下，位于绝对未来区域的事件 A 将比事件 0 依然具有较大的时间坐标 t' 的值. 对于由类空向量与点 0 相连接的那些点的区域称为绝对异地区域（domain of absolute elsewhere）. 这个区域以下列事实为表征：不存在任何 Lorentz 变换能使点 A 和点 0 具有全同空间坐标. 这些区域的边界上的点形成点 0 的光锥. 这个光锥上的点由零向量与零点相连接. 每个点粒子（质点）的时空历史对应于 Minkowski 空间中的某条线，称为这个粒子的世界线（world line）. 世界线上的点定义所有时刻粒子的坐标. 所有粒子的速度不能超过光速的事实意味着（在自然平滑性假设下）对世界线的全部切向量不是类时的就是迷向的. 前者对应于具有非零静质量的粒子，而后者对应于静质量为零的粒子. 有质量粒子的世界线上的自然参量称为粒子的固有时（proper time）. 固有时的物理意义是由与粒子一起运动的时钟所计时间.

这个模型中**惯性定律**（law of inertia）的一个表达形式是下列事实，自由粒子，即没有受到力的作用的粒子，具有 Minkowski 空间的类时或迷向直线（即测地线）作为其世界线. 特别是，静质量为零的粒子具有世界线位于光锥上. 广义相对论中，惯性定律的一个表达形式是所谓**测地线假设**（geodesic hypothesis）；在此假设下，除引力外不受其他外力作用的粒子沿相应时空的测地线运动. 连接给定点事件的光信号，在这个模型中被解释为连接相应世界点的迷向测地线段.

Minkowski 空间中连接两个给定世界点 A 和 B 的一个类时测地线，是连接这两个点的所有类时世界线中最长的曲线. 这是根据反三角形不等式得出的，按照此不等式，连接两点的类时折线比连接该两点的单一类时测地线短. 按照相对论的观点，类时测地线长度的最大性意味着粒子自由地从世界点 A 运动到世界点 B 的固有时要比其世界线连接这些世界点的任何其他粒子的固有时为大. 这个事实一般称为双生子佯谬（twin paradox）.

通常在构造表达物理量的张量时，要将几个对应于经典物理学的张量对象联合成 Minkowski 空间中的一个张量对象，例如，能量 - 动量向量是按下列方式形成的：在 Galileo 坐标系中的第一个分量是标量 E/c，而另外三个是动量向量 $\mathbf{p}$ 的三个分量，这由 $(E/c, \mathbf{p})$ 表示. 为了区别 Mikowski 空间的张量与其空间截面上的张量，后者曾经在经典物理学中研究过，人们一般把前者说成是四维张量.

物理量是四维张量的某些例子是：四维向量

$$u^\mu = \left[\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};\ \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right],$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3,$$

称为四维速度. 这个向量是一个粒子的世界线上的单位切向量. 向量

$$g^\mu = \left[\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right],$$

其中 $\mathbf{F}$ 是力，是四维力向量. 应用这些向量，相对论性动力学的基本方程可以写成下列形式

$$g^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m\frac{du^\mu}{d\tau}$$

当代物理学中相对论的作用. 相对论很高程度上为事实所支持，并且为分析研究相对论速度下的现象的所有当代理论形成基础. 建立在经典电动力学基础上的电磁学理论的发展，只有通过相对论才有可能（历史上，经典电动力学，尤其是运动物体的光学，的基础的分析，导致相对论的构造）. 相对论形成量子电动力学以及基本粒子强和弱相互作用的理论的基础. 基本粒子运动和嬗变的量子定律在相对论性量子场论（quantum field theory）中进行研究.

参考文献

[1] Einstein, A., Elektrodynamik bewegter Korper, *Ann. der Phys.*, 17 (1905), 891 – 921.

[2] Einstein, A. and Infeld, L., The evolution of physics, Simon & Schuster, 1962.

[3] Minkowski, H., Raum und Zeit, *Phys. Z.*, 10 (1909), 104 – 111.

[4] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (Теоретич. физика, т. 2) (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗西兹, 场论, 人民教育出版社, 1959).

[5] Feynman, R. Leighton, R. and Sands, M., The Feynman lectures on physics, 2, Addison-Wesley, 1965.

[6] Pauli, W., Relativitätstheorie, Teubner, 1921.

[7] Synge, J. L., Relativity: the general theory, North-Holland, 1960.

[8] Tolman, R., Relativity, thermodynamics and cosmology, Clarendon Press, 1969.

[9] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967.

[10] Александров, А. Д., 《Вопросы философии》, 5 (1953), 225– 245

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Fock, V. A. [V. A. Fok], The theory of space, time and gravitation, MacMillian, 1954 (译自俄文).

[A2] Weyl, H., Raum, Zeit, Materie, Springer, 1923.

[A3] Penrose, R., The structure of space-time, in C. M. DeWitt and J. A. Wheeler (eds.), Batelle Rencontre in Math. and Physics, Benjamin, 1968, 121 – 235.

[A4] Schouten, J. A., Tensor analysis for physicists, Cambridge Univ. Press, 1951.

[A5] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[A6] Synge, J. L. and Schild, A., Tensor calculus, Toronto Univ. Press, 1959.

[A7] Sachs, R. K. and Wu, H., General relativity for mathematicians, Springer, 1977.

[A8] Lawden, D. F., An introduction to tensor calculus and relativity, Methuen, 1962.

[A9] Eddington, A. S., The mathematical theory of relativity, Cambridge Univ. Press, 1960.

[A10] Einstein, A. et al., The principle of relativity. A collection of original papers, Dover, reprint, 1952.

[A11] Einstein, A., The meaning of relativity, Princeton Univ. Press, 1956.

徐锡申 译

松弛法[relaxation method 或 weakening method; **релаксации метод]**

求解线性代数方程组 $Ax=b$ 的一种迭代解法，该方法的每一个基本计算步只修正未知向量的一个分量，待修正变量的分量的指标在一个特定的循环次序里选定．在求解关于正定矩阵 A 的方程组时松弛法是最常用的．

如果未知数的向量 x^k 的一个分量的变化使得对于新的近似值 x^{k+1} 而言二次型 $(A(x^{k+1}-x), x^{k+1}-x)$ 最小，则这种松弛法称为完全松弛法 (complete relaxation method)，但如果在一个基本计算步之后该二次型的值只是下降而并非最小，则该松弛法称为不完全松弛法 (incomplete relaxation method).

曾被充分研究过的一种方法是逐次超松弛法 (successive upper relaxation)，其中矩阵 A 具有所谓性质 (A) 并已排好序．一个矩阵 A 称为具有性质 (property)(A)，假如存在置换阵 P 使得矩阵 PAP^T 具有形式

$$\left\| \begin{matrix} D_1 & H \\ K & D_2 \end{matrix} \right\|,$$

其中 D_1 和 D_2 为对角方阵．

松弛法的迭代格式如下

$$(D+\omega L)x^{k+1} = ((1-\omega)D - \omega U)x^k + \omega b,$$

$$k = 0, 1, \cdots,$$

其中 ω 为松弛参数，在分解式 $A = D + L + U$ 中的 D 是对角阵，L 和 U 分别为下、上三角形矩阵．如果 $\omega > 1$ 则称之为上松弛法 (upper relaxation method (over-relaxation))，而若 $\omega \leqslant 1$，为下松弛法 (lower relaxation method)．参数 ω 是根据下述迭代变换矩阵 S 的谱半径 (spectral radius) 的最小化条件确定的

$$S = (D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U).$$

如果 A 是对角元素为正的对称矩阵，λ_i 是行列式方程 $\det(L+\lambda D+U)=0$ 的根，那么参数 ω 的最优值由下式给出

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{1+\sqrt{1-\lambda_0^2}},$$

其中 $\lambda_0^2 = \max \lambda_i^2$．当 $\omega = \omega_0$ 时 S 的谱半径为

$$\omega_0 - 1 = \frac{1-\sqrt{1-\lambda_0^2}}{1+\sqrt{1-\lambda_0^2}} < 1.$$

对于有的 λ_i 是复数的情形已被研究过．还发展了多种块松弛法．

参考文献

[1] Young, D. M., Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76 (1954), 1, 92 – 111.

[2] Young, D. M., Iterative solution of large linear systems, Acad. Press, 1971.

[3] Wasow, W. and Forsyth, J., Finite-difference methods for partial differential equations, Wiley, 1960.

[4] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960 (中译本: Д. К. 法捷耶夫, В. Н. 法捷耶娃, 线代数计算方法, 上海科学技术出版社, 1965).

[5] Hageman, L. A. and Young, D. M. Applied iterative methods, Acad. Press. 1981.

Е. С. Николаев 撰 张宝琳 袁国兴 译

松弛振动 [**relaxation oscillation**; **релаксационное колебание**]

一个周期过程, 其中某一物体的状态在有限时间区间中的缓慢光滑的变化与状态在无限短时间中急速无规的变化交替出现. 在许多机械的、无线电的、生物的等各方面的事物中都会看到这种振动过程(例如见[1]-[3]).

描述松弛振动的数学模型是一种常微分方程的自治系统(autonomous system), 其中有小参数出现在某些导数前, 即:

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad \dot{} = \frac{d}{dt}, \quad (1)$$

$$x \in \mathbf{R}^k, \quad y \in \mathbf{R}^m, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

这个系统的一个关于时间 t 为周期的解就称一松弛振动(relaxation oscillation). **van der Pol 方程**(van der Pol equation)是这类系统的具有一个自由度的松弛振动的传统的例子:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \lambda(1 - x^2)\frac{dx}{d\tau} + x = 0, \qquad (2)$$

参数 λ 有大的正值(从这个观点看来, $\lambda = 10$ 就可以看作很大了). 令

$$y = \int_0^x (x^2 - 1)dx + \frac{1}{\lambda}\frac{dx}{d\tau}, \; t = \frac{\tau}{\lambda}, \; \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2},$$

方程(2)就化为(1)那样形式的方程组:

$$\varepsilon\dot{x} = y - \frac{x^3}{3} + x, \quad \dot{y} = -x.$$

方程组(1)的松弛振动的存在性与其个数的问题要用其退化方程组(degenerate system)

$$f(x, y) = 0, \; \dot{y} = g(x, y) \qquad (3)$$

来解决, 这是一个混杂方程组. 方程组(3)在相空间 $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m$ 中的轨道自然地被看作为非退化方程组(non-degenerate system)(1)的相轨道当 $\varepsilon \to 0$ 时的极限. 特别是, 方程组(1)的松弛振动的轨道当 $\varepsilon \to 0$ 时, 趋向于方程组(3)的闭轨道, 后者由两类弧段交替组成: 第一类是方程组(3)的相点在有限时间内经过的弧段且它们都位于曲面 $f(x, y) = 0$ 上, 另一类则是方程组(3)的相点在瞬间由 $f(x, y) = 0$ 上之一点"跳到"另一点时经过的弧段(第二类弧段中的每一个都始于一个折点(break point), 即适合

$$f(x, y) = 0, \quad \det\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\| = 0$$

之点, 这个弧段位于一个平行于 $\mathbf{R}^k$ 的平面上, 而终于曲面 $f(x, y) = 0$ 上). 方程组(3)之相应于这样的闭轨的解称为一个间断周期解(discontinuous periodic solution). 所以方程组(1)的松弛振动时常称为近于间断的周期解(periodic solution close to discontinuous one), 或者甚至简称为间断振动(discontinuous oscillation). (方程组(3)也可能有闭轨道完全位于曲面 $f(x, y) = 0$ 上而不经过折点. 这时, (1)也有接近于它的闭轨, 但方程组(1)的这个周期解并非松弛振动; 见[6]).

一个重要的问题是方程组(1)的松弛振动的相轨道的渐近(当 $\varepsilon \to 0$ 时)计算, 以及建立这个振动的特征(如周期, 振幅等)的渐近公式. van der Pol 方程的松弛振动的轨道曾由 А. Д. Дородницын 计算过([7]), 他作出了 $\lambda \to \infty$ 时振幅的渐近近似

$$a = 2 + 0.77937\lambda^{-4/3} - \frac{16}{27}\frac{\ln\lambda}{\lambda^2} + $$
$$- 0.8762\lambda^{-2} + O(\lambda^{-8/3}),$$

关于周期(亦见[8]), 则有

$$T = 1.613706\lambda + 7.01432\lambda^{-1/3} - \frac{2}{3}\frac{\ln\lambda}{\lambda} + $$
$$- 1.3233\lambda^{-1} + O(\lambda^{-5/3}).$$

若方程组(1)是二阶的(即 $k = m = 1$)且有一般位置的折点, 松弛振动的渐近计算问题已完全解决([9]). 特别是, $\varepsilon \to 0$ 时松弛振动周期的渐近展开式的构造已经弄清楚:

$$T = T_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\chi(n-2)} K_{n,\nu} \ln^{\nu}\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\chi(n) = \frac{n}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\tan\frac{\pi n}{3}, \; n \in \mathbf{Z};$$

系数 $K_{n,\nu}$ 可以直接由函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 有效地算出来(见[10]). 对一般的任意阶的方程组(1), 迄今未能超过 Л. С. Понтрягин 和 Е. Ф. Мищенко (1983)的工作; 他们计算了松弛振动的精确到 $O(\varepsilon)$ 的渐近式(见[11], [12], [9]).

常微分方程的非自治系统的松弛振动类型的周期解也有人研究过(例如见[13]).

参考文献

[1] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959 (英译本: An-

dronov, A. A., Vitt, A. A. and Khaikin, S. E., Theory of oscillators, Dover, reprint, 1987).
[2] Ланда, П. С., Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы, М., 1980.
[3] Романовский, Ю. М., Степанова, Н. В., Чернавский, Д. С., Математическое моделирование в биофизике, М., 1975.
[4] Pol, B. van der, *Phil. Mag. Ser.* 7, **2** (1926), 11, 978 – 992.
[5] Железцов, Н. А., Родыгин, Л. В., 《Докл. АН СССР》, **81** (1951), 3, 391 – 394.
[6] Аносов, Д. В., 《Матем. сб.》, **50** (1960), 3, 299 – 334.
[7] Дородницын, А. А., 《Прикл. матем. и механ.》, **11** (1947), 3, 313 – 328.
[8] Жаров, М. И., Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х., 《Докл. АН СССР》, **261** (1981), 6, 1292 – 1296.
[9] Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975 (英译本: Mishchenko, E. F., Rozov, N. Kh., Differential equations with small parameters and relaxation oscillations, Plenum, 1980).
[10] Розов, Н. Х., 《Докл. АН СССР》, **145** (1962), 1, 38 – 40.
[11] Понтрягин, Л. С., 《Изв. АН СССР, сер. матем.》, **21** (1957), 5, 605 – 626.
[12] Мищенко, Е. Ф., 《Изв. АН СССР, сер. матем.》, **21** (1957), 5, 627 – 654.
[13] Levi, M., Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations, Amer. Math. Soc., 1981.

Н. Х. Розов 撰

【补注】 对于有弱强迫力和弱耦合的松弛振动，可以导出这些振子的同步化与相移的公式（见[A1]）. 在此文中还给了关于松弛振动的西方文献的综述. 此外，还给出了一个分析混沌松弛振动的方法.

当一个松弛振动被一个 Hopf 分歧从一个稳定平衡位置分枝开来以后，可以看到一个典型的过渡，即在[A2]"捉鸭子问题"中所称的"鸭子". 它最先是用非标准分析从数学上分析的，见[A2].

研究扰动方程

$$\dot{x}=f(x, y), \quad y=\varepsilon g(x, y) \qquad \text{(A1)}$$

以及相应的有约束微分方程（constrained differential equation）

$$\dot{x}=f(x, y), \quad g(x, y)=0 \qquad \text{(A2)}$$

及其解的相互关系，这属于奇异扰动（singular perturbation）理论，亦见带小参数的微分方程（differential equations with small parameter）和边界层理论（boundary-layer theory）. [A3]－[A5]是选出的关于奇异扰动的参考文献. [A6]－[A8]是关于（A1）和（A2）的解的相互关系的早期的文献. 为了讨论（A1），（A2）的解的关系，需要有关于如（A2）那样的有约束微分方程之解的适当概念. 关于这一点可见[A9]，[A10].

[A11]的第 34～35 页中有关于 van der Pol 方程的松弛振动的简明，扼要的讨论（完整而且有图），亦见[A12]的第 14.2 和 14.3 节.

"松弛振动"一词是 B. van der Pol 在 1926 年引入的.

参考文献

[A1] Grasman, J., Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications, Springer, 1987.
[A2] Callot, J. L., Diener, F. and Diener, M., Le problème de la "chasse au canard", *C. R. Acad Sci. Paris*, **A 286** (1987), 1059 – 1061.
[A3] Chang, K. W. and Howes, F. A., Nonlinear singular perturbation phenomena: theory and application, Springer, 1984.
[A4] Eckhaus, W., Asymptotic analysis of singular perturbations, North-Holland, 1979.
[A5] O'Malley, R. E., Jr., Introduction to singular perturbations, Acad. Press, 1974.
[A6] Levinson, N., Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear systems of differential equations, *Acta Math.*, **82** (1950), 71 – 106.
[A7] Lebovitz, N. R. and Schaar, R., Exchange of stabilities in autonomous systems, *Studies Appl. Math.*, **54** (1975), 229 – 260.
[A8] Levin, J. and Levinson, N., Singular perturbations of nonlinear systems of differential equations and an associated boundary layer equation, *J. Rat. Mech. Anal.*, **3** (1954), 247 – 270.
[A9] Takens, F., Constrained equations: a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions, in P. Hilton (ed.), Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences, Springer, 1976, 143 – 234.
[A10] Sastry, S. S., Desoer, C. A. and Varaiya, P. P., Jump behaviour of circuits and systems, IEEE Trans. Circuits and Systems (1980).
[A11] Nayfeh, A., Perturbation methods, Wiley, 1973.
[A12] Rabinovich, M. I. and Trubetskov, D. I., Oscillations and waves in linear and nonlinear systems, kluwer, 1989（译自俄文）.

齐民友 译

中继触点模式 [**relay-contact scheme**; **релейно-контактная схема**]，中继触点网络（relay-contact network），中继触点电路（relay-contact circuit）

由在离散瞬间工作的触点和中间继电器所构成的电子设备的数学模型. 从数学观点看，中继触点电路

属于第一类控制系统（control system），也是有限自动机（automaton．finite）概念的最早方案之一．中继触点电路的概念始创于 1938 － 1944 年间（见[1]－[3]）．

从数学角度看，中继触点电路是一个有限图（graph），它的所有边和一些特定顶点用如下字母表中的符号来表示：

$$x=\{x_1,\overline{x}_1,\cdots,x_n,\overline{x}_n\},\ Y=\{Y_1,\cdots,Y_m\},$$
$$y=\{y_1,\overline{y}_1,\cdots,y_m,\overline{y}_m\},$$
$$a=\{a_+,a_-,a_1,\cdots,a_s\}.$$

每个特定顶点（称为端点（pole））被标上字母集 a 中的一个符号，不同的端点标以不同的符号．图中边的集合划分为 3 个不相交的子集 R、K_1、K_2．每个子集中的边按如下规定标上 Y, x 和 y 中的符号：R 中的每条边被标上 Y 中的一个符号，R 中的所有不同边标以不同的符号，Y 中的所有符号均被 R 中的边所标．$K_1(K_2)$ 中的每条边被标上 $x(y$ 对应 $K_2)$ 中的一个符号，几条边可标以同一个符号，还有一些符号未被任何边标用．如果集合 Y 是空的，那么集合 K_2 也是空的．这时（设仅 K_1 不空），中继触点电路称为**触点模式**（contact scheme）．两个中继触点电路称为同构的，如果它们的图是同构的且相应的边和端点均标以相同的符号．

端点 a_+ 称为输入端点（input pole），端点 a_1，…，a_s 均称为输出端点（output pole）．端点 a_- 有时也作为输出端点．标以 x 中符号的边称为基本中继触点（contacts of basic relays）（或基本触点（basic contacts））；标以符号 Y_i，y_i，$\overline{y}_i$ 的所有边构成的集合称为第 i 个中间继电器（i-th intermediate relay），$i=1$，…，m；由 y 中的符号标定的边称为中间继电器触点（contacts of intermediate relays）；由 Y 中的符号标定的边称为绕组（windings）．对应于图的简单链，由中继触点电路的几个顶点之间的触点和绕组构成的序列称为链（chain）．

在离散时刻 1，…，t，… 工作的中继触点电路，其运作可由每个时刻的通导性术语来表达，即在每个时刻（在所考虑的模型中），该通导性是以 Boole 函数的形式表示的．触点 x_j，$\overline{x}_j$，$j=1$，…，n，在任何时刻 t 的通导性等于相应变量（x_j 或 $\overline{x}_j$）的值．中间继电器的触点 $y_i(i=1,\cdots,m)$ 在时刻 1 的通导性为 0，而触点 $\overline{y}_i$ 在时刻 1 的通导性为 1；绕组的通导性（conductivity of a winding）恒为 1．每个绕组在时刻 t 可以处于不同的状态．绕组在时刻 t 的状态（在二值模型中 1 和 0 分别表示“导通”与“截止”）可以用不同的方法来定义．例如，绕组 Y_i 在时刻 t 处于状态 1，当且仅当下述 a）或 b）满足．a）端点 a_+ 与 a_- 之间有一条链 σ 经过 Y_i，并且该链在时刻 t 的通导性为 1（链的通导性下文有定义）．b）满足条件 a），但在时刻 t，不存在这样的链：仅由通导性为 1 的触点构成，又连接链 σ 的两端点（位于 Y_i 两侧）．

在时刻 t，中间触点 $y_i(\overline{y}_i)$ 的通导性取决于绕组 Y_i 在时刻 $t-1$ 的状态；更确切地说，y_i 的通导性与 Y_i 的状态一致，$\overline{y}_i$ 的通导性与其相反．在时刻 t，中继触点电路两端点间的链的通导性等于该时刻链上的触点和绕组的通导性之合取（逻辑“与”）．因此，一般说来各绕组在时刻 t 的状态依赖于变量 x_1，…，x_n 在以前各时刻的值构成的集合的序列．如果在后继各时刻中，变量 x_1，…，x_n 的值由一对端点 a_+ 和 $a_k(k=1,\cdots,s)$ 之间的取值序列来提供，在特殊情况下也由 a_+ 和 a_- 之间的取值来提供，这样就定义了一个有限状态序列函数（finite-state sequential function）．同构的中继触点电路实现相同的有限状态序列函数．如果中继触点电路中变量 x_1，…，x_n 取值于由（σ_1，…，σ_n）构成的同一集合，且从某具体时刻 t 开始，各中间继电器的绕组不再改变状态（对变量 x_1，…，x_n 的值构成的每个集合成立），这时称这些绕组的状态是“稳定的”，且称这个中继触点电路实现了 Boole 函数．如果从时刻 t 开始，对于变量 x_1，…，x_n 的值的所有选取，这些绕组是稳定的，则称中继触点电路为 1 周期（one-cycle）的，如果稳定性是从 $t+\tau$ 时刻开始的，则称中继触点电路为 τ 周期（τ-cycle）的．

中继触点电路的复杂度（complexity）定义为电路中所有基本触点、中间触点和绕组的权数（或复杂指数）之和．能够实现 n 元最复杂可实现 Boole 函数的一个最简单中继触点电路的复杂度渐近表达形式为 $\rho 2^n/n$，其中 ρ 是常数，依赖于电路运作所选择的方式、电路的拓扑性质和中继触点与绕组的复杂程度．

参考文献

[1] Shannon, C., A symbolic analysis of relay and switching circuits, *AIEE Trans.*, 57 (1938), 713 － 723.

[2] Гаврилон, М. А., Теория релейно-контактных схем, 2 изд., Минск, 1950.

[3] Шестаков, В. И., 《Уч. зап. МГУ. Математика》, 73 (1944), 5, 45 － 48.

[4] Лупанов, О. Б., 《Проблемы кибернетики》, 11 (1964), 25 － 47.

Н. А. Карпова 撰

骆源 符方伟 沈世镒 译 徐书润 校

控制系统的可靠性和检验［**reliability and inspection of control systems**；**надежность и контроль управляющих систем**］，控制系统可靠性中的问题（problems in the reliability of control systems）

控制系统理论的一个分支，它研究处于噪声干扰下的控制系统．

设 $\mathfrak{U}=\{U\}$ 是某个控制系统类，且假设存在噪声源或失效源，其效应为使**控制系统**（control system）U 转化为某个类 $\mathfrak{U}'$ 中的控制系统 $U_1,\cdots,U_r$. 如果假定噪声源也能使控制系统保持不变，例如 $U_1=U$，那么 $\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{U}'$. 假设 $\mathfrak{U}'$ 中的每个控制系统完全由它的模式 Σ 唯一确定；那么噪声源的作用归结为它对 Σ 的作用．一个失效源对模式的变换，表现为下列形式之一：a）破坏元素工作，即使得元素发生变化；b）使元素间的联络发生变化；等等．作为失效源作用的结果，U 原来的模式 Σ 变动为分别定义控制系统 $U_1,\cdots,U_r$ 的"错误"的状态 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_r$，其中 $\Sigma_1=\Sigma$. 与这些模式相联系的有对应的函数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_r$，它们称为失效函数（failure function）（这里，$\varphi_1=\varphi$ 刻画原来的控制系统的功能）．失效源通常还或者用误差概率分布，或者在基本失效可能的个数上作限制来补充刻画．

可靠性问题（reliability problem）主要对三类控制系统来考虑：**功能元图**（diagram of functional elements），**触点模式**（contact scheme）和**自动机**（automaton）.

设 $\mathfrak{U}$ 是功能元图类，后者属于给定的基 B，其中 $B=B_1\cup B_2$，$B_1=\{F_1,\cdots,F_s\}$. 如果失效源只影响图的元素，则它把 B_1 中的元素 $F_i\,(i=1,\cdots,s)$，转化为与 F_i 有同样输入个数的元素，但是有可能具有不同的功能；B_2 中的元素保持不变．这样 B_1 由不可靠的元素组成，而 B_2 由可靠元素组成．在这一情形下，失效源可以用元素 $F_1,\cdots,F_s$ 相应的失效概率 $p_1,\cdots,p_s$ 来描述．例如，B_1 可以是由非元素、与元素以及或元素组成，B_2 由分别执行功能 $\overline{x}$, x_1 与 x_2，$x_1\vee x_2$ 以及 $h(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$ 的表决元素所组成．这里可以假定 $p_1=p_2=p_3=p$ 是 B_1 的元素的（公共）失效概率．

当 $\mathfrak{U}$ 是触点模式类时，可以考虑这样的失效源：其中基本失效或者是短路，或者是断路．在这一环境中，另外假定在执行 n 个变量的函数的触点模式中，至多发生 $m(n)$ 次基本失效．

联系这样的系统的可靠性与检验所引起的问题可以分为三种类型．

Ⅰ．不可靠元素的可靠模式设计．这一理论分支已经对于下列两类系统得到发展：触点模式和功能元图．对于后者，Σ 是由其中其功能不准确情形的某个发生概率 p 来刻画的．这里有两类基本问题．

1）基 B 必须有怎样的性质才使下列情形有可能：对于任何 **Boole 函数**（Boolean function）$f(x_1,\cdots,x_n)$ 和任何 $\varepsilon>0$，可构造一个实现 f 的图，使得错误执行的概率小于 ε? 换句话说，要求任何 Boole 函数将通过可靠性可任意要求的图来实现．

已经建立的是，存在这样的基，其中任何 Boole 函数可能通过可靠性可任意要求的图来实现．一个这样的基的例子是上面的基 B：B_1 由失效概率为 $p<1/3$ 的非元素、与元素以及或元素组成，而 B_2 由绝对可靠的表决元素组成．使任何 Boole 函数可通过可靠性可任意要求的图来实现的 B 的充要条件已经建立．

2）构造一种其不可靠性不超过预定的值 ε 的 Boole 函数的极小（或某种意义下的几乎极小）实现综合方法．看来（例如对于上述基，且 $p<1/9$），可以构造一种图的综合方法，其中对于大多数 Boole 函数和给定的 ε，产生（按 n）渐近极小的图．特别是，对在上述例子中的 B，关于表达以不可靠程度不超过 ε 的实现任何 n 个变量的 Boole 函数足够的元素的极小个数的 Shannon 函数（Shannon function）$L(n,\varepsilon)$，有下列渐近关系：

$$L(n,\varepsilon)\sim\frac{1}{2}\,\frac{2^n}{n}\,.$$

Ⅱ．自校正模式的设计．这一方向对于两个控制系统类——触点模式和功能元图已经有过最为完全的研究．在这一环境中，失效源是由基本故障个数上的约束来刻画的．假定在所讨论的范围内，在模式中没有进一步的变化发生．实现函数 Φ 的模式 Σ 称为相对于给定的失效源是自校正的（self-correcting），如果 $\Phi_i=\Phi$，$i=1,\cdots,r$. 换句话说，自校正模式不顾失效源的效应，总能准确作用．例如，图 1 是实现函数 $x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$ 的触点模式对于至多产生一次断路的源来说是自校正的．

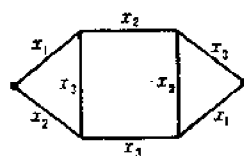


图 1

在这一领域中的主要问题是：1）阐明自校正模式存在的条件；2）制定极小（或某种意义下的几乎极小）自校正模式的综合方法．下面指出，对带有短路和断路的次数不超过 $m(n)$ 次的失效源的触点模式的例子，这些问题有解．

原来，对于任何 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可以构造相对于这种失效源的自校正模式．这可以取任何实现 f 的触点模式 Σ 来达到，其中把每个触点 x^σ 代替为由 $m+1$ 个串连的恒同的模块组成的子模式，而每个模块又由 $m+1$ 个并联的给定的触点 x^σ 的复本所组成．这种模式称为平凡自校正模式（trivial self-correcting scheme）．所构造的模式比原来的模式复杂 $(m+1)^2$ 倍．图 1 的例子说明，存在非平凡的自校

正模式．

设计自校正模式的问题是带有附加条件的控制系统的综合问题的特殊情形．这里的主要结果是：对于大多数 Boole 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可以设计（相对于某个源类的）其复杂性（随 $n\to\infty$）渐近趋向于无自校正要求的实现 f 的极小模式的复杂性的自校正模式．已经指出，在对 $m(n)$ 的增长阶附加一定的限制下，Shannon 函数满足下列渐近关系

$$L_m(n)\sim\frac{2^n}{n}.$$

Ⅲ．**控制系统的检验**．这一领域已经对于三种系统类：触点模式、功能元图和自动机，得到最完全的研究．对于控制系统的检验问题的考虑，预先如下假设：1）具有这样的失效源：它使控制系统发生故障后，使其保持其失效状态，且不再发生进一步的故障；2）规定检验目标；后者定义为给定的控制系统的某个性质的检测．例如，确定给定的控制系统是否准确起作用（校验问题），或者，如果控制系统失效，则检测出失效源（诊断问题）；3）规定检验手段．检验可能在模式中无干预或有干预情况下进行——例如，用标准元素来取代元素，交换同样类型的模块，在模式中利用补充校验点，等等．检验手段也包括某些提取有关控制对象信息的程序．所有这些都要做实验，它们被区分为两种范畴的实验——无条件的和有条件的．在无条件实验（unconditional experiment）中，送到控制装置输入的信号字符串是预先确定的，而与输出的字符串无关．在条件实验（conditional experiment）中，在输入字符串中的逐个字符可以依赖于在上一个时间瞬间的输出中出现的字符来选取．

允许检测一个给定的性质的实验组称为试验（test）．因为为检测任何所要求的性质，通常都有大量不同的试验，所以可在试验集中引入复杂性的度量，且力求有极小复杂性的试验．这里的主要问题是如何对于每种性质设计极小或几乎极小的试验．这是更一般的问题——构造识别各种性质的紧凑算法的一部分．

为解释这一点，考虑这些问题对于触点模式和功能元图的解，且假定模式中无干涉．这里出发点是模式 Σ 实现 Φ 时的失效函数列 $\Phi_1,\cdots,\Phi_r$，其中 $\Phi_1=\Phi$．这时，可能对于某个对 (i,j) 发生 $\Phi_i=\Phi_j$，它意味着第 i 种失效和第 j 种失效是不可区分的．这样，函数集 $\{\Phi_i\}$ 可分为若干个等价类 $\varphi_1,\cdots,\varphi_l$，使得 Φ_i 和 Φ_j 属于同一类，当且仅当 $\Phi_i=\Phi_j$；假定 Φ_1 在类 φ_1 中．同一类函数所产生的失效是不可区分的．类 $\varphi_1,\cdots,\varphi_l$ 生成一个失效函数表．

例．图 2 的触点模式执行函数

$$\Phi=\bar{x}_1x_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3,$$

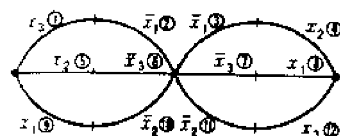


图 2

而失效源至多产生一次断路．这里，$\Phi_1=\Phi_2$，$\Phi_3=\Phi_4$，$\Phi_5=\Phi_6$，$\Phi_7=\Phi_8$，$\Phi_9=\Phi_{10}$，$\Phi_{11}=\Phi_{12}$．这样就有七个类：$\varphi_1=\{\Phi\}$，$\varphi_2=\{\Phi_1,\Phi_2\}$，…，$\varphi_7=\{\Phi_{11},\Phi_{12}\}$．生成失效函数表如下．待检测的性质通常用表示需要区分的失效函数类的指标的对 (i,j) 的子集 $\mathfrak{N}$ 来规定．例如，如果 $\mathfrak{N}=\{(1,i)\}$，$i=2,\cdots,l$，则性质是准确运作的模式与任何失效状态的可区分性（校验问题）．如果 $\mathfrak{N}=\{(i,j)\}$，$i\neq j$，$1\leqslant i,j\leqslant l$，则人们要求知道怎样区分每个状态与任何其他的状态（诊断问题）．最后，如果 $\mathfrak{N}=\{(i,j)\}$，$1\leqslant i\leqslant l_0<j\leqslant l$，则就有"模块"诊断问题，即，识别包含失效元素的模式部分．

字符串	$x_1x_2x_3$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
e_1	001	1	0	1	1	1	1	0
e_2	011	1	0	0	1	1	1	1
e_3	010	1	1	0	0	1	1	1
e_4	110	1	1	1	0	0	1	1
e_5	100	1	1	1	1	0	0	1
e_6	101	1	1	1	1	1	0	0
e_7	000	0	0	0	0	0	0	0
e_8	111	0	0	0	0	0	0	0

设 $\{e_1\cdots,e_k\}$ 是在其上定义函数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_l$ 的字符串集．由 $\{e_1,\cdots,e_k\}$ 中选取的一个字符串集 $T=\{e\}$ 称为对于给定的失效函数表（failure function table）的相对于子集 $\mathfrak{N}$ 的试验（test），如果对于任何 $\mathfrak{N}$ 中的对 (i,j)，存在 T 中的字符串 e，使得 $\varphi_i(e)\neq\varphi_j(e)$．一个试验 T 称为极小的（minimal），如果它包含极小可能的字符串个数．一个试验称为终极试验（dead-end test），如果从 T 中去掉任何字符串 e，形成字符串子集就不是一个试验．极小试验是终极试验．求极小试验的问题是因为需要减少检验次数而引起的．

存在确定所有终极试验（因而也包括所有极小试验）的算法．设 $\{e_1^{ij},\cdots,e_{\nu(i,j)}^{ij}\}$ 是所有在其上 φ_i 与 φ_j 不同的字符串．在表达式

$$\underset{(i,j)\in\mathfrak{N}}{\&}(e_1^{ij}\vee\cdots\vee e_{\nu(i,j)}^{ij})$$

中按照 Boole 代数的法则完成乘法，然后利用关系式

$A\&B \vee A = A$ 消去"吸收项"，则余下的表达式就是对应的终极试验．这样，如果对于上述例子，考虑校验问题

$$\mathfrak{N} = \{(1,2),(1,3),\cdots,(1,7)\},$$

则所述算法产生

$$(e_1 \vee e_2)(e_2 \vee e_3)(e_3 \vee e_4)(e_4 \vee e_5)(e_5 \vee e_6)(e_6 \vee e_1) =$$

$$= (e_2 \vee e_1 e_3)(e_4 \vee e_3 e_5)(e_6 \vee e_1 e_5) =$$

$$= e_1 e_3 e_5 \vee e_2 e_4 e_6 \vee e_1 e_2 e_4 e_5 \vee e_1 e_3 e_4 e_6 \vee e_2 e_3 e_5 e_6.$$

这里有五个终极试验：$T_1 = \{e_1, e_3, e_5\}$, $T_2 = (e_2, e_4, e_6\}$, $T_3 = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, $T_4 = \{e_1, e_3, e_4, e_6\}$, $T_5 = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$，其中 T_1 和 T_2 是极小的．这个算法可以用来检测构件元素装配中的错误．稍加修正，它也可以应用于对于自动机的简短终极实验的设计．随着失效函数表的规模越来越大，算法的效率急剧下降．为改进其效率，必须考虑诸如表的结构之类的因素和模式自身结构的信息．为此已经设计了多种方法．控制系统的可靠性和检验其他方面在概率论框架中展开．

参考文献

[1] Чегис, И. А., Яблонский, С. В., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 51(1958), 270 – 360.

[2] Соловьев, Н. А., Тесты, Новосиб., 1978.

[3] Потапов, Ю. Г., Яблонский, С. В., 《Докл. АН СССР》, 134(1960), 3, 544 – 547.

[4] Neumann, J. von, Probablistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components, in Automata Studies, Princeton Univ. Press, 1956, 43 – 98.

[5] Moore, E. F. and Shannon, C. E., Reliable circuits using less reliable relays Ⅰ, Ⅱ, *J. Franlin Inst.*, 262(1956), 198 – 208; 281 – 297.

С. В. Яблонский 撰　史树中 译

可靠性理论 [reliability theory; надежности теория]

数学方法的一种工程应用，包括如下的问题：a) 设计评价工业系统可靠性的方法；b) 开发评价产品可靠性的方法；c) 开发最优化和改进复杂工业系统及其组成部分在其运行（这包括贮存与运输）时性能的方法．可靠性理论家建立适当的数学模型来引入可靠性的定量指标．为此，必须考虑诸如系统的目标、运行条件等因素及经济因素．在用于可靠性理论的众多数学方法中，主要是**概率论**（probability theory）与**数理统计**（mathematical statistics）．这是因为用定性与定量的可靠性指标（失效，失效前时间，修理时间，更新费用等）所表示的事件都是随机的．其他广泛使用的方法是最优化理论，数理逻辑等等．

可靠性（reliability）概念包括以下要素：1）免失效；2）长寿命；3）义务维修．但是，通常第一个要素起决定性的作用．例如，第三个要素当处理便便的商品时是不必要的．

可靠性理论中的基本概念是失效（failure），即逐渐或突然失去运转能力．对于此概念的正规描述是依据可靠性理论中数学模型结构的如下一般概型．假设一个工业系统的状态定义为相空间 $X = \{x\}$ 的一个点．相空间的元素称为"状态"．系统的状态随时间的发展用过程 $x(t)$ 来表示，通常为一**随机过程**（stochastic process）．令 X_0 为对应于发生失效的状态组成的 X 的特定子集．免失效（freedom from failure）表示系统连续地保持其运转能力的特征；这个指标的定量尺度为从给定时刻到系统进入 X_0 中的状态所需的时间．长寿命（long life）为系统保持其运转能力的特征，包括当要求提供经济上可行的进一步服务时由于维修和保养而必须的中断．义务维修（amenability to repair）由系统便于保养和维修的程度来决定；它们是由系统保持工作所需的费用或时间来定量地计量的．

工业系统最重要的可靠性指标是在时间 t 内的无失效运行概率（probability of failure-free operation），记为 $R(t)$，即过程 $x(t)$ 在时间 t 内不进入子集 X_0 的概率．时间 t 之前发生一次失效的分布函数为 $F(t) = 1 - R(t)$．如果密度 $f(t) = F'(t)$ 存在，那么称函数 $\lambda(t) = f(t)/R(t)$ 为失效率（failure rate）．用概率术语来说，$\lambda(t)$ 是给定系统直到时刻 t 工作正常条件下的条件失效密度．因此，$\lambda(t)dt$ 为给定系统在时刻 t 之前不失效的条件下，系统在时间区间 $(t, t+dt)$ 内将失效的概率．

可靠性理论家使用各种不同类型的函数 $R(t)$．如果 $-\ln R(t)$ 为凸函数，那么其失效分布称为递增失效率（increasing failure rate）分布，相应的分布类记为 IFR．如果 $-\ln R(t)$ 为凹函数，那么其失效分布称为具有递减失效率（decreasing failure rate），相应的类记为 DFR．可靠性理论中也使用分布函数的其他非参数类，如 IMFR（递增平均失效率的函数），对其分布，函数

$$\frac{1}{t}\int_0^t \lambda(s)ds$$

为递增函数，或 NBO 类（新优于旧）：此类中的分布满足条件：对任意 t, s，有

$$F(t+s) \geqslant F(t)F(s),$$

即给定系统已运行 t 时间条件下的失效分布大于其非条件分布．这意味着在已运行的系统里比在新的系统里失效更频繁地发生．对于某些类分布，人们已证明

有关在某些结构（单元的串联或并联等）形式下失效分布不变性的定理．可靠性理论中非常普遍的模型是其函数 $R(t)$ 是用参数定义的．例如，突然失效的分布通常假设为指数的

$$F(t)=1-e^{\lambda t},\ t>0;\ F(t)=0,\ t\leqslant 0,$$

或由 Weibull 分布（Weibull distribution）给出

$$F(t)=1-\exp[-(at)^{\beta}],\ t>0;\ F(t)=0,\ t<0,$$

等等．

有各种增加工业系统可靠性的手段：储备，预防性检查与维修，减负载运行．储备（standby）是指引进一些多余之物来改进系统的可靠性——对完成系统的功能来说并不需要的附加单元、部件、设备；完成工作所需的附加时间；使用多余的信息；等等．与此相关，可以考虑以下类型的储备：结构的（附加设备），时间的（附加时间），信息的，功能的（开发系统单元的能力来完成附加的功能），以及负载的．结构储备可能处于以下三种状态之一：a）无负载；b）满负载；c）部分负载．在满负载储备（fully loaded standby）中单元承担与基本（工作的）单元同样的负载，而此储备单元的失效率与此基本单元的失效率一样．在无负载储备（unloaded standby）中，单元完全没有负载，因而不发生失效．在部分负载储备（partly loaded standby）中，单元负担比基本单元低的负载，因而其失效率比基本单元的失效率低．可靠性的显著增加是由失效单元的更新——更新储备（standby with renewal）来实现的．如果一个单元有一个储备，无负载，每个单元的失效分布函数为 $F(t)$，更新所需时间的分布函数为 $G(t)$，开关绝对可靠，且从运行到更新与备用品的运转是瞬间进行的．那么有储备系统的失效前时间（即两个单元首次皆处于失效状态之前的时间）由下列公式给出

$$T=a\left[1+\frac{1}{1-\gamma}\right],$$

其中

$$a=\int_0^{\infty}x\,dF(x),\ \gamma=\int_0^{\infty}G(x)\,dF(x)$$

对有储备系统的探讨带来了纯数学问题的多样化——发展受控的半 Марков 过程理论，随机变量的随机和的极限定理等等．

当系统还在正常运行但根据推测失效概率变高时，预防性维修（preventive maintenance）就起作用了．预防问题通常与最优化问题的解有关：怎样决定何时开始预防性的服务，使得由服务本身与在给定的时间段 T 内服务结束之前发生可能的失效而产生的总损失变得最小；怎样组织预防性维修，使得在给定时间区间里无失效运行概率最大等等．对某些失效分布函数，包括所有 DFR 类函数，预防性维修并不增加平均失效前时间．对 DFR 函数，$\lambda(t)$ 为非增函数．例如，对任意常数 $\lambda>0$，分布函数为

$$F(x)=1-e^{-\lambda x},\ x>0;\ F(x)=0,\ x\leqslant 0.$$

各种最优化问题的出现还与寻找复杂系统的不规则性有关：怎样进行检查使得探测故障所需的平均时间最小；以何种顺序检验部件的运转能力等等．

可靠性理论的一个基本领域与依据台架试验获得的数据导出的关于失效分布的统计推断有关．台架试验（stand tests）的最简单数学模型如下．令 N 为试验物品的单元数．试验期间，失效的物品不用新的来替换（试验类 B）或由新的来替换（试验类 V）．试验的长短由停止规则来决定，例如对试验时间设定一个界 T，对观察到的失效数目设定一个界 r 等等．试验运行的主要特征为总增益 $S(t)$，即在区间 $(0,t)$ 内所有被试验的物品失效前时间之和．在依计划（according to the plan）$[NB(r)]$ 试验中，试验 N 个物品，发现故障与否不用新的来替换它们．连续观察到第 r 个失效．在依计划 $[NB(N)]$ 中，试验进行到所有 N 个物品皆失效；在计划 $[NB(r,T)]$ 中，直到时间 $t=\min(t_r,T)$ 为止试验 N 个物品，其中 t_r 为第 r 个失效物品的失效时间．失效时间 $t_1,\cdots,t_r$ 作为检验有关失效分布函数形式的假设的数据，例如它是否为 DFR 类或 IFR 类等；这个分布函数的参数也必须估计出来．对失效率的估计是由保序估计方法得到的．当依计划 $[NB(r)]$ 试验时，对指数分布的参数 λ 有逐点无偏估计量：

$$\hat{\lambda}=\frac{r-1}{S(t_r)},\ r\geqslant 2,$$

其中总增益为

$$S(t_r)=t_1+\cdots+t_r+(N-r)t_r.$$

在台架试验中涉及的统计问题是多种多样的；对此要用到数理统计分支中的估计理论和统计假设检验等．

一个复杂的因素是无失效运行概率依赖于试验：

$$R(t)=R(t,\varepsilon)$$

的条件 ε．一个更坏的条件（温度递增，大振幅振动等）可能引起更早失效．从条件 ε 变为其他条件 ε^* 时可靠性指标的度量问题是可靠性理论中最紧迫的问题之一．试验计划已被用于条件随着时间而改变的情形（例如，交错负载计划）．已经有把加速试验的结果转化为正常条件下结果的数学模型．这类问题中的一种方法是根据一个假设，即在条件 ε_1 下时间 t_1 内的检验等价于在条件 ε_2 下当 t_2 满足 $R(t_1,\varepsilon_1)=$

$R(t_i, \varepsilon_\gamma)$ 时的检验.

可靠性理论中的另一个问题是计算由非绝对可靠单元组成的系统的性能指标. 例如, 假设要求根据对单元的台架试验结果来估计系统的可靠性. 令系统可表示为不同类型单元(无储备)的串行链. 那么, 系统的无失效运行概率 $R(t)$. 即到时间 t 所有被验单元无一发现失效的概率, 其 γ 置信下界等于其被验单元类无失效运行概率为最小的 γ 置信下界.

可靠性理论中最优化的一个例子是最优满负载储备(optimun fully loaded standby)问题. 令 $R_i(t)$ 为 i 类单元无失效运行(工作)的概率, 而 x_i 为这些单元的个数. 那么, 系统无失效运行(工作)的概率为

$$R(t)=\prod_{i=1}^{m}[1-(1-R_i(t))^{x_i}].$$

要求选择数 x_i, $i=1, \cdots, m$, 使得 $R(t)$ 最大且满足条件

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij}x_i \leqslant w_j, j=1, \cdots, l,$$

这些条件被当作对单元的总加权, 份量, 费用等的约束.

在允许失效单元更新的系统中, 定量可靠性指标的评定很类似于**排队论**(queueing theory)中的同类计算. 系统中顾客的到达时间对应于失效时间, 而服务时间对应于更新时间. 最简单的数学模型是更新过程(见**更新理论**(renewal theory))模型. 因为可靠性理论中允许更新失效单元的基本数学模型不一定具有显式解析解, 所以人们十分重视使用渐近方法. 在这种情形, 假设更新是"迅速的", 即给定的更新指标(如平均更新时间)相对于无失效运行区间的类似指标变得无限小.

参考文献

[1] Барзилович, Е. Ю., Каштанов, В. А., Некоторые математические вопросы теории обслуживанния сложных систем, М., 1971.

[2] Barlow, R. E. and Proschan, F., Mathematical theory of reliability, Wiley, 1965.

[3] Barlow, R. E. and Proschan, F., Statistical theory of reliability and lifetesting, Holt, Rinehart & Winston, 1975.

[4] Гнеденко, Б. В., Беляев, Ю., К., Соловьев, А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965 (英译本: Gnedenko, B. V., Belyaev, Yu. K. and Solov'ev, A. D., Mathematical methods of reliability theory, Acad. Press, 1969).

[5] Коваленко, И. Н., Исследования по анализу надежности сложных систем., К., 1975.

[6] Козлов, Б. А., Ушаков, И. А., Справочник по расчету надежности аппаратуры, радиоэлектроники и автоматики, М., 1975 (英译本: Kozlov, B. A. and Ushakov, I. A., Reliability handbook, Holt, Rinehart & Winston, 1970).

[7] Шор, Я. Б., Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, М., 1962.

Ю. К. Беляев, Б. В. Гнеденко 撰

【补注】 满负载储备与无负载储备的概念在西方文献中分别称之为暖储备与冷储备.

参考文献

[A1] Gertsbakh, I. B., Statistical reliability theory, Birkhäuser 1989 (译自俄文).

[A2] Pieruschka, E., Principles of reliability, Prentice-Hall, 1963.

[A3] Pierce, W. H., Failure tolerant computer design, Acad. Press, 1965.

[A4] Beichelt, F. and Franken, P., Zuverlässigkeit und Instandhaltung, VEB Verlag Technik, 1983.

【译注】

参考文献

[B1] 曹晋华, 程侃, 可靠性数学引论, 科学出版社, 1986.

曹成铉 译 潘一民 校

解析函数的浮雕 [**relief of an analytic function**; **ландшафт аналитической функции**]

同**解析浮雕**(analytic "landschaft").

余项 [**remainder**; **остаточный член**], 函数展开式的

用一个较简单的函数逼近某个函数的公式中的一个附加项. 余项等于给定函数与其逼近函数的差, 因而, 对余项的估计就是对逼近精度的估计.

所述及的逼近公式包括 **Taylor 公式**(Taylor formula), 各种插值公式, 各种渐近公式, 某些量值的近似估计公式, 等等. 于是, 在 Taylor 公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

$$x\to x_0$$

中, 项 $o((x-x_0)^n)$ 称作是(Peano 型)余项. 给定函数 $f(x)$ 的渐近展开

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+O\left[\frac{1}{x^{n+1}}\right],$$

$$x\to+\infty,$$

则 $O(x^{-n-1})$ $(x\to\infty)$ 是它的余项. 特别, 在给出 Euler 型 Γ **函数**(gamma-function)渐近展开的 **Stirling 公式**(Stirling formula)

$$\Gamma(s+1)=\sqrt{2\pi s}\left[\frac{s}{e}\right]^s+O[e^{-s}s^{s-1/2}],$$

$$s\to+\infty$$

中, 余项为 $O(e^{-s}s^{s-1/2})$. Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 一个整数 a 被一个自然数 b 所除的余数是数 c, $0 \leqslant c < b$, 即 $a = kb + c$. 其中 k 是整数. 亦见**整数的剩余**(remainder of an integer).

参考文献

[A1] Bleistein, N. and Handelsman, R. A., Asymptotic expansions of integrals, Dover, reprint, 1986, Chapts. 1, 3, 5.

[A2] Davis, P. J., Interpolation and approximation, Dover, reprint, 1975

[A3] Spivak, M., Calculus, Benjamin, 1967.

王仁宏 檀结庆 译

空间 X 的剩余[remainder of a space; нарост пространства]

集合 $Y\setminus X$, 这里 Y 是 X 的**紧化**(compactification). 剩余的性质与 X 的性质密切相关; 剩余的紧性等价于 X 的局部紧性; 零维剩余的存在通常依赖于 X 是否具有边界紧性; 如果 X 具有可度量化的紧化, 其剩余的维数 $\leqslant k$, 那么 X 具有一个开基, 使得任何 $k+1$ 个互不相交集合的边界之交是紧集, 等等. 如果 $Y\setminus X$ 的任何紧连通子集都是单点集(例如, $\operatorname{ind}(Y\setminus X) = 0$ 的情形), 则此剩余称为点状的(punctiform). 如果至少有一个紧化具有点状剩余, 那么这样的紧化中存在一个最大的紧化 μX, 它也是 X 的最小的完满紧化. Е. Г. Скляренко 撰

【补注】 某些重要的性质, 例如紧性、局部紧性、仿紧性以及 Lindelöf 性质, X 的所有剩余或者都具有或者都不具有. 如果 X 的剩余均具有这样一个性质, 则 X 称为"在无穷远处"具有该性质.

参考文献

[A1] Inasaridze, H. N., A generalization of perfect mappings, *Soviet Math. Dokl.*, 7 (1966), 3, 620 – 622 (*Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **168** (1966), 266 – 268).

胡师度、白苏华 译

整数 a 的剩余[remainder of an integer; вычет], 模 m 的

与 a 模 m 同余的任意整数 b(见**同余式**(congruence)). 设 r 是 a 被某个正整数 m 相除以后的余数, $0 \leqslant r \leqslant m-1$, 则数 a 关于模 m 的剩余 b 将形如 $b = mq + r$, 此处 q 是某整数. 对应 $q = 0$ 的剩余等于 r, 称为 a 的最小非负剩余(least non-negative residue). 最小的(就绝对值而言)剩余 ρ 称为 a 的绝对最小剩余(absolutely smallest residue). 当 $r < m/2$ 时, $\rho = r$; 当 $r > m/2$ 时, $\rho = r - m$; 最后, 当 m 是偶数且 $r = m/2$ 时, ρ 可取 $m/2$ 或 $-m/2$.

由 m 个整数组成的数系, 其中每个整数都是数 $0, \cdots, m-1$ 中的一个且仅是一个的剩余, 称为模 m 的完全剩余系(complete system of residues). 最小非负剩余 $0, \cdots, m-1$ 或绝对最小剩余是最常用的完全剩余系.

设 $n \geqslant 2$. 模 m 的 n 次剩余(power residue of degree n modulo m), 是指任意与 m 互素的整数 a, 它使得同余方程

$$x^n \equiv a \pmod{m}$$

有解. 如果这同余式无解, a 称为模 m 的 n 次非剩余(power non-residue of degree n modulo m). 特别是, 当 $n = 2$ 时的剩余或非剩余称为二次的(quadratic), 当 $n = 3$ 时称为三次的(cubic)而 $n = 4$ 时称为四次的(biquadratic)(亦见**幂剩余**(power residue)).

参考文献

[1] Виноградов, И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972 (中译本: И. М. 维诺格拉陀夫, 数论基础, 高等教育出版社, 1952).

С. А. Степанов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hardy, G. H. and Wright, E. M., An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, 1979.

戚鸣皋 译 潘承彪 校

可去集[removable set; устранимое множество]

关于区域 $G \subset \mathbf{C}$ 内单值解析函数的某个类 K 的可去集是复平面 $\mathbf{C}$ 中的一个紧集 $E \subset G$, 使得 $G\setminus E$ 内的任一 K 类函数 $f(z)$ 可延拓为整个区域 G 内的一个 K 类函数. 这一情形也可说成"集合 E 对于类 K 是可去的(removable)"或"E 对于类 K 是零集", 简记为 $E \in N(K, G)$. 假定补集 $G\setminus E$ 是区域且类 K 对任一区域有定义.

按另一种定义, 称集合 E 对于类 K 是可去的(removable)即 $E \in N(K)$, 如果 $f(z)$ 是补集 $\bar{\mathbf{C}}\setminus E$ 内的 K 类函数蕴涵 $f(z)$ 为常数. 一般说关系 $E \in N(K, G)$ 与 $E \in N(K)$ 并不等价.

关于可去集的最早结果是经典的关于可去奇点的 Cauchy-Riemann 定理(Cauchy-Riemann theorem on removable singularities): 如果函数 $f(z)$ 在点 $a \in \mathbf{C}$ 的一个去心邻域 $V(a) = \{z: 0 < |z-a| < \delta\}$ 内解析并有界, 则它可解析延拓到 a. 此问题的一种较宽的陈述(**Painlevé 问题**(Painlevé problem))属于 P. Painlevé: 求出使得集合 $E \in N(AB, G)$ 而需加于 E 上的必要充分条件, 这里 $K = AB$ 是所有有界解析函数构成的类(见[1]). Painlevé 本人求出了一个充分条件: E 的线性 Hausdorff 测度为零. 关于 Painlevé 问题的必要充分条件是 L. V. Ahlfors 得到的(见[2]): $E \in N(AB, G)$ 当且仅当 E 具有**零解析容量**

(analytic capacity). 存在长度为正但解析容量为零的集合 E. 关于对单复变量的不同解析函数类的可去集以及有关的尚未解决的问题, 见[3], [4], [6], [9].

对于多复变量 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ $(n \geqslant 2)$ 的解析函数的情形, 可去集问题的陈述由于经典 Osgood-Brown 定理 (Osgood-Brown theorem) 而改变, 该定理断言: 如果 $f(z)$ 在区域 $G \subset \mathbf{C}^n$ 内可能除去一个紧集 $E \subset G$ 外是正则解析函数, 而补集 $G \setminus E$ 为连通, 则 $f(z)$ 可解析延拓到整个区域 G. 关于 $n \geqslant 2$ 情形的可去集的其他定理及其同全纯域 (domain of holomorphy) 概念的联系, 见, 例如[7], [10].

也能对调和函数, 次调和函数和其他函数提出可去集问题. 例如, 设 G 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ 中的一个区域, E 是紧集, $E \subset G$, 又设 HB 是有界调和函数类, HD 是其 Dirichlet 积分为有限的调和函数类, 则从属关系 $E \in N(HB, G)$ 与 $E \in N(HD, G)$ 等价, 它们当且仅当 E 的容量 (capacity) 为零时成立 (见[5], [8]).

参考文献

[1] Zoretti, L., Leçons sur le prolongement analytique, Gauthier-Villars, 1911.

[2] Ahlfors, L. V., Bounded analytic functions, *Duke Math. J.*, **14** (1947), 1, 1 – 11.

[3] Nohiro, K. (能代清), Cluster sets, Springer, 1960.

[4] Хавинсон, С. Я., 载于 Итоги науки. Математический анализ, 1963, М., 1965, 5 – 80.

[5] Carleson, L., Selected problems on exceptional sets, v. Nostrand, 1967.

[6] Мельников, М. С., Синанян, С. О., 载于 Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, 143 – 250.

[7] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976 (英译本: Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992).

[8] Hayman, W. K., Kennedy, P. B., Subharmonic functions, 1, Acad. Press, 1976.

[9] Долженко, Е. П., 《Успехи матем. наук》, 18 (1963), 4, 135 – 142.

[10] Riihentaus, L. J., Removable singularities of analytic functions of several complex variables, *Math. Z.*, **158** (1978), 45 – 54.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Osgood-Brown 定理也称为 **Hartogs 定理** (Hartogs theorem).

亦见**解析延拓** (analytic continuation); **解析集** (analytic set); **可去奇点** (removable singular point).

关于相当一般的延拓结果见[A2]; 在 $\mathbf{C}^n$ 中有类似于 Riemann 定理的命题: 有界解析函数可越过余维数 $\geqslant 1$ 的子簇解析延拓, 而所有解析函数可越过余维数 $\geqslant 2$ 的子簇解析延拓, 见[A1].

参考文献

[A1] Gunning, R. C., Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965

[A2] Harvey, R., Polking, J., Removable singularities of solutions of linear partial differential equations, *Acta Math.*, 125 (1970), 39 – 55.

[A3] Garnett, J. B., Analytic capacity and measure, Springer, 1972.

[A4] Чирка, Е. М., Комплексные аналитические множества, М., 1985 (英译本: Chirka, E. M., Complex analytic sets, Kluwer, 1989).

沈永欢 译

可去奇点 [**removable singular point; устранимая особая точка**], 单复变量 z 的单值解析函数 $f(z)$ 的表示一点 a 具有一个去心邻域 $V(a)=\{z \in \mathbf{C}: 0<|z-a|<\delta\}$ 使得函数 $f(z)$ 在其内解析有界的一个术语.

在这些条件下, 存在有限极限

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} f(x) = f(a),$$

把它作为 $f(z)$ 在 a 的值可使之成为 a 的一整个邻域内的解析函数.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 亦可见**奇点** (singular point), **本性奇点** (essential singular point), **可去集** (removable set).

参考文献

[A1] Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977.

杨维奇 译

更新理论 [**renewal theory; восстановления теория**]

概率论 (probability theory) 的一个分支, 描述与某个系统的元件的废弃与更新有关的一大类问题. 更新理论的主要概念是更新过程与更新方程. 更新过程 (renewal process) 可以用独立随机变量和的古典概型作如下描述. 令 $\xi_1, \xi_2, \cdots$, 是独立、非负、有相同分布函数 $F(x)$ 的随机变量序列. 令 $\zeta_0 = 0$, $\zeta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$. 更新过程 N_t 定义为

$$N_t = \max\{n: \zeta_n \leqslant t\}. \qquad (1)$$

如果把 ξ_i 解释为某个可相继替换的元件的寿命, 那么随机变量 N_t 就等于在 t 这段时间这些元件被替换 (或更新) 的数目. 更新函数 (renewal function) $H(t) = \mathsf{E} N_t$, 在研究 N_t 中起着重要的作用. 这个函数满足更新方程 (renewal equation)

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-u)\, dF(u). \qquad (2)$$

对于 $F(t) = 1 - e^{-\rho t} (t \geqslant 0)$, 它产生出更新过程的一个重要的特殊情形 —— **Poisson 过程** (Poisson pro-

cess)，其中

$$\mathrm{P}\{N(t)=k\}=\frac{(\rho t)^k}{k!}e^{-\rho t},\ k=0,1,\cdots,$$

而 $H(t)=\rho t$.

更新过程 N_t 和更新方程 (2) 在**排队论** (queueing theory)、可靠性理论、存储论、分支过程理论（见**分支过程** (branching process)）等的各种理论与应用问题的研究中都是很重要的. 更新理论的大量问题与更新函数 $H(t)$ 当 $t\to\infty$ 时的渐近性质相联系. 一个初等的更新定理表明,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{m}, \tag{3}$$

其中 $m=\mathsf{E}\zeta_1$. 1948 年 D. Blackwell 证明 (见[1]), 如果分布 ζ_1 不是集中在形如 $\{0, d, 2d, \cdots\}$ $(d>0)$ 这种类型的算术格点上，那么对于任何 $h>0$,

$$\lim_{t\to\infty}[H(t+h)-H(t)]=\frac{h}{m}. \tag{4}$$

在若干方面推广和精密化了等式 (3) 与 (4) 的许多结果都是有用的. 呈现在 (3) 与 (4) 中的这类结果，用来研究更新型方程 (renewal-type equation):

$$X(t)=K(t)+\int_0^t X(t-u)\,dF(u)$$

的解 $X(t)$ 的渐近性质，其中的自由项 $K(t)$ 是不同于 $F(t)$ 且满足一定条件的某个函数.

关系式

$$\mathrm{P}\{N_t\geqslant n\}=\mathrm{P}\{\zeta_n\leqslant t\} \tag{5}$$

可从定义 (1) 推出. 因为关于独立项的和 ζ_n 的极限定理已经透彻地研究过，关系式 (5) 使之有可能得到更新数目 N_t 的极限定理.

对前面描述的模型，存在着大量的推广. 其中一种推广是与**半 Марков 过程** (semi-Markov process) 相联系的，产生了所谓的 Марков 更新过程 (Markov renewal process)，其中系统有若干状态，而个别元件的寿命是依赖于更新时刻之前和之后系统状态的随机变量.

参考文献

[1] Cox, D. R., Renewal theory, Methuen, 1962.

Б. А. Севастьянов 撰　潘一民 译

重正化 [renormalization; перенормировка]

量子场论 (quantum field theory) 的 Lagrange 表述中，消除出现于微扰论中的发散的一种步骤. 量子场论中用微扰论构造形式级数时，其表达式看来并不具有不含糊的数学意义；它们与所谓紫外发散有关. 这类发散是由于这些级数中的系数是广义函数的乘积而引起的，即对象一般不是被很好地定义的.

方便的是从正则化理论的讨论来开始，该理论中将广义函数用充分光滑函数来代替. 正则化将附加参数引进理论中，它们并不具有直接物理意义. 然而，在正则化理论中，人们可以从每个系数函数中区分出消除正则化时引起紫外发散的那一部分. 重正化原意是丢弃系数函数中的发散贡献. 重正化后再消除正则化，即通过相应极限过渡而消去正则化参数.

重正化的概念是由 H. A. Bethe 提出的 ([1]). 它在于通过丢弃发散性的方式以便获得初始 Lagrange 量中参数，即裸质量，耦合常数和场归一化这些参数的重新定义（重正化）. 量子场论中重正化步骤的严格表述（R 运算）是由 Н. Н. Боголюбов 和 О. С. Парасюк 给出的 ([2]). 他们证明了关于各级微扰中源于 S' 的广义函数意义上重正化表达式有限性的一个定理 (Боголюбов-Парасюк 定理 (Bogolyubov-Parasyuk theorem)). 这里重正化相当于对 Lagrange 量增添补充项 ("抵消项"). 每个抵消项是某种局部算子结构，它具有数值系数一般为裸耦合常数的无穷级数，仅当存在正则化的情况下，这些系数才是有限的，而当消去正则化时，它们变成无穷. 因此，重正化表明初始 Lagrange 量的辅助性质. 只有经重正化的 Lagrange 量才具有物理意义. 其参数，即经重正化的质量、耦合常数等，它们是有限的，可以证认为可观察量.

微扰论的 Lagrange 表述，仅对算子结构方面有差别的抵消项数目为有限的理论才是可能的. 这样的理论分成两类：超可重正化的和可重正化的. 超可重正化理论中，附属于抵消项的系数是耦合常数的有限级数，而在可重正化理论中，这些级数是无限的. 在这些理论中，抵消项中的算子结构通常是与初始 Lagrange 量中各别项中的相同. 它们的并合导致裸耦合常数的重正化.

在其经典形式中，重正化是 Боголюбов-Парасюк R 运算（从例如 S 矩阵（见**散射矩阵** (scattering matrix)）展开中出现的每个图中消去发散），它相当于对该图重新定义系数函数如下. 令 M_γ 为这样一个算子，它使图 γ 的系数函数与其按动量的 MacLaurin 级数展开的初始段相对应. 于是，经重正化图 Γ 的系数函数 $RG_\Gamma(p_1,\cdots,p_N)$ 可写出为

$$RG_\Gamma(p_1,\cdots,p_N)=\\ =\vdots\prod_{\gamma_j\in\{\gamma_i\}}(1-M_{\gamma_j})\vdots\,G_\Gamma(p_1,\cdots,p_N), \tag{*}$$

其中 $\{\gamma_i\}$ 是 Γ 的所有发散子图的集合，而符号 $\vdots\ldots\vdots$ 意味着在展开 (*) 中的括号时首先丢弃含有乘积 $M_{\gamma_i}M_{\gamma_j}$ 而其对应子图对使条件 $\gamma_i\subset\gamma_j$, $\gamma_i\supset\gamma_j$, $\gamma_i\cap\gamma_j=\varnothing$ 当中一个都不满足的所有项；其次，若 $\gamma_i\subset\gamma_j$ 时则将算子 M_{γ_i} 这样编序使得 M_{γ_i} 位于 M_{γ_j} 之右.

强加于重正化步骤的这些限制并未给它完全地下定义. 余留下的任意性具有双重特性. 首先, 重正化表达式为有限的要求仅确定每个发散子图中某个最少量"减除", 即 MacLaurin 级数中最少的项数. 重正化仍然导致有限结果, 如果增加减除个数, 同时满足重正化图的各种子图中减除的某些相容性条件. 其次, 人们可以不是减去 MacLaurin 级数的一段, 而是用减去另一个表达式来代替, 它与前者相差具有限系数的动量的同幂多项式.

这个任意性导致在 R 运算的表述方面有差别的重正化步骤之间的等效性, 其具体选择通常取决于研究中的问题. 例如, 对于具有规范不变性的理论, 曾经提出过重正化方案, 称为维数的正则化. 它建立在正则化的基础上, 采用对 (在其中进行计算的) 时空维数物理值的偏差作为参数. 通过丢弃按这个偏差为奇异的表达式而消去发散.

在其他情况下, 人们应用解析重正化, 它以正则化为基础, 后者涉及将形式为 $(p^2-m^2+i0)^{-1}$ 的粒子传播函数用 $(p^2-m^2+i0)^{\lambda}$ 来代替. 就参数 λ 来说向复域的延拓提供正则化, 而把紫外发散辨认为这些参数的某些线性组合中的极点, 相容地丢弃这类极点消去所有发散.

在应用中还使用其他重正化方案 ([3]).

参考文献

[1] Bethe, H. A., The electromagnetic shift of energy levels, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 339 - 341.

[2] Боголюбов, Н. Н., Парасюк, О. С., 《ДАН СССР》, **100** (1955), No. 1, 25, No. 3, 429.

[3] Завьялов, О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана, М., 1979 (英译本: Zavialov, O. I., Renormalized quantum field theory, Kluwer, 1990).

С. А. Аникин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hepp, K., Théorie de la renormalisation, Lecture notes in physics, 2, Springer, 1969.

[A2] Manoukian, E. B., Renormalization, Acad. Press, 1983.

徐锡申 译

Rényi 检验 [Rényi test; Реньи критерий]

用于检定简单非参数假设 (见**统计学中的非参数方法** (non-parametric methods in statistics)) H_0 的**统计检验** (statistical test), 其中假设 H_0: 独立同分布随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 有给定的连续型分布函数 $F(x)$, 其备选假设为:

$$H_1^+: \sup_{|x|<\infty} \psi[F(x)]\ (\mathsf{E}F_n(x)-F(x))>0,$$

$$H_1^-: \inf_{|x|<\infty} \psi[F(x)]\ (\mathsf{E}F_n(x)-F(x))<0,$$

$$H_1: \sup_{|x|<\infty} \psi[F(x)]|\mathsf{E}F_n(x)-F(x)|>0.$$

其中 $F_n(x)$ 是由样本 $X_1,\cdots,X_n$ 构造的经验分布函数, $\psi(F)(\psi\geqslant 0)$ 是权函数. 如果

$$\psi[F(x)]=\begin{cases}\dfrac{1}{F(x)}, & \text{若 } F(x)\geqslant a,\\ 0, & \text{若 } F(x)<a.\end{cases}$$

其中 a 是区间 $[0,1]$ 上任意固定的实数, 则用来检定 H_0 对上述备选假设 H_1^+、H_1^-、H_1 的 Rényi 检验, 分别基于与之对应的 Rényi **统计量** (Rényi statistic):

$$R_n^+(a,1)=\sup_{F(x)\geqslant a}\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}=$$

$$=\max_{F(X_{(m)})\geqslant a}\frac{(m/n)-F(X_{(m)})}{F(X_{(m)})},$$

$$R_n^-(a,1)=-\inf_{F(x)\geqslant a}\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}=$$

$$=\max_{F(X_{(m)})\geqslant a}\frac{F(X_{(m)})-(m-1)/n}{F(X_{(m)})},$$

$$R_n(a,1)=\sup_{F(x)\geqslant a}\frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)}=$$

$$=\max\left\{R_n^+(a,1),\ R_n^-(a,1)\right\},$$

其中 $X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$ 是由观测值 $X_1,\cdots,X_n$ 构造的顺序统计量序列

$$X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$$

的项.

统计量 $R_n^+(a,1)$ 和 $R_n^-(a,1)$ 有同一概率律, 并且对于 $0<a\leqslant 1$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{na}{1-a}}\ R_n^+(a,1)<x\right\}=$$

$$=2\Phi(x)-1,\ x>0. \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{na}{1-a}}\ R_n(a,1)<x\right\}=$$

$$=L(x),\ x>0, \tag{2}$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态律的分布函数 (见**正态分布** (normal distribution)), 而 $L(x)$ 是 Rényi **分布函数** (Rényi distribution function):

$$L(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}\right\}.$$

如果 $a=0$, 则

$$\mathsf{P}\left\{R_n^+(0,1)\geqslant x\right\}=1-\frac{x}{1+x},\ x>0.$$

由(1)和(2)式可见，对于较大值 n，为计算统计量 $R_n^+(a,1)$ 和 $R_n(a,1)$ 的 Q 百分临界值($0\% < Q < 50\%$)，可以相应地利用如下近似值：

$$\sqrt{\frac{1-a}{na}}\ \Phi^{-1}(1-0.005Q),$$

$$\sqrt{\frac{1-a}{na}}\ L^{-1}(1-0.01Q),$$

其中 $\Phi^{-1}(x)$ 和 $L^{-1}(x)$ 相应为 $\Phi(x)$ 和 $L(x)$ 的反函数．这说明，当 $0\% < Q < 10\%$ 时，有

$$\Phi^{-1}(1-0.005Q) \approx L^{-1}(1-0.02Q).$$

此外，如果 $x > 2.99$，则在计算 Rényi 分布函数 $L(x)$ 的值时，可以利用近似等式

$$L(x) \approx 4\Phi(x) - 3,$$

其误差不大于 5×10^{-7}．

除上述 Rényi 检验外，还存在对应于如下权函数的类似的检验．

$$\psi[F(x)] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-F(x)}, & \text{若 } F(x) \leqslant a, \\ 0, & \text{若 } F(x) > a, \end{cases}$$

其中 a 是区间 $[0,1]$ 上任一固定的数．

参考文献

[1] Rényi, A., On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 4(1953), 191 - 231.

[2] Hájek, J. and Sidák, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

[3] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1983.

М. С. Никулин 撰　周概容 译

累次积分[repeated integral; повторный интеграл]

一个对不同变量依序所作的积分，即形如

$$\int_{A_y}\left[\int_{A(y)} f(x,y)\,dx\right]dy \tag{1}$$

的积分．函数 f 定义在空间 X 与 Y 的直积 $X\times Y$ 中的集合 A 上，在 X 与 Y 中分别给定 σ 有限测度 μ_x 与 μ_y，且具有完全性；集合 $A(y)=\{x:(x,y)\in A\}\subset X$ (A 中"水平"为 $y\in Y$ 的"截口")是关于 μ_x 可测的，而集合 A_y (A 在 Y 上的投影)是关于 μ_y 可测的．在 $A(y)$ 上的积分是对 μ_x 作的，在 A_y 上的积分是对 μ_y 作的．积分(1)亦记为

$$\int_{A_y} dy \int_{A(y)} f(x,y)\,dx.$$

重积分(multiple integral)(在一定条件下)可化归为累次积分．

设函数 f 在集合 $A\subset X\times Y$ 上对关于测度 $\mu=\mu_x\times\mu_y$ 是可积的，且用取零值的方法使函数延拓于整个空间 $X\times Y$，则累次积分

$$\int_Y dy\int_X f(x,y)\,dx,\quad \int_X dx\int_Y f(x,y)\,dy$$

存在，且相等：

$$\int_Y dy\int_X f(x,y)\,dx = \int_X dx\int_Y f(x,y)\,dy \tag{2}$$

(见 **Fubini 定理**(Fubini theorem))．左端积分的外层积分实际上是在集合 $A_y^* = \{y: y\in A_y,\ \mu_x A(y) > 0\}$ 上进行的，特别是，对点 $y\in A_y^*$，集合 $A(y)$ 是关于 μ_x 可测的．一般地说，不能在全部集合 A_y 上来作此积分，因为当集合 A 是关于 μ 可测时，集合 A_y 关于 μ_y 可以是不可测的．类似地，单个集合 $A(y)$ ($y\in A_y$) 关于 μ_x 也可以是不可测的．另一方面，只要集合 A 关于 μ 可测，集合 A_y^* 关于 μ_y 总是可测的．

上述关于累次积分可交换积分次序的条件只是充分而非必要的；有时，累次积分可交换积分次序时，相应的重积分并不存在．例如，函数 $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)^2$，$x^2+y^2>0$，$f(0,0)=0$，其累次积分是相等的：

$$\int_{-1}^{+1} dx\int_{-1}^{+1} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{+1} dy\int_{-1}^{+1} f(x,y)\,dx = 0,$$

但重积分

$$\iint_{|x|,|y|\leqslant 1} f(x,y)\,dx\,dy$$

不存在．然而，如果积分

$$\int_Y dy\int_X |f(x,y)|\,dx \text{ 或 } \int_X dx\int_Y |f(x,y)|\,dy$$

中至少有一个是有限的，那么函数 f 在 $X\times Y$ 上可积，且式(2)成立．

在内层积分是 **Stieltjes 积分**(Stieltjes integral)，外层积分是 **Lebesgue 积分**(Lebesgue integral)的情形下，下述关于积分交换次序的定理成立：设函数 $g(x,y)$ 对一切 $x\in[a,b]$ 是关于 $[c,d]$ 中的 y 可和的，且对几乎所有的 $y\in[c,d]$，$g(x,y)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，又假定对一切给定的 y 值，g 在 $[a,b]$ 上的全变差不超过某个 $[c,d]$ 上的非负可和函数，则函数 $\int_c^d g(x,y)\,dy$ 是关于变量 x 在 $[a,b]$ 上的有界变差函数，且对 $[a,b]$ 上的任一连续函数 f，有公式

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x)\,d_x g(x,y) = \int_a^b f(x)\,dx\left[\int_c^d g(x,y)\,dy\right].$$

参考文献

[1] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд. ч. 2, М., 1980 (英译本: Il'in, V. A., Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1-2, Mir, 1982).

[2] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: A. H. 柯尔莫哥洛夫等, 函数论与泛函分析初步, 高等教育出版社, 1992).

[3] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981.

[4] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975 (中译本: C. M 尼柯尔斯基, 数学分析教程, 人民教育出版社, 1981).

[5] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 5, М., 1959 (中译本. B. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第五卷, 高等教育出版社, 1959).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 除"累次积分"称谓外, 也称叠积分 (iterated integral) (例如见 [A1], [A2]).

参考文献

[A1] Hewitt, E., Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

[A2] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1978 (中译本: W. 卢丁, 实分析和复分析, 人民教育出版社, 1981).

[A3] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1952 (译自波兰文).

[A4] Apostol, T, M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974.

[A5] Halmos, P. R., Measure theory, Springer, 1974 (中译本: P. R. 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

[A6] Zaanen, A. C., Integration, North-Holland, 1974.

周民强 译

累极限 [repeated limit; повторный предел]

多元函数按不同自变量逐个取的极限. 例如, 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在形如 $X\times Y$ 的集合上, $x\in X\subset\mathbf{R}^m$, $y\in Y\subset\mathbf{R}^n$, 又设 x_0 与 y_0 分别是集合 X 与 Y 的极限点, 或是符号 ∞ (当 $m=1$ 或 $n=1$ 时, x_0 或 y_0 可以是定号无穷大: $+\infty$, $-\infty$). 如果对任意 $y\in Y$, 极限

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y) \tag{1}$$

存在, 且对 $\varphi(y)$, 极限

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

存在, 则此极限称为函数 f 在点 (x_0,y_0) 的累极限 (repeated limit)

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y). \tag{2}$$

类似地可定义累极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y). \tag{3}$$

如果 (有限或无限的) **二重极限** (double limit)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \tag{4}$$

存在, 且极限 (1) 对任意固定的 $y\in Y$ 存在, 那么累极限 (2) 也存在, 且等于二重极限 (4).

如果有限极限 (1) 对每个 $y\in Y$ 均存在, 对每个 $x\in X$, 有限极限

$$\psi(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

存在, 且当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x,y)$ 关于 $y\in Y$ 一致趋于极限函数 $\varphi(y)$, 那么两个累极限 (2) 与 (3) 都存在且相等.

若 X 与 Y 均为整数集, 则函数 f 称为二重序列 (double sequence), 此时自变量的值可写成足标:

$$f(m,n)=u_{mn},$$

而累极限

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_{mn} \text{ 与 } \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} u_{mn}$$

称为二重序列的累极限 (repeated limits of the double sequence).

累极限概念已经推广到 X 与 Y 以及函数 f 的值集均为某拓扑空间的子集的情形.

Л. Д. Кудрявцев 撰 王斯雷 译

累级数 [repeated series; повторный ряд]

以级数作为项的一个**级数** (series):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn}\right]. \tag{1}$$

级数 (1) 称为收敛的 (convergent), 如果对于任意固定的 n, 级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn}=a_n$$

收敛, 且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

也收敛. 后者的和也称为累级数 (1) 的和 (sum of the repeated series (1)). 累级数 (1) 的和

$$s=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}u_{mn}\right]$$

是其部分和

$$s_{mn}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}u_{kl}$$

的累次极限 (repeated limit), 也即

$$s=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}s_{mn},$$

若**二重级数**(double series)

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \tag{2}$$

收敛，且级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$$

收敛，则累级数(1)收敛，并与二重级数(2)的和相同．特别地，当二重级数(2)绝对收敛时，这个定理的条件满足． Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964 (不完全的英译本: Blackie, 1928).

罗嵩龄 译

排斥集 [**repelling set**]，排斥子(repellor)，动力系统 $\{S_t\}$ 中的

【补注】 动力系统的相空间中对于逆系统 $\{S_{-t}\}$ 为吸引子的子集．一般说来，**动力系统**(dynamical system)的吸引子(attractor)(亦见**通向浑沌的道路**(routes to chaos))是相空间的一非空子集 D，使得由 D 的邻域发出的所有轨道当时间增加时都趋向 D．更确切地说，令 $A(D)$ 为 D 的吸引区域(domain of attraction 或 basin)，即相空间中所有这样的 y 点之集合，使当 $t\to\infty$ 时 $S_t y \to D$(即对 D 之任一邻域 V 均有一常数 $r>0$ 使当 $t\geqslant r$ 时 $S_t y\in V$)．若相空间为局部紧而 D 为紧，则 $A(D)=\{y:\emptyset\neq\Omega_y\subset D\}$，这里 Ω_y 是 y 的 ω 极限集(见**轨道的极限集**(limit set of a trajectory))(有些作者即以此作为一般情况下 $A(D)$ 的定义)．现在，相空间的子集 D 若有一个开邻域 U 使得 $U\subset A(D)$，则 D 称为一个吸引子；这时 $A(D)$ 是相空间的一个开的不变子集．若一个吸引子，或相应地，一个排斥子，只由一点构成，就说它是吸引点(attracting point)，或相应地，说它是排斥点(repelling point)．详细情况(例如关于吸引子的稳定性)可见[A1]．应该提到，在其他文献中吸引子的定义在[A1]中称为稳定吸引子．关于吸引子的"正确"定义，在[A2], 5.4 节与[A3]中有讨论．亦见**奇怪吸引子**(strange attractor)．

参考文献

[A1] Bahtia, N. P., and Szegö, G. P., Stability theory of dynamical systems, Springer, 1970.

[A2] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer, 1983.

[A3] Ruelle, D., Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors, *Comm. Math. Phys.*, **82** (1981), 137－151.

齐民友 译

仿样 [**replica**; **реплика**]，在一个给定的具有同一表征的代数系统类 $\mathfrak{K}$ 内的代数系统 A 的

$\mathfrak{K}$ 中一个具有下列性质的**代数系统**(algebraic system) K_0: 1) 存在由 A 到 K_0 上一个满同态 φ_0；如果 $K\in\mathfrak{K}$ 而 φ 是由 A 到 K 的一个同态，则有系统 K_0 到 K 的一个同态 ψ，使得 $\varphi=\varphi_0\psi$．类 $\mathfrak{K}$ 中代数系统 A 的仿样(如果存在的话)从同构的观点来看，是唯一确定的．类 $\mathfrak{K}$ 称为仿样满的(replica full)，如果它含有一个对同一表征的任意代数系统的仿样．固定表征的代数系统类是仿样满的，当且仅当它含有一个一元素系统并且对于取子系统和取直积来说是封闭的．可公理化的仿样满的类(而且只有这些)是**拟簇**(quasi-variety)．

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Алгебраические системы, М., 1970 (英译本: Mal'tsev, A. I., Algebraic systems, Springer, 1973).

【补注】 仿样的概念与一个**泛问题**(universal problem)有密切关系．

仿样的第二个概念出现在代数 Lie 代数(algebraic Lie algebras)，GL(V) 的代数子群的 Lie 代数理论中．令 $X\in\mathrm{End}(V)$，这里 V 是一个有限维向量空间，又令 $\mathfrak{g}(X)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的含 X 的最小代数 Lie 子代数．$\mathfrak{g}(X)$ 的元素称为 X 的仿样．X 是幂零的，当且仅当对 X 的所有仿样 X' 而言都有 $\mathrm{Tr}(XX')=0$．

参考文献

[A1] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, II: Groupes algébriques, Hermann, 1951, Chapt. II, § 14.

郝钢新 译

自同态 X 的仿样 [**replica of an endomorphism**; **реплика**]，特征为零的域 k 上有限维向量空间 V 的

$\mathfrak{gl}(V)$ 中含 X 的最小的代数的 Lie 子代数的一个元素(见**代数的 Lie 代数**(Lie algebra, algebraic))．自同态 $X'\in\mathfrak{gl}(V)$ 是自同态 X 的一个仿样，当且仅当 V 上一切被 X 零化的张量也被 X' 零化．

自同态 X 的每个仿样可以写成 X 的系数在域 k 中的没有常数项的多项式．自同态 X 的半单部分和幂零部分(见 **Jordan 分解**(Jordan decomposition, 2))都是它的仿样．Lie 代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数是代数的，当且仅当它包含它的所有元素的所有仿样．空间 V 的自同态 X 是幂零的，当且仅当对 X 的任何仿样 X', $\mathrm{Tr}\,XX'=0$．

设 k 是一个代数闭域，φ 是 k 的一个自同构，设 X 是空间 V 的一个半单自同态，并设 $\varphi(X)$ 是 V 的自同态，使得 X 对应于本征值 λ 的任何本征向量也是 $\varphi(X)$ 的对应于本征值 $\varphi(\lambda)$ 的本征向量．自同态 $X'\in\mathfrak{gl}(V)$ 是自同态 X 的仿样，当且仅当

对域 k 的某个自同构 φ, $X' = \varphi(X)$.

参考文献

[1] Serre, J. P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[2] Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie, Sem. S. Lie 1954/55, Secr. Math. Univ. Paris, 1955.

[3] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 2, Hermann, 1951. B. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann, 1975, Chapts. 7 - 8 蔡传仁 译

可表示函子 [representable functor; представимый функтор]

从范畴(category) $\mathfrak{K}$ 到集范畴 $\mathfrak{S}$ (见**集范畴**(sets, category of)) 的一个共变(或反变)函子 F, 它同构于下述函子之一:

$$H(A,-): \mathfrak{K} \to \mathfrak{S},\ X \mapsto H(A,X),$$

或

$$H(-,A): \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}: X \mapsto H(X,A).$$

一个函子 $F: \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ 是可表示的, 当且仅当存在一个对象 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ 和一个元素 $a \in F(A)$, 使得对每个元素 $x \in F(X)$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$, 有唯一的态射 $\alpha: A \to X$, 满足 $x = F(\alpha)a$. A 叫作 F 的表示对象(representing object); 它在同构的意义下是唯一确定的.

在集范畴中, 恒等函子是可表示的: 表示对象是单元集. 取 Descartes 势的函子也是可表示的; 表示对象是基数等于给定势的集. 在任意范畴中, 以对象 A_i 为表示对象的可表示函子 F_i ($i \in I$) 的积是可表示的, 当且仅当 A_i 在范畴中有余积(coproduct). 每一个共变可表示函子与极限可交换, 也就是说, 是连续的(见**连续函子**(continuous functor)).

可表示函子是"具有单生成元的自由泛代数"概念的模拟. 对任意函子 $G: \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ 和可表示函子 F, 自然变换集 $\mathrm{Nat}(F,G)$ 同构于 $G(A)$, 此处 A 是 F 的表示对象. 这说明表示函子是函子范畴中的自由对象.

在加法范畴的情况下, 用取值于 Abel 群范畴中的加法函子代替取值于 $\mathfrak{S}$ 的函子. 从而这时的可表示函子是同构于 $H(A,-)$ 或 $H(-,A)$ 的加法函子.

可表示函子的概念最初出现在代数几何中(见[2]). 该分支中可表示函子的最重要的例子是 Picard 函子 $\mathrm{Pic}\,X/S$ 和 Hilbert 函子 X/S, 它们在代数空间范畴中是可表示的(见[1]和**代数空间**(algebraic space)). 令 K 是带有完满剩余域的正则离散正规环 O 的分式域. 若 X_0 是一条 K 上亏格 $g > 0$ 的光滑几何非退化奇异曲线, 则它的**极小模型**(minimal model)表示从正则 O 概形范畴的函子 $Y \mapsto \mathrm{Isom}_K(Y \otimes_O K, X_0)$. 若 A 是 K 上的 Abel 簇, 则它的极小 **Néron 模型**(Néron model)是一个光滑群概形 $X \to \mathrm{Spec}\,O$, 代表存从光滑 O 概形范畴的函子 $Y \mapsto \mathrm{Hom}_K(Y \otimes_O K, A)$.

参考文献

[1] Artin, M., Algebraic spaces, Yale Univ. Press, 1971.

[2] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Éléments de géométrie algébrique, I. Le langage des schémes, Springer, 1971. C. Г. Танкеев, M. Ш. Цаленко 撰

【补注】 可表示函子出现在代数几何之外的许多数学分支中. S. MacLane([A1]) 将它的首次出现追溯到 J. P. Serre 1953 年左右在代数拓扑中的工作. (上述)刻画从一个表示函子到任意函子的自然变换的定理通常称为米田引理(Yoneda lemma). 若范畴 $\mathfrak{K}$ 有任意上积, 则函子 $\mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ 是可表示的, 当且仅当它有左伴随(见**伴随函子**(adjoint functor)).

注意, 所有上述代数几何中的函子都是反变的.

参考文献

[A1] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

[A2] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Eléments de géométrie algebriques III, *Publ. Math. IHES*, 11 (1961), 349 - 356.

[A3] Grothendieck, A., Fondements de la géométrie algébrique, *Sém. Bourbaki*, **195**; **221**; **232** (1960 - 1962).

[A4] Artin, M., Algebraization of formal moduli, I, in D. C. Spencer and S. Iyanaga (eds.): Global analysis (papers in honor of K. Kodaira), Princeton Univ. Press, 1969, 21 - 72. 张英伯 译

表示函数 [representation function; представляющая функция]

赋予群 G 的连续作用的拓扑空间 X 上的一个连续函数 f, 它在 X 上所有连续函数的空间中的轨道 $\{g^* f: g \in G\}$ 生成一个有限维子空间. 表示函数也称为球面函数(spherical function)或殆不变函数(almost-invariant function). 取值于域 $k = \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 中的表示函数系构成 X 上所有 k 值连续函数的代数 $F(X,k)$ 中的一个 G 不变 k 子代数 $F(X,k)_G$. 如果 $X = G$ 是以左位移作用于自身的拓扑群, 则 $F(X,k)_G = F(G,k)_G$ 与 $F(G,k)$ 中由 G 的有限维连续线性表示的矩阵元生成的子空间相同. 如果 G 还是紧群, 则可限定为不可约表示的矩阵元. 例如, 如果 $G = T$ 是平面旋转群, 则 G 上的表示函数是三角多项式. 另一例子是球面上的经典**球面函数**(spherical functions), 它们是关于球面旋转群的标准作用的表示函数.

如果 G 是紧拓扑群，它连续作用于空间 X 上，而 X 是紧统的可数并，则 $F(X, k)_G$ 在赋予紧开拓扑的 $F(X, k)$ 中是稠密的（见 **Peter-Weyl 定理**（Peter-Weyl theorem））．对于具有紧 Lie 群光滑作用的微分流形上各次光滑性的表示函数，类似的命题也成立．另一方面，如果 G 不能有到紧群中的非平凡连续同态（例如 G 是没有紧单因子的连通半单 Lie 群），则具有 G 的连续作用的紧空间 X 上的每个表示函数都是 G 不变的（[4]）．

如果紧 Lie 群 G 在微分流形 X 上的光滑作用只有有限个轨道类型，则所有 C^∞ 类表示函数的代数 $F^\infty(X, k)_G$ 在所有 C^∞ 类 G 不变函数的子代数上是有限生成的（见[5]）．特别是，对于齐性空间 X，代数 $F(X, \mathbf{C})_G = F^\infty(X, \mathbf{C})_G$ 是有限生成的，并可等同于 $\mathbf{C}$ 上仿射齐性代数簇（其实点的集合与 X 相同）上的正则函数的代数．对于应用而言，把 G 模 $F(X, \mathbf{C})_G$ 分解为单 G 模的直和是一重要问题．在 X 是紧群 G 的对称齐性空间的情形，此问题由 E. Cartan（[1]）解决．

表示函数的推广是 G 空间 X 上向量 G 从 E 的**表示截面**（representation section），即这样的连续截面，其 G 轨道系在所有连续截面的空间 $\Gamma(E)$ 中生成一个有限维子空间，例如具有 Lie 群 G 的光滑作用的光滑流形上的表示张量场；它们构成 G 子模 $\Gamma(E)_G \subset \Gamma(E)$（见[5]）．如果 G 是紧群，则子模 $\Gamma(E)_G$ 在 $\Gamma(E)$ 中稠密．在 X 是 G 的对称齐性空间的情形，已研究了 G 模 $\Gamma(E)_G$ 分解为单分量的问题（见[3]）．如果 X 是没有具有连通稳定子群的紧因子的半单 Lie 群 G 的紧齐性空间，则

$$\dim \Gamma(E)_G < \infty$$

（见[2]）．

参考文献

[1] Cartan, E., Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symmétrique clos, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **53** (1929), 217－252.

[2] Дао Ван Ча,《Успехи матем. наук》, **30** (1975), в. 5, 203－204.

[3] Дзядык, Ю. В.,《Докл. АН СССР》, **220** (1975), 5, 1019－1022.

[4] Лукацкий, А. М.,《Успехи матем. наук》, **26** (1971), в. 5, 212－213.

[5] Онищик, А. Л.,《Тр. Моск. матем. об-ва》, **35** (1976), 235－264.

А. Л. Онищик 撰

【补注】"表示函数"的更通用名称是 G **有限函数**（G-finite function）."球面函数"一词通常还有另外的意义，见**球面函数**（spherical functions）条的补注．关于 Cartan 对紧对称空间 X 的情形分解 $F(X, \mathbf{C})_G$ 的论著[1]、见[A1]，第五章．

参考文献

[A1] Helgason, S., Groups and geometric analysis, Acad. Press, 1984.

沈水欢 译

紧群的表示 [**representation of a compact group**; **представление бикомпактной группы**]

紧拓扑群在拓扑向量空间中的**连续表示**（continuous representation）（见**紧群**（compact group））．

А. И. Штерн 撰　杜小杨 译

紧群的表示 [**representation of a compact group**; **представление компактной группы**]

一个**紧群**（compact group）到一个（复）Banach 空间的连续线性自同构群内的**同态**（homomorphism），它关于强算子拓扑是连续的．

令 G 是一个紧群，令 V 是一个 Banach 空间而 $\varphi: G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个表示．如果 $V = H$ 是一个 Hilbert 空间而对于每个 $g \in G$，$\varphi(g)$ 是一个酉算子，则 φ 称为一个**酉表示**（unitary representation）．在 H 内总有一个等价范数使得 φ 对它来说是一个酉表示．

一个紧群 G 的每一个不可约酉表示（见**不可约表示**（irreducible representation））都是有限维的．令 $\{\rho^\alpha: \alpha \in I\}$ 是群 G 的一切可能的两两不等价的不可约酉表示族．G 的每一个酉表示 φ 都是唯一确定的表示 $\varphi^\alpha (\alpha \in I)$ 的正交和，而 φ^α 是一组与 ρ^α 等价的表示的正交和，可能是零．

如果 G 是一个有限群，则 $\{\rho^\alpha\}$ 也是有限的，并且它所含的元素与 G 内不同的共轭类一样多（而且，$\sum_{\alpha \in I} (\dim \rho^\alpha)^2 = |G|$）．研究这些表示的问题（计算它们的特征标，寻求显式实现等等）是一个内容丰富理论的主题（见**有限群的表示**（finite group, representation of a））．

如果 G 是一个连通的，单连通的，紧 Lie 群，而 $G_{\mathbf{C}}$ 是它的复化（见 **Lie 群的复化**（complexification of a Lie group）），则对 G 的族 $\{\rho^\alpha: \alpha \in I\}$ 的描述相当于（将表示限制到 G 上）对可简约代数群 $G_{\mathbf{C}}$ 的一切两两不等价的不可约有限维有理表示族的描述．后一族可依次通过最高权得到完全的描述（见**具有最高权向量的表示**（representation with a highest weight vector））．

在近代数论和代数几何里，人们考虑紧完全不连通群的 l-adic 表示（见[5]，[6]）．

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（中译本：连续群（上、下册），科学出版社，1978）．

[2] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М.,

1976(英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[3] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970(英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[4] Lang, S., $SL_2(\mathbf{R})$, Springer, 1985.

[5] Гельфанд, И. М., Граев, М. И., Пятецкий-Шапиро, И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М. 1966(英译本: Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Pyatetskii-Shapiro, I. I., Generalized functions, 6. Representation theory and automorphic functions, Saunders, 1969).

[6] Serre, J.-P., Abelian l-adic representations and elliptic curves, Benjamin(译自法文).

[7] Chevalley, C., theory of Lie groups, I., Princeton Univ. Press, 1946.

B. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Eléments de mathématique, Masson, 1982, Chapt. 9, Groupes de Lie réels compacts.

[A2] Bröcker, Th. and Tom Dieck, T., Representations of compact Lie groups, Springer, 1985.

[A3] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, II, Springer, 1970.

[A4] Wawrzyńczyk, A., Group representations and special functions, Riedel & PWN, 1984.

郝钢新 译

群的表示[**representation of a group**; **представление группы**]

群到集合 V 上全体可逆变换的群中的**同态**(homomorphism). 群 G 的表示 ρ 称为线性的(linear), 若 V 是域 k 上的向量空间且若变换 $\rho(g)$ $(g\in G)$ 是线性变换. 为简短起见, 线性表示通常简称为表示(representation)(见**表示论**(representation theory)). 抽象群表示论中, 有限群的有限维表示论发展得最好(见**有限群的表示**(finite group, representation of a), **对称群的表示**(representation of the symmetric groups)).

若 G 是拓扑群, 则考虑 G 在拓扑向量空间 V 上的连续线性表示(见**连续表示**(continuous representation); **拓扑群的表示**(representation of a topological group)). 若 G 是 Lie 群, V 是 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 上有限维空间, 则连续线性表示自动地是实解析的. 也可以对无穷维情形定义 Lie 群的解析的和可微的表示(见**解析表示**(analytic representation); **无穷维表示**(infinite-dimensional representation)). 对 Lie 群 G 的每个可微表示 ρ 对应了它的 Lie 代数的某个线性表示——ρ 的微分表示(见 **Lie 代数的表示**(representation of a Lie group)). 若 G 还是连通的, 则它的有限维表示完全被其微分所决定. 拓扑群表示论的最为发展的分支是半单 Lie 群的有限维线性表示论, 通常它是用 Lie 代数的语言表述的(见**有限维表示**(finite-dimensional representation); **典型群的表示**(representation of the classical groups); 关于最高权向量的 **Cartan 定理**(Cartan theorem), 以及紧群的表示论和酉表示论(见**紧群的表示**(representation of a compact group); **酉表示**(unitary representation)).

对代数群, 有有理表示论(见**有理表示**(rational representation)), 在很多方面它类似于 Lie 群的有限维表示论.

参考文献

[1] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970(英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[2] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978(英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[3] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976(英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[4] Желобенко, Д. П., Штерн, А. И., Представления групп Ли, М., 1981.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Benson, D., Modular representation theory: New trends and methods, Lecture notes in math., 1081, Springer, 1984.

[A2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Methods of representation theory, I – II, Wiley (Interscience), 1981 – 1987.

[A3] Feit, W., The representation theory of finite groups, North-Holland, 1982.

[A4] Serre, J. P., Linear representations of finite groups, Springer, 1977(中译本: J. P. 塞尔, 有限群的线性表示, 科学出版社, 1984).

[A5] Huppert, B., Endliche Gruppen, I, Springer, 1967(中译本: 贝·胡佩特, 有限群, 第一卷, 福建人民出版社, 1992).

[A6] Knapp, A. W., Representation theory of semisimple groups, Princeton Univ. Press, 1986.

[A7] Tits, J., Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Lecture notes in math., 40, Springer, 1967.

[A8] Warner, G., Harmonic analysis on semisimple Lie groups, 1 – 2, Springer, 1972.

石生明 译 王杰 校

Lie 代数的表示[**representation of a Lie algebra**; **пред-**

ставление алгебры Ли]. 在向量空间 V 中

域 k 上 **Lie 代数**(Lie algebra) L 到 k 上向量空间 V 的所有线性变换的代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个同态 ρ. 两个表示 $\rho_1: L \to \mathfrak{gl}(V_1)$ 和 $\rho_2: L \to \mathfrak{gl}(V_2)$ 称为等价的(equivalent)或同构的(isomorphic), 如果存在同构 $\alpha: V_1 \to V_2$, 对任意 $l \in L$, $v_1 \in V_1$, 有

$$\alpha(\rho_1(l)v_1) = \rho_2(l)\alpha(v_1).$$

V 中的一个表示 ρ 称为有限维的(finite-dimensional), 若 $\dim V < \infty$, 称为不可约的(irreducible), 若 V 中没有异于零和 V 的子空间, 使得在所有算子 $\rho(l)$ 的作用下不变, $l \in L$.

给定表示 $\rho_1: L \to \mathfrak{gl}(V_1)$ 和 $\rho_2: L \to \mathfrak{gl}(V_2)$, 可以构造 L 在 $V_1 \oplus V_2$ 和 $V_1 \otimes V_2$ 中的表示 $\rho_1 \oplus \rho_2$(直和)和 $\rho_1 \otimes \rho_2$(张量积), 令

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(l)(v_1, v_2) = (\rho_1(l)v_1, \rho_2(l)v_2),$$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(l)v_1 \otimes v_2 = \rho_1(l)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(l)v_2,$$

这里 $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $l \in L$. 若 ρ 是 L 在 V 中的表示, 则公式

$$<\rho^*(l)u, v> = -<u, \rho(l)v>$$

定义了 L 在 V 的对偶空间中的一个表示 ρ^*; 称为相对于 ρ 的逆步表示(contragredient representation).

L 的每个表示可以唯一地扩充为**泛包络代数**(universal enveloping algebra) $U(L)$ 的表示; 这给出 L 的表示范畴和 $U(L)$ 上的模范畴之间的同构, 特别地, 同 L 的表示 ρ 对应的是 $U(L)$ 的理想 $\ker\widetilde{\rho}$——扩张 $\widetilde{\rho}$ 的核. 若 ρ 是不可约的, 则 $\ker\widetilde{\rho}$ 是一个本原理想. 反之, $U(L)$ 中的每个本原理想可以这种方式由 L 的不可约表示 ρ(一般, 不是唯一的)得到. 被赋予 Jacobson 拓扑的本原理想的空间 $\operatorname{Prim} U(L)$ 的研究是 Lie 代数表示论的核心部分. 在 L 是有限维可解 Lie 代数, k 是特征为零的代数闭域时, 该问题已被完全解决(见[2]).

特征为零的代数闭域上有限维 Lie 代数的有限维表示已被深入研究([6],[3],[5]). 当域是 **R** 或 **C** 时, 这些表示同对应的单连通(复或实) Lie 群的有限维解析表示一一对应. 在这种情况下, 可解 Lie 代数的每个表示包含一个一维不变子空间(见 **Lie 定理**(Lie theorem)). 半单 Lie 代数的任何表示都是完全可约的(totally reduced), 即同构于不可约表示的直和. 半单 Lie 代数的不可约表示已被完全分类: 表示的同构类一一对应于**支配权**(dominant weights); 此处, 一个权, 即 L 的 Cartan 子代数 H 的对偶空间 H^* 的一个元素, 称为支配的(dominant), 如果它在 H 的典范基 $h_1, \cdots, h_r$ 上的值是非负整数(见**最高权向量的 Cartan 定理**(Cartan theorem)). 关于由对应的支配权(它的最高权)来刻画不可约表示的结构, 见**权的重数**(multiplicity of a weight); **特征标公式**(character formula).

任意元素(不必是支配权) $\lambda \in H^*$ 也确定半单 Lie 代数 L 的最高权为 λ 的一个不可约表示. 虽然这个表示是无限维的(见**带最高权向量的表示**(representation with a highest weight vector)). 对应的 $U(L)$ 模称为 Verma 模(Verma modules)(见[2]). 半单 Lie 代数不可约无限维表示的完全分类尚未获得(1991).

若 k 是特征 $p > 0$ 的代数闭域, 则有限维 Lie 代数的不可约表示总是有限维的, 并且它们的维数是有界的, 是依赖于 $n = \dim L$ 的一个常数. 如果代数 L 有一个 p 结构(见 **Lie p 代数**(Lie p-algebra)), 则这个常数是 $p^{(n-r)/2}$, 这里 r 是 L 上余伴随表示的线性型的零化子的极小维数([4]). 下述结构用来刻画此种情形的不可约表示的集合. 设 $Z(L)$ 是 $U(L)$ 的中心, 设 M_L 是(维数 $\dim M_L = n$ 的)仿射代数簇, 它的正则函数代数与 $Z(L)$ 重合(一个 Zassenhaus 簇(Zassenhaus variety)). 映射 $\rho \mapsto \ker(\rho|_{Z(L)})$ 可以将每一个不可约表示对应到 Zassenhaus 簇的一个点. 这样获得的映射是满射, M_L 的任何点的原象是有限的, 而对于处处稠密的开子集中的点, 这个原象由单个元素组成([7]). 对幂零 Lie 代数(见[8])和某些个别的例子(见[9],[10]), 所有不可约表示的完全刻画已被获得. 对特殊类型的表示, 大量的各种结果也被获得.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras, Addison-Wesley, 1975(译自法文).

[2] Dixmier, J., Enveloping algebras, North-Holland, 1977(译自法文).

[3] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962(中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

[4] Mil'ner, A. A., Maximal degree of irreducible Lie algebra representations over a field of positive characteristic, *Funct. Anal. Appl.*, 14(1980), 2, 136-137 (*Funkts. Anal. i Prilozhen.*, 14(1980), 2, 67-68).

[5] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965(译自法文).

[6] Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie, Sem. S. Lie 1954/55, Secr. Math. Univ. Paris, 1955.

[7] Zassenhaus, H., The representations of Lie algebras of prime characteristic, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 2 (1954), 1-36.

[8] Veisfeiler, B. Yu. and Kats, V. G., Irreducible representations of Lie p-algebras, *Funct. Anal. Appl.*, 5

(1971), 2, 111 – 117 (*Funkts. Anal i Prilozhen*, 5(1971), 2, 28 – 36).

[9] Jantzen, J. C., Zur Charakterformel gewisser Darstellungen halbeinfacher Gruppen und Lie-Algebren, *Math. Z.*, **140**(1974), 1, 127 – 149.

[10] Rudakov, A. N., On the representation of the classical Lie algebras in characteristic p, *Math. USSR Izv.*, **4** (1970), 741 – 749 (*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **34**(1970), 4, 735 – 743).

А. Н. Рудаков 撰

【补注】 关于半单 L 的 Prim $U(L)$ 的研究, 见[A2].

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972

[A2] Jantzen, J. C., Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren, Springer, 1983.

蔡传仁 译

偏序集的表示 [representation of a partially ordered set; представление частично упорядоченного множества]

【补注】 设 S 是一个偏序集 (partially ordered set), k 是一个域 (field). 设 ω 是不在 S 中的一个符号. 一个 S 空间 (S-space) 形如 $V=(V_\omega, V_s)_{s\in S}$, 其中 $V_s(s\in S)$ 是 k 空间 V_ω 的子空间, 使得 $s\leqslant s'$ 蕴涵 $V_s\subset V_{s'}$. 设 V, V' 都是 S 空间; 映射 $f: V\to V'$ 是一个 k 线性映射 $V_\omega\to V'_\omega$, 使得对所有 $s\in S$, $f(V_s)\subset V'_s$. V 和 V' 的直和 $V\oplus V'$ 适合对所有 $s\in S\cup\{\omega\}$, $(V\oplus V')_s=V_s\oplus V'_s$. S 空间称为不可分解的 (indecomposable), 如果它不能表为两个非零 S 空间的直和.

偏序集 S 称作子空间有限的 (subspace-finite), 如果仅仅存在有限多个不可分解的 S 空间的同构类. Клейнер定理 (Kleiner theorem) 断定, S 是子空间有限的, 如果 S 是有限的, 并且作为一个全子集不包含偏序集

····, III, ·||, N|, ·I|.

中的任意一个, 见[A1]. M. M. Клейнер也决定了有限表示偏序集的所有不可分解表示 ([A2]). 驯顺偏序集的刻画已由Л. А. Назарова ([A3]) 得到. 偏序集表示论在有限维代数表示论中起着重要作用.

参考文献

[A1] Kleiner, M. M., Partially ordered sets of finite type, *J. Soviet Math.*, **3** (1975), 607 – 615 (*Zap. Nauchn. Sem. Leningr. Otdel. Mat. Inst.*, **28** (1972), 32 – 41).

[A2] Kleiner, M. M., On the exact representations of partially ordered sets of finite type, *J. Soviet Math.*, **3** (1975), 616 – 628 (*Zap. Nauchn. Sem. Leningr. Otdel. Mat. Inst.*, **28** (1972), 42 – 60).

[A3] Nazarova, L. A., Partially ordered sets of infinite type, *Math. USSR Izv.*, **9** (1975), 5, 911 – 938 (*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **39** (1975), 963 – 991)

C. M. Ringel 撰 卢景波 译 王世强 校

半群的表示 [representation of a semi-group; представление полугруппы], 在半群类中的

一个半群 S 在半群类 Σ 中的表示是 S 到 Σ 中的某一个半群的同态 (homomorphism) (在单同态的情况下称为忠实表示 (faithful representation)). 这通常是指某种具体的半群类. 变换半群类中的半群表示 (简称为变换表示, 亦见**变换半群** (transformation semi-group)), 或部分变换半群类、二元关系半群类中的半群表示, 或矩阵半群类中的半群表示 (所谓的半群的矩阵表示或线性表示) 已研究彻底. 在自动机理论中, 内部状态集的变换自由半群的表示与每个**自动机** (automaton) 密切相关. 与赋予某种结构 (自同态, 连续变换等) 的变换集的元素性质有这样或那样关系的变换半群的表示具有特殊的重要意义. 任何具有单位元的半群都可同构地表示为一个有向图或无向图的自同态半群, 具有一元运算的代数的全自同态半群等. 已经获悉用半群的部分变换得到一个半群的所有表示的几个构作 (1983). 这些表示是由某些简单的半群表示通过并、多次重复、到子集的限制以及**半群嵌入** (imbedding of semi-groups) 的运算而构作起来的.

通过添加单位元到半群 S, $S^1=S\cup\{1\}$, 并且通过利用到 S^1 的 Descartes 幂集 S^I 上的左平移延拓 S 的**正则表示** (regular representation), 得到了表示 φ_I —— S 的正则表示的 I 次重复. 半群 S 的用集合 Ω 的变换的任一表示 ψ 都能够由 φ_I 利用映射 $\theta: S^I\to\Omega$:

$$\psi a(\theta\alpha)=\theta(\varphi_I a(\alpha)),\ a\in S,\ \alpha\in S^I$$

而得到 (见 [2]).

传递表示 (即用集合 Ω 的变换的表示 φ, 使得对任意 α, $\beta\in\Omega$, 存在 a 满足 $(\varphi a)\alpha=\beta$) 起着特殊作用.

半群的用部分一一变换的表示是和**逆半群** (inversion semi-group) 的概念及性质相联系的.

关于半群的矩阵表示的研究导致了**半群代数** (semi-group algebra) 的研究. 矩阵表示的可约性问题已被研究. 已经找到了相当数量的半群 (其中包括有限半群) 的**不可约表示** (irreducible representation). 完全单半群和完全 0 单半群 (见**完全单半群** (completely-simple semi-group)) 的矩阵表示能够通过其子

群的表示的延拓而构作起来．任意半群的矩阵表示可利用它的单因子和 0 单因子半群的表示来刻画．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups. 1－2, Amer. Math. Soc., 1961－1967.

[2] Вагнер, В. В., 《Матем. сб.》, **38** (1956), 2, 203－240

[3] Лянин, Е. С., 《Матем. сб.》, **52** (1960), 1, 589－596.

[4] Шайн, Б. М., 《Матем. сб.》, **60** (1963), 3, 293－303.

[5A] McAlister, D. B., Representations of semigroups by linear transformations Ⅰ, *Semigroup Forum*, **2** (1971), 3, 189－263.

[5B] McAlister, D. B., Representations of semigroups by linear transformations Ⅱ, *Semigroup Forum*, **2** (1971), 4, 283－320.

[6] Jónsson, B., Topics in universal algebra, Springer, 1972.

Л. М. Глускин, Е. С. Лянин 撰
田振际 郑恒武 译 郭聿琦 校

拓扑群的表示 [representation of a topological group; представление топологической группы]

群 G 到一个拓扑空间的同胚群内的映射．G 的这样一个表示通常被理解为一个**线性表示**（linear representation），而且是 G 到一个拓扑向量空间 E 内的这样一个表示 π，使得对于任意 $x \in E$ 定义的向量函数 $g \to \pi(g)x (g \in G)$ 是 G 到 E 内的一个连续映射．特别地，群 G 的每一个**连续表示**（continuous representation）都是拓扑群 G 的一个表示．

拓扑群的表示论是与各种拓扑群代数（见**群代数**（group algebra））的表示论紧密相联系的．这些群代数中最重要的是群 G 的对称 Banach 测度代数 $M(G)$（G 上一切具有限全变差的正则 Borel 测度代数，其乘法定义为卷积）．也常用到 G 上一切具有限全变差且有紧支集的正则 Borel 测度的拓扑代数 $C'(G)$．$C'(G)$ 中的乘法定义为卷积，而对合 $\mu \to \mu^*$，$\mu \in C'(G)$，由

$$\int_G f(g) d\mu^*(g) = \int_G \overline{f(g^{-1})} d\mu(g),\ f \in C(G)$$

定义．$C'(G)$ 的拓扑与这个代数和带有紧开拓扑的代数 $C(G)$（G 上一切连续函数的代数）的对偶性是相容的．$M(G)$ 和 $C'(G)$ 的许多子代数也扮演着重要角色．特别地，如果 E 是一个拟完全的桶形空间或完全的局部凸空间而 π 是拓扑群 G 到 E 内一个连续表示，则公式

$$\pi(\mu) = \int_G \pi(g) d\mu(g),\ \mu \in C'(G)$$

定义 E 上一个弱连续线性算子 $\pi(\mu)$，而对应 $\mu \to \pi(\mu)$ 是代数 $C'(G)$ 到 E 内一个表示，唯一地确定这个拓扑群的表示 π．这样一来，一个拓扑群的表示，一个（拓扑）**不可约表示**（irreducible representation）、一个**算子不可约表示**（operator-irreducible representation），一个完全不可约表示，与这个拓扑群的另一个表示等价，等等，当且仅当代数 $C'(G)$ 相应的表示具有相应的性质．

令 π 是拓扑群 G 在一个局部凸向量空间 E 内的表示，令 E' 是与 E 对偶的空间．G 上形式如 $g \to \varphi(\pi(g)\xi)(\xi \in E, \varphi \in E')$ 的函数称为 π 的**矩阵元素**（matrix elements）．如果 E 是一个 Hilbert 空间又 $\xi \in E$，$\|\xi\| = 1$，则形式如 $g \to <\pi(g)\xi, \xi>$ $(g \in G)$ 的函数称为对应于 π 的**球函数**（spherical function）．

设 E、E^* 是对偶的局部凸空间，又令 π 是拓扑群 G 在 E 内一个表示．公式 $\pi^*(g) = \pi(g^{-1})^*$ 定义 G 在 E^* 内一个表示 π^*，称为 π 的**伴随表示**（adjoint representation）或**逆步表示**（contragredient representation）．设 π_1，π_2 分别是 G 在局部凸空间 E_1，E_2 内的表示，令 $E = E_1 + E_2$ 是直和又令 $\pi(g)(g \in G)$ 是由

$$\pi(g)(x_1 + x_2) = \pi_1(g)x_1 + \pi_2(g)x_2,$$
$$x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$$

所定义的 E 内的连续线性算子．映射 $g \to \pi(g)$ 是 G 在 E 内一个表示，称为表示 π_1 与 π_2 的**直和**（direct sum）．在一定场合下（**特别对于酉表示**）可以定义一个拓扑群表示的张量积以及无限多个这样的表示的直和．通过对标量域的限制或扩张，可以引入表示的"实化"或复化．

一个拓扑群的表示称为**完全可约的**（completely reducible），如果每一个闭不变子空间都有一个与之相补的闭不变子空间．拓扑群 G 在一个局部凸空间 E 内的表示 π 称为**分裂的**（split）或**可分解的**（decomposable），如果在 E 内存在闭不变子空间 E_1，E_2，使得 π 等价于 π 分别对应于子空间 E_1，E_2 的子表示 π_1，π_2 的直和；在相反的情形下 π 就称为**非分裂的**（non-split）或**不可分解的**（indecomposable）．一个非分裂的可约表示 π 并不仅由它的对应于一个不变子空间的子表示和商表示所确定，而且还对它要求刻画群 G 的系数在由商表示空间到这个表示空间内的有界线性算子所成的 G 模内的某些一维上同调类．

在拓扑群的表示论中最重要的一般问题是描述一个给定群的所有非分裂表示和研究通过非分裂表示对一个拓扑群的任意表示的描述（分解）．在这两种情形下问题都远未完全解决（1998），然而所得的结果仍

足以使得拓扑群的表示论作为**抽象调和分析**(harmonic analysis, abstract), 推广 Fouries 级数和积分的理论, 酉算子的谱理论、Jordan 标准形式和常系数常微分方程组理论的基础, 同时也作为遍历理论的某些分支、量子力学、统计物理和域论的基础.

拓扑群表示论的最重要的分支是酉表示论(见**酉表示**(unitary representation)), 它有很多应用. 许多特殊的性质简化了它们的研究. 特别地, 酉表示的一个不变子空间的正交补也是不变的, 因而每一个酉表示都是完全可约的. 对于酉表示来说, 完全不可约性、(拓扑)不可约性和算子不可约性这三个条件是等价的(然而一般说来, 比代数不可约性条件弱一些).

拓扑群表示的另外有许多应用的一类就是**有限维表示**(finite-dimensional representation). 这一类表示的研究由于较之一般情形, 泛函分析问题相对地简单而容易得多; 特别地, 一个不可约有限维表示是完全不可约的. 然而, 拓扑群的有限维表示论已发展到令人满意程度的(1991)只有这种群的某些类(特别是对于半单 Lie 群和群 **R** 和 **Z**). 对于群的许多类来说, 包括连通 Lie 群类, 对不可约有限维表示有完全描述.

拓扑群的表示论对于局部紧群有很大的发展. 局部紧群这一类中最重要的一个性质就是它与在其上有一个非零右不变正则 Borel 测度 m(见 **Haar 测度**(Haar measure))的完全拓扑群类是同一的. 这就使得可以将对称 Banach 代数 $L_1(G)=L_1(G,m)$(在卷积之下)加入到一个局部紧群 G 的有用的群代数上去, 而对称 Banach 代数在一个拓扑群 G 在 Banach 空间内的有界表示(即具有有界象的表示)理论中起着决定性的作用. 公式

$$\widetilde{\pi}(f)=\int_G f(g)\pi(g)dm(g),\ f\in L_1(G),$$

在局部紧拓扑群 G 的有界表示 π 与代数 $L_1(G)$ 的这样一个(连续)表示 $\widetilde{\pi}$ 之间建立了一个一一对应, 这里 $\widetilde{\pi}(L_1(G))H_{\widetilde{\pi}}$ 在表示 $\widetilde{\pi}$ 的空间 $H_{\widetilde{\pi}}$ 内稠密. 于是, 这个群的酉表示对应于 $L_1(G)$ 的对称表示. 局部紧群的另一个性质就是它们在桶型局部凸空间内的表示都是联合连续的.

局部紧群的酉表示理论是拓扑群表示论最充分发展的分支. 与局部紧群上 Haar 测度的存在性相关联的是, 可以研究 G 在 $L_2(G)$ 上的**正则表示**(regular representation), 特别地, 由此导致 **Plancherel 公式**(Plancherel formula)在这种群上的一个类似公式, 同时区分出所考虑的这类群的酉表示的基本系列. 补系列和离散系列(见**补系列(表示的)**(complementary series (of representations); **表示的离散系列**(discrete series of representations)). 酉表示论中重要的一般问题是构造不可约表示和商表示的问题, 将表示分解为直积分的问题, 研究对偶对象问题以及与之相关的球函数理论、特征标理论和调和分析理论, 包括研究各种群代数等问题.

局部紧群类的一个子类在应用上特别广泛, 这就是 Lie 群类. Lie 群的无限维表示论(见**无限维表示**(infinite-dimensional representation)), 包括典型群的表示论, 是拓扑群的一般表示论中发展得最快的分支之一. 研究 Lie 群表示论的一个有效方法就是**轨道方法**(orbit method).

局部紧群类的另一重要子类是紧群类. 紧群的表示论是拓扑群的一般表示论中最完整的分支之一, 并且是研究包含紧子群的拓扑群的表示论的一个工具. 紧群的表示论的一个重要分支涉及在子群上限制的分解, 和紧 Lie 群的具体表示的张量积的分解. 紧群表示论中在代数和分析中有许多应用的一部分就是有限群表示论.

如上所述的拓扑群的非分裂表示的研究中, 即使像描述完全不可约表示的交结(与一个对应的上同调理论有关)的比较简单的问题也仅对某些特定的群得到解决(1991), 尽管它在群上调和分析中是重要的. 事实上, 通过非分裂表示(更确切地说是通过参加进对应的基本系列的解析开拓中的表示), 对于某些 Lie 群(相应地, Chevalley 群)已经得到 Paley-Wiener 定理的类比定理, 给出这个群上具有紧支集无穷次可微(相应地, 局部有限)函数的群代数在 Fourier 变换(即在映射 $f\to\int_G f(g)\pi(g)d\mu(g), f\in K(G)$ 之下将这个群上每一个函数映成这个群表示等价类空间的代表集上一个算子值函数)之下的象的一个描述. 描述一个给定群的一切完全不可约表示这样的更为特殊问题, 仅对于局部紧群对其中心的商群是紧的情形(这样一个群的一个完全不可约表示是有限维的, 并且这些表示的集合足可以得到 Paley-Wiener 定理的类比定理)和某些线性 Lie 群(包括复半单 Lie 群)得到解决(1991). 如同在酉表示论中那样, 在非酉表示理论中, 也可以类似地汇集大量的关于某些特殊群的具体表示和关于对这样群上的调和分析个别问题应用的材料.

拓扑群的表示论中很多问题是与带有一个**不定度量的空间**(space with an indefinite metric)内的表示有关的. 在这样的空间内, 不可约表示的完全描述已经对某些半单 Lie 群得到(特别包括它们的不可约有限维表示). 对于这些群来说, 也找到了某些这种类型的不可约表示的张量积被分成不可约酉表示的分解. 半单 Lie 群在这样空间内的算子不可约表示理论和对它们的不变子空间的结构的确定, 是与这些群表示的基本系列的解析开拓密切相关的.

拓扑群的表示论包括射影表示论(见**射影表示**

(projective representation)), Lie 群表示论(特别是轨道方法)对一般类型的局部紧群的推广和非局部紧的拓扑群(流形上在一个 Lie 群内取值的光滑函数的群, 光滑流形的微分同胚群, 典型群或其他群的无限维类似物)表示论的发展. 对这些群的表示论的研究结果与概率论(特别是与 Markov 过程理论)和统计物理中的问题有联系. 另一方面, 局部紧域上二阶矩阵群的表示论与数论问题的深刻联系已经建立起来.

参考文献

[1] Barut, A. and Raczka, R., Theory of group representations and applications, 1-2, PWN, 1977.

[2] Виленкин, Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965 (英译本: Vilenkin, N. Ya., Special functions and the theory of group representations, Amer. Math. Soc., 1968).

[3] Гельфанд, И. М., Граев, М. И., Пятецкий-Шапиро, И. И., Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966 (英译本: Gel'fand, I. M., Graev, M. I. and Pyatetskii-Shapiro, I. I., Generalized functions, Saunders, 1969).

[4] Jaquet, E. and Langlands, R., Automorphic forms on GL_2, 1-2, Springer, 1970-1972.

[5] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[6] Желобенко, Д. П., Гамонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974.

[7] Желобенко, Д. П., Штерн, А. И., Представления групп Ли, М., 1983.

[8] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976.)

[9] Климык, А. У., Матричные элементы и коэффициенты Клебша-Гордана представлений групп, К., 1979.

[10] Lang, S., $SL_2(\mathbf{R})$, Springer, 1985.

[11] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naimark, M. A., Normed ring, Reidel, 1984).

[12] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М. 1976 (英译本: Naimark, M. A., Theory of group representations, Springer, 1982).

[13] Gaal, S. A., Linear analysis and representation theory, Springer, 1973.

[14] Gel'fand, I. M. (ed.), Lie groups and their representations, Hilger, 1975.

[15] Mackey, G. W., Unitary group representations in physics, probability and number theory, Benjaming/Cummings, 1978.

[16] Carmona, J. and Vergne, M. (ed.), Noncommutative harmonic analysis, Lecture notes in math., 728, Springer, 1979

А. И. Штерн 撰

【补注】 亦见**群的表示** (representation of a group); **紧群的表示** (representation of a compact group) 中的参考文献.

G 到一个拓扑向量空间上连续线性算子 $\mathscr{A}(H)$ 内的线性表示 π 称为代数不可约的 (algebraically irreducible), 如果没有非平凡不变子空间; 称为不可约的 (irreducible), 或者为了强调拓扑条件, 称为拓扑不可约的 (topologically irreducible), 如果没有非平凡闭不变子空间; 称为完全不可约的 (totally irreducible 或 completely irreducible), 如果 $\mathscr{A}(H)$ 的每一个元素都是由算子 $\pi(g)(g\in G)$ 的线性组合所组成的网的弱极限; 见 [8], §7; [1], Chapt. V, §3; [13], Chapt. IV, §2.

郝钢新 译

结合代数的表示 [representation of an associative algebra; представление ассоциативной алгебры], n 维的 (of dimension n)

域 k 上的代数 A 到矩阵代数 $M_n(k)$ 的同态, 即对每个 $a\in A$, 映射为一个确定的 n 阶方阵 $T(a)$, 使得

$$T(\lambda a+\mu b)=\lambda T(a)+\mu T(b)$$
$$\text{及 } T(ab)=T(a)T(b), \qquad (*)$$

这里 $a,b\in A$, $\lambda,\mu\in k$. 通常也要求 A 中的单位元对应于单位矩阵, 有时也要求 A 是有限维的.

有限维半单代数的每个不可分解表示等价于**正则表示** (regular representation) 的一个直和项. 因此, 每个有限维半单代数是有限(表示)型 (finite (representation) type) 的, 即有有限多个非同构的不可分解表示. 非半单代数既存在有限型的也存在无限表示型 (infinite representation type) 的 (例如代数 $A=\{1, r,s:r^2=s^2=rs=sr=0\}$ 就是这样的代数). 无限型代数进一步分成非驯型代数 (algebra of wild type), 它的分类问题包含未解决的矩阵对问题 (problem on matrix pairs) (即有限维空间上的两个线性算子同时化成典范型的问题), 以及驯顺型代数 (algebras of tame type).

结合代数表示论研究的基本问题是要获得代数属于所列类型的充分必要条件, 以及在有限和驯顺情形时不可分解表示的分类. 在一般情形下, 这些问题尚未解决. 有限型或驯顺型代数的刻画以及它们的表示, 对根平方为零的代数已经获得 (见 [2], [4], [8]-[10]). Brauer-Thrall 问题 (Brauer-Thrall problem) 已被解决, 即证明了在任何域上, 无限型代数有任意高维的不可分解表示, 而在完满域上存在无限多个维数, 在每个维数中存在无限多个不可分解表示 (见 [5], [7]). 代数闭域上任意有限型代数有乘法基, 即这样

一组基，其中任意两个基元素的积或者是零或者仍属于基([6])．群代数划分为驯顺型和非驯型的问题已被完全解决([1])．

与结合代数的表示密切相关的是环，偏序集，格和微分分次范畴的表示．

参考文献

[1] Бондаренко, В. М., Дрозд, Ю. А., 《Записки научных семинаров ЛОМИ》, 71(1977), 24－41.

[2] Кругляк, С. А., 《Записки научных семинаров ЛОМИ》, **28**(1972), 60－69.

[3] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[4] Назарова, Л. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **37**(1973), 4, 752－791.

[5] Fischbacher, U., Une nouvelle Preuve d'un théorème de Nazarova et Roiter, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **300**(1984), 259－263.

[6] Bautista, R., Gabriel, P., Roiter, A. and Salmeron, L., Representation finite algebras and multiplicative bases, *Invent. Math.*, **81**(1985), 217－285.

[7] Ройтер, А. В., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **32**(1968), 1275－1282.

[8] Dlab, V. and Ringel, C., Indecomposable representations of graphs and algebras, Amer. Math. Soc., 1976.

[9] Donovan, P. and Freislich, M. R., The representation theory of finite graphs and associated algebras, Carleton Univ., 1974.

[10] Gabriel, P., Unzerlegbare Darstellungen, I, *Manuscripta Math*, **6**(1972), 1, 71－103.

А. В. Ройтер 撰

【补注】 这样，对域 k 上(含 1)的结合代数 A，A 的表示是代数同态 $T: A \to \mathrm{End}_k(E)$，这里 E 是 k 上的向量空间，而 $\mathrm{End}_k(E)$ 表示 E 的所有(线性)自同态作成的 k 代数．表示 $T: A \to \mathrm{End}_k(E)$ 的子表示(subrepresentation)由 E 的子空间 E' 给出，而 E' 对所有 $a \in A$ 是 $T(a)$ 不变的，在这种情况下得到 E/E' 上的一个表示，称为商表示(quotient representation)．给定代数 A 的一个表示 $T: A \to \mathrm{End}_k(E)$，存在 A 的反代数(opposite algebra) A^{op}(这是 A 的底向量空间上的一个代数，乘法 $\star$ 定义为 $a \star b = ba$)的对偶(或逆步)表示(dual (or contragredient) representation) $T^*: A^{op} \to \mathrm{End}_k(E^*)$；对 $a \in A^{op} = A$，$e \in E$，$\varphi \in E^* = \mathrm{Hom}_k(E, k)$，定义 $T^*(a)(\varphi)(e) = \varphi(T(a)(e))$．亦见**逆步表示**(contragredient representation)．

设 $T: A \to \mathrm{End}_k(E)$ 是一个表示．对 $a \in A$，$e \in E$，通常将 $T(a)(e)$ 写成 ae，以这种方式 E 成为左 A 模，并且任何左 A 模可由这种方式获得．给出两个表示 $T_1: A \to \mathrm{End}_k(E_1)$ 和 $T_2: A \to \mathrm{End}_k(E_2)$，由 T_1 到 T_2 的映射 f 是一个线性映射 $f: E_1 \to E_2$，对 $a \in A$，$e \in E_1$，满足 $f(T_1(a)(e)) = T_2(a)(f(e))$，或写成 $f(ae) = af(e)$；因此这是一个 A 模同态．若 $T_i: A \to \mathrm{End}_k(E_i)$ 是一组表示，则它们的直和是表示 $T: A \to \mathrm{End}_k(E)$，这里 $E = \oplus_i E_i$ 是向量空间的直和，而对所有 $a \in A$，$T(a)|_{E_i} = T_i(a)$．A 的所有表示的范畴，等价地，(左) A 模范畴，是一个 Abel 范畴．注意：若 e 是 A 的中心幂等元(central idempotent)(即 $e^2 = e \in A$，并且对所有 $a \in A$，$ea = ae$)，而 X 是一个 A 模，则 eX 和 $(1-e)X$ 是 A 模，X 是 eX 和 $(1-e)X$ 的直和，并且 $\mathrm{Hom}_A(eX, (1-e)X) = 0$．另一方面，$A = A_1 \times A_2$，这里 $A_1 = Ae$，$A_2 = A(1-e)$，并且可以将 eX 看作 A_1 模，将 $(1-e)X$ 看作 A_2 模．因此，处理 A 的表示时可以假设 A 是连通的(connected)(即 A 的仅有的中心幂等元是 0 和 1)．

A 的表示称为单的(simple)(或不可约的(irreducible))，若它是非零的，并且仅有的真子表示是零表示．Schur 引理(Schur lemma)断言，单表示的自同态环是一个除环(见**可除环**(ring with division))．A 的表示 X 称为有限长的(of finite length)，若存在子表示序列 $0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$，使得对 $1 \leqslant i \leqslant n$，$X_i/X_{i-1}$ 是单的；这样一个序列称为 X 的一个合成列(composition series)，n 是它的长度，而因子 X_i/X_{i-1} 称为合成因子(composition factor)(亦见**合成序列**(composition sequence))．如果一个表示有合成列，则任何两个合成列有相同的长度，并且两个列的合成因子之间存在一个一一映射(**Jordan-Hölder 定理**(Jordan-Hölder theorem))．亦可如下表述：所有有限长表示模去正合列得到的 **Grothendieck 群**(Grothendieck group)是单表示同构类集合上的自由 Abel 群．A 的表示称为半单的(semi-simple)，若它是单表示的直和，或等价地，任一子表示是一个直和项．

A 的表示称为不可分解的(indecomposable)，若它不能写成两个非零表示的直和．若 X 是 A 的有限长的不可分解表示，则它的自同态环 $\mathrm{End}(_AX)$ 是一个**局部环**(local ring)．对于带有局部自同态环的表示的有限直和，到不可分解表示的所有直和分解是等价的(Krull-Schmidt 定理，见 **Krull-Remak-Schmidt 定理**(Krull-Remak-Schmidt theorem))．这导致所有有限长模模去分裂正合列的 Grothendieck 群是不可分解表示同构类集合上的自由 Abel 群．

代数 A 称作表示有限的(representation-finite)，若 A 的不可分解表示的同构类仅有有限多个；A 称为驯顺的(tame)，若它不是表示有限的，但不可分解表示的所有族是单参数的；A 称为非驯的(wild)，若

所有有限维 A 模的范畴 A-mod 包含一个方阵对同时等价的分类问题([A7]). 设 A 是有限维代数. 如果一切有限维不可分解表示的维数有界, 则 A 是表示有限的(第一 Brauer-Thrall 猜想(first Brauer-Thrall conjecture), 被 V. A. Roĭter 解决([7])), 并且任何表示是有限维不可分解表示的直和([A12]). 第二 Brauer-Thrall 猜想(second Brauer-Thrall conjecture)断言, 若 A 不是有限表示的, 而 k 是无限域, 则对无限多个 d, 存在无限多个 d 维表示的同构类. 对完满域 k, 这一猜想已被 R. Bautista([A3])和 K. Bongartz([A5])解决, 亦见[A11]. 若 A 不是表示有限的, 则 A 或是驯顺的或是非驯的, 但不能二者皆是(Drozd 定理(Drozd theorem)([A7])). 某些极小无限表示的代数已由 D. Happel 和 D. Vossieck 分类([A9]), 代数闭域上极小无限表示代数的问题可转化到这些类. 特别地, 由这种方式, 可得到有限表示型的判别准则([A4], [A8]). 一般来说, 代数闭域上有限维代数的问题, 用带有关系的箭图来处理(见**箭图**(quiver)).

设 A 是有限维代数. 如果 A 没有非零的幂零理想, 则称 A 是半单的(semi-simple). 代数 A 是半单的, 当且仅当 A 的任何表示都是半单的; 此时, 单表示恰好是 A 的**正则表示**(regular representation)的不可分解直和项. 一般来说, 设 N 是 A 的根(见**环与代数的根**(radical of rings and algebras)), 则 N 是 A 的极大幂零理想, 而 A/N 是半单的. A 的单表示是 A/N 的不可分解直和项; 精确到同构, 仅存在有限多个单表示. 不可分解射影表示是 A 的正则表示的直和项, 不可分解内射表示是 A^{op} 的正则表示的对偶. A 的任何不可分解**射影表示**(projective representation)都有唯一的单的商表示. A 的任何不可分解的内射表示都有唯一的单的子表示; 通过这种方式, 可以得到单 A 模的同构类与不可分解投射 A 模的同构类以及不可分解内射 A 模的同构类之间的一一映射.

现代表示论的基本概念由 M. Auslander 和 I. Reiten 给出([A1]): 给定任何一个不可分解 A 模 Z, 存在一个映射 $g: Y \to Z$, 它是极小右殆分裂的(minimal right almost split): 它不是分裂满态射, 给定任意映射 $g': Y' \to Z$, 若 g' 不是分裂自同态, 则存在 $y: Y' \to Y$, 使得 $gy = y'$, 并且若给出 $e: Y \to Y$, 使得 $ge = g$, 则 e 是一个自同构. 如果 Z 是投射的, 取它的极大子模为 Y, 包含映射为 g. 对非投射模 Z, 极小右殆分裂映射 g 是满射, 它的核 X 是不可分解的(并且不是内射的), 而包含映射 $f: X \to Y$ 是极小左殆分裂的(minimal left almost split)(由对偶性质定义); 同时, 任何不可分解的非内射的 A 模都能在这种方式下作为 X 出现. 这些正合列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 称为殆分裂序列(almost-split sequence)(或 Auslander-Reiten 序列(Auslander-Reiten sequence)), 其中 f 是极小左殆分裂的, 而 g 是极小右殆分裂的. 序列由 X 以及由 Z 唯一确定; 给定 Z, 相应的 A 模 $X = \tau Z$ 可以如下算出: 取 Z 的一个极小射影表示 $P_1 \xrightarrow{p} P_0 \to Z \to 0$, 令 $\mathrm{Tr}\, Z = \mathrm{Hom}_A(p, A)$, 则 $X = (\mathrm{Tr}\, Z)^*$; 构造 τ 称作 Auslander-Reiten 变换(Auslander-Reiten translation).

A 的 Auslander-Reiten 箭图(Auslander-Reiten quiver) Γ_A 以有限维不可分解 A 模 X 的同构类 $[X]$ 作为顶点. 如果存在一个不可约映射 $X \to Y$, 则给出一个箭 $[X] \to [Y]$(注意: 当 X, Y 不可分解时, 映射 $f: X \to Y$ 称为不可约的(irreducible), 若 f 不是可逆的, 并且若给出 f 的分解 $X \xrightarrow{f_1} I \xrightarrow{f_2} Y$, 则 f_1 是分裂单态射或 f_2 是分裂满态射); 此外, Γ_A 带有 Auslander-Reiten 变换 τ. Auslander-Reiten 箭图的网格(meshes of the Auslander-Reiten guiver)如下: 给出一个不可分解非射影表示 Z 和不可分解表示 Y, 存在不可约映射 $Y \to Z$, 当且仅当存在不可约映射 $\tau Z \to Y$(即当且仅当 Y 是 E 的直和项, 其中 E 是殆分裂序列 $0 \to \tau Z \to E \to Z \to 0$ 的中间项). A 的 Auslander-Reiten 箭图是 A 的重要的组合不变量, 经常可从 Γ_A 中恢复 A. 当 A 是连通的, Γ_A 具有有限个连通分支时, A 是表示有限的(Auslander 定理(Auslander theorem))([A1]). 从 Γ_A 中删除形为 $[\tau^n I]$ 和 $[\tau^{-n} P]$ 的顶点, 其中 I 是不可分解内射模, P 是不可分解投射模, $n \in \mathbf{N}$, 可得到稳定的 Auslander-Reiten 箭图(stable Auslander-Reiten guiver) Γ_A^S. 对有限表示的 A, Γ_A^S 的连通分支与 **Dynkin 图**(Dynkin diagram)有关([A13], [A10]). 利用覆盖理论([A6]), 有限表示代数的研究可归结为直向表示代数(representation-directed algebra)的研究(一个代数称作表示直向的, 若只有有限多个不可分解表示 $X_1, \cdots, X_n$, 且可以排序, 使得对 $i > j$, $\mathrm{Hom}(X_i, X_j) = 0$). 实际上可以构造出直向表示代数 A 的 Auslander-Reiten 箭图(从而范畴 A-mod)([A14]).

参考文献

[A1] Auslander, M., Applications of morphisms determined by objects, in R. Gordon (ed.), Representation Theory of Algebras, M. Dekker, 1978, 245 – 327.

[A2] Auslander, M. and Reiten, I., Representation theory of Artin algebras Ⅲ, Comm. In Algebra (1975), 239 – 294.

[A3] Bautista, R., On algebras of strongly unbounded representation type, *Comment. Math. Helv.*, **60** (1985), 392 – 399.

[A4] Bongartz, K., A criterion for finite representation type, *Math. Ann.*, **269** (1984), 1 – 12.

[A5] Bongartz, K., Indecomposables are standard, *Comment. Math. Helv.*, 60 (1985), 400 – 410.
[A6] Bongartz, K. and Gabriel, P., Covering spaces in representation theory, *Invent. Math.*, 65 (1981), 381 – 387.
[A7] Drozd, Yu. A., Tame and wild matrix problems, in V. Dlab and P. Gabriel (eds.), Representation theory II, Lecture notes in math., Vol. 832, Springer, 1980, 242 – 258.
[A8] Dräxler, P., *U*-Fasersummen in darstellungsendlichen Algebren, *J. Algebra*, 113 (1988), 430 – 437.
[A9] Happel, D. and Vossieck, D., Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component, *Manuscripta Math.*, 42 (1983), 221 – 243.
[A10] Happel, D., Preiser, U. and Ringel, C. M., Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with application to DTr-periodic modules, in V. Dlab and P. Gabriel (eds.), Representation theory II, Lecture notes in math., Vol. 832, Springer, 1980, 280 – 294.
[A11] Nazarova, L. A. and Roiter, A. V., Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture, Kiev, 1973 (俄文).
[A12] Ringel, C. M. and Tachikawa, H., QF-3 rings, *J. Reine Angew. Math.*, 272 (1975), 49 – 72.
[A13] Riedtmann, Chr., Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen, und zurück, *Comment. Math. Helv.*, 55 (1980), 199 – 224.
[A14] Ringel, C. M., Tame algebras and integral quadratic forms, Lecture notes in math., 1099, Springer, 1984.
[A15] Happel, D., Triangulated categories in representation theory of finite dimensional algebras, London Math. Soc., 1988.

C. M. Ringel 撰 蔡传仁 译

无限群的表示 [representation of an infinite group; представление бесконечной группы]

无限群 (group) 到某 (一般是无限的) 集合的一一映射的群中的**同态** (homomorphism). 最通常的是考虑无限群被代数结构的自同构所表示; 这时无限群表示论就联系到这些群的群代数的表示论.

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).
[2] Плоткин, Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966 (英译本: Plotkin, B. I., Groups of automorphisms of algebraic systems, Wolters-Noordhoff, 1972).

А. И. Штерн 撰 石生明 译 王杰 校

矩阵表示问题 [representation of matrices, problem of 或 problem of presentation of matrices; представимости матриц проблема]

是否能够提出一个统一的一般方法 (一个**算法** (algorithm)), 对于任意一组整数上的矩阵 $U, U_1, \cdots, U_q$ 来说, 在有限步骤内, 给出矩阵 U 能否由矩阵 $U_1, \cdots, U_q$ 用乘法表示出来的答案. 在 $U, U_1, \cdots, U_q$ 都是同阶方阵的情形最令人感兴趣. 矩阵表示问题的这种陈述方式称为一般的 (general). 固定矩阵 $U_1, \cdots, U_q$ 而使矩阵 U 变动就得到矩阵表现的部分问题 (partial problem of presentation of matrices). 解出一般陈述的算法也解出了所有部分问题, 因为要证实一般陈述的不可解只需提出至少一个不可解的部分问题即可.

矩阵表现问题是代数特征的第一算法问题 (见**算法问题** (algorithmic problem)) 之一, 它的不可解性已被证实. 最早是 A. A. Марков 证明了对于 $n \geqslant 6$, 可以构造一个含有 91 个 n 阶矩阵的系统, 使得相应的部分问题不可解, 即没有算法 (在这个词的确切意义下) 来辨别任意一个 n 阶矩阵是否可以由这一系统来表示 (见 [1], [2]). 后来 (见 [3]) 这一系统中矩阵的个数被减少到 23 个, 并且证明了, 在这个系统的构造里适当地复杂化, 条件 $n \geqslant 6$ 可以减弱到 $n \geqslant 4$. 对于任意 $n \geqslant 6$ 来说, 可以构造一个具体的系统, 包含 12 个 n 阶矩阵, 具有不可解的部分问题 (见 [4]). 适当地固定 U 并且变动 $U_1, \cdots, U_q$, 一般陈述的不可解性已对 $n = 3$ 被证明 (见 [5]).

参考文献

[1] Марков, А. А., 《Докл. АН СССР》, 78 (1951), 6, 1089 – 1092.
[2] Марков, А. А., Теория алгорифмов, М.-Л., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 42 (1954))
[3] Markov, A. A., On the problem of presenting matrices, *Z. Math. Logik und Grundl. Math.*, 4 (1958), 157 – 168.
[4] Нагорный, Н. М., 《VI Всесоюзн. конференция по матем. логике》, Тб., (1982), 124.
[5] Paterson, M. S., Unsolvability in 3 × 3 matrices, *Stud. in Appl. Math.*, 49 (1970), 1, 105 – 107.

郝锊新 译

典型群的表示 [representation of the classical groups; представления классических групп], 在张量中的

群 $GL(V)$, $SL(V)$, $O(V, f)$, $SO(V, f)$, $Sp(V, f)$ 在 V 的张量幂 $T^m(V)$ 的不变子空间中的**线性表示** (linear representation), 其中 V 是域 k 上的 n 维向量空间, 而 f 是 V 上的非退化对称或交错双线性型. 若 k 的特征是零, 则这些群的所有不可约的多项式线性表示都能用张量实现.

在 $k = \mathbf{C}$ 的情形, 上述的群都是复 Lie 群. 除

$\mathrm{GL}(V)$ 外，所有的群的所有（可微）线性表示都是多项式的；$\mathrm{GL}(V)$ 的每个线性表示都具有形式 $g \mapsto (\det g)^k R(g)$，其中 $k \in \mathbf{Z}$，而 R 是一个多项式线性表示．典型的紧 Lie 群 U_n，SU_n，O_n，SO_n 及 Sp_n 与它们的复包络 $\mathrm{U}_n(\mathbf{C})$，$\mathrm{SL}_n(\mathbf{C})$，$\mathrm{O}_n(\mathbf{C})$，$\mathrm{SO}_n(\mathbf{C})$ 以及 $\mathrm{Sp}_n(\mathbf{C})$ 有相同的复线性表示，且在张量空间中有相同的不变子空间．因此对典型复 Lie 群所得到的线性表示理论的结果可以过渡到相应的紧群，反之亦然（Weyl 的"酉技巧"）．特别地，利用紧群上的积分可以证明典型复 Lie 群的线性表示皆完全可约．

$\mathrm{GL}(V)$ 在 $T^m(V)$ 上的自然的线性表示由下述公式给出

$$g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_m,$$
$$g \in \mathrm{GL}(V),\ v_i \in V.$$

在同一空间中，定义对称群 S_m 的一个线性表示如下

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)},$$
$$\sigma \in S_m,\ v_i \in V.$$

这两个表示的算子是互相交换的，故在 $T^m(V)$ 中定义了 $\mathrm{GL}(V) \times S_m$ 的一个线性表示．若 $\mathrm{Char}\, k = 0$，空间 $T^m(V)$ 可分解为极小 $(\mathrm{GL}(V) \times S_m)$ 不变子空间的直和：

$$T^m(V) = \sum_\lambda V_\lambda \otimes U_\lambda.$$

求和号是取遍 m 的包含最多 n 个被加数的全部分划 λ．U_λ 是 S_m 的对应于 λ 的绝对不可约表示 T_λ 的空间（见**对称群的表示**（representation of the symmetric group）），而 V_λ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的绝对不可约表示 R_λ 的空间．分划 λ 可方便地表示为 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$，其中 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 是非负整数且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = m$．

子空间 $V_\lambda \otimes U_\lambda \subset T^m(V)$ 分解成极小 $\mathrm{GL}(V)$ 不变子空间的直和，每个这样的子空间上都实现表示 R_λ．利用与 λ 相应的 **Young 对称化子**（Young symmetrizer）可明白地获得这些子空间．例如，对 $\lambda = (m, 0, \cdots, 0)$（分别地，$\lambda = (1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$，当 $m \leqslant n$）有 $\dim U_\lambda = 1$，且 $V_\lambda \otimes U_\lambda$ 是由所有对称（分别地，反对称）张量组成的极小 $\mathrm{GL}(V)$ 不变子空间．

表示 R_λ 由下列性质刻画．令 $B \subset \mathrm{GL}(V)$ 是在 V 的某基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下矩阵为上三角形的所有线性算子所成的子群．于是算子 $R_\lambda(b)$，$b \in B$，有唯一的（差一个倍数）公共本征向量 v_λ，它被称为 R_λ 的最高权向量（highest weight vector）．对应的本征值（R_λ 的最高权（highest weight））等于 $b_{11}^{\lambda_1} \cdots b_{nn}^{\lambda_n}$，这里 b_{ii} 是 b 在基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 下矩阵的第 i 个对角元素．不同分划 λ 对应的表示 R_λ 是不等价的．R_λ 的特征标可由 Weyl 公式（Weyl formula）求出

$$\mathrm{tr}\, R_\lambda(g) = \frac{W_\lambda(z_1, \cdots, z_n)}{W_0(z_1, \cdots, z_n)},$$

其中 $z_1, \cdots, z_n$ 是算子 g 的特征多项式的根，W_λ 是与 λ 相应的广义 **Vandermonde 行列式**（Vandermonde determinant）（见 **Frobenius 公式**（Frobenius formula））．W_0 是通常的 Vandermonde 行列式．R_λ 的维数等于

$$\dim R_\lambda = \prod_{i<j} \frac{l_i - l_j}{j - i},$$

其中 $l_i = \lambda_i + n - i$．

R_λ 限制到幺模群（unimodular group）$\mathrm{SL}(V)$ 上仍不可约．两个表示 R_λ 和 R_μ 在 $\mathrm{SL}(V)$ 上的限制等价，当且仅当 $\mu_i = \lambda_i + s$（其中 s 与 i 无关）．$\mathrm{GL}_n(k)$ 的表示 R_λ 到子群 $\mathrm{GL}_{n-1}(k)$ 上的限制可按下述规则求出：

$$R_\lambda|_{\mathrm{GL}_{n-1}(k)} = \sum_\mu R_\mu,$$

其中 μ 跑遍所有满足

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{n-1} \geqslant \lambda_n$$

的 $(\mu_1, \cdots, \mu_{n-1})$．

对应于分划 λ 的每个 Young 图 d，张量 $v_\lambda \otimes u_d' \in T^m(V)$（记号见**对称群的表示**）是对张量 $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m}$ 在 d 的列上进行交错化的结果，这里 i_k 是数 k 在 d 中所在的行数．对所有标准图 d 如此构造出的张量形成 $v_\lambda \otimes U_\lambda$ 的极小 S_m 不变子空间的一组基，在该空间上可实现 S_m 的表示 T_λ．

正交群（orthogonal group）$\mathrm{O}(V, f)$ 在 $T^m(V)$ 中的线性表示有如下结构．存在两个 $(\mathrm{O}(V, f) \times S_m)$ 不变子空间的直和的分解

$$T^m(V) = T_0^m(V) \oplus T_1^m(V),$$

其中 $T_0^m(V)$ 由无迹张量（traceless tensor）组成，即这些张量在任何两个足标上对于 f 的卷积为零，而且

$$T_1^m(V) = \sum_{\sigma \in S_m} \sigma(T^{m-2}(V) \otimes f^{-1}).$$

空间 $T_0^m(V)$ 再次地分解成 $(\mathrm{O}(V, f) \times S_m)$ 不变子空间的直和

$$T_0^m(V) = \sum_\lambda V_\lambda^0 \otimes U_\lambda,$$

这里 $V_\lambda^0 \subset V_\lambda$．此外，$V_\lambda^0 \neq 0$，当且仅当对应于 λ 的 Young 表中前两列的高的和 $\lambda_1' + \lambda_2'$ 不超过 n，这时 V_λ^0 且是 $\mathrm{O}(V, f)$ 的绝对不可约表示 R_λ^0 的空间．表示 R_λ^0 对于不同的分划 λ 互不等价．若 λ 满足条件 $\lambda_1' + \lambda_2' \leqslant n$，用高为 $n - \lambda_1'$ 的列代替它的 Young 表的第一列后，得到的 Young 表其分划为 $\bar{\lambda}$，它也满足该条件．$\mathrm{O}(V, f)$ 的相应的表示是如下联系

的，$R^0_{\bar\lambda}(g)=(\det g)R^0_\lambda(g)$（特别地它们有相同维数）.

R^0_λ 到子群 $SO(V,f)$ 上的限制，除去 n 为偶数且 $\lambda=\bar\lambda$ 的情形（即 λ 的项数为 $n/2$）外皆绝对不可约．在后一情形，它在域 k 上或它的二次扩张上分裂成两个同维数的不等价的绝对不可约表示的和．

计算 R^0_λ 的维数时可假定 $\lambda'_1\leqslant n/2$（否则用 $\bar\lambda$ 代替 λ）．令 $l_i=\lambda_i+n/2-i$．对奇数 n 有

$$\dim R^0_\lambda=\prod_{i=1}^{[n/2]}\frac{l_i}{\frac{n}{2}-i}\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{[n/2]}\frac{(l_i-l_j)(l_i+l_j)}{(j-i)(n-i-j)},$$

而对于偶数 n 及 $\lambda\neq\bar\lambda$，则有

$$\dim R^0_\lambda=\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n/2}\frac{(l_i-l_j)(l_i+l_j)}{(j-i)(n-i-j)}.$$

对于 $\lambda=\bar\lambda$，后面的公式给出 R^0_λ 的维数之半，正是 $SO(V,f)$ 的相应于它的每个绝对不可约表示的维数．

$T^m(V)$ 对于**辛群**（symplectic group）$Sp(V,f)$ 的分解类似于对于正交群的分解，差别在 $V^0_\lambda\neq0$，当且仅当 $\lambda'_1\leqslant n/2$．这时 R^0_λ 的维数可从下述公式求出

$$\dim R^0_\lambda=$$

$$=\prod_{i=1}^{n/2}\frac{l_i}{n/2-i+1}\prod_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n/2}\frac{(l_i-l_j)/(l_i+l_j)}{(j-i)(n-j-i+2)},$$

其中 $l_i=\lambda_i-i+1+n/2$．

参考文献

[1] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946.

[2] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970（英译本：Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973）.

[3] Hamermesh, M., Group theory and its application to physical problems, Addison-Wesley, 1962.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 本条描述了经典理论．代数的这个古老领域的现代时期始于[A1]．可用两个字来描述新发展："与特征无关"．$GL(V)$ 及 $SL(V)$ 的多项式表示的一个不同的处理是在[A2]中进行的．在[A3]中能进一步找到经典的和与特征无关的两种理论．

参考文献

[A1] Carter, R. W. and Lustig, G., On the modular representations of general linear and symmetric groups, *Math. Z.*, 136 (1974), 193–242.

[A2] Green, J. A., Polynomial representations of GL_n, Lecture notes in math., 830, Springer, 1980.

[A3] James, G. and Kerber, A., The representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley, 1981.

[A4] Feit, W., The representation theory of finite groups, North-Holland, 1982.

石生明 译　王 杰 校

对称群的表示［representation of the symmetric groups; представление симметрической группы］

群 S_m 在域 K 上的**线性表示**（linear representation）．若 $\operatorname{char}K=0$，则对称群的所有有限维表示皆完全可约（见**可约表示**（reducible representation））．且在 $\mathbf{Q}$ 上确定（换句话说，$\mathbf{Q}$ 上的不可约有限维表示是绝对不可约的）．

S_m 在 $\mathbf{Q}$ 上的不可约有限维表示分类如下．令 d 是对应于数 m 的分划 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ 的一个 **Young 图**（Young diagram）．令 R_d（分别地，C_d）是 S_m 中仅把 d 中同一行（分别地同一列）的数 $1,\cdots,m$ 进行置换的全部元素组成的子群．则

$$R_d\simeq S_{\lambda_1}\times\cdots\times S_{\lambda_r}$$

及

$$C_d\simeq S_{\lambda'_1}\times\cdots\times S_{\lambda'_s},$$

这里 $\lambda'=(\lambda'_1,\cdots,\lambda'_s)$ 是 λ 的对偶分划．存在 S_m 的唯一的不可约表示 $T_\lambda:S_m\to GL(U_\lambda)$（仅依赖于 λ）具有下述性质：1）在空间 U_λ 中有非零向量 u_d 使得 $T_\lambda(g)u_d=u_d$，对所有 $g\in R_d$ 成立；2）在 U_λ 中有非零向量 u'_d 使 $T_\lambda(g)u'_d=\varepsilon(g)u'_d$，对所有 $g\in C_d$ 成立，这里 $\varepsilon(g)=\pm1$ 表示 g 的奇偶性．对应于不同分划的表示互不等价，且它们穷尽了 S_m 在 $\mathbf{Q}$ 上的所有不可约表示．

向量 u_d 及 u'_d 唯一确定到差一个标量倍数．对于与分划 λ 相应的所有的图，可以规范化这些向量使得 $gu_d=u_{gd}$ 及 $gu'_d=u'_{gd}$，对任何 $g\in S_m$．这里 gd 是将 d 中所有的数用 g 置换后所得的图．对应于标准图 d 的所有向量 u_d（分别地 u'_d）形成 U_λ 的基．在这组基下，表示 T_λ 的算子有整数矩阵的形式．T_λ 的维数为

$$\dim T_\lambda=\frac{m!\prod_{i<j}(l_i-l_j)}{\prod_i l_i!}=\frac{m!}{\prod_{(i,j)}\lambda_{ij}},$$

这里 $l_i=\lambda_i+r-i$，$i=1,2,\cdots,r$，且后面表达式分母中乘积取遍 Young 表 t_λ 的所有胞腔 c_{ij}；λ_{ij} 表示相应的钩的长度．

S_m 的平凡的一维表示对应于分划 (m)，而非平凡的一维表示 ε（奇偶表示或符号表示）对应于分划 $(1,1,\cdots,1)$．表示 εT_λ 对应于与 λ 对偶的分划 λ'．空间 $U_{\lambda'}$ 可以等同于 U_λ（用典范的方法，可差一个**位似变换**（homothety））使得 $T_{\lambda'}(g)=\varepsilon(g)T_\lambda(g)$，对任何 $g\in S_m$．而且可取 $u'_d=u_{d'}$，这里 d' 是由 d 经转置所得的图．

构造对称群的不可约表示的完全组需使用 **Young 对称化子**(Young symmetrizer),并可得到**正则表示**(regular representation)的分解. 设 d 是对应于分划 λ 的 Young 图, 由 Young 对称化子 e_d 生成群代数 $\mathbf{Q}S_m$ 的一个左理想, 则表示 T_λ 等价于 S_m 在该左理想上的表示. e_d 在各表示中的作用归纳地描述如下: 对 $\mu\neq\lambda$, $T_\mu(e_d)=0$, 而且 $T_\lambda(e_d)$ 是秩为 1 的算子, 对任何 $u\in U_\lambda$, $T_\lambda(e_d)u=(u_d,u)u_d'$. 这里 $(\cdot,\cdot)$ 表示 U_λ 上的不变标量积, 且适当地规范化. 进而

$$(u_d, u_d)=\frac{m!}{\dim U_\lambda}.$$

对 T_λ 的特征标, **Frobenius 公式**(Frobenius formula)给出了生成函数. 但在计算特征标的单个值时, 使用递推关系是更方便的. **Murnagan-中山法则**(Murnagan-Nakayama rule)是最有效的: 令 $[\mu]$ 是 S_m 的由 m 的分划 μ 确定的共轭元素的类, 以 $a_{\lambda,\mu}=a_{\lambda\mu}^{(m)}$ 表 T_λ 的特征标在 $[\mu]$ 上的值, 又设 μ 含有数 p. 以 $\bar{\mu}$ 表 $m-p$ 的分划, 它是由分划 μ 中去掉 p 而得到的. 则

$$a_{\lambda\mu}^{(m)}=\sum_{\bar{\lambda}}(-1)^{i(\bar{\lambda})}a_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{(m-p)},$$

其中求和号取遍所有 $m-p$ 的那种分划 $\bar{\lambda}$, 它是由 **Young 表**(Young tableau) t_λ 中去掉一个长为 p 的斜钩而得到的, 而 $i(\bar{\lambda})$ 表示去掉的这个斜钩的高.

也还有方法来得到 S_m 的完整的特征标表, 即矩阵 $A=\|a_{\lambda\mu}\|$(见[5]). 令 M_λ 是 S_m 的由子群 $R_\lambda=R_d$ 的平凡一维表示诱导的表示, 其中 d 是与分划相应的 Young 图. 令 $M_\lambda=\sum_\mu m_{\lambda\mu}T_\mu$ 及 $M=\|m_{\lambda\mu}\|$. 在 m 的所有分划 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ 的集合上自然地引入字典排列顺序. M 的行和列就按此序放置, 则 M 是下三角形矩阵且对角线上为 1. M_λ 的特征标在类 $[\mu]$ 上的值为

$$b_{\lambda\mu}=\frac{c_\mu|R_\lambda\cap[\mu]|}{|R_\lambda|},$$

其中 c_μ 是 $[\mu]$ 中置换的中心化子的阶. 矩阵 $B=\|b_{\lambda\mu}\|$ 是上三角形矩阵, 且 $MM^T=BC^{-1}B^T$, 其中 $C=\mathrm{diag}(c_\mu)$. 由此可唯一决定 M. 于是矩阵 A 由下式决定

$$A=M^{-1}B.$$

S_m 的表示 T_λ 在子群 S_{m-1} 上的限制由下述**分歧法则**(ramification rule)求得

$$T_\lambda|_{S_{m-1}}=\sum_i T_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_i-1,\cdots,\lambda_r)},$$

上面求和号中取遍所有满足 $\lambda_i>\lambda_{i+1}$(包括 r)的 i. T_λ 到子群 A_m 的限制当 $\lambda\neq\lambda'$ 时为绝对不可约的, 当 $\lambda=\lambda'$ 时, 在 $\mathbf{Q}$ 的一个二次扩张上分裂为同维数的两个非等价绝对不可约表示的和. 如此得到的 A_m 的表示穷尽了它在 $\mathbf{C}$ 上的所有不可约表示.

对称群在张量上的表示见**典型群的表示**(representation of the classical groups).

对称群的模表示论也已建立(参见例如[5]).

参考文献

[1] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946.

[2] Murnagan, F. D., Theory of group representations, J. Hopkins Univ. Press, 1938.

[3] Hamermesh, M., Group theory and its applications to physical problems, Addison-Wesley, 1962.

[4] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[5] James, G., The representation theory of the symmetric groups, Springer, 1978.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 令 $R(S_m)$ 是 m 个字母上的对称群 S_m 的所有复不可约表示生成的自由 Abel 群. 现考虑直和

$$R=\bigoplus_{m=0}^{\infty}R(S_m),\ R(S_0)=\mathbf{Z}.$$

可定义 R 上 **Hopf 代数**(Hopf algebra)结构如下. 首先作乘法. 令 ρ 和 σ 分别是 S_n 和 S_m 的表示. 作**张量积**(tensor product). 定义 $S_n\times S_m$ 的表示 $(g,h)\mapsto\rho(g)\otimes\sigma(h)$. 自然地, $S_n\times S_m$ 是 S_{n+m} 的子群. 现在定义 R 中 ρ 与 σ 的积为到 S_{n+m} 的**诱导表示**(induced representation):

$$\rho\sigma=\mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}(\rho\otimes\sigma).$$

对余乘法, 要用到限制. 令 ρ 是 S_n 的表示. 对每个 $p,q\in\{0,1,\cdots\}$, $p+q=n$, ρ 到 $S_p\times S_q$ 的限制就得到 $R(S_p\times S_q)=R(S_p)\otimes R(S_q)$ 的一个元素. R 的余乘法就定义为

$$\mu=\sum_{p+q=n}\mathrm{Res}_{S_p\times S_q}^{S_n}(\rho).$$

将 $\mathbf{Z}$ 与 $R(S_0)$ 等同就定义了单位映射 e: $\mathbf{Z}\to R$, 定义 ε: $R\to\mathbf{Z}$, 在 $R(S_0)=\mathbf{Z}$ 上 $\varepsilon=$ 恒等映射, 当 $m>0$ 时, $\varepsilon(R(S_m))=0$, 这叫做增广映射. 有一个定理断言 (m,μ,e,ε) 在 R 上定义了分次双代数结构. R 上还可有**对映体**(antipode)而成为**分次 Hopf 代数**(graded Hopf algebra).

该 Hopf 代数可明白地描述如下. 考虑无限个变量 c_i, $i=1,2,\cdots$, $c_0=1$ 的交换的**多项式环**(ring of polynomials)

$$U=\mathbf{Z}[c_1,c_2,\cdots].$$

由

$$c_n \mapsto \sum_{p+q=n} c_p \otimes c_q$$

及余单位 ε, $\varepsilon(c_0)=1$, $\varepsilon(c_n)=0$, 当 $n \geq 1$, 就给出了**余代数**(co-algebra)结构. 也存在对映体, 使 U 成为分次 Hopf 代数. 也许对称群表示论中的基本结果是, 作为 Hopf 代数 R 与 U 是同构的. 由于

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{Hopf}}(U)=\mathbf{Z}/(2)\times\mathbf{Z}/(2),$$

该同构近乎唯一([A1]).

R 的单个分量 $R(S_m)$ 本身在表示的积: ρ, $\sigma \mapsto \rho\times\sigma$, $(\rho\times\sigma)(g)=\rho(g)\otimes\sigma(g)$ 下也成为环. 这样在 R 上定义了第二种乘法, 它在第一种乘法上是分配的, 而且 R 在 $\mathbf{Z}$ 上余代数的范畴中成为环对象. 这种对象已被称为 Hopf 代数([A6]), 并且它们中有不少是自然地出现在代数拓扑学中. 环 $U\simeq R$ 在代数拓扑学中是作为复 K 理论的**分类空间**(classifying space) BU 的上同调 $H^*(\mathrm{BU})$ 出现, 且存在"自然而直接的同构" $R\simeq H^*(\mathrm{BU})$, ([A3]). (这就说清楚了上面 U 中所用的记号: "c_i"代表**陈(省身)类**(Chern class)).

在 $R=U$ 上还有内积: $\langle\rho,\sigma\rangle$是 ρ, σ 中公共的不可约表示的数目, 且对于该内积 R 是(分次)自对偶的. 特别地, 乘法和余乘法是互为伴随的:

$$\langle\rho,\ \sigma\tau\rangle=\langle\mu(\rho),\ \sigma\otimes\tau\rangle,$$

这与 Frobenius 互反性(Frobenius reciprocity)是相同的, 见**诱导表示**(induced representation).

Witt 向量的函子的表示对象 $R(W)$ 是代数 U 的范畴的核心对象, 它在形式群论中起重要作用([A2]). 但至今在这种表现形式下还未找到自然而直接的同构来联系 R 及 $U=R(W)$.

环 U 也赋以 **λ 环**(λ-ring)的结构, 实际上它是一个生成元上的泛 λ 环(universal λ-ring), $U(\Lambda)$, ([A4]), 并且它给出自然同构 $U(\Lambda)\simeq R(W)$, 一些细节可见 **λ 环**.

最后, 在 $\oplus R(S_n)$ 上有典范的正性概念: 真(即非虚的)表示是正的且乘法和余乘法保持正性. 这导致到 PSH 代数(PSH-algebra)的概念, 它代表正的自伴 Hopf 代数([A5]). 本质上, U 是一个生成元的唯一的 PSH 代数, 所有其他的皆是 U 的分次移位的副本的张量积. 这性质除了 S_m 外还能用到其他典型群系列上([A5]).

在组合学中, 代数 U 也有长久的历史. 用现代术语说它是所谓**哑演算**(umbral calculus)的基础([A7]).

[A8]是对称群表示论的一篇现代文献, 既有常表示又有模表示.

参考文献

[A1] Liulevicius, A., Arrows, symmetries and representation rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **19** (1980), 259－273.

[A2] Hazewinkel, M., Formal rings and applications, Acad. Press, 1978.

[A3] Atiyah, M. F., Power operations in K-theory, *Quarterly J. Math.* (2), **17** (1966), 165－193.

[A4] Knutson, D., λ-rings and the representation theory of the symmetric group, Springer, 1973.

[A5] Zelevinsky, A. V., Representations of finite classical groups, Springer, 1981.

[A6] Ravenel, D. C., The Hopf ring for complex cobordism, *J. Pure Appl. Algebra*, 9 (1977), 241－280.

[A7] Roman, S., The umbral calculus, Acad. Press, 1984.

[A8] James, G. and Kerber, A., The representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley, 1981.

[A9] Robinson, G. de B., Representation theory of symmetric group, Univ. Toronto Press, 1961.

[A10] Green, J. A., Polynomial representations of GL_n, Lecture notes in math., 30, Springer, 1980.

石生明 译　王　杰 校

表示论[**representation theory**; **представлений теория**]

研究半群(特别地, 群), 代数及其他代数系统到适当结构的相应的自同态系统的同态的理论. 最通常的是考虑线性表示(linear representations), 即半群, 群, 结合代数, 或 Lie 代数到某向量空间 V 中线性变换的半群, 群, 代数, 或 Lie 代数的同态. 这种表示也称为空间 V 中的线性表示(linear representations in the space), 而 V 称为表示空间(representation space)(或该表示的空间(space of the representation)). 通常, 表示论就是指线性表示的理论. 若 V 是有限维的, 它的维数称为表示的维数(dimension)或次数(degree), 且表示本身也称为有限维的(finite-dimensional). 因而人们区别有限维和无限维表示. 表示若是**单射**(injection), 就称为忠实的(faithful).

半群, 群及 Lie 代数的线性表示的研究还导致结合代数线性表示的研究(见**结合代数的表示**(representation of an associative algebra)). 精确些说, 半群(群)在域 k 上空间 V 中的线性表示(见**群的表示**(representation of a group), **半群的表示**(representation of a semi-group))自然地一一对应到相应的域 k 上半群(群)代数在 V 中的表示. 域 k 上 Lie 代数 L 的表示一一对应到它的**泛包络代数**(universal enveloping algebra)的线性表示.

给定结合代数 A 在空间 V 上的线性表示 φ 等价于在 V 上给出一个 A 模结构; 于是 V 称为表示 φ 的模(module of the representation). 若考虑的是群 G

或 Lie 代数 L 的表示，也说成是 G 模或 L 模（见模（module））．表示模的同态称为**交结算子**（intertwining operator）．同构的模对应于等价表示（equivalent representations）．表示 φ 的模 V 的子模是对于 φ 不变的子空间 $W \subset V$；在 W 上诱导出来的表示称为子表示（subrepresentation），而在商模 V/W 上诱导的表示称为 φ 的商表示（quotient representation）．模的直和对应于表示的直和，不可分解模对应于不可分解表示，单模对应到不可约表示，以及半单模对应到完全可约表示．线性表示的张量积，外积以及表示的对称幂也产生线性表示（见表示的**张量积**（tensor product））．

类似于抽象的（或代数的）表示论，还有拓扑对象、如拓扑群，或 Banach 代数的表示论（见**连续表示**（continuous representation）；**拓扑群的表示**（representation of a topological group）．

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978（英译本：Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976）.

[A2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

石生明 译 王 杰 校

带最高权向量的表示 [representation with a highest weight vector; представление со старшим вектором]

特征为零的域 k 上的含分裂 **Cartan 子代数**（Cartan subalgebra）$\mathfrak{t}$ 的有限维半单分裂 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的具有以下性质的线性表示 ρ（见 **Lie 代数的表示**（representation of a Lie algebra））．

1）在 ρ 的空间 V 中存在一个循环向量 v（cyclic vector）（即 V 是含 v 的最小 $\mathfrak{g}$ 不变子空间）．

2）对所有 $h \in \mathfrak{t}$，$\rho(h)v = \lambda(h)v$，这里 λ 是 $\mathfrak{t}$ 上的值在 k 中的某个固定的线性型．

3）若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{t}$ 的所有根的集合 Δ 由字典序确定的一个单根系（见**根系**（root system）），e_{α_i}，$\mathfrak{t}_{\alpha_i}$，h_{α_i} 是 $\mathfrak{g}$ 的对应于 $\alpha_i (i = 1, \cdots, r)$ 的 Chevalley 基中的向量，则对所有 $i = 1, \cdots, r$，$\rho(e_{\alpha_i})(v) = 0$．这样，$\lambda$ 是关于 ρ 限制于 $\mathfrak{t}$ 的权（见 **Lie 代数表示的权**（weight of a representation of a Lie algebra））；称为**最高权**（highest weight）．空间 V 称为带最高权 λ 和生成元 v 的循环 $\mathfrak{g}$ 模（cyclic $\mathfrak{g}$-module with highest weight λ and generator v），v 称为**最高权向量**（highest weight vector）．

对 $\mathfrak{t}$ 上每个线性型 λ，存在 $\mathfrak{g}$ 的在等价意义下唯一的带最高权 λ 的不可约表示 ρ_λ．由 ρ_λ 确定的 $\mathfrak{g}$ 模 $V(\lambda)$ 是 ρ_λ 限制于 $\mathfrak{t}$ 的权子空间的直和．它们的权有形式

$$\lambda - \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i,$$

这里 n_i 是非负整数．权 μ 的权子空间 $V_\mu(\lambda)$ 是有限维的，由形如

$$(\rho_\lambda(f_{\alpha_{i1}}) \cdots \rho_\lambda(f_{\alpha_{il}}))(v)$$

的向量在 k 上张成，对任何 $h \in \mathfrak{t}$，$\rho_\lambda(h)$ 在 $V_\mu(\lambda)$ 上的限制是 $\mu(h)$ 的标量乘法算子．空间 $V_\lambda(\lambda)$ 是一维的；权 λ 是 ρ_λ 仅有的最高权，并可刻画为 $\mathfrak{t}$ 模 $V(\lambda)$ 的使得其他权具有形式

$$\lambda - \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_i$$

的唯一的权，这里 n_i 是非负整数．

表示 ρ_λ 是有限维的，当且仅当 λ 是 $\mathfrak{t}$ 上的支配线性型（dominant linear form），即对 $i = 1, \cdots, r$，$\lambda(h_{\alpha_i})$ 是一个非负整数．$\mathfrak{g}$ 的每个有限维不可约线性表示均具有 ρ_λ 的形式，其中 λ 是 $\mathfrak{t}$ 上的某个支配线性型（因而所有这样的表示在等价的意义下由 $\mathfrak{t}$ 上的支配线性型分类）．有限维表示 ρ_λ 关于 $\mathfrak{t}$ 的全体权的集合在 $\mathfrak{g}$ 的 **Weyl 群**（Weyl group）（视为 $\mathfrak{t}$ 的线性变换群）作用下不变，如果 μ 和 γ 属于 Weyl 群的同一轨道，则空间 $V_\mu(\lambda)$ 和 $V_\gamma(\lambda)$ 维数相等．对每个权 μ 和每个根 $\alpha \in \Delta$，$\mu(h_\alpha)$ 是一个整数；此外，如果 $\mu + \alpha$ 也是一个权，则

$$\rho(e_\alpha)(V_\mu(\lambda)) \neq 0$$

（这里 h_α 是 $\mathfrak{t}$ 中对应于 α 的元素，e_α 是 α 的根向量）．

参考文献

[1] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962（中译本：N．贾柯勃逊，李代数，上海科学技术出版社，1964）.

[2] Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie. Sém. S. Lie, Secr. Math. Univ. Paris, 1955.

[3] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970（英译本：Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973）.

[4] Cartan, E., Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semisimples, *Bull. Sci. Math.*, 49 (1925), 130 – 152.

[5] Harish-Chandra, On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70 (1951), 28 – 96.

В. Л. Попов 撰 秦传仁 译

代表子空间 [representative subspace; репрезентативное

подпространство]

拓扑空间 (topological space) Y 的子空间 X, 使得包含映射 $X \subset Y$ 是弱同伦等价 (见**同伦型** (homotopy type)).

А. Ф. Харшиладзе 撰 潘建中 译 沈信耀 校

剩余有限群 [residually-finite group; финитно аппроксимируемая группа]

能用有限群逼近的群. 令 G 为**群** (group), ρ 是定义在 G 上以及它的所有同态象上的元素和元素集间的一个关系 (换句话说, 谓词) (例如, 二元关系元素相等, 二元关系"元素 x 属于子群 y", 二元关系"元素的共轭"等). 令 K 是群的类. 称 G 可被 K 中的群关于 ρ 所逼近 (或 G 是 K 中关于 ρ 剩余的), 如果对 G 的不在关系 ρ 中的任意一些元素及元素集, 有 G 到 K 中某群的满同态, 在该同态下, 这些元素及元素集的象仍不在关系 ρ 中. 关于元素相等的关系的可逼近性简称为可逼近性 (approximability). 一个群能由类 K 中的群逼近, 当且仅当它包含在 K 中群的 Descartes 积中. 关于 ρ 的剩余有限性用 RFρ 表示; 特别地当 ρ 跑过相等、共轭、属于某子群、属于某有限生成的子群等等谓词时, 就得到性质 (类) RFE, RFC, RFB, RFB_ω 等. 群中这些性质的出现蕴涵了相应的**算法问题** (algorithmic problem) 的可解性.

参考文献

[1] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (英译本: Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

Ю. И. Мерзляков 撰

【补注】 在过去的术语中, 剩余有限群称为有限逼近群 (finitely-approximated group), 这是俄语中该概念的字面上的翻译.

关于剩余有限群的一个充分的说明可参见 [A1].

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., A course in the theory of groups, Springer, 1982.

石生明 译 王杰 校

剩余有限半群 [residually-finite semi-group; финитно аппроксимируемая полугруппа, 有限可逼近半群 (finitely approximable semi-group)

对**半群** (semi-group) T 的任意两个不同的元素 a, b, 均存在到某一个有限半群 S 的同态 φ, 使得 $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ 的半群 T. 半群 S 的剩余有限性等价于: S 是有限半群的子直积. 剩余有限性是比较重要的有限性条件 (见**具有有限性条件的半群** (semi-group with a finiteness condition)) 之一, 它是和算法问题紧密相关的 (见**算法问题** (algorithmic problem)): 如果 S 是有限表示的剩余有限半群, 那么存在一个关于解决 S 中字问题的算法. 自由半群, 自由交换半群, 自由 n 类幂零半群, 自由逆半群 (视为具有两个运算的代数), 半格, 有限生成交换半群 ([1]), 幂零环或交换环上的有限生成的矩阵半群和 Мальцев 意义下 n 类幂零 (见**幂零半群** (nilpotent semi-group)) 的有限生成正则半群 ([4]) 都是剩余有限半群; 亦见**剩余有限群** (residually-finite group).

任意一族剩余有限半群的**直积** (direct product), **自由积** (free product), 序和 (见**半群的带** (band of semi-groups)), 0 直并也都是剩余有限半群. 一般地, 其他的构作不保持剩余有限性. 借助于任一剩余有限半群所作的剩余有限半群 S 的理想扩张是剩余有限的, 例如, 若 S 是约化半群 (reductive), 即 S 的任意两个不同的元素诱导出不同的左和不同的右内平移; 特别地, 如果 S 是可消半群或逆半群. 任一族约化的剩余有限半群的半格是剩余有限的.

如果 S 是剩余有限半群, 那么它的所有极大子群是剩余有限的. 对某些类型的半群, 这个必要条件也是充分条件, 例如, 每个主因子包含有限个幂等元的正则半群 ([2]), Clifford 逆半群, 具有限个 $\mathcal{J}$ 类或 $\mathcal{H}$ 类 (见 **Green 等价关系** (Green equivalence relations)) 的完全 0 单半群. 对若干半群类, 其中的剩余有限半群的刻画可以不利用极大子群的约化而得到.

已经有多种方法可以刻画剩余有限半群簇 ([3]), 下面的刻画是其中之一. 设 L, R, N, I 分别是二元左零半群, 二元右零半群, 二元零积半群和二元半格, 并设 P 是三元半群 $\{e, p, 0\}$, 其中 $e^2 = e$, $ep = p$, 而其他元素的乘积为 0, P^* 是反同构于 P 的半群. 簇 M 由剩余有限半群构成, 当且仅当 M 被下列三个集合之一的子集所生成: $\{L, R, N, I, G\}$, $\{R, P, C\}$, $\{L, P^*, C\}$, 其中 G 是带有 Abel Sylow 子群的有限群, C 是有限循环群.

参考文献

[1] Мальцев, А. И., 《Уч. зап. Ивановского пед. ин-та》, **18** (1958), 49 – 60.

[2] Глубов, Э. А., 《Матем. заметки》, **17** (1975), 3, 423 – 432.

[3] Глубов, Э. А., Сапир, М. В., 《Докл. АН СССР》, **247** (1979), 5, 1037 – 1041.

[4] Lallemant, G., On nilpotency and residual finiteness in semigroups, *Pacific J. Math.*, **42** (1972), 3, 693 – 700

Э. А. Голубов, Л. Н. Шеврин 撰

田振际 郑恒武 译 郭聿琦 校

剩余映射 [residuated mapping; резидуальное отображение]

由偏序集 P 到偏序集 P' 内的一个**保序映射**(isotone mapping)φ, 对其存在 P' 到 P 的一个保序映射 φ', 使得对所有 $x \in P$, $\varphi'(\varphi(x)) \geqslant x$ 和对所有 $x' \in P'$, $\varphi(\varphi'(x')) \leqslant x'$. 如果 P 和 P' 都是完全格, 那么这就等价于对 P 的每一个子集 A, 等式

$$\varphi(\sup A) = \sup \varphi(A)$$

成立. 一个偏序集 P 到其自身内的剩余映射的集合构成一个半群, 并可定义其偏序(见**序半群**(ordered semi-group))为: $\varphi \leqslant \psi$, 如果对所有 $x \in P$, $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$. 这个偏序半群的性质同偏序集 P 的性质有密切联系(见**格**(lattice)). Л. А. Скорняков 撰

【补注】 在定义中出现的映射 φ' 称为 φ 的剩余(residual), 它由 φ 唯一确定. 由范畴论借用一个更对称的术语, 称 φ 为左伴随(left adjoint), φ' 为右伴随(right adjoint), (见**伴随函子**(adjoint functor)). 对于剩余映射的反序类似物见 **Galois 对应**(Galois correspondence).

参考文献

[A1] Blyth, T. S. and Janowitz, M. F., Residuation theory, Pergamon, 1972.

卢景波 译

残数形式 [residue form; вычет-форма]

单复变数的**解析函数的残数**(residue of an analytic function)概念在多复变数的拓广. 令 X 为一复解析流形(analytic manifold), 令 S 为一复余维为 1 的解析子流形又 $\omega(x)$ 为一在 $X \setminus S$ 是 C^∞ 的闭外**微分形式**(differential form)在 S 上具有 1 阶极奇性. 最后一条件表示对在点 $y \in S$ 的一邻域 U_y 上关于 x 是全纯的函数 $s(x, y)$ 并使得

$$S \cap U_y = \{x: s(x, y) = 0\}, \ ds \neq 0, \text{ 如果 } x = y,$$

则形式 $\omega(x) \cdot s(x, y)$ 属于 $C^\infty(U_y)$ 类. 在这些条件下在任意一点 $y \in S$ 的邻域 U 中存在 C^∞ 类的形式 $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ 使得

$$\omega(x) = \frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge \psi(x, y) + \theta(x, y),$$

其中 $\psi(x, y)|_{S \cap U_y}$ 是一个依赖于 ω 的 C^∞ 类闭形式. S 上在任一点 $y \in S$ 的邻域上由限制 $\psi(x, y)|_{S \cap U}$ 定义的闭形式, 称为 ω 的**残数形式**(residue form), 并记为

$$\operatorname{res}[\omega] = \left.\frac{s\omega}{ds}\right|_S.$$

如果形式 ω 是全纯的, 它的残数形式也是全纯的(见**全纯形式**(holomorphic form)). 例如, 对 $X = \mathbf{C}^n$, $S = \{x \in \mathbf{C}^n: s(x) = 0\}$ 和形式

$$\omega(x) = \frac{f(x)}{s(x)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

其中 f 和 s 是 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯函数, 在 S 上 $\operatorname{grad} s \neq 0$, 在 $ds/dx_j \neq 0$ 的点, 残数形式为

$$\operatorname{res}[\omega] =$$

$$= \left[\frac{f(x)}{\partial s/\partial x_j}\right]\Bigg|_S dx_1 \wedge \cdots \wedge [dx_j] \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

相应于残数形式的**残数公式**(residue formula)为:

$$\int_{\delta\gamma} \omega = 2\pi i \int_\gamma \operatorname{res}[\omega],$$

其中 γ 为 S 中的任一循环, 其维数等于 $\operatorname{res}[\omega]$ 的次序, 又 $\delta\gamma$(在 $X \setminus S$ 中的一循环)为 X 中某一链的边界, 它与 S 处于一般位置, 并沿 γ 与 S 相交.

复合残数形式 $\operatorname{res}^m[\omega]$ 由归纳法定义.

在 $X \setminus S$ 中的一闭形式 ω 的**残数类**(residue class)是子流形 S 上的一**上同调**(cohomology)类, 它是 $X \setminus S$ 中上同调于 ω 和在 S 上有一阶极性的 C^∞ 类形式的残数形式产生的. 一形式 ω 的残数类记为 $\operatorname{Res}[\omega]$. 一全纯形式的残数类不必包含全纯形式, 因为在一般情形下不允许限于考虑全纯形式环而宁愿考虑闭形式环. 然而当 X 是一 **Stein 流形**(Stein manifold)时是可能的. 残数类 $\operatorname{Res}[\omega]$ 不依赖于在 ω 的上同调类之内的 ω 的选取并实现从流形 $X \setminus S$ 上同调类群到流形 S 的上同调类群之间的一个同态:

$$\operatorname{Res}: H^*(X \setminus S) \to H^*(S).$$

对于残数形式, 下列**残数公式**(residue formula)是成立的:

$$\int_{\delta\gamma} \omega = 2\pi i \int_\gamma \operatorname{Res}[\omega],$$

并且上式右端的积分可取在残数类 $\operatorname{Res}[\omega]$ 的任一形式上并与所取形式无关.

关于参考文献, 见**解析函数的残数**(residue of an analytic function)中的 [7], [8], [4].

А. П. Южаков 撰

【补注】 系数是分布(广义函数)的**微分形式**(differential form)称为**流动形**(current). 流动形的理论被 H. Federer([A5])大为发展. 可以定义一流动形的残数. 联系于复解析簇的流动形已经引起了极大的注意, 例如见 [A6] – [A8].

残数形式也称为**残数流动形**(residue currents). 如上所述, 这是解析函数的残数, 或者是它的主要部分在多变数的拓广. 残数有其他几种看法: 令 g 在一有界域 $D \subset \mathbf{C}$ 除了一个奇点 $S = \{a_1, \cdots, a_m\}$ 的(有限)集合外是全纯的, 令 D_j 为 a_j 的邻域具有光

滑边界，$a_i \notin D_j$，如果 $i \neq j$．令 ψ 为光滑的、在 D 上紧支集的和在 S 的一个邻域中是全纯的，那么

$$\mathrm{Res}(g)(\psi) = \sum_j \int_{\partial D_j} g(z)\psi(z)\,dz = -\int_D g\bar{\partial}\psi\,dz \tag{A1}$$

当 D_j 包含在 S 的邻域中时与 D_j 无关，其中 ψ 是全纯的．如果取 ψ 为在 a_j 的一小邻域中等于 1 的函数时就得到通常的残数．注意，ψdz 表示在 S 的一 $\bar{\partial}$ 闭的 (1, 0) 形式的芽，又 g 是一 $\bar{\partial}$ 闭的 (0, 0) 形式．因此，$\mathrm{Res}: H^{0,0}(D\setminus S) \to \mathrm{Hom}(H^{1,0}(S), \mathbf{C})$．在此 $H^{\cdot,\cdot}(S)$ 表示在 S 的形式的芽的 Dolbeault 上同调．$\mathrm{Res}(g)$ 称为上同调残数(cohomological residue)．这可拓广到多变数，D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一区域，S 是 D 的一闭子簇，得到一同态

$$\mathrm{Res}: H^{p,q+1}(D\setminus S) \to \mathrm{Hom}(H^{n-p,n-q-1}(S), \mathbf{C}).$$

在另一方面，可对光滑函数 ψ 不必是闭的解释 (A1)．这事可以做到，如果加上 g 在 D 上是亚纯的条件．可以写出 $g = g_1/g_2$，其中 g_j 是全纯的，并由单位分解假设 ψ 的支集在 D_j 上．那么下列极限存在与 g 的表示无关:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|g_2|=\varepsilon} g(z)\psi(z)\,dz. \tag{A2}$$

它定义一流动形其支集在 S 上．要想在多变数得到一有意义的类似是较困难的．

一在 $D\setminus S$ 上的半亚纯形式 (semi-meromorphic form) 是在 $D\setminus S$ 上的一光滑微分形式 ω，对每一点 $z\in D$ 允许一定义在 z 的某一邻域上的全纯函数，使得 $g\omega$ 在 z 是光滑的．(A2) 的一个好的拓广是一半亚纯 (q, r) 形式 ω 的"残数"，它是支集在 S 上的流动形．需要形式

$$R_{I,J}^{\omega,f}(\psi) = \lim_{\delta\to 0} \int_{D_{I,J}^{\delta}(\varepsilon, f)} \omega \wedge \psi$$

的极限存在，其中

$$D_{I,J}^{\delta}(\varepsilon, f) = \{z\in D: |f_i(z)| = \varepsilon_i(\delta),\ i\in I,\ |f_j(z)| > \varepsilon_j(\delta),\ j\in J\}.$$

此处 I 和 J 是 $1, \cdots, p$ 的不联结子集，$f = (f_1, \cdots, f_p): D \to \mathbf{C}^p$ 是一全纯映射，使得 $S \subset U_{k\in I\cup J}\{f_k = 0\}$，$\psi$ 是任一有紧支集的光滑 $(2n - |I| - q - r)$ 形式，又 $\varepsilon(\delta) = (\varepsilon(\delta)_1, \cdots, \varepsilon(\delta)_p): (0, 1] \to \mathbf{R}_+^p$ 是一容许路线，即 $\varepsilon_j(\delta)$ 和 $\varepsilon_j/\varepsilon_{j+1}$ 和 δ 一起趋于 0．事实上，$R_{I,J}^{\omega,f}$ 是 $(q, r+|I|)$ 流动形．对于这两个方法，见 [A4]．

第三个关于残数流动形的方法是用全纯广义值映射的解析延拓．见 [A2]．

参考文献

[A1] Айзенберг, Л. А., Южаков, А. П., Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Издательство, 《Наука》, 1979 (英译本: Aizenberg, L. A. and Yuzhakov, A P., Integral representations and residues in multidimensional complex analysis, Transl. Math. Monographs, 58, Amer. Math. Soc., 1983).

[A2] Berenstein, C. A., Gay, R. and Yger, A.. Analytic continuation of currents and division problems, Forum Math. (1989), 15 – 51.

[A3] Griffith, Ph. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[A4] Passare, M., Residues, currents and their relation to ideals of holomorphic functions, *Math. Scand*, **62** (1988), 75 – 152.

[A5] Federer, H., Geometric measure theory, Springer, 1969.

[A6] Harvey, R., Holomorphic chains and their boundaries, in R. O. Wells, jr. (ed): Several Complex Variables, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 30: 1, Amer, Math. Soc., 1977, 309 – 382.

[A7] Skoda, H., A survey of the theory of closed, positive currents, in Y.-T. Siu (ed.): Complex Analysis of Several Varvables, Vol. 41, Amer. Math. Soc., 1984, 181 – 190.

[A8] Чирка, Е. М., Комплексное аналитическое множество, Наука, Москва, 1985 (英译本: Chirka, E. M., Complex analytic sets, Kluwer, 1989).

钟同德 译

解析函数的残数 [**residue of an analytic function; вычет аналитической функции**]，亦称留数

单复变量解析函数 (analytic function) 在其单值特征有限孤立奇点 (singular point) a 处的残数或留数 (residue) 是函数 $f(z)$ 在 a 的一个邻域内 Laurent 展开式 (见 **Laurent 级数** (Laurent series)) 中 $(z-a)^{-1}$ 的系数 c_{-1}，或与之相等的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

其中 γ 是以 a 为圆心、半径充分小的圆．此残数记作 $\mathrm{res}[f(z); a]$．

残数理论 (theory of residues) 的基础是 **Cauchy 积分定理** (Cauchy integral theorem)，而残数定理 (residue theorem) 在这一理论中起着基本作用．设 $f(z)$ 是单连通域 G 内除孤立奇点外处处单值解析函数 (analytic function)，则 $f(z)$ 沿位于 G 内且不经过 $f(z)$ 的奇点的任一简单闭可求长曲线 γ 的积分可由公式

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{res}[f(z); a_k]$$

计算，其中 $a_k(k=1,\cdots,N)$ 是 $f(z)$ 的位于 γ 内的奇点.

对于在无穷远点 $a=\infty$ 的一个邻域内单值解析的 $f(z)$，函数在无穷远点处的残数(residue of a function at the point at infinity)由公式

$$\operatorname{res}[f(z);\infty]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-}f(z)dz=-c_{-1}$$

定义，其中 γ^- 是半径充分大的顺时针向圆周，而 c_{-1} 是 $f(z)$ 在无穷远点邻域内 Laurent 展开式中 z^{-1} 的系数. 残数定理蕴涵残数总和定理(theorem on the total sum of residues)：如果 $f(z)$ 是扩充复平面上除有限个奇点外的单值解析函数，则 $f(z)$ 的残数(包括无穷远点处的残数)之和为零.

由此，计算解析函数沿闭曲线的积分(围道积分)化简为计算残数，而后者在有限极点的情形特别简单. 设 $a\neq\infty$ 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点(见**极点(函数的)**(pole (of a function)))，则

$$\operatorname{res}[f(z);a]=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]\right\}.$$

如果 $m=1$(单极点)，则此公式变为

$$\operatorname{res}[f(z);a]=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)];$$

如果 $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在 a 的一个邻域内正则，a 是 $\psi(z)$ 的单零点，则

$$\operatorname{res}\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)};a\right]=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

应用残数定理于对数导数可得重要的对数残数定理(theorem on logarithmic residues)：如果函数 $f(z)$ 在单连通域 G 内亚纯，简单闭曲线 γ 位于 G 内且不经过 $f(z)$ 的零点或极点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P,$$

其中 N 和 P 分别是 $f(z)$ 在 γ 内零点和极点的计及重数的个数. 上述公式左端的表示式称为所给函数关于曲线 γ 的对数残数(logarithmic residue)(亦见**辐角原理**(argument, principle of the)).

残数可用于计算实值函数的某些积分，诸如

$$J_1=\int_0^{2\pi}R(\sin t,\cos t)dt,$$

$$J_2=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx,\ J_3=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix}f(x)dx$$

等，其中 $R(\sin t,\cos t)$ 是 $\sin t$，$\cos t$ 的有理函数且当 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 时连续，$f(z)$ 当 $\operatorname{Im}z\geqslant 0$($\operatorname{Im}z$ 是 z 的虚部)时连续，当 $\operatorname{Im}z>0$ 时除有限个奇点外解析. 通过代换 $e^{it}=z$，J_1 可转化为围道积分

$$\int_{|z|=1}R\left[\frac{z^2-1}{2iz},\ \frac{z^2+1}{2z}\right]\frac{dz}{iz},$$

从而可归结为计算残数；如果当 $z\to\infty$ ($\operatorname{Im}z\geqslant 0$) 时有 $f(z)z^r\to 0$ $(r>1)$，则

$$J_2=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a>0}\operatorname{res}[f(z);a];$$

如果 $f(z)$ 满足 **Jordan 引理**(Jordan lemma)的条件，则

$$J_3=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a>0}\operatorname{res}[e^{iz}f(z);a].$$

在解析延拓、分解亚纯函数为部分分式、幂级数求和，渐近估计等问题以及理论和应用分析的许多其他问题中，都已发现残数的很多重要应用([1]－[4]).

单变量残数理论主要是由 A. L. Cauchy 于 1825－1829 年间开发起来的. 有关残数理论推广的许多结果是由 Ch. Hermite(关于双周期函数残数和的定理)，P. Laurent，Ю. В. Сохоцкий，E. Lindelöf 及其他学者得到的.

在 Riemann 曲面上研究的是解析微分而不是解析函数的残数([5]，亦见 **Riemann 曲面上的微分**(differential on a Riemann surface)). 在其孤立奇点(之一)的一个邻域中解析微分 dZ 的残数(residue of an analytic differential)定义为函数 $g(z)=dZ/dz$ 的 Laurent 展开式中 z^{-1} 的系数 c_{-1}，其中 z 是该点邻域内的单值化参数(见**单值化**(uniformization)). dZ 沿 Riemann 曲面上任一闭曲线的积分可通过微分 dZ 的残数和此微分的循环周期(cyclic period，即 dZ 沿典型割线(见**典型截线**(canonical section))的积分)来表示. 残数和定理也适用于 Riemann 曲面：紧 Riemann 曲面上亚纯微分的所有残数之和为零.

多复变量解析函数的残数理论. 见[8]－[10]，[12]，[13]. 这一理论的基础是 Stokes 和 Cauchy-Poincaré 积分定理，这两条定理使得一个闭形式沿一闭链的积分可代之以此形式沿另一同调于所给闭链的积分. 多复变量函数残数理论的基础由 H. Poincaré 建立([6])，他最早(1887)推广了 Cauchy 积分定理和两个复变量的函数的残数概念；他特别证明了两个复变量的有理函数沿不经过其奇点的 2 维闭链的积分可归结为 **Abel 积分**(Abelian integral)的周期，并以双残数作为 **Lagrange 级数**(Lagrange series)的 2 维推广的基础.

J. Leray ([7])(亦见[4]，[8])开发了复解析流形 X 上残数的一般理论. 特别是，Leray 残数理论描述了计算在解析子流形上具有奇点的闭外微分形式沿 X 上某些闭链的积分的一种方法. 他引进了残留

形式(residue form)概念，这是单元解析函数的残数概念的推广；由此得到的残数公式使得把一个在复解析子流形 S 上具有 1 阶极点的形式 ω 沿 $X\setminus S$ 中一个给定闭链上的积分的计算化简为残留形式 $\mathrm{res}[\omega]$ 沿 S 上低 1 维的闭链上的积分的计算成为可能．对于在 S 上具有任意奇点的闭形式的积分的计算，起重要作用的是残留类(见残留形式(residue form))概念和 Leray 定理(Leray theorem)，由此任一闭形式 $\omega\in C^{\infty}(X\setminus S)$ 都有一在 S 上具有 1 阶极点的上同调形式 ω_0 与之对应．对于在若干子流形 $(S_1\cup\cdots\cup S_m)$ 上具有奇点的形式 ω，则使用复合残留形式

$$\mathrm{res}^m[\omega]\in C^{\infty}(S_1\cap\cdots\cap S_m),$$

残留类

$$\mathrm{Res}^m[\omega]\in H^*(S_1\cap\cdots\cap S_m)$$

和残数公式

$$\int_{\delta^m\gamma}\omega=(2\pi i)^m\int_{\gamma}\mathrm{Res}^m[\omega],$$

其中 δ^m 是与 Leray 上边缘算子 δ 相联结的复合 Leray 上边缘算子，γ 是 $S_1\cap\cdots\cap S_m$ 中的一个闭链．

多复变量函数的残数理论还有另外的途径，这就是基于 E. Martinelli 的一种想法并涉及应用 **Alexander 对偶性**(Alexander duality)的消去同调基方法(method of distinguishing a homology basis)([8])．设 $f(z)$ $(z=(z_1,\cdots,z_n))$ 是区域 $G\subset\mathbf{C}^n$ 中的全纯函数，σ 是 G 中的 n 维闭链．如果 $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_p\}$ 是区域 G 的 n 维同调空间的一组基，

$$\sigma\sim\sum_{\nu=1}^{p}k_\nu\sigma_\nu$$

是 σ 关于这组基的展开式，则残数定理的推广具有形式：

$$\int_{\sigma}f(z)dz=(2\pi i)^n\sum_{\nu=1}^{p}k_\nu R_\nu,$$

$$dz=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n,$$

其中

$$R_\nu=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\sigma_\nu}f(z)dz$$

是残数的 n 维推广，称为函数 $f(z)$ 关于基闭链 σ_ν 的残数(residue of the function with respect of the basic cycle)．与单元情形不同的是，很难同时求出同调基 $\{\sigma_\nu\}$ 和系数 $\{k_\nu\}$．在某些情形中(例如 $G=\mathbf{C}^2\setminus\{P(z_1,z_2)=0\}$，$P$ 是一多项式)，这些问题可借助 Alexander-Понтрягин 对偶性求解．系数 k_ν 可作为闭链 σ 与集合 $\mathbf{C}^n\setminus G$(依某种方式紧化)上对偶于 σ_ν 的闭链的联结系数来求出．在某些情形下，残数 R_ν 可作为函数 $f(z)$ 的 Laurent 展开式的相应系数来求出．

对数残数的多维推广([4]，[8]，[9])使得区域 $D\subset\subset G\subset\mathbf{C}^n$ 中的全纯函数系 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 的公共零点个数(计及重数)可通过积分

$$N(f,D)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}\frac{1}{|f|^{2n}}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{n}\overline{f}_\nu df_\nu\wedge\overline{df_1}\wedge df_1\wedge\cdots[\nu]\cdots\wedge\overline{df_n}\wedge df_n,$$

$$N(f,D)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma}\frac{df_1}{f_1}\wedge\cdots\wedge\frac{df_n}{f_n}$$

来表达，其中 γ 是 $\partial D\setminus\bigcup_{\nu=1}^{n}\{f_\nu(z)=0\}$ 中的某个闭链．已发现多元函数的残数在研究 Feynman 积分、组合分析([11])和隐函数理论([8])中有用．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. I, М., 1967(中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957)．

[2] Евграфов, М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968(英译本：Evgrafov, M. A., Analytic functions, Saunders, 1966)

[3] Привалов, И. И., Введение в теорию функций комплексного переменново, 11 изд., М., 1967(中译本：И. И. 普里瓦洛夫，复变函数引论，人民教育出版社，1956)．

[4] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, М., 1969(第二卷英译本：Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part Ⅱ Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992)．

[5] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957.

[6] Poincaré, H., Sur les résidues des intégrales doubles, *Acta Math.*, **9** (1887), 321 – 380.

[7] Leray, J., Le calcule différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, Ⅲ), *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 81 – 180.

[8] Айзенберг, Л. А., Южаков, А. П., Интегральные представления и дычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, 1979(英译本：Aizenberg, L. A., Yuzhakov, A. P., Integral representations and residues in multidimensional complex analysis, Amer. Math. Soc., 1983)．

[9] Цих, А. К., Многомерные вычеты и их применения, Новосибирск, 1988(英译本：Tsikh, A. K., Multidimensional residues and its applications, Amer. Math. Soc., 即将出版)．

[10] Griffiths, P. A., On the periods of certain rational integrals Ⅰ, *Ann. of Math.* (2), **90** (1969), 3, 460 – 495.

[11] Егорычев, Г. П., Южаков, А. П., 《Сиб. матем. ж.》, **15** (1974), 5, 1049 – 1060.

[12] Griffiths, P. A., Harris, J., Priciples of algebraic

geometry, Wiley, 1978.

[13] Coleff, W. R., Herrera, M. F., Les courants résiduals associés à une forme meromorphe, Lecture notes in math., 633, Springer, 1978.

А. П. Южаков 撰

【补注】 亦见残留形式(residue form)的补注和参考文献.

参考文献

[A1] Mitrinović, D. S., Kečkić, J. D., The Cauchy method of residues: theory and applications, Reidel, 1984.

沈永欢 译

分解 [**resolution**; **резольвента**]

在**同调代数**(homological algebra)里模 A 的右分解是一个对正次数定义的**复形**(**同调代数中的**)(complex (in homological algebra)) C: $C_0 \to C_1 \to \cdots$. 再添上附加的同态 $A \to C^0$ 使得序列 $0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \cdots$ 是正合的(见**正合序列**(exact sequence)).

В. Е. Говоров 撰

【补注】 附加同态 $A \to C^0$ 也可被看成复形的同态 $A \to C$, 这里 A 被看成集中在 0 次的一个复形. 称右分解 $0 \to A \to C^0 \to \cdots$ 为内射的(injective), 如果模 C^i 都是**内射模**(injective module). 对偶地, 左分解是一个正合列 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$. 称左分解为投射的(projective), 如果所有的模 P_i 是**投射模**(projective module); 相应地称为自由的(free), 如果所有 P_i 都是自由模; 称为平坦的(flat), 如果所有 P_i 都是**平坦模**(flat module).

更一般地, 用完全类似的方法可在任何 **Abel 范畴**(Abelian category)内定义对象的分解(resolution of an object)([A1]). 例如在拓扑空间上 Abel 群层的范畴里, 层(sheaf) A 的内射分解是 Abel 群层的正合列 $0 \to A \to C^0 \to \cdots$, 其中每个 C^i 都是内射层. 在层论中常常使用**松弛层**(flabby sheaf)或**软层**(soft sheaf)的分解. 对于拓扑斯上层的情形见[A5], [A6].

分解在**导出函子**(derived functor)的计算以及作为导函子引出同调或上同调的方法中是一个主要的工具. 为了在非加性范畴中构造导函子, 使用了单纯形分解的技巧([A4]).

在很多情形下运用特殊形式的分解是有效的. 由 **Koszul 复形**(Koszul complex)提供的分解就是这样的例子, 这个复形有点像被拆开的**外代数**(exterior algebra).

参考文献

[A1] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119 – 221.

[A2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

[A3] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[A4] André, M., Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative, Lecture notes in math., 32, Springer, 1967.

[A5] Berthelot, P. and Ogus, A., Notes on crystalline cohomology, Princeton Univ. Press, 1978.

[A6] Milne, J. S., Etale cohomology, Princeton Univ. press, 1980.

[A7] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[A8] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

[A9] Godement, R., Théorie des faisceaux, Hermann, 1964.

陈志杰 译

奇点的分解 [**resolution of singularities**; **разрешение особенностей**], 非奇异化(desingularization)

把奇异**代数簇**(algebraic variety)换成一个双有理同构的非奇异簇. 更精确地说, 基域 k 上代数簇 X 的奇点的分解是一个真双有理态射 f: $X' \to X$ 使得簇 X' 是非奇异(光滑)的(见**真态射**(proper morphism), **双有理态射**(birational morphism)). 类似地可定义概形、复解析空间等的奇点的分解. 奇点分解的存在性使得人们可把许多问题归结到非奇异簇, 而在研究后者时则可使用相交理论以及微分形式的手段.

通常, 奇点的分解是逐次应用**单项变换**(monoidal transformation)的结果. 已经知道如果单项变换 $X' \to X$ 的中心 D 是容许的(即 D 是非奇异的, X 沿着 D 是正规平坦簇), 则簇的奇异性的数值特征(重数、Hilbert 函数等)不会比 X 的差. 问题在于选择拉开的中心使得 X' 内的奇异性确实被改善了.

在曲线的情形下奇点分解问题本质上被归结到正规化. 二维的情形要复杂得多. 特征数 0 的域上的簇的奇点分解的存在性已被证明. 更精确地说, 对于约化簇 X_0 存在容许单项变换的有限序列 f_i: $X_{i+1} \to X_i (i = 0, \cdots, r)$, 它们的中心为 $D_i \subset X_i$, 且 D_i 包含在 X_i 的奇点集里, X_r 是非奇异簇. 对于复解析空间也有类似的结果. 对于正特征数的情形, 奇点分解的存在性对于维数 $\leqslant 3$ 已经建立(1983).

奇点分解问题是与嵌入奇点的问题密切相关的. 后一问题可如下表述. 设 X 被嵌入到非奇异代数簇 Z 内. 试问: 是否存在真映射 f: $Z' \to Z$, Z' 非奇异, 使得 a) f 诱导从 $Z' \setminus f^{-1}(X)$ 到 $Z \setminus X$ 上的同构; b) $f^{-1}(X)$ 是具有正规交的除子?(非奇异簇上的除子具有正规交是指它局部地由方程 $t_1 \cdots t_k = 0$ 给出, 这里 $t_1, \cdots, t_k$ 是 Z 上正则参量系的一部分).

嵌入奇点问题是理想层平凡化问题的一个特殊情

形．设 Z 是非奇异簇，I 是 Z 上理想的**凝聚层**（coherent sheaf），且设 $D \subset Z$ 是非奇异闭子簇．在以 D 为中心的拉开 $f: Z' \to Z$ 之下理想 I 的弱原象是 Z' 上理想层

$$f^*(I) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{Z'}(mD').$$

这里 $D' = f^{-1}(D)$, m 是埋想 I 在 D 的正则点的重数．理想层的平凡化就是找出具有非奇异中心的拉开的一个序列，使得 I 的弱原象成为结构层．设 Z_0 是特征数 0 的域上的非奇异簇，I_0 是 Z_0 上理想的凝聚层，再设给定了 Z_0 上具有正规交的某个除子 E_0．则存在具有非奇异中心 $D_i \subset Z_i$ 的拉开的序列 $f_i: Z_{i+1} \to Z_i (i = 0, \cdots, r-1)$，它有以下性质：如果 I_{i+1} 定义为 I_i 在拉开 f_i 下的弱原象，E_{i+1} 定义为 $f_i^{-1}(E_i) \cup f_i^{-1}(D_i)$，则 $I_r = \mathcal{O}_{Z_r}$，E_r 只有正规交（**广中定理**（Hironaka theorem））．此外还可以假设 D_i 位于 I_i 的最大重数的点集内，I_i 与 E_i 有正规交．对于正特征数，只知道对 $\dim Z \leqslant 3$ 有类似的结果．

这种类型的另一个问题是有理变换的不确定点的消去问题．设 $f: X \to Y$ 是非奇异代数簇的有理变换，是否存在具有非奇异中心的拉开的序列

$$X_r \to X_{r-1} \to \cdots \to X_0 = X,$$

使得诱导变换 $X_r \to Y$ 是一个态射？这个问题归结为理想层平凡化的存在性问题．当 $\operatorname{char} k = 0$ 或当 $\dim X \leqslant 3$ 时其回答是肯定的．

参考文献

[1] Abhyankar, S. S., Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Acad. Press, 1966.

[2] Lipman, J., Introduction to resolution of singularities, in R. Hartshorne (ed.): Algebraic Geometry, Arcata 1974. Proc. Symp. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 187 – 230.

[3] Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II, *Ann. of Math.*, 79 (1964), 109 – 326.

В. И. Даннлов 撰　陈志杰 译

单位分解 [resolution of the identity; разложение единицы]

作用在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上的正交投影算子的单参数族 $\{E_\lambda\}$，$-\infty < \lambda < \infty$，使得

1) $E_\lambda \leqslant E_\mu$，当 $\lambda < \mu$ 时；

2) E_λ 是强左连续的，即对每个 $\lambda \in (-\infty, \infty)$，$E_{\lambda-0} = E_\lambda$；

3) $E_\lambda \to 0$，当 $\lambda \to -\infty$ 时，且 $E_\lambda \to E$，当 $\lambda \to \infty$ 时；这里 0 和 E 分别是空间 $\mathscr{H}$ 上的零算子和单位算子．

条件 2) 可换成在每点 $\lambda \in (-\infty, \infty)$ 强右连续的条件．

作用在 $\mathscr{H}$ 上的每个**自伴算子**（self-adjoint operator）A 以唯一的方式生成一个单位分解．这里，除了 1) — 3) 以外，以下条件也成立：

4) 如果 B 是使得 $BA = AB$ 的一个有界算子，则 $BE_\lambda = E_\lambda B$，对任何 λ；

5) 如果 A 是一个有界算子且 m, M 分别是其最大下界和最小上界，则

$$E_\lambda = 0, \text{对} -\infty < \lambda < m, \text{且} E_\lambda = E, \text{对} M < \lambda < \infty.$$

由算子 A 给定的单位分解完全决定了该算子的谱性质，即

α) 一个点 λ 是 A 的正则点，当且仅当它是常值点，即存在 $\delta > 0$，使得对 $\mu \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta)$，$E_\mu = E_\lambda$；

β) 一个点 λ_0 是 A 的本征值，当且仅当在此点 E_λ 有一个跳跃，即 $E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0} > 0$；

γ) 如果 $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$，则 $L_{E(\Delta)} = E(\Delta)\mathscr{H}$ 是 A 的一个不变子空间．

因此由算子 A 决定的单位分解也称为此算子的**谱函数**（spectral function）（见**谱分解**（spectral resolution））．

反之，每一个单位分解 $\{E_\lambda\}$ 唯一地决定了一个自伴算子 A，使得这个分解是其谱函数．A 的定义域 $D(A)$ 恰好由使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty$$

的那些 $x \in \mathscr{H}$ 组成，且有一个算子 Stieltjes 积分形式的 A 的表示式：

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d E_\lambda.$$

参考文献

[1] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955（译自法文）（中译本：F. 黎茨，B. 塞克佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，第一卷，1963，第二卷，1980）．

[2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966（英译本：Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in a Hilbert space, 1 – 2, F. Unger, 1961 – 1963）．

[3] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977（中译本：Л. В. Канторович，Г. П. Акилов，泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1984）．

В. И. Соболев 撰

【补注】 对上面提到的性质 γ) 可加上 A 到 $L_{E(\Delta)}$ 的

限制的谱包含于集合 Δ 中.　　葛显良 译　吴绍平 校

预解式 [**resolvent**; **резольвента**]

1) n 次代数方程 $f(x)=0$ 的预解式是系数有理地依赖于 $f(x)$ 的系数的代数方程 $g(y)=0$, 满足条件: 如果该方程的诸根已知, 则给定方程 $f(x)=0$ 的诸根能够由解次数不超过 n 个的更简单的方程而求得. 有理表达式 $y=y(x_1, \cdots, x_n)$ 本身有时称为预解式.

设 $f(x)$ 是域 k 上可分多项式, 具有 **Galois 群** (Galois group) G, 且设 H 是 G 的正规子群. 设 $y=y(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的有理表达式, 在属于 H 的根 $x_1, \cdots, x_n$ 的所有置换下保持不变, 且设 $y \notin k$. 则 y 是系数取自 k 的某个方程 $g(y)=0$ 的一个根, 而 g 的 Galois 群是 G 的真商群. 这样, 解方程 $f(x)=0$ 简化为解方程 $g(y)=0$ 和在域 $k(y_1, \cdots, y_s)$ 上解方程 $f(x)=0$.

例如, 为了解四次方程:

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

(每一个四次方程可简化成这种形式), 可用以下的三次预解式:

$$y^3-2py^2+(p^2-4r)y+q^2=0.$$

它的根 y_1, y_2, y_3 由关系式 $y_1=(x_1+x_2)(x_3+x_4)$, $y_2=(x_1+x_3)(x_2+x_4)$, $y_3=(x_1+x_4)(x_2+x_3)$ 与根 x_1, x_2, x_3, x_4 相关联. 根 y_1, y_2, y_3 由 **Cardano 公式** (Cardano formula) 确定, 从而该公式也可以确定 x_1, x_2, x_3, x_4.

逐次应用预解式方法容许人们将具有可解 Galois 群的任何方程的求解简化为解一连串具有循环 Galois 群的方程. Lagrange 预解式用以解后面的方程.

设 $f(x)=0$ 是域 k 上方程, 具有 n 阶循环 Galois 群 G, 且设 k 含有一个 n 次单位原根 ζ_n. 对属于多项式 $f(x)$ 的分裂域 (见**多项式的分裂域** (splitting field of a polynomial)) 的元素 α, 和对由 G 到 n 次单位根的群中的一个特征标 χ, Lagrange 预解式 $\rho(\chi, \alpha)$ 用公式

$$\rho(\chi, \varphi)=\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)^{-1}\sigma(\varphi) \qquad (*)$$

定义. 设 $\alpha=x_1$ 是多项式 $f(x)$ 的诸根之一且设 χ 跑遍 G 的特征标. 如果对 G 的所有特征标, Lagrange 预解式已知, 则对线性方程组 $(*)$ 根 $x_1, \cdots, x_n$ 能被确定.

对 $\tau\in G$, 关系式

$$\tau\rho(\chi, \alpha)=\chi(\tau)\rho(\chi, \alpha)$$

成立, 这表明 $a=\rho(\chi, \alpha)^n$ 且对任何整数 i, $b_i=\rho(\chi, \alpha)^{-i}\rho(\chi^i, \alpha)$ 在 G 下不变, 因而唯一地定义多项式 $f(x)$ 的系数和根 ζ_n 的有理表达式. 如果 χ 生成 G 的特征标群, 则以下等式成立: $\rho(\chi, \alpha)=a^{1/n}$ 及对 $\chi^i=\chi^i$, $\rho(\chi^i, \alpha)=b_i\rho(\chi, \alpha)^i$.

任何在给定域上不可约的代数方程 $y(x)=0$ (见 **Galois 理论** (Galois theory)) 称为 $f(x)$ 的 Galois 预解式 (Galois resolvent), 如将它的一个根附加到该域结果所得到的域包含方程 $f(x)=0$ 的所有根.

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1－2, Springer, 1967－1971 (译自德文) (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, 1－2, 科学出版社, 1976).

Л. В. Кузьмин 撰

2) **积分方程** (integral equation)

$$\varphi(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt=f(t) \qquad (**)$$

的预解式 (预解核 (resolvent kernel)) 是指变量 s, t 和参数 λ 的函数 $\Gamma(s, t, \lambda)$, 借助它方程 $(**)$ 的解可表成形式:

$$f(s)+\lambda\int_a^b \Gamma(s, t, \lambda)f(t)dt,$$

只要 λ 不是 $(**)$ 的本征值. 例如, 对核 $K(s, t)=s+t$, 预解式是函数

$$\Gamma(s, t, \lambda)=\frac{s+t-((s+t)/2-st-1/3)\lambda}{1-\lambda-\lambda^2/12}.$$

БСЭ-3

3) **算子 A 的预解式** (resolvent of an operator) 是 $T_\lambda=A-\lambda I$ 的逆算子 R_λ. 这里 A 是定义在 Banach 空间 X 的稠密集 D_A 上取值在同一空间的闭线性算子, 而 λ 是使得 T_λ^{-1} 为 X 上连续线性算子的复数. 使预解式存在的点 λ 称为 A 的正则点 (regular points), 而正则点的集合 $\rho(A)$ 是这算子的预解集 (resolvent set). 集合 $\rho(A)$ 是开集且在其每一个连通分支上算子 R_λ 是参数 λ 的解析函数.

预解式的性质有:

1) 对任意两个点 $\lambda, \mu\in\rho(A)$, $R_\lambda-R_\mu=(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu$;

2) $R_\lambda x=0$ 蕴涵 $x=0$;

3) 如果 X 是 Hilbert 空间, 则 $R_{\bar\lambda}^*=R_\lambda^*$.

参考文献

[1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980).
[2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теорея линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966.
[3] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (中译本: Л. В.

Канторович, Г. П. Акилов、泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1982）.

B. И. Соболев 撰 葛显良 译 吴绍平 校

预解集 [**resolvent set**; **резольвентное множество**]

满足以下条件的复数 z 的集合 $\rho(T)$，其中 T 是 Banach 空间中 X 的一个算子，对这种 z 存在 X 中有界且有稠定义域的算子 $R_z=(T-zI)^{-1}$. 预解集的补集是算子 T 的谱（见**算子的谱**（spectrum of an operator））.

参考文献

[1] Riesz, F. and Szökevalfi-Nagy, B., Leçons d'analyse fonctionelle, Akad. Kiado, 1952（中译本：F. 黎茨，B. 塞尔佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，第一、二卷，科学出版社，1963，1980）.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 $z\in\mathbf{C}$ 是在 T 的预解集中，如果 $T-zI$ 的值域是稠密的且 $T-zI$ 有一个连续的逆. 此逆通常用 $R(z;T)$ 表示且它称为 T（在 z 处）的**预解式**（resolvent）.

参考文献

[A1] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1978, 209ff（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1980）.

[A2] Reed, M. and Simon, B., Methods of modern mathematical physics, 1. Functional analysis, Acad. Press, p. 188, 253.

葛显良 译 吴绍平 校

共振 [**resonance**; **резонанс**]

当外激励频率接近动力系统的**固有振动**（eigen oscillation）频率之一时，其振幅将增大的现象. 线性动力系统的共振具有最简单的特性. 具有粘性阻尼的单自由度的线性系统在受外部正弦作用力时，其运动微分方程为

$$a\ddot{q}+b\dot{q}+cq=H\sin(pt+\delta),$$

这里，q 为广义坐标，a,b,c 为表征系统特性的常参数，H,p,δ 则分别为外部作用力的振幅、频率和初始相位. 稳态的强迫振动按正弦规律运动，其频率为 p，振幅为

$$D=\frac{H}{a\sqrt{(k^2-p^2)^2+b^2p^2/a^2}},$$

这里 $k=\sqrt{c/a}$ 为系统无能量耗损时（$b=0$）的固有振动的频率. 当 $p/k=\sqrt{1-b^2/2ac}$ 时，振幅 D 取最大值；当能量耗损很小时，它接近于 $p=k$ 时的值. 有时，我们把 $p=k$ 的情况定义为共振. 如有 $b=0$，则当 $p=k$ 时，强迫振动的振幅随时间成比例增加.

如果线性系统具有 n 个自由度，则外力作用的频率与系统的固有频率之一重合时开始共振. 对于非正弦作用力，只要其谐谐的频率与固有振动的频率重合就发生共振.

参考文献

[1] Стрелков, С. П., Введение в теорию колебаний, М.-Л., 1951

Н. В. Бутенин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I.: Ordinary differential equations, M. I. T., 1973（中译本：B. И. 阿诺尔德，常微分方程，科学出版社，1985）.

王克仁 译 诸德超 校

共振项 [**resonance terms**; **резонансные члены**]

Taylor-Fourier 级数

$$f(X,Y)=\sum f_{PQ}X^P\exp\{i\langle Q,Y\rangle\},$$

$$P\in\mathbf{Z}^m,\ P\geqslant 0,\ Q\in\mathbf{Z}^n, \tag{1}$$

$$X^P=x_1^{p_1}\cdots x_m^{p_m}$$

中的项 $f_{PQ}X^P\exp\{i\langle Q,Y\rangle\}$，其中指标 P 和 Q 满足下面的线性关系：

$$\langle P,\Lambda\rangle+i\langle Q,\Omega\rangle=c, \tag{2}$$

这里，f_{PQ} 为常系数，$\langle Q,Y\rangle$ 为 Q 和 Y 的标量积；常数 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=\Lambda$ 和 $(\omega_1,\cdots,\omega_n)=\Omega$ 通常是某一常微分方程组的本征值和频率的基；常数 c 不依赖于 P 和 Q，由级数（1）在所考虑问题中所起的作用决定.

对于线性系统：

$$\dot{x}_j=\lambda_jx_j,\ j=1,\cdots,m,\ \dot{y}_k=\omega_k,\ k=1,\cdots,n, \tag{3}$$

如果所有的 λ_j 均为纯虚数，且在（2）式中 $c=0$，则在级数（1）中的全部共振项的和等于该级数沿着方程组（3）解的平均值. 一组常微分方程组在不变流形的邻域内可以化为**正规形式**（normal form），其中的级数仅含共振项（见[1]）. 这样，对于一个在固定点邻域内的 **Hamilton 系统**（Hamiltonian system），其 Hamilton 函数可以化为（1）式的形式，其中 $n=0$ 且式（2）当 $c=0$ 时得到满足，因而 $\Lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_l,-\lambda_1,\cdots,-\lambda_l)$ 为该线性系统的本征值向量（见[2]）. 在这种情况下，$p_j=p_{j+l}$，$j=1,\cdots,l$，这些项称为**常期项**（secular）（对于这些项而言，（2）式的满足是平凡的），而级数（1）中其余的、使（2）式得到满足的项则称为共振项.

从小参数问题导得的共振项，常常可借助于正规形式分离出来（见[1]）. 对于乘子 $(\mu_1, \cdots, \mu_m) = M$ 的一个点变换，级数（1）中 $n=0$ 的共振项的指数满足 $M^P = 1$ 的关系式：如我们假定 $\Lambda = \ln M$ 和 $\omega_1 = 1$，则得到 $c = 0$ 时的式（2）.

参考文献

[1] Брюно, А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979（英译本：Bruno A. D., Local methods in nonlinear differential equations, Springer, 1978）.

[2] Брюно, А. Д.,《Тр. Моск. матем. об-ва》, 25 (1971), 119 – 262.

[3] Брюно, А. Д.,《Тр. Моск. матем. об-ва》, 26 (1972), 199 – 239.

А. Д. Брюно 撰

【补注】

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978（中译本：В. И. Арнольд，经典力学的数学方法，高等教育出版社，1992）.

[A2] Arnol'd, V. I., Ordinary differential equations, M. I. T., 1973（中译本：В. И.，阿诺尔德，常微分方程，科学出版社，1985）.

[A3] Arnol'd, V. I. and Avez, A., Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968（译自俄文）.

王克仁 译　诸德超 校

限制谓词演算 [**restricted predicate calculus; узкое исчисление предикатов**]，狭义谓词演算（narrow predicate calculus）

见**谓词演算**（predicate calculus）.

限制量词 [**restricted quantifier; ограниченный квантор**]

作用于谓词的一种**量词**（quantifier），它所辖的变元的取值范围不是整个论域，而是限定于被某个谓词（predicate）$R(x)$ 所定义的一部分. 用到这种限制量词时，**全称量词**（universal quantifier）$(\forall x)$ 和**存在量词**（existential quantifier）$(\exists x)$ 常写成 $(\forall x)_{R(x)}$ 及 $(\exists x)_{R(x)}$（或 $\forall x: R(x)$ 和 $\exists x: R(x)$）. 如果 $P(x)$ 是一个谓词，则 $(\forall x)_{R(x)} P(x)$ 的含义是：

$$\forall x(R(x) \supset P(x)),$$

即对满足谓词 $R(x)$ 的所有的 x，谓词 $P(x)$ 是真的. 命题 $(\exists x)_{R(x)} P(x)$ 意为

$$\exists x(R(x) \& P(x)),$$

也就是说，使谓词 $R(x)$ 和 $P(x)$ 为真的两个域的交是非空的.

形如 $(\forall x)_{x<t}$ 和 $(\exists x)_{x<t}$ 的限制量词（通常称为有界量词（bounded quantifiers））在**形式算术**（arithmetic, formal）中起重要作用，这里 t 是一个不包含 x 的项. 当这种限制量词作用于一个**可判定谓词**（decidable predicate）时，得到的也是一个可判定谓词.

В. Е. Плиско 撰　沈复兴 译　罗里波 校

结式 [**resultant; результант**]，两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的

域 Q 中的元素，由下列公式

$$R(f, g) = a_0^s b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s} (\alpha_i - \beta_j) \qquad (1)$$

定义. 这里 Q 是多项式 fg 的分裂域（见**多项式的分裂域**（splitting field of a polynomial）），α_i，β_j 是多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

$$g(x) = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \cdots + b_s$$

的根（root）. 若 $a_0 b_0 \neq 0$，则这两多项式有公共根，当且仅当结式为零. 下面等式成立：

$$R(g, f) = (-1)^{ns} R(f, g).$$

结式可表为下列两者之任一个：

$$R(f, g) = a_0^s \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i), \qquad (2)$$

$$R(f, g) = (-1)^{ns} b_0^n \prod_{j=1}^{s} f(\beta_j). \qquad (3)$$

表达式（1）–（3）对于计算结式而言是不方便的，因为它们包含着多项式的根. 利用多项式的系数，结式可表示为下列 $n+s$ 阶行列式（determinant）的形式

$$R(f, g) = \qquad (4)$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & & & a_n & & \\ & a_0 & & & & a_{n-1} & a_n & \\ & & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{s-1} & b_s & \cdots & \cdots & \\ & b_0 & \cdots & \cdots & b_{s-1} & b_s & \cdots & \cdots \\ & & & & & \cdots & \cdots & \\ & & & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_s \end{vmatrix}.$$

这行列式上面 s 行是多项式 $f(x)$ 的系数，下面 n 行是多项式 $g(x)$ 的系数，其余空白位置都是 0.

两个数值系数的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式还可以表成 n 阶（或 s 阶）行列式. 为此，我们需要求出 $x^k g(x)$ 被 $f(x)$ 除之后的余数，$k = 0, 1, \cdots, n-1$. 设它们是

$$a_{k0} + a_{k1} x + \cdots + a_{kn-1} x^{n-1},$$

则

$$R(f, g) = a_0^s \left\| \begin{matrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{matrix} \right\|.$$

多项式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n (a_0 \neq 0)$ 的**判别式**(discriminant)$D(f)$ 可表为多项式 f 与它的导数 $f'(x)$ 的结式, 形如:

$$D(f) = (-1)^{n(n-1)/2} a_0^{-1} R(f, f').$$

对解方程组的应用. 设有一个由系数属于域 P 的两个代数方程组成的方程组:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

多项式 f 与 g 可写为 x 的多项式

$$f(x, y) = a_0(y) x^k + a_1(y) x^{k-1} + \cdots + a_k(y),$$

$$g(x, y) = b_0(y) y^l + b_1(y) x^{l-1} + \cdots + b_l(y),$$

由公式(4)这两多项式作为 x 的多项式可计算它们的结式, 这是一个仅依赖于 y 的多项式

$$R(f, g) = F(y).$$

可以认为, 多项式 $F(y)$ 是从多项式 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 消去 x 得到的. 如 $x = \alpha$, $y = \beta$ 是(5)的解, 则 $F(\beta) = 0$; 反之, 若 $F(\beta) = 0$, 则或是 $f(x, \beta)$ 与 $g(x, \beta)$ 有公共根(必须从它们的最大公因子中找公共根), 或是 $a_0(\beta) = b_0(\beta) = 0$. 解线性方程组归结为计算结式 $F(y)$ 及求单变元多项式 $f(x, \beta)$ 和 $g(x, \beta)$ 的公共根.

类似地, 任意多个变元的方程组也可以解. 但这时问题会导致极为繁琐的计算(也见**消去论**(elimination theory)).

参考文献

[1] Курош, А. Г. Курс высшей алгебры, 11 изд, М. 1975(英译本: Kurosh, A. G., Higher algebra, Mir., 1972).

[2] Окунев, Л. Я., Высшая алгебра, 4 изд. М.-Л., 1949.

[3] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1 − 2, Springer, 1967 − 1971(译自德文).

[4] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 1 − 3, Cambridge Univ. Press, 1947 − 1954.

И. В. Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

冯绪宁 译

推迟位势法 [**retarded potentials, method of; запаздывающих потенциалов метод**], Duhamel 原理(Duhamel principle)

用齐次线性偏微分方程(组)的已知解来确定非齐次方程(组)的齐次 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)的解的一种方法.

考虑方程

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} - Lu = f(x, t),$$

$$u = u(x, t), \ x = (x_1, \cdots, x_n), \tag{1}$$

其中 L 是关于 t 的导数不超过 $m-1$ 阶的任一线性微分算子. 方程(1)(对 $t > 0$)的一个特解 $u(x, t)$ 是作为如下的 **Duhamel 积分**(Duhamel integral)来寻求的:

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t; \tau) d\tau, \tag{2}$$

其中 φ 是齐次方程

$$\frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m} - L\varphi = 0, \ t > \tau$$

的一个(正则或广义)解. 如果

$$\left. \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} \right|_{t=\tau} = \begin{cases} 0 & \text{当 } k = 0, \cdots, m-2 \text{ 时}, \\ f(x, \tau) & \text{当 } k = m-1 \text{ 时}, \end{cases}$$

那么由脉冲 φ 的叠加所得到的函数(2)就是非齐次方程(1)的 Cauchy 问题

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t=0} = 0, \ k = 0, \cdots, m-1 \tag{3}$$

的解.

在常微分方程组情形, 推迟位势法就是常数变易法(method of variation of constants)或脉冲法(method of impulses). 对 m 阶线性常微分方程

$$lu \equiv \frac{d^m u}{dt^m} - \sum_{j=1}^m a_j(t) \frac{d^{m-j} u}{dt^{m-j}} = f(t), \tag{4}$$

该方法可进行如下: 如果 $u_1(t), \cdots, u_m(t)$ 是 $lu = 0$ 的任一**基本解组**(fundamental system of solutions), 那么非齐次方程(4)可寻求如下形式的一个解 $u(t)$:

$$u(t) = \sum_{j=1}^m c^j(t) u_j(t).$$

函数 $\dot{c}^j = dc^j / dt \ (j = 1, \cdots, m)$ 作为具有非零 **Wronski 行列式**(Wronskian)的代数方程组

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}^j(t) \frac{d^k u_j}{dt^k} = 0, \ k = 0, \cdots, m-2,$$

$$\sum_{j=1}^m \dot{c}^j(t) \frac{d^{m-1} u_j}{dt^{m-1}} = f(t)$$

的解集唯一确定.

如果当 $t \leqslant 0$ 时 $f(t)=0$，那么对方程 (4) 的齐次 Cauchy 问题 (3) 的解 $u_f(t)$ 通常称为对外负荷 $f(t)$ 的正规反应．函数 $u_f(t)$ 可以表为卷积或 Duhamel 积分：

$$u_f(t)=\int_0^t \varphi(\tau)f(t-\tau)d\tau=\int_0^t \varphi(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

其中当 $t>0$ 时 $l\varphi(t)=0$ 且

$$\frac{d^k\varphi}{dt^k}=\Big|_{t=0}=\begin{cases}0 & 当\ k=0,\cdots,m-2\ 时,\\ 1 & 当\ k=m-1\ 时.\end{cases}$$

令 $f(x, t)$ $(x=(x_1, \cdots, x_n))$ 是具有直到 $(n+1)/2$ 阶（当 n 为奇数时）或 $(n+2)/2$ 阶（当 n 为偶数时）连续偏导数的函数，且令 $\mathrm{Mr}[f(x, t)]$ 为 f 在以 x 为中心、r 为半径的球 $|y-x|=r$ 上的平均值．依赖于非负参数 $\tau \leqslant t$ 的函数

$$v(x, t; \tau)=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\int_0^t (t^2-r^2)^{(n-3)/2} r M_r[f(x,\tau)]dr$$

是**波动方程**（wave equation）

$$\square v \equiv v_{tt}-\triangle v=0$$

的、满足初始条件

$$v(x, 0; r)=0,\ v_t(x, 0; \tau)=f(x, \tau)$$

的解．Duhamel 积分

$$u(x, t)=\int_0^t v(x, t-\tau; \tau)d\tau \qquad (5)$$

是方程 $\square u=f(x, t)$ 的齐次 Cauchy 问题 $u(x, 0)=0$, $u_t(x, 0)=0$ 的解．如果 $n=2$ 或 $n=3$，那么 (5) 就给出

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \int_{\rho\leqslant\tau}\frac{f(y, t-\tau)dy}{\sqrt{\tau^2-\rho^2}},$$

$$y=(y_1, y_2),$$

或

$$u=(x, t)=\frac{1}{4\pi}\int_{\rho\leqslant t}\frac{f(y, t-\rho)}{\rho}dy,$$

$$y=(y_1, y_2, y_3), \qquad (6)$$

其中 $\rho=|x-y|$．

另一方面，如果 $n=1$，那么

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(y, \tau)dy,\ y=y_1.$$

(6) 中积分已知是具有密度 f 的**推迟位势**（retarded potential）．

推迟位势法（参数变易法）对应用于形式为

$$Su \equiv u_t+\sum_{i=1}^n A^i u_{x_i}+Bu=f(x, t) \qquad (7)$$

的一阶线性微分方程组，是特别简单而有用的，这里 $u=u(x, t)$ 是 k 维向量，A^i 和 B 是已给的 $(k\times k)$ 矩阵，f 是一已给向量．

假设依赖于一参数 $\tau\leqslant t$ 的向量 $\varphi=\varphi(x, t; \tau)$ 是齐次方程组 $S\varphi=0$ 的 Cauchy 问题

$$\varphi(x, \tau; \tau)=f(x, \tau)$$

的解．于是，向量

$$u(x, t)=\int_0^t \varphi(x, t; \tau)d\tau \qquad (8)$$

是非齐次方程组 (7) 具初始条件

$$u(x, 0)=0 \qquad (9)$$

的解．

对应于非齐次**热传导方程**（thermal-conductance equation）

$$u_t-a\Delta u=f(x, t),\ a=常数>0 \qquad (10)$$

的函数 $\varphi(x, t; \tau)$ 具有形式

$$\varphi(x, t; \tau)=$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}[4\pi a(t-\tau)]^{-n/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a(t-\tau)}}f(y, \tau)dy, \qquad (11)$$

其中 $\mathbf{R}^n$ 是 Euclid 空间．方程 (10) 具初始条件 (9) 的解 $u(x, t)$ 由以函数 (11) 作为被积函数的 Duhamel 积分 (3) 给出．

推迟位势法亦用来研究抛物型和双曲型偏微分方程的混合问题；它能将一般问题化为含有特殊的初始和边界函数的问题．

例如，在域 $\Omega=\{(x, t): \alpha<x<\beta,\ 0<t<T\}$ 中考虑偏微分方程

$$Au_{tt}+Bu_{xx}+au_t+bu_x+cu=0, \qquad (12)$$

其中 $B, b, c=$ 常数，$B<0$，

$$A=\begin{cases}A_0=常数, & 当\ \alpha\leqslant x\leqslant 0\ 时,\\ 0, & 当\ 0\leqslant x\leqslant\beta\ 时,\end{cases}$$

$$a=\begin{cases}a_0=常数>0, & 当\ 0\leqslant x\leqslant\beta\ 时,\\ a_1=常数, & 当\ \alpha\leqslant x\leqslant 0\ 时,\end{cases}$$

当 $x<0$ 时 (12) 是双曲型的，而当 $x>0$ 时是抛物型的．如果 $\varphi(x, t)$ 是方程 (12) 的混合问题

$$\varphi(x, 0)=0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta;\ \varphi_t(x, 0)=0,\ \alpha<x<0,$$
$$u(\alpha, t)=1,\ \varphi_x(\beta, t)=0,\ 0<t<T$$

在 Ω 中的连续解，它在 $x=0$ 处可微，那么，按推迟位势法，具连续可微密度 $f(t)$ 的 Duhamel 积分

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \varphi(x,t-\tau)f(\tau)d\tau \equiv Tf \tag{13}$$

就是方程（12）的混合问题

$$u(x,0)=0,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ u_t(x,0)=0,\ \alpha<x<0,$$

$$u(\alpha,t)=f(t),\ u_x(\beta,t)=0,\ 0<t<T$$

在 Ω 中的解．

本质上，Duhamel 积分（13）是表示一线性算子 T，在已给边界函数 $f(t)$ 之下，它产生解 $u(x,t)$．Duhamel 的积分公式不仅对（13）的算子 T 是有效的，而且对满足下列条件的所有线性算子 T 亦是有效的：

1）T 对当 $t<0$ 时为零的所有函数 $f(t)$ 定义的，且将 f 映射到函数 $Tf=u(x_1,\cdots,x_n,t)$，它对 $t<0$ 亦为零．

2）$T\int_{\tau_1}^{\tau_2} f[\theta(t,\tau)]d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2} Tf[\theta(t,\tau)]d\tau$，其中 $\theta(t,\tau)$ 是 t 和参数 τ 的某个函数．

3）如果 $f(0)=0$ 且 $f(t)$ 是可微的，那么

$$\frac{d}{dt}Tf=T\frac{df}{dt}.$$

4）如果 $Tf(t)=\varphi(t)$，那么对所有 $\tau>0$ 有

$$Tf(t-\tau)=\varphi(t-\tau).$$

参考文献

[1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976（英译本：Bitsadze, A. V. Equations of mathematical physics, Mir, 1980）.

[2] Bers, L., John, F. and Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.

[3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, М., 1976（英译本：Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984）.

[4] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（译自德文）（中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特著，数学物理方法Ⅱ，科学出版社，1977）.

[5] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Наука, Москва, 1961（中译本：Л. С.，庞特里雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962）.

[6] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, М. 1977（中译本：A. H. 吉洪诺夫，A. A. 萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1956）.

A. M. Нахушев 撰 孙和生 译

收缩核［retract；ретракт］，范畴中一个对象的代数和拓扑中相应概念的一个推广．范畴 $\mathfrak{K}$ 中的对象 R 叫作对象 A 的收缩核（retract），是指有态射

$$\mu:R\to A \text{ 和 } \nu:A\to R$$

使 $\nu\mu=1_R$．这时 μ 是**单态射**（monomorphism），也是态射对 1_A 和 $\mu\nu$ 的等化子．对偶地，ν 是**满态射**（epimorphism），也是态射对 1_A、$\mu\nu$ 的余等化子．有时 μ 叫作截面（section），ν 叫作收缩（retraction）．

若 R 是对象 A 的一个收缩核，R' 同构于 R，则 R' 也是 A 的一个收缩核．从而收缩核的一个同构类构成 A 的一个子对象．A 的由态射 $\mu:R\to A$ 和 $\nu:A\to R$ 定义的收缩核对应于一个幂等态射 $\varphi=\mu\nu:A\to A$．对象 A 的两个收缩核 R 和 R' 属于同一个子对象，当且仅当它们对应于同一个幂等元．任意范畴中任一对象的收缩核构成一个集合．

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 最后一句话仅当假定所讨论的范畴是局部小时才对（即"有小 hom 集"）（亦见**小范畴**（small category））．

张英伯 译

拓扑空间的收缩核［retract of a topological space；ретракт топологического пространства］

拓扑空间（topological space）X 的子空间 A，使得存在一个把 X 映成 A 的**保核收缩**（**retraction**）．若 X 是 Hausdorff 空间，则 X 的每个收缩核均闭于 X．Cantor 完全集的所有非空闭子集都是它的收缩核．从空间转到它的收缩核时，许多重要性质均保持不变．特别是，从空间转到它的连续象时保持不变的任何性质，象 Hausdorff 空间由其闭子空间继承的任何性质，在转到收缩核时均保持不变．因此，空间的紧性、连通性、道路连通性、分离性、维数的上界、仿紧性、正规性、局部紧性以及局部连通性，在转到收缩核时均保持不变．同时，一个空间的收缩核可以具有比空间本身更简单的结构，对于一项特定的研究而言，可能更加方便而易于驾驭．例如，单点集是区间、直线、平面等等的收缩核．若空间 X 具有不动点性质（fixed point property），即是对任何连续映射 $f:X\to X$，均存在一点 $x\in X$，使得 $f(x)=x$，那么 X 的任何收缩核也具有不动点性质．特别是 Euclid 空间中 n 维球面不是 $n+1$ 维球体的收缩核（$n=0,1,\cdots$），因为闭球体具有不动点性质（Brouwer 不动点定理（Brouwer fixed-point theorem）），而球面则不然．空间 X 的子空间 A 称为该空间的邻域收缩核（neighbourhood retract），如果 X 中存在一个开子空间，包含 A 并且以 A 为其收缩核．收缩核的概念直接关系到连续映射的扩张问题．例如，子空间 A 是 X 的一个收缩核，其充要条件是：把 A 嵌入任意拓

扑空间 Y 的任何**连续映射**(continuous mapping)均可扩张为把整个空间 X 映入 Y 的连续映射.

度量空间(metric space)X 称为一个绝对收缩核(absolute retract)(绝对邻域收缩核(absolute neighbourhood retract)), 如果它是包含 X 作为闭子空间的任何度量空间的收缩核(邻域收缩核). 要使一个度量空间 X 成为一个绝对收缩核, 必要条件是: X 是赋范线性空间中某个凸子空间的收缩核; 充分条件是: X 是局部凸线性空间中某个凸子空间的收缩核.

因此, 局部凸线性空间的所有凸子空间都是绝对收缩核; 特别是, 点、区间、球体、直线等等, 都是绝对收缩核. 从上述特性可见, 绝对收缩核具有下列性质: 绝对收缩核的任何收缩核仍然是绝对收缩核; 任何绝对收缩核均可在自身上缩为一点, 并且是局部可缩为一点的; 绝对收缩核的所有同调群、上同调群、同伦群以及上同伦群均为零群; 度量空间 Y 是绝对收缩核的充要条件是: 对于任何度量空间 X 以及 X 的闭子空间 A, 把 A 映入 Y 的任何连续映射均可扩张为把整个空间 X 映入 Y 的连续映射. 绝对邻域收缩核则刻画为赋范线性空间中凸子空间的开集的收缩核, 其中包括了所有的紧多面体. 绝对邻域收缩核的一个重要性质是其局部可缩为一点的性质.

把空间 X 映成其子空间 A 的收缩映射, 如果同伦于把 X 映成自身的恒同映射, 则 A 称为 X 的形变收缩核(deformation retract). 空间 X 的形变收缩核同伦等价于 X, 即是它们有同样的**同伦型**(homotopy type). 反之, 两个同伦等价的空间总是可以嵌入第三个空间, 使得这两个空间均为其形变收缩核.

参考文献

[1] Borsuk, K., Theory of retracts, PWN, 1967.

А. В. Архангельский 撰

【补注】 绝对收缩核及绝对邻域收缩核往往简写为 AR 和 ANR.

对于可度量化空间以外的其他空间, 收缩核与绝对收缩核均已得到研究. 最成功的是紧 Hausdorff 空间及 T_0 空间. 紧 Hausdorff 绝对收缩核等于是 Тихонов 立方体的收缩核. 如果这种空间是有限维空间(按覆盖维数的意义), 那么它就是可度量化的([A1]). T_0 绝对收缩核或内射 T_0 空间(injective T_0-space)具有一个自然的偏序关系, 使之成为**连续格**(continuous lattice).

参考文献

[A1] Shchepin, E. S., A finite-dimensional compact absolute neighborhood retract is metrizable, *Soviet Math. Doklady*, **18** (1977), 402 – 406 (*Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **233** (1977), 3, 304 – 307).

[A2] Mill, J. van, Infinite-dimensional topology, prerequisities and introduction, North-Holland, 1988.

胡师度、白苏华 译

保核收缩 [retraction; ретракция]

拓扑空间(topological space)X 到其子空间 A 中的**连续映射**(**continuous mapping**)f, 使得 f 在 A 上是恒同映射, 即对所有的 $x \in A$ 有 $f(x) = x$.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 其他信息及参考文献见**拓扑空间的收缩核**(retract of a topological space). 胡师度、白苏华 译

Reynolds 数 [Reynolds number; Рейнольдса число]

作为粘性液体和气体流动的相似性判据的无量纲数之一, 它表征惯性力与粘性力之间的关系:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\mu},$$

其中 ρ 是密度, μ 是液体或气体的动力粘性系数, v 是流动的特征速度, l 是特征线尺度.

Reynolds 数还借助临界 Reynolds 数(critical Reynolds number)Re_{cr} 确定液体流动的类型. 当 $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$ 时只可能是液体层流流动, 而当 $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ 时流动则可能成为湍流.

Reynolds 数是以 O. Reynolds 的名字命名的.

根据 БСЭ-3 中同名条目的材料.

【补注】

参考文献

[A1] Batchelor, G. K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge Univ. Press, 1967, Sect. 4. 7.

[A2] Vishik, M. I. and Fursikov, A. V., Mathematical problems of statistical hydromechanics, Kluwer, 1988, Chapts. 3; 4; 6.

[A3] Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., Гидродинамика, Физматгиз, 1958 (中译本: Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗席兹, 连续介质力学, 人民教育出版社, 1958).

李维新 译

Rhombic 网 [Rhombic net; Ромбическая сеть], 共形 Чебышев 网(conformal Chebyshev net)

一种网, 该网中两对不同族的曲线组成的每个四边形在一阶无穷小范围内对边相等. 在旋转曲面上, **渐近网**(asymptotic net)是一个 Rhombic 网. 例如, 在旋转双曲面上, 直纹母线组成 Rhombic 网.

А. В. Иванов 撰

【补注】 亦见 Чебышев 网(Chebyshev net).

潘养廉 译

菱形 [rhombus; ромб]

四边都相等的平面四边形. 菱形可以看成平行四

边形（parallelogram）的一种特殊情况，其中邻边相等，或两对角线相互垂直，或对角线平分顶角．四个角都是直角的菱形是**正方形**（square）． БСЭ-3

【补注】

参考文献

[A1] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969

杜小杨 译

多面体的棱［rib of a polyhedron; ребро многогранника］

多面体（polyhedron）一个面的边．

【补注】 更常用的名词是棱（edge）（在一维情况）或面（face）（在其他情况）．

Ribaucour 线汇［Ribaucour congruence; Рибокура конгруэнция］

一种线汇（congruence），它的可展曲面与它的平均曲面截成**共轭网**（conjugate net）．设 S 是一个 Ribaucour 线汇的平均曲面．那么由线素的正交性有一族对应于 S 的曲面，它们在每一对对应点处有与线汇中射线平行的法向．反之，如果给定一对曲面 S 和 $\widetilde{S}$ 使得它们在对应点具有线素正交性，那么由通过 S 上点的且与 $\widetilde{S}$ 在对应点的法线共线的射线组成的线汇是一个 Ribaucour 线素，其中平均曲面为 S．曲面 $\widetilde{S}$ 称为这个 Ribaucour 线汇的生成曲面（generating surface）．生成曲面 $\widetilde{S}$ 的曲率线对应于该线汇中缔括线与射线交于中心的生成面．Ribaucour 线汇的可展曲面对应于生成曲面 $\widetilde{S}$ 的渐近线．正规 Ribaucour 线汇的生成曲面是极小曲面．这种线汇由一个具有等温的曲率线球面象的曲面的法线组成．

这种线汇由 A. Ribaucour 在 1881 年首先研究．

参考文献

[1] Фиников, С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.-Л., 1937.

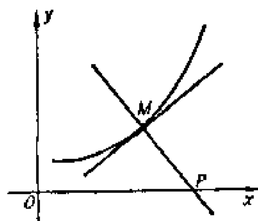
[2] Фиников, С. П., Теория конгруэнций, М.-Л., 1950.

В. С. Малаховский 撰

潘养廉 译

Ribaucour 曲线［Ribaucour curve; Рибокура кривая］

一条平面曲线，在其任何一点 M 上的曲率半径 R 与法线段 MP 的长度成正比（见图）．



在 Descartes 直角坐标系中 Ribaucour 曲线的方程是

$$x=\int_0^{y}\frac{dy}{\sqrt{(y/c)^{2n}-1}},$$

其中 $n=MP/R$．如果 $n=1/h$（h 是任何整数），则 Ribaucour 曲线的参数方程是

$$x=(m+1)C\int_0^{t}\sin^{m+1}t\,dt,\ y=C\sin^{m+1}t,$$

其中 $m=-(n+1)n$．当 $m=0$ 时，Ribaucour 曲线是一个圆；当 $m=1$ 时，它是**摆线**（cycloid）；当 $m=-2$ 时，它是**悬链线**（catenary）；当 $m=-3$ 时，它是**抛物线**（parabola）．

这条曲线的弧长是

$$l=(m+1)C\int_0^{C}\sin^{m}t\,dt;$$

曲率半径是

$$R=-(m+1)C\sin^{m}t.$$

A. Ribaucour 于 1880 年研究过这一曲线．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

[2] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gomes, Teixeira, F., Traité des courbes, 1－3, Chelsea, reprint, 1971.

杜小杨 译

Riccati 方程［Riccati equation; Риккати уравнение］

形如

$$z'+az^2=bt^{\alpha}\qquad(1)$$

的一阶常微分方程，其中 a, b, α 是常数．此方程为 J. Riccati 最早研究（1723，见[1]）；其个别情形更早前已得到考察．D. Bernoulli（1724－1725）确定，当 $\alpha=-2$ 或 $\alpha=-4k(2k-1)$（k 为整数）时，方程(1)能通过初等函数积分．J. Liouville 证明（1841），对于其余的 α 值，(1)不可能通过初等函数求积．(1)的通解可借助**柱函数**（cylinder functions）写出（见[1]）．

微分方程

$$z'=2a(t)z+b(t)-c(t)z^2\qquad(2)$$

（其中 $a(t), b(t), c(t)$ 是连续函数）称为一般 Riccatti 方程（general Riccati equation）（这是为了与(1)相区别，后者就称为特殊 Riccati 方程（special

Riccati equation)). 当 $c(t)\equiv 0$ 时，一般 Riccati 方程是线性微分方程; 当 $b(t)\equiv 0$ 时，它是 **Bernoulli 方程** (Bernoulli equation). 这两个方程的解可通过求积法得到. 也已研究其他情形下一般 Riccati 方程的可积性 (见[2]).

方程 (2) 与微分方程组

$$\left.\begin{aligned} x'&=a(t)x+b(t)y \\ y'&=c(t)x-a(t)y \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

紧密相联. 如果 $(x(t), y(t))$ 当 $t\in I=(t_0, t_1)$ 时是方程组 (3) 的解且 $y(t)$ 在 I 上不等于零，则 $z=x(t)y^{-1}(t)$ 是 (2) 的解; 如果 $z(t)$ 是 (2) 的解，$y(t)$ 是方程

$$y'=[c(t)z(t)-a(t)]y$$

的解，则 $(x(t)=z(t)y(t), y(t))$ 是 (3) 的解. 特别是，当 $c(t)\equiv 1$ 时，(2) 的解通过 $z(t)=y'(t)y^{-1}(t)$ (如果 $y(t)$ 在 I 上不等于零) 与方程

$$y''=2a(t)y'+b(t)y,\ t\in I$$

的解相联系. 由于这种关系，方程 (2) 常被用来研究振动、非振动 (见**振动微分方程** (oscillating differential equation))，可约性 (见**可约线性系** (reducible linear system)) 以及涉及线性方程和二阶方程组的定性性态的许多其他问题 (见[3], [4]).

方程

$$Z'=A(t)Z+B(t)-ZC(t)Z-ZD(t) \quad (4)$$

(其中 $Z\equiv Z(t)$ 是未知 $n\times m$ 矩阵函数，而矩阵函数 A, B, C, D 分别为 $n\times n, n\times m, m\times n, m\times m$ 维) 称为**矩阵 Riccati 方程** (matrix Riccati equation). 矩阵 Riccati 方程 (4) 的解 $Z(t)$ 通过 $X(t)=Z(t)Y(t)$ 与线性矩阵方程组

$$\left.\begin{aligned} X'&=A(t)X+B(t)Y \\ Y'&=C(t)X+D(t)Y \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

的解 $(X(t), Y(t))$ 相联系.

矩阵 Riccati 方程在**线性 Hamilton 系统** (Hamiltonian system, linear) 理论、变分法、**最优控制** (optimal control) 问题、滤波、可控制线性系统的稳定化 (见**控制系统** (control system) 及[6], [7]) 等领域中有重要作用. 例如，关于系统

$$x'=A(t)x+B(t)u,\ x(t_0)=x_0$$

的解的泛函

$$x^T(t_1)\Phi x(t_1)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}[X^T(t)M(t)x(t)+u^T(t)N(t)u(t)]dt$$

(其中 $n\times n$ 矩阵 Φ 和 $M(t)$ (当 $t\in[t_0, t_1]$ 时) 是对称的和非负定的，而 $m\times m$ 矩阵 $N(t)$ (当 $t\in[t_0, t_1]$ 时) 是正定的)，其极小化问题中的最优控制 u_0 由方程

$$u_0(t)=-N^{-1}(t)B^T(t)Z(t)x$$

给定，其中 $Z(t)$ 是矩阵 Riccati 方程

$$Z'=-ZA(t)-A^T(t)Z+$$
$$+ZB(t)N^{-1}(t)B^T(t)Z-M(t) \qquad (6)$$

的具有边界条件 $Z(t_1)=\Phi$ 的解 (见[5], [8]).

在无穷时间区间上的控制问题中，一些重要的问题都涉及对于矩阵 Riccati 方程的在 $[t_0, \infty)$ 上有界的非负定解的存在性，周期或殆周期解 (在方程系数为周期或殆周期的情形) 的存在性以及这类解的逼近构造的方法.

在离散时间变分问题和离散最优化问题中，下述**递归矩阵 Riccati 方程** (recurrent matrix Riccati equation) 起着类似于方程 (4) 的作用:

$$Z_{k+1}=A_kZ_k+B_k-Z_kC_kZ_k-Z_kD_k.$$

可以自然地使方程 (4) 对应到 Grassmann 流形 $G_{m,n}$ 上的一个动力系统 (见[9])，从而使动力系统理论能应用于方程 (4). 例如，如果 (4) 中的矩阵 A, B, C, D 是周期的，周期为 $\omega>0$，且 $|\lambda_1|<\cdots<|\lambda_{n+m}|$，其中 λ_i 是方程组 (5) 的乘子 (见 **Floquet-Ляпунов 定理** (Floquet-Lyapunov theorem))，则对应的动力系统由一个 Morse-Smale 微分同胚 (见 **Morse-Smale 系统** (Morse-Smale system)) 生成，因而是结构稳定的.

参考文献

[1] Riccati, J., Opere, Treviso, 1758.

[2] Kamke, E., Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen, Chelsea, reprint, 1971 (中译本: E. 卡姆克, 常微分方程手册, 科学出版社, 1980).

[3] Еругин, Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 3 изд., Минск, 1979.

[4] Еругин, Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 1963 (英译本: Erugin, N. P., Linear systems of ordinary differential equations with periodic and quasi-periodic coefficients, Acad. Press, 1966).

[5] Reid, W. T., Riccati differential equations, Acad. Press, 1972.

[6] Kalman, R., Falb, P. and Arbib, M., Topics in mathematical system theory, McGraw-Hill, 1969.

[7] Lions, J.-L., Optimal control of systems governed by partial differential equations, Springer, 1971 (译自法文).

[8] Захар-Иткин, М. Х., 《Успехи матем. наук》, **28** (1973), в. 3, 83 – 120.

[9] Schneider, C. R., Global aspects of the matrix Riccati equation, *Math. Syst. Theory*, 7 (1973), 3, 281 – 286.

Е. Л. Тонков 撰

【补注】 矩阵方程 $AZ+B-ZCZ-ZD=0$ (A, B, C, D 是给定的常数矩阵) 称为代数 Riccati 方程 (algebraic Riccati equation), 它与 (4) 的平衡点的存在性密切相关.

沈永欢 译

Ricci 曲率 [**Ricci curvature**; **Риччи кривизна**], Riemann 流形 M 在点 $p\in M$ 的

与切空间 M_p 的每个 1 维子空间相对应的数, 由公式

$$r(v)=\frac{(cR)(v,v)}{g(v,v)}$$

决定, 这里 cR 是 **Ricci 张量** (Ricci tensor), v 是生成该 1 维子空间的向量, 而 g 是 **Riemann 流形** (Riemannian manifold) M 的**度量张量** (metric tensor). Ricci 曲率可用 M 的截曲率表达. 设 $K_p(\alpha,\beta)$ 是点 $p\in M$ 处由向量 α 和 β 定义的曲面元方向的**截曲率** (sectional curvature), $l_1,\cdots,l_{n-1}$ 是互相正交并与向量 v 正交的单位向量, 并设 n 是 M 的维数; 则

$$r(v)=\sum_{i=1}^{n-1}K_p(v,l_i).$$

对维数大于 2 的流形 M 成立下面的命题: 如果在点 $p\in M$ 处的 Ricci 曲率对所有的方向 v 都有同一个值 r, 那么在流形的一切点 Ricci 曲率的值 r 都相同. 常数 Ricci 曲率的流形称为 Einstein 空间 (Einstein space). Einstein 空间的 Ricci 张量形式为 $cR=rg$, 这里 r 是 Ricci 曲率. 对 Einstein 空间成立下面的等式:

$$nR_{ij}R^{ij}-s^2=0,$$

这里 R_{ij}, R^{ij} 是 Ricci 张量的共变和反变分量, n 是空间的维数, s 是空间的数量曲率.

在伪 Riemann 流形上, 也可用类似的公式定义 Ricci 曲率; 此时需假定向量是非迷向的.

Ricci 张量可以由 Ricci 曲率唯一地恢复:

$$(cR)\ (u,v)=$$

$$=\frac{1}{2}\ [r(u+v)g(u+v,u+v)-$$

$$-r(u)g(u,u)-r(v)g(v,v)].$$

参考文献

[1] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[2] Петров, А. З., Пространства Эйнштейна, М., 1961.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hicks, N., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.

[A2] Besse, A. L., Einstein manifolds, Springer, 1987.

潘养廉 译

Ricci 恒等式 [**Ricci identity**; **Риччи тождество**]

1) 表达 **Riemann 张量** (Riemann tensor) $R^l_{ij,k}$ (或 $R_{ij,kl}$) 的一种性质的恒等式:

$$R^l_{ij,k}+R^l_{jk,i}+R^l_{ki,j}=0.$$

对共变张量 $R_{ij,kl}$, 该恒等式形如

$$R_{ij,kl}+R_{jk,il}+R_{ki,jl}=0,$$

即前三个指标的循环和为零.

2) 关于 Riemann 空间 V_n 的度量张量 q_{ij} 的二阶共变导数, 当它们只是微分次序有差别时,应满足的恒等式. 如果 λ_i 是 1 阶张量, $\lambda_{i,jk}$ 是相对于张量 g_{ij} 所作的关于 x^j 和 x^k 的二阶共变导数, 那么, Ricci 恒等式的形式为

$$\lambda_{i,jk}-\lambda_{i,kj}=\lambda_l R^l_{ij,k},$$

这里 $R^l_{ij,k}$ 是由空间 V_n 的**度量张量** (metric tensor) g_{ij} 决定的 Riemann **曲率张量** (curvature tensor) (换言之, 张量场 λ_i 关于度量 g_{ij} 的交错二阶绝对导数是由 Riemann 张量和 λ_i 的分量表达的).

对 2 阶共变张量 a_{ij}, Ricci 恒等式的形式为

$$a_{ij,kl}-a_{ij,lk}=a_{ih}R^h_{jk,l}+a_{hj}R^h_{ik,l}.$$

一般地, 对 m 阶共变张量 $a_{r_1\cdots r_m}$, Ricci 恒等式的形式为

$$a_{r_1,\cdots,r_m,kl}-a_{r_1,\cdots,r_m,lk}$$

$$=\sum_{s}^{1,\cdots,m}a_{r_1,\cdots,r_{s-1},hr_{s+1},\cdots,r_m}R^h_{r_sk,l}.$$

对 V_n 中的反变张量和混合张量可以写出类似的恒等式. Ricci 恒等式有许多用处, 比如说, 在 V_n 的子空间几何学的构造中被用作为主变分方程的可积性条件, 由此可导出 V_n 的子空间的 Gauss 方程和 **Петерсон-Codazzi 方程** (Peterson-Codazzi equations).

这类恒等式由 G. Ricci 建立 (见[1]).

参考文献

[1] Ricci, G and Levi-Civita, T., Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, *Math. Ann.*, **54** (1901), 125 − 201.

[2] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967 (中译本: П. К. 洛薛夫斯基, 黎曼几何与张量解析, 高等教育出版社, 1955, 上、下册).

[3] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 文中的第一个 Ricci 恒等式在西方通常称为第一 Bianchi 恒等式 (first Bianchi identity), 亦见 **Bianchi 恒等式** (Bianchi identity).

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982.

[A2] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.

[A3] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Wiley (Interscience), 1963.

潘养廉 译

Ricci 张量 [Ricci tensor; Риччи тензор]

一种二阶共变张量, 由 **Riemann 张量** (Riemann tensor) R^l_{jkl} 将上指标与第一个下指标缩并而得:

$$R_{kl} = R^m_{mkl}.$$

在 Riemann 空间 V_n 中, Ricci 张量是对称的: $R_{kl} = R_{lk}$. Ricci 张量关于空间 V_n 的反变度量张量 g^{ij} 的迹是一个标量, $R = g^{ij}R_{ij}$, 称为 V_n 的曲率不变量 (curvature invariant) 或标量曲率 (scalar curvature). Ricci 张量的分量可用空间 V_n 的度量张量 g_{ij} 表达:

$$R_{ij} = \frac{\partial^2 \ln\sqrt{g}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij} + \\ + \Gamma^m_{ik}\Gamma^k_{mj} - \Gamma^m_{ij}\frac{\partial \ln\sqrt{g}}{\partial x^m},$$

这里 $g = \det g_{ij}$, Γ^k_{ij} 是关于张量 g_{ij} 算得的第二类 **Christoffel 符号** (Christoffel symbol).

此张量由 G. Ricci ([1]) 引入.

参考文献

[1] Ricci, G., Atti R. Inst. Venelo, 53 (1903 − 1904), 2, 1233 − 1239.

[2] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, Wiley (Interscience), 1963.

潘养廉 译

Ricci 定理 [Ricci theorem; Риччи теорема]

要使度量为 ds^2、且其 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature) $K \leq 0$ 的曲面 S 在局部上等距于某个**极小曲面** (minimal surface) F, 当且仅当 $d\tilde{s}^2 = \sqrt{-K}\,ds^2$ (在所有使 $K < 0$ 的点) 具有 Gauss 曲率 $\tilde{K} = 0$.

已有推广 ([1]), 旨在描述能作为任何维数的 Euclid 空间中极小子流形的诱导度量的 Riemann 度量.

参考文献

[1] Chern, S. S. and Osserman, R., Remarks on the Riemannian metrics of a minimal submanifold, in E. Looijenga, D. Siersma and F. Takens (eds), Geometry Symp. (Utrecht, 1980), Lecture notes in math., vol. 894, Springer, 1981, 49 − 90.

И. Х. Сабитов 撰 陈维桓 译

Richard 悖论 [Richard paradox; Ришара парадокс]

见**悖论** (antinomy).

Richardson 外插 [Richardson extrapolation; Ричардсона экстраполяция]

一个加速差分问题的解的收敛性的方法 (见**微分边值问题的差分边值问题逼近** (approximation of a differential boundary value problem by difference boundary value proplem)). 此方法的主要思想在于: 将一个收敛的差分问题的解 $u_h(x)$ 对于固定的 x 看作其差分网格的趋于零的参数 h 的函数, 然后选取解 $u_h(x)$ 在 h 的若干不同的值上的适当的插值函数 $\chi(h)$, 由此计算 $\chi(0)$ 之值, 将它作为所要求的解 $u(x)$ 的近似值——当 $h \to 0$ 时序列 $u_h(x)$ 之极限即 $u(x)$. 函数 $\chi(h)$ 通常以 h 的插值多项式的形式求出.

这个方法以 L. Richardson ([1]) 的名字命名, 他是第一个将其应用于改进差分问题的解的精度, 并将它称为**延迟趋向于极限**.

这个方法的应用的理论基础在于存在展开式

$$u_h(x) = u(x) + \sum_{i=1}^{m-1} h^{\beta_i} v_i(x) + h^B \eta_h(x),$$

这里 $B > \beta_{m-1} > \cdots > \beta_1 > 0$, 而诸函数 v_i 不依赖于 h, 且 $\eta_h(x)$ 为一个当 $h \to 0$ 时有界的网格函数的值. 现在有几个确定此类展开式是否存在的理论方法 ([4]).

通常线性外插是这样应用的: 用同一点 x 上的 $u_h(x)$ 在不同的参数 $h = h_1, \cdots, h_m$ 上的 m 个值由公式

$$u_H(x) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k u_{h_k}(x)$$

来计算外插值 $u_H(x)$, 这里诸权系数 γ_k 由下列方程组确定:

$$\sum_{k=1}^{m}\gamma_k=1;\ \sum_{k=1}^{m}\gamma_k h_k^{\beta_i}=0,\ i=1,\cdots,m-1.$$

如果诸参数 h_k 相互之间不是太接近，那么

$$|u_H(x)-u(x)|=O(\overline{h}^B),$$

这里 $\overline{h}=\max_{1\leqslant k\leqslant m}h_k$，即当 $h\to 0$ 时 $u_H(x)$ 到 $u(x)$ 的收敛阶是 B，它大于 β_1——$u_h(x)$ 到 $u(x)$ 的收敛阶．在两种特殊情形下存在不必确定诸系数 γ_k 而能计算 $u_H(x)$ 的算法：

a) 当 $\beta_i=ip,\ p>0,\ i=1,\cdots,m-1$ 时，此方法归结为 h^p 的多项式的插值；由 **Lagrange 插值公式**(Lagrange interpolation formula)得到

$$u_H(x)=a_1^{(m-1)},$$

这里

$$a_j^{(0)}=u_{h_j}(x),\ j=1,\cdots,m;$$

$$a_j^{(i)}=a_{j+1}^{(i-1)}+\frac{a_{j+1}^{(i-1)}-a_j^{(i-1)}}{(h_j/h_{i+j})^p-1}, \qquad (*)$$

$$j=1,\cdots,m-i,\ i=1,\cdots,m-1;$$

b) 当 $h_i=h_0b^i,\ 0<b<1,\ i=1,\cdots,m-1$ 时，公式(*)代之以下列公式

$$a_j^{(i)}=a_{j+1}^{(i-1)}+\frac{a_{j+1}^{(i-1)}-a_j^{(i-1)}}{b^{\beta_{i-1}}}.$$

这个算法称为 Romberg 法则(Romberg rule)(W. Romberg, 1955)，它被广泛地应用于构造求积公式(见[5])．为了使得对于不同的 h_i 网格 $D_{h,U}$(见**微分算子的差分算子逼近**(approximation of a differential operator by difference operators))有尽可能多的结点上实行 Richardson 外插，诸参数 h_i 常选取为下述诸序列中的一个部分序列：$h_i=h_0/i,\ i=1,2,\cdots$; $h_i=h_0 2^{1-i},\ i=1,2,\cdots$; $h_0,\ h_0/2,\ h_0/3,\ h_0/4,\ h_0/6,\ h_0/8,\ h_0/12,\cdots$.

线性外插并非是唯一可行的方法．例如，当 $\beta_i=ip,\ p>0$ 时，也可选取形如 $\varphi(h^p)/\psi(h^p)$ 的有理函数作为插值函数 $\chi(h)$，这里 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 分别为 t 的 $[(m-1)/2]$ 及 $[m/2]$ 次多项式．这时有理外插值 $u_H(x)=\chi(0)$ 可用下列递推过程来计算：

$$d_j^{(-1)}=0,\quad j=2,\cdots,m;$$

$$d_j^{(0)}=u_{h_j}(x),\quad j=1,\cdots,m;$$

$$d_j^{(i)}=d_{j+1}^{(i-1)}+(d_{j+1}^{(i-1)}-d_j^{(i-1)})\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{h_j}{h_{i+j}}\right]^p\left[1-\frac{d_{j+1}^{(i-1)}-d_j^{(i-2)}}{d_{j+1}^{(i-1)}-d_{j+1}^{(i-2)}}\right]-1\right\}^{-1},$$

$$j=1,\cdots,m-i,\ i=1,\cdots,m-1;\ u_H(x)=d_1^{(m-1)}.$$

Richardson 外插便于在计算机上实现，因为要获得更高的精度，只须重复利用由低阶逼近导出的简单差分问题的解(有时须作些细小的修正)，其标准解法及计算机程序常能满意地建立．

参考文献

[1] Richardson, L. F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stress in a masonry dam, *Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A*, **210** (1910), 307 – 357.

[2] Bulirsh, R., Stoer, J., Fehlerabschätzungen und Extrapolation mit rationaler Funktionen bei Verfahren vom Richardson-Types, *Numer. Math.*, **6** (1964), 5, 413 – 427

[3] Joyce, D. C., Sarvey of extrapolation processes in numerical analysis, *SIAM Review*, **13** (1971), 435 – 490.

[4] Марчук, Г. И., Шайдуров, В. В., Повышение точности решений разностных схем, М., 1979 (英译本: Marchuk, G. I. and Shaidurov, V. V., Difference methods and their extrapolations, Springer, 1983).

[5] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

В. В. Шайдуров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hivie, T., Generalized Neville type extrapolation schemes, *BIT*, **9** (1979), 204 – 213.

史应光 译

Rickart 环 [**Rickart ring**; **Рикартово кольцо**]，左的，左 RR 环(left RR-ring)

一个环，其中任何元素的左零化子(annihilator)都由一个幂等元(idempotent)生成(右 Rickart 环(right Rickart ring)用对称的方式定义)．Rickart 环由其所有主左(右)理想的投射性刻画．正则环，Baer 环和半遗传环，都是 Rickart 环．左 Rickart 环未必是右 Rickart 环，Rickart 环的矩阵环未必是 Rickart 环．所有自由左 R 模的自同态环是 Rickart 环，当且仅当 R 是左遗传环．所有这些环是右 Rickart 环，当且仅当 R 是左遗传的，左完满的和右凝聚的．在这些条件下，自同态环可验证是 Baer 环．见**正则环(von Neumann 意义下的)**(Regular ring (in the sense of von Neumann))．一个交换环 R 是 Rickart 环，当且仅当它的全分式环是 von Neumann 正则的，并且对 R 的每个极大理想 $\mathfrak{M}$，分式环 $R_{\mathfrak{M}}$ 没有零因子．交换 Rickart 环上的多项式环是 Rickart 环．

带对合 * 的环称作 Rickart * 环 (Rickart * -ring), 若任意元素的左零化子由一个射影生成, 即由使 $e = e^2 = e^*$ 成立的元素 e 生成. 在这种情形下右零化子的类似性质自动成立. Rickart * 环的射影形成一个格. 这个格是完全的, 当且仅当任何集合的零化子由射影生成. 这样一个环已知是 Baer * 环 (Baer * -rings). 术语 "Rickart 环" 被用来纪念 C. E. Rickart, 他研究了算子环的相应性质 (见[1]).

参考文献

[1] Rickart, C. E., Banach algebras with an adjoint operation, *Ann. of Math.*, **47** (1946), 528 - 550.

[2] Berberian, S. K., Baer * -rings, Springer, 1972.

[3] Kaplansky, I., Rings of operators, Benjamin, 1968.

[4] Итоги науки и техники, Алгебра, Топология, Геометрия, М., **15** (1981) 31 - 134.

Л. А. Скорняков 撰 綦传仁 译

Riemann-Christoffel 张量 [Riemann-Christoffel tensor; Римана-Кристоффеля тензор]

一种四阶张量, 它的坐标 (分量) 由空间的联络系数 Γ_{ij}^{k} 定义, 后者称为第二类 **Christoffel 符号** (Christoffel symbol). Riemann-Christoffel 张量亦称为 **Riemann 张量** (Riemann tensor).

Л. А. Сидоров 撰 潘养廉 译

Riemann 导数 [Riemann derivative; Римана производная], Schwarz 导数 (Schwarzian derivative), 二阶对称导数 (second symmetric derivative), 函数 f 在点 x_0 的极限

$$D^2 f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

它是 B. Riemann 于 1854 年引入的, 他证明了, 若在点 x_0, 二阶导数 $f''(x_0)$ 存在, 则 Riemann 导数也存在且 $D^2 f(x_0) = f''(x_0)$. 当 $h \to 0$ 时,

$$\frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

的上、下极限分别称为上 Riemann 导数 $\overline{D}^2 f(x_0)$ 与下 Riemann 导数 $\underline{D}^2 f(x_0)$.

Riemann 导数在函数用三角级数表示理论中, 尤其是在与 **Riemann 求和法** (Riemann summation method) 有关的问题中有着广泛的应用.

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Blaisdell, 1957.

[A2] Riemann, B., Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, in Gesammelte math Abhandlungen, Dover, reprint, 1957, 227 - 264.

[A3] Wolff, J., Fourier'sche Reihen, Noordhoff, 1931.

王斯雷 译

Riemann 微分方程 [Riemann differential equation; Римана дифференциальное уравнение]

有三个给定的**正则奇点** (regular singular point) a, b, c 且在这些点处有特征指数 $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ 的复平面上的线性齐次二阶常微分方程. 这样的方程的一般形式首先是由 E. Papperitz 给出的, 所以也称为 **Papperitz 方程** (Papperitz equation). Riemann 微分方程的解可写为所谓 Riemann P 函数 (Riemann P-function) 的形式:

$$w = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

Riemann 微分方程属于具有三个奇点的 **Fuchs 方程** (Fuchsian equation) 类. Riemann 微分方程的一个特例是**超几何方程** (hypergeometric equation) (奇点是 0, 1, ∞); 所以 Riemann 微分方程本身也称为广义超几何方程 (generalized hypergeometric equation). Riemann 微分方程可以化为一个 **Pochhammer 方程** (Pochhammer equation), 所以它的解可以写成复平面中一个特殊围道上的积分形式.

参考文献见 **Papperitz 方程** (Papperitz equation) 条.

Н. Х. Розов 撰 齐民友 译

Riemann 函数 [Riemann function; Римана функция]

1) 三角级数理论中的 Riemann 函数 (Riemann function in the theory of trigonometric series) 是 B. Riemann (1851) 为研究函数用**三角级数** (trigonometric series) 表示的问题而引进的一个函数 (见 [1]). 给定级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (*)$$

其中的 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是有界序列. 该级数的 Riemann 函数是对级数作两次逐项积分后得到的函数 F:

$$F(x) =$$

$$= \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + Cx + D,$$

其中的 C, D 是常数.

Riemann 第一定理 (Riemann first theorem): 设级数 (*) 在 x_0 点收敛到数 S. 则 Schwarz 导数 (见 **Riemann 导数** (Riemann derivative)) $D_2 F(x_0)$ 等于 S. Riemann 第二定理 (Riemann second theorem): 设 a_n,

$b_n \to 0\ (n \to \infty)$，则在任意点 x 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h}=0,$$

而且，这一收敛在任意区间上是一致的，即，F 是一致光滑的函数．

如果级数 $(*)$ 在 $[0,2\pi]$ 上收敛到 $f(x)$ 而且 $f\in L[0,2\pi]$，则对于任意 $x\in[0,2\pi]$ 有 $D_2F(x)=f(x)$ 而且

$$F(x)=\int_0^x dt\int_0^t f(u)du+Cx+D.$$

设 a_n,b_n 是实数且当 $n\to\infty$ 时趋于零，设

$$\underline{S}(x)=\underline{\lim}_{n\to\infty}S_n(x),\ \overline{S}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}S_n(x)$$

在 x 点有限，并令

$$S(x)=\frac{1}{2}\ (\underline{S}(x)+\overline{S}(x)),$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2}\ (\overline{S}(x)-\underline{S}(x)).$$

则 F 的上 Schwarz 导数 $\overline{D}_2F(x)$ 和下 Schwarz 导数 $\underline{D}_2F(x)$ 属于区间 $[S-\mu\delta,\ S+\mu\delta]$，其中的 μ 是一个绝对常数（du Bois-Reymond 引理（de Bois-Reymond lemma））．

参考文献

[1] Riemann, B., Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, in Gesammelte math. Abhandlungen, Dover, reprint, 1957, 227 – 264.

[2] Бари, Н. К., Тригонометрические Ряды, М., 1961（英译本：Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964）.

A. A. Конюшков 撰

【补注】 也见 **Riemann 求和法**（Riemann summation method）.

2）微分方程理论中的 Riemann 函数（Riemann function in the theory of differential equations），见 **Riemann 法**（Riemann method）．

朱学贤 译

Riemann 几何学（初等的）［Riemann geometry; Римана геометрия］，椭圆几何学（elliptic geometry）

一种非 **Euclid 几何学**（non-Euclidean geometry），即建立在不同于 **Euclid 几何学**（Euclidean geometry）公理要求的公理上的一种几何理论．与 Euclid 几何学不同，椭圆几何学具有 Euclid 几何学中平行公理的两个可能的否定之一：在平面内，通过不在一给定直线上的一点没有与给定直线不相交的直线；Euclid 平行公理的另一个否定命题出现在 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskii geometry）中：在平面内，通过不在一给定直线上的一点至少有两条直线与给定直线不相交．从现在起把"线"（line）理解为对应于"直线"（straight line）的概念．

三维椭圆几何学的公理系统可由 Euclid 几何学的 **Hilbert 公理系统**（Hilbert system of axioms）中的相同概念建立：基本概念是"点"，"线"，"平面"．"线"和"平面"作为点的某些类，并且将"空间"取为"点"、"线"和"平面"全体对象的集合．

公理系统由四组构成：

第Ⅰ组． 关联公理（axioms of incidence）．这组包含组成 Hilbert 系统第Ⅰ组的全体公理，加上一个附加的公理：平面内的任何两条不同直线有一个且只有一个公共点．

第Ⅱ组． 顺序公理（axioms of order）或**线上的点的位置公理**（axioms of position of points on a line）．这组公理描述"线上两点偶的分离"的概念，由此可以决定线上点的顺序．

II_1．给定任意直线上三个不同的点 A,B,C，则在此线上存在一个点 D，使得偶 A,B 分离偶 C,D（表示为 $AB\div CD$）．如果 $AB\div CD$，则所有四点 A,B,C,D 是不同的．

II_2．如果 $AB\div CD$，那么 $BA\div CD$ 且 $CD\div AB$．

II_3．给定一条线上四个不同的点 A,B,C,D，则总可从中构造两个分离点偶．

II_4．设点 A,B,C,D 与 E 在一条线上；如果 $CD\div AB$ 且 $CE\div AB$，则偶 DE 不分离偶 AB．

II_5．如果偶 CD 与 CE 不分离偶 AB，则偶 DE 也不分离偶 AB（见 II_4）．

II_6．如果某一线束的四条不同线与两条不同线分别交于点 A,B,C,D 与 A_1,B_1,C_1,D_1，则 $AB\div CD$ 蕴涵 $A_1B_1\div C_1D_1$．

第Ⅲ组． 合同公理（axioms of congruence）（或全等公理）．这些公理描述线段、角等的"合同（全等）"关系．一条线段理解为由一条线上不同的点 A,B 的偶以如下方式所决定的该线中一些点的集合．按照第Ⅱ组公理，存在线上的一个点偶 M,N，使得 $AB\div MN$；满足关系 $AB\div MX$ 的点 X 的集合组成由点 A 与 B 决定的线段的内点的类；这记为 $[AB]_M$．$[AB]_M$ 外部的线上的点组成互补线段（mutually complementary segment）$[AB]_N$，点 A 与 B 称为线段 $[AB]_M$ 与 $[AB]_N$ 的端点（ends）．

III_1．每条线段合同于自身．

III_2．如果第一条线段合同于第二条，那么第二条线段合同于第一条．

III_3．如果第一条线段合同于第二条，第二条合同于第三条，那么第一条合同于第三条．

III_4．如果两条线段是合同的，那么它们的互补

线段也是合同的．

Ⅲ$_5$．一条线段不合同于它的一部分．一条线的合同的互补线段称为半线；这样的线段的端点称为该线的正交点．

Ⅲ$_6$．线上的每个点有一个正交点．

Ⅲ$_7$．所有的半线是互相合同的．

Ⅲ$_8$．如果线段 $[AB]$ 合同于一线段 $[A_1B_1]$ 且点 C 是第一条线段的一个内点，那么在第二条线段中存在一点 C_1，使得线段 $[C_1B_1]$ 合同于线段 $[CB]$．

在由两条线形成的角的边上存在与该角的顶点相关的正交点；连接这两点且位于所给角的内部的线段称为此角所联系（度量此角）的线段．如果这两个角所联系的线段是合同的（全等的），则两个角称为合同的（或全等的）(congruent)．

Ⅲ$_9$．如果在两个三角形 ABC 与 $A_1B_1C_1$ 中，边 AB 合同于边 A_1B_1 且边 AC 合同于 A_1C_1，则角 A 合同于角 A_1，当且仅当边 BC 合同于边 B_1C_1．

第Ⅳ组．连续公理 (axiom of continuity)．设线段 $[AB]_M$ 的内点分为两类，使得：1) 此线段的每个点落入两类中的一类；2) 每个类都非空；3) 如果点 X 属于第一类且点 Y 属于第二类，那么 X 总是线段 $[AY]_M$ 的一个内点．这样，在线段 $[AB]_M$ 中存在一点 C，使得 $[AC]_M$ 的每个内点属于第一类，而 $[CB]_M$ 的每个内点属于第二类．

建立在其他的基本概念与关系的基础上，还有关于椭圆几何学的其他的公理系统（例如，见[3]，[5]）．

"局部"椭圆几何学的度量性质与对应的 Euclid 空间里的某个超球面的性质相一致．例如，对于椭圆平面内的任何点，存在此平面的包含该点的一部分，它等距于三维 Euclid 空间中球面的一部分；这个球面的半径 r 对于一个给定的椭圆空间的所有平面是相同的，称为这个空间的曲率半径．一个三维椭圆空间的度量性质"局部地"与四维 Euclid 空间中的一个超球面的性质相一致，等等．数 $k=1/r^2$ 称为椭圆空间的曲率 (curvature of the elliptic space)．为了一般的目的，自然地假定 $r=1$．

以下给出关于（直）线、平面与三维空间椭圆几何学的基本事实．

椭圆线 (elliptic line) 是一条闭有限线 El^1．Euclid 平面 E^1 中粘合对径点的单位半径的圆可作为该线的一个模型，该线的两个不同点将线分为两部分．该线上的点的相互排列用"两点偶分离"的概念决定．线上两点之间的距离由两种方式定义：较短的不超过 $\pi/2$，较长的超过 $\pi/2$．整个线的长度是 π．相距 $\pi/2$ 的两点称为正交的 (orthogonal)；此线上的每个点对应唯一的一个点与它正交．

椭圆平面 (elliptic plane) 是一个同胚于边界粘合于一圆周的 Mobius 带的闭有限单侧曲面 El^2（即椭圆平面同胚于实射影平面）．三维 Euclid 空间中粘合对径点的单位半径的球面可作为曲率为 1 的椭圆几何学的平面的一个模型．一条线不能将平面分为两个区域．

平面内的任何两条线有一条长度为 α 的公共垂线，这里 α 是此两线之间的角．两条不同的线将平面分为两个区域，称为角 (angle)．三条边的一个排列（即有三个相交点的三条线）将整个平面分为四个区域，称为三角形 (triangle)．

平面 El^2 中一个三角形中的度量关系可由 Euclid 空间 E^3 中单位半径的球面上的**球面三角学** (spherical trigonometry) 的对应关系表示．一般来说，椭圆几何学的 El^2 中的三角公式与球面三角学的公式是相同的．

与一个给定的点（极点 (pole)）距离为 $\pi/2$ 的平面的点的集合是一条线，即此极点的极线 (polar)．任何线由它的极点所唯一决定，并且反过来决定它的极点．通过一给定点的线的极点位于该点的极线上，并且位于一条线上的点的极线相交于该线的极点．互配极三角形 (mutually polar triangle) 以对应边的极点作为顶点．对于二个互配极三角形 Chasles 定理 (Chasles theorem) 成立：连接这两个三角形对应顶点的三直线相交于一点．如果一个三角形的顶点是它的边的极点，则此三角形称为自配极三角形 (selfpolar triangle)．三角形的角的和大于 π；它的面积 Δ 等于角盈 (angular excess) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi$．

椭圆平面内的一个圆 (circle) 是与某一点（它的心 (centre)）有同一距离的点的集合．一个圆的半径 R 可以取为 $\leqslant\pi/2$．一个圆是与某一条直线（圆的轴 (axis of the circle)）等距的．当 $R=\pi/2$ 时，圆是一条线——其心的极线．半径 R 的圆的长度是 $2\pi\sin R$ 且圆盘的面积是 $4\pi\sin^2(R/2)$．

通过不在一条线上的三个给定点有四个且只有四个圆．两个不同的圆至多可相交于四个不同点．椭圆平面的总面积是 2π．

对偶原理 (duality principle) 可用于平面的椭圆几何学：在每一个真命题中"点"与"线"可以互换，所得结果是一个真命题．

三维椭圆空间 (elliptic space) 是一个闭有限双侧（可定向的）空间 El^3．Euclid 空间 E^4 中粘合对径点的单位半径的超球面可作为空间 El^3 的一个模型，此椭圆空间的体积是 π^2．

一个平面不能将空间剖分为两个区域．El^3 中的两个不同平面沿一条线相交．不位于平面内的一条线与平面相交于一点．

与一给定点（极点 (pole)）距离为 $\pi/2$ 的空间的

点的集合是一个平面——该极点的极面(polar). 任何平面由它的极点所唯一决定, 并且反过来决定它的极点. 如果三个平面通过一条线, 那么它们的极点位于一条线上. 并且反过来, 如果三个平面的极点位于一条线上, 则这些平面沿一条线相交. 对于每一条线, 存在另一条线, 使得通过第一条线的平面的极点位于第二条线上, 而且位于第一条线上的点的极面通过第二条线. 这些偏斜线称为互配极的(mutually polar). 两条偏斜线称为斜的(oblique), 如果它们不是互极的或其中每条线不与另一条的极面相交. 两条斜线有两条互极的垂线. 如果斜线的两条公垂线的长度不同, 则公垂线的长度给出一条线到另一条线的最小与最大距离. 两条具有同一长度的无限条公垂线的斜线称为 Clifford 平行线(Clifford parallels)(等距线(equidistant lines)或平列线(paratactic lines)). 通过空间里不属于两条给定极线的每个点能够画出给定线的两条 Clifford 平行线. 与一条给定线距离相同(小于 $\pi/2$)的点的集合称为 Clifford 曲面(Clifford surface), 该给定线称为轴, 从轴到点的距离 ρ 是 Clifford 曲面的半径. 这个曲面有两个互极的轴且两对应的半径互余(相加为 $\pi/2$). 一个 Clifford 曲面是两种不同方式下的旋转曲面. 通过 Clifford 曲面的每个点可以画出与它的轴等距且完全属于曲面的两条线. 这些线称为 Clifford 曲面的直纹母线(rectilinear generators). 任意彼此等距的三条直线决定一个以它们为母线的 Clifford 曲面. 不同族的每一对母线相交于一常角. Clifford 曲面等距于一个锐角等于不同族母线间夹角、边长为 π 且对边粘合的 Euclid 菱形, 换句话说, Clifford 曲面是局部 Euclid 的. 半径为 ρ 的 Clifford 曲面的面积是 $\pi^2 \sin 2\rho$.

El^3 中的球面(sphere)是与一给定点(它的心(centre))有同一距离的点的集合. 球面是与一个平面(球面的轴平面(axial plane of the sphere))等距的. 半径为 R 的球面的面积是 $4\pi \sin^2 R$.

对偶原理(duality principle)可用于空间椭圆几何学: 在每一个真命题中"点"与"平面"可以互换, 所得结果是一个真命题.

椭圆几何学的概念是 B. Riemann 在他的演讲[1](1854 年, 1867 年出版)中明确提出的. 在其中, 椭圆几何学是作为 **Riemann 几何学**的一个特殊情形而考虑的.

参考文献

[1] Riemann, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, in Das Kontinuum und andere *Monographien*, Chelsea, reprint, 1973.

[2] Ефимов, Н. В., Высшая геометрия, 6 изд. М., 1978 (中译本: Н. В. 叶菲莫夫, 高等几何学, 高等教育出版社, 1956).

[3] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

[4] Каган, В. Ф., Основания геометрии, ч. 2, М., 1956.

[5] Богомолов, С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана, Л.-М., 1934.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 Riemann 在其就职演讲(1854 年, 1867 年出版)的结尾, 考虑了在每个点与每个二维方向具有相同曲率的空间. 对于这样空间中的图形, 他断言了和处理 Euclid 空间一样的自由运动性, 尽管他没有明显提及它们与非 Euclid 几何学的关系. 这由 H. Helmholtz 于 1868 年完成. 它从空间中图形的自由运动性的公设开始, 也得出常曲率空间——零曲率是 Euclid 空间, 正曲率是球面, 负曲率是绝对几何学. 这导致了术语非 Euclid 几何学扩展到正常曲率空间(Riemannian 几何学), 这里大圆应扮演直线的角色, 且大二维球面扮演平面. 同一平面内的两条不同直线相交于二点(不是一点)的缺点可通过粘合对径点("椭圆几何学")而得以克服. 这种空间与相同维数的射影空间的拓扑是一样的. 度量关系是球面几何学的; 球面三角学可自然地应用, 但由于直线是拓扑圆, 关于距离要像在 Euclid 几何学中关于角那样小心处理. 椭圆 3 空间借助于四元数最容易研究.

F. Klein 将射影平面中一条二次曲线上的 Cayley 度量解释为绝对几何学的一个模型, 这种绝对几何学是他推广的, 为的是包括任意维数的非 Euclid 几何学. 按照射影 n 空间中基本超二次曲面的类型

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0$$

或

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots - x_{n+1}^2 = 0,$$

他称之为椭圆几何学(elliptic geometry)与双曲几何学(hyperbolic geometry), 后来就成为通常的术语.

已有多种椭圆几何学的公理化处理. 如果要保持接近 Euclid 几何学的 Hilbert 公理化, 必须将关于线性顺序的 Hilbert 的公理换为关于循环顺序的公理: 1) 在每条线上存在二个(互反的)已区分的循环顺序; 2) 平面内的射影将区分的顺序互换.

(循环顺序(cyclic order)如下定义: 对于有限集一个循环顺序是由如下关系定义的线性顺序的一个等价类(对所有 i)

$$a_1 < \cdots < a_i < a_{i+1} < \cdots < a_n \approx$$
$$\approx a_{i+1} < \cdots < a_n < a_1 < \cdots < a_i.$$

一个任意的集合是循环顺序的, 假如每一个有限子集具有一个循环顺序, 使得 $V \subset W$ 时, W 上的循环顺

序是 V 上循环顺序的扩充，用 > 代替 < ，则改变为相反的顺序．）

参考文献

[A1] Helmholtz, H., Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen, in Wis senschaftliche Abhandlungen, Vol. Ⅱ, 1883, 618 - 639.

[A2] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965.

[A3] Bachmann, F., Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer, 1959.

[A4] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1989.

[A5] Gray, J., Ideas of space, Oxford, 1989, Chapt. 14.

[A6] Manning, H. P., Introductory non-Euclidean geometry, New York, 1963, Chapt. Ⅲ.

[A7] Veblen, O. and Young, J. W., Projective geometry, Ⅱ, Blaisdell, 1946, Chapt. Ⅶ.

[A8] Berger, M., Geometry, Ⅱ, Springer, 1987, Chapt. 19（中译本：M．贝尔热，几何，第一一五卷，第 19 章，科学出版社，1987 - 1991）．

林向岩 译 陆珊年 校

Riemann-Hilbert 问题 [Riemann-Hilbert problem; задача Римана-Гильберта]，线性共轭问题（linear conjugation problem），Riemann 问题（Riemann problem），Hilbert 问题（Hilbert problem），Riemann-Привалов 问题（Riemann-Privalov problem），Hilbert-Привалов 问题（Hilbert-Privalov problem）

解析函数论的边值问题（boundary value problems of analytic function theory）中的一个主要问题．在最简单的情形下，此问题可陈述如下．设 L 是简单光滑闭围道，把平面分为有界内区域 D^+ 及其补域 D^-（含有无穷远点）．设两个函数 $G(t)$，$g(t)$ 给定在 L 上，满足 **Hölder 条件**（Hölder condition）（H 条件）且在 L 上处处有 $G(t)\neq 0$．需要求出两个函数 $\Phi^\pm(z)$，分别在 $D^\pm$ 内解析，除有限个点 t_k 外连续到围道 L，在这些点处它们可有满足

$$|\Phi(z)|<\frac{A}{|z-t_k|^{\alpha_k}}$$

的间断性，并在 L 上满足边界条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t);\qquad(*)$$

函数 $G(t)$ 称为 Riemann-Hilbert 问题的系数（coefficient of the Riemann-Hilbert problem）．整数

$$\kappa=\operatorname{Ind}G(t)=\frac{1}{2\pi}\int_L d\arg G(t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t)$$

称为系数 $G(t)$ 的指标（index of the coefficient），同时也称为 Riemann-Hilbert 问题的指标（index of the Riemann-Hilbert problem）．假定需要求出满足条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的解．此时对 $\kappa>0$，相应的齐次 Riemann-Hilbert 问题（即当 $g(t)\equiv 0$ 时的问题）和非齐次 Riemann-Hilbert 问题都是无条件可解的；其解线性依赖于 κ 个任意常数并可通过 $\kappa-1$ 次任意系数的多项式线性表出．如果 $\kappa=0$，则齐次 Riemann-Hilbert 问题只有平凡的零解，而非齐次问题无条件地可解且解为唯一．如果 $\kappa<0$，则齐次问题只有平凡解，而非齐次问题只当 $|\kappa|$ 个可解性条件得到满足时才有唯一解，这些条件可通过变系数多项式线性表示．

在所有情形中，Riemann-Hilbert 问题的解都可通过 Cauchy 型积分（见 **Cauchy 积分**（Cauchy integral））求积表示为闭形式（closed form）．未知函数的边值在所给围道上必须满足 H 条件．上述结论可毫无改变地移植到由有限条互不相交的简单闭曲线围成的多连通域 D^+ 的情形．一条围道由开曲线组成的情形出现特殊性，即在围道曲线的端点处，依赖于解类的选择，Riemann-Hilbert 问题的解可变为无穷或保持有界．指标依赖于解类的选择．对于在端点处具有阶小于 1 的可容许无穷性（可积无穷性）的解类的指标等于对于在端点处有界的解类的指标加 1．与之相应，线性无关解的个数加 1 或可解性条件的个数减 1．当系数 $G(t)$ 具有第一类间断性时出现类似的情形；解在间断点处的性态与在围道端点处的性态相同．

对于一般情形，即所给围道由有限条任意位置的开或闭曲线组成的情形，Riemann-Hilbert 问题可用上述简单情形中所用的同样方法求解，且有类似的结论．在围道中的几条曲线相交的点处，解的研究会出现某些困难．

对于 $G(t)$ 和 $g(t)$ 只是连续而不满足 H 条件的情形，上面的结论除下述一点外仍然成立：此时解的边值只当沿非切向路径趋向围道时才存在，它们是不连续的，但对任何 $p>0$ 有 $\Phi^\pm(t)\in L_p$；如果 $G(t)$ 连续，$g(t)\in L_p$，则 $\Phi^\pm(t)\in L_p$．使得 Riemann-Hilbert 问题已经解出的关于系数 $G(t)$ 的最一般的假定是它属于可测函数类，但附加一个关于辐角的跳跃值的条件；此处也有 $g(t)\in L_p$．

指标为无穷的 Riemann-Hilbert 问题已经得到考虑，此时对于一端或两端通向无穷远点的围道选取简单光滑曲线．已经研究了下列情形：1）多项式阶增长，此时当 $|t|\to\infty$ 时渐近等式

$$\operatorname{Ind}G(t)\sim\pm|t|^\rho$$

满足（对一个无穷端点情形，$0<\rho<\infty$；对两个无穷端点情形，$0<\rho<1$）；2）对数阶增长，此时当 $|t|\to\infty$ 时有

$$\operatorname{Ind} G(t) \sim \pm \ln^{\alpha}|t|, \ 0 < \alpha < \infty .$$

在这两种情形下，对于正无穷指标，线性无关解的数目为无穷且可通过一个整函数表示，其形式依赖于指标的阶．对于负无穷指标，齐次问题没有非平凡解，而非齐次问题仅当无穷多个可解性条件得到满足时才可解．这里主要难题在于区分出有限解．

Riemann 曲面上 Riemann-Hilbert 问题的解以及与之等价的属于一个置换群的自守函数的基本域上 Riemann-Hilbert 问题的解，已对这类自守函数情形进行了研究．解和可解性条件的数目依赖于指标，在某些（特别）情形还依赖于曲面的亏格或基本域．

如果条件（*）中 G 是矩阵，$\Phi^{\pm}$ 和 g 是（n 维）向量，则出现对于分量均解析的向量的 Riemann-Hilbert 问题．这比上面考虑的标量情形（$n=1$）远为复杂．此时通过归结为一个积分方程组来研究．线性无关解或可解性条件的数目依赖于 n 个称为偏指标（partial index）的未知数，它们对系数矩阵的依赖性尚未明确建立．此时 G 的行列式的指标（称为所给问题的全指标（total index））起着重要作用．

Riemann-Hilbert 问题（对于分量均解析的向量）首次出现于 B. Riemann 有关从一个给定的置换群（**单值群**（monodromy group））构造一个线性微分方程问题的解中（见[1]）．然而，近似于上述形式的 Riemann-Hilbert 问题是 D. Hilbert 于 1905 年在较少一般性的条件下首次考虑的（见[2]）；首批（具有两择特性的）结果是通过归结为积分方程得到的．1908 年 J. Plemelj 首次应用 Cauchy 型积分把 Riemann-Hilbert 向量问题归结为一个积分方程并完全解决了 Riemann 提出的微分方程问题（见[3]）．非齐次 Riemann-Hilbert 问题（表述多少有点不同）由 И. И. Привалов 首次研究（[4]）；他的结论主要涉及函数论的推广．

Riemann-Hilbert 问题有许多应用，其主要应用在于奇异积分方程理论．也已有各种方向的推广：具有对于广义解析函数的一个位移、共轭或微分的 Riemann-Hilbert 问题，等等．关于 Riemann-Hilbert 问题的理论及其推广和应用在[5]和[6]中得到了相当充分的反映．

参考文献

[1] Riemann, B., Gesammelte Mathematische Werke, Springer, 1990.

[2] Hilbert, D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Chelsea, reprint, 1953.

[3] Plemelj, J., Riemannsche Funktionenscharen mit gegebenen Monodromiegruppe, *Monatsh. Math. Phys.*, 19 (1908), 211－245.

[4] Привалов, И. И., 《Матем. сб.》, 41 (1934), 4, 519－526.

[5] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968, гл. 2（中译本：Н. И. 穆斯海里什维里，奇异积分方程，上海科学技术出版社，1966，第二章）

[6] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977（英译本：Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966）.

Ф. Д. Гахов 撰

【补注】 Riemann-Hilbert 问题在孤立子理论中起着中心作用．关于这方面的情况以及附加材料，见**解析函数论的边值问题**（boundary value problems of analytic function theory）及其补注．

沈永欢 译

Riemann-Hilbert 问题（解析函数）［Riemann-Hilbert problem (analytic functions)；Римана-Гильберта задача］

见**解析函数论的边值问题**（boundary value problems of analytic function theory）．

【补注】

参考文献

[A1] Rodin, Yu. L., The Riemann boundary problem on Riemann surfaces, Reidel, 1988（译自俄文）.

杨维奇 译

Riemann-Hurwitz 公式［Riemann-Hurwitz formula；Римана-Гурвица формула］，Hurwitz 公式（Hurwitz formula），Hurwitz 定理（Hurwitz theorem）

联系闭 **Riemann 曲面**（Riemann surface）的亏格与它的叶数及分支点重数的一个公式．设 T 和 R 是闭 Riemann 曲面，$f: T \to R$ 是满全纯映射，假定这是一个 m 叶覆叠，并假定点 $Q_1, \cdots, Q_s \in T$ 是 f 的重数顺次为 $k_1, \cdots, k_s$ 的分支点，再设 g，h 分别为 T，R 的亏格，则下述 Riemann-Hurwitz 公式成立：

$$2g-2 = m(2h-2) + \sum_{i=1}^{s}(k_i - 1). \qquad (*)$$

特别地，如果 R 是 Riemann 球面即 R 的亏格 $h=0$，则

$$g = \sum_{i=1}^{s} \frac{k_i - 1}{2} - m + 1.$$

公式（*）为 B. Riemann 所陈述（[1]）并由 A. Hurwitz 加以证明（[2]）．

对于一个域上的完全曲线的覆叠这种情形，当覆叠映射 f 为可分（见**可分映射**（separable mapping））时，也能导出类似的公式．此时有

$$2g-2 = m(2h-2) + \deg(\delta(f)),$$

其中 $\delta(f)$ 是 f 的差积（different）．此时也称该公式为 Riemann-Hurwitz-Hasse 公式（Riemann-Hurwitz-Hasse formula）．在分支重数 k_i 可被基域的特征整除的情形，也称在该处有非驯分歧（wild ramification），

且在该点处 $\delta(f)$ 的次数大于 $k_i - 1$.

参考文献

[1] Riemann, B., Gesammelte mathematische Werke, Dover, reprint, 1953

[2] Hurwitz, A., Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkte, 载于其 Mathematische Werke, Vol. 1, Birkhäuser, 1932, 321 - 383.

[3] Hurwitz, A., Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964.

[4] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1967 (中译本 R. 尼凡林那, 单值化, 科学出版社, 1960).

[5] Lang, S., Introduction to algebraic and Abelian functions, Addison-Wesley, 1972.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 映射 f 的差积是由 f 确定的代数函数域的扩张的差积; 关于后一概念见判别式 (discriminant) 中的补注.

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977, Sect IV. 2.

[A2] Griffiths, P., Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978, 216 - 219.

[A3] Hasse, H., Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei eindlichem Konstantenkörper, *Reine Angew. Math.*, **172** (1935), 37 - 54.

[A4] Farkas, H. M., Kra, I., Riemann surfaces, Springer, 1980.

沈永欢 译

Riemann 假设 [Riemann hypotheses; Римана гипотезы], 解析数论中的

B. Riemann (1876) 所提出的关于 ζ 函数 (zeta-function) $\zeta(s)$ 的非显然零点分布的五个猜想, 并由这些零点给出不超过实数 x 的素数个数的表达式. 这些 Riemann 假设之一是: ζ 函数 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点均位于直线 $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ 上, 它至今还没有被证明或否定.

А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 关于这五个猜想, 见 ζ 函数 (zeta-function).

参考文献

[A1] Ivic, A., The Riemann zeta-function, Wiley, 1985.

[A2] Titchmarsh, E. C., The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, 1986.

[A3] Edwards, H. M., Riemann's zeta function, Acad. Press, 1974.

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞、潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1991.

潘承彪 译 朱尧辰 校

广义 Riemann 假设 [Riemann hypotheses, generalized; Римана обобщенная гипотеза]

关于 **Dirichlet** L **函数** (Dirichlet L-function), Dedekind ζ **函数** (zeta-function), 及其他一些类似函数的非显然零点的一个命题, 它类似于关于 Riemann ζ 函数 $\zeta(s)$ 的非显然零点的 **Riemann 假设** (Riemann hypotheses). 在 Dirichlet L 函数的情形, 广义 Riemann 假设称为推广的 Riemann 假设 (extended Riemann hypothesis).

А. Ф. Лаврик 撰

【补注】 对于 Dirichlet L 函数, 甚至还不知道在区间 $[0, 1]$ 内是否存在实零点 (Siegel 零点 (Siegel zeros)). 这与二次域的类数有重要联系 (也见**二次域** (quadratic field); **Siegel 定理** (Siegel theorem)).

设 K 是代数数域, $G(K)$ 是由 K 的分式理想组成的群及 $C(K)$ 是他的伊代尔类群 (见**伊代尔** (idèle); **分式理想** (fractional ideal)). 设 X 是 $C(K)$ 上的拟特征, 即 $C(K)$ 到非零复数群的一个连续同态. 那么, 对伊代尔 (x_v) 有 $X((x_v)) = \prod_v X_v(x_v)$, 这里对每个 v, X_v 是 K_v 的拟特征, 对几乎所有的 v 它等于 $U(K_v)$——局部完全化 K_v 的所有单位——中的单位. 设 S 是由 K 上的所有赋值组成的集合 (包含 Archimedes 赋值 S_∞) 的一个有限子集. 现在可以按以下方式来定义 $G(K)$ 上的函数 χ: 对所有的素理想 $\mathfrak{P}$, 设

$$\chi(\mathfrak{P}) = \begin{cases} X_v(\mathfrak{p}_v), & \text{若 } \mathfrak{P} = \mathfrak{p}_v, v \notin S, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

然后依乘性来扩充 χ 的定义. 这些函数称为 Hecke 特征标 (Hecke characters) 或量特征标 (德文 Grössencharakters). 给定这样一个特征标, χ 的 Hecke ζ 函数 (Hecke zeta-function) 定义为

$$\zeta(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s},$$

这里 N 是 $G(K) \to G(Q)$ 的绝对范数. 函数 $\zeta(s, \chi)$ 也称为 L 级数 (L-series), Dirichlet L 级数 (Dirichlet L-series) (当 χ 是 Dirichlet 特征标时), 或关于量特征标的 Hecke L 函数 (Hecke L-function with Grössencharakter), 它也被表为 $L(s, \chi)$. 当 $\chi \equiv 1$ 时就得到 Dedekind ζ 函数 (Dedekind ζ-function). 对 Dirichlet L 级数, 广义的 Riemann 假设断言: 当 $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ 时, $L(s, \chi) \neq 0$.

参考文献

[A1] Heilbronn, H., Zeta-functions and L-functions, in J. W. S. Cassels and A. Fröhlich (eds.): Algebraic number theorey, Acad. Press, 1967, 204 - 230.

[A2] Narkiewicz, W., Elementary and analytic theory of algebraic numbers, Springer & PWN, 1990, Chapt. 7, § 1.

潘承彪 译 朱尧辰 校

Riemann 积分 [Riemann integral; Римана интеграл]

Cauchy 积分(Cauchy integral)概念向一类不连续函数的一种推广，由 B. Riemann(1853)引入．设函数 f 给定在区间 $[a,b]$ 上，又设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$i=1,\cdots,n$，$x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$．和

$$\sigma=f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+ \\ +\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}), \qquad (1)$$

其中 $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，称为相应于 $[a,b]$ 用点 x_i 的分割以及样点 ξ_i 的 Riemann 和(Riemann sum)．数 I 称为 Riemann 和(1)当 $\max_i\Delta x_i\to 0$ 时的极限，如果对任意 $\varepsilon>0$，可找到 $\delta>0$，使得不等式 $\max_i\Delta x_i<\delta$ 蕴含不等式 $|\sigma-I|<\varepsilon$．若当 $\max_i\Delta x_i\to 0$ 时，Riemann 和有有限的极限 I，那么函数 f 称为在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的(Riemann integrable)，其中 $a<b$．该极限称为 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 定积分(definite Riemann integral)，并记为

$$\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

如 $a=b$，则定义

$$\int_b^a f(x)dx=0,$$

如 $a>b$，则积分(2)用下式定义：

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分且必要的条件是，f 在该区间上有界，并且 f 在 $[a,b]$ 上的所有不连续点组成的集合的 **Lebesgue 测度**(Lebesgue measure)为零．

Riemann 积分的性质． 1) 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的函数，必在该区间上有界(其逆不真：**Dirichlet 函数**(Dirichlet function)是 $[a,b]$ 上有界而不可积的例子)．

2) 线性性质：对任意常数 α 与 β，函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上的可积性蕴涵函数 $\alpha f+\beta g$ 在该区间上的可积性，且等式

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx= \\ =\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

成立．

3) 函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上的可积性蕴涵它们的乘积 fg 在该区间上的可积性．

4) 可加性(additivity)：函数 f 在区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上的可积性，蕴涵 f 在 $[a,b]$ 上的可积性，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

5) 若 f 和 g 都是 $[a,b]$ 上的可积函数，且对该区间上的一切 x，$f(x)\geqslant g(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx.$$

6) 函数 f 在 $[a,b]$ 上的可积性蕴涵 $|f|$ 在该区间上的可积性，且估计式

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$$

成立．

7) 均值公式(mean-value formula)：若 f 和 g 是 $[a,b]$ 上两个实值可积函数，函数 g 在该区间上处处非负或处处非正，而 M 和 m 分别是函数 f 在 $[a,b]$ 上的上确界与下确界，那么存在数 μ，$m\leqslant\mu\leqslant M$，使得公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx \qquad (3)$$

成立．此外，若 f 在 $[a,b]$ 上连续，那么在该区间中必有点 ξ，使得在公式(3)中，

$$\mu=f(\xi).$$

8) 第二中值公式(Bonnet 公式)(second mean-value formula (Bonnet formula))：若 f 是 $[a,b]$ 上可积的实值函数，g 是该区间上单调的实值函数，则在 $[a,b]$ 上存在点 ξ，使得公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx= \\ =g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

成立．

参考文献

[1] Riemann, B., Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, in H. Weber (ed.): B. Riemann's Gesammelte Mathematische Werke, Dover, reprint, 1953, 227－271.(原文刊登于 *Göttinger Akad. Abh.*, 13(1868)).

[2] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд. ч. 1, М., 1971, 2 изд., ч. 2, М., 1980(英译本：Il'in, V. A. and Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1－2, Mir, 1982).

[3] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 1－2, М., 1981.

[4] Никольский, С. М., Курс математического анализа,

2 изд., т. 1 − 2, М. 1975 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一、二卷, 人民教育出版社, 高等教育出版社, 1982, 1992).

В. А. Ильин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Shilov, G. E., Mathematical analysis, 1 − 2, MIT, 1974(译自俄文).

[A2] Pesin, I. N., Classical and modern integration theories, Acad. Press, 1970(译自俄文).

[A3] Stromberg, K., An introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A4] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).

王斯雷 译

Riemann 法 [Riemann method; Римана метод], Riemann-Volterra 法 (Riemann-Volterra method)

解两个自变量二阶线性**双曲型偏微分方程** (hyperbolic partial differential equation)

$$Lu \equiv u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \tag{1}$$

的 **Goursat 问题** (Goursat problem) 和 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 的一种方法. Riemann 法中起基本作用的是 Riemann 函数 (Riemann function) $R = R(x, y; \xi, \eta)$; 在关于系数 a, b, c 和函数 f 的适当条件下, Riemann 函数定义为特殊 Goursat 问题

$$L^* R \equiv R_{xy} - \frac{\partial}{\partial x}(aR) - \frac{\partial}{\partial y}(bR) + cR = 0$$

具有特征边值条件

$$R(\xi, y; \xi, \eta) = \exp\int_\eta^y a(\xi, t)\,dt,$$

$$R(x, \eta; \xi, \eta) = \exp\int_\xi^x b(t, \eta)\,dt$$

的解. 函数 R 关于变量 ξ, η 是齐次方程

$$R_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)R_\xi + b(\xi, \eta)R_\eta + c(\xi, \eta)R = 0$$

的解. 当 $a = b = 0$, $c =$ 常数时, 有 $R = J_0(\sqrt{4(x-\xi)(y-\eta)})$, 其中 $J_0(z)$ 是零阶 Bessel 函数.

Riemann 函数也可定义为加权 Volterra 积分方程 (见 **Volterra 方程** (Volterra equation))

$$R(x, y; \xi, \eta) - \int_\eta^y a(x, \tau)R(x, \tau; \xi, \eta)\,d\tau - \int_\xi^x b(t, y)R(t, y; \xi, \eta)\,dt + \int_\xi^x dt\int_\eta^y c(t, \tau)R(t, \tau; \xi, \eta)\,d\tau = 1 \tag{2}$$

的解.

解 Goursat 问题的 Riemann 法有如下述: 对于可微分到相应阶数的任一函数 $u = u(x, y)$, 下面的恒等式成立:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[uR(x, y; \xi, \eta)] - R(x, y; \xi, \eta)Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\right)\right].$$

在矩形 $\{(x_0, y_0); (x, y)\}$ 上积分上式并进行分部积分, 可得 (1) 的任一解 u 是加权积分方程

$$\begin{aligned} u(x, y) = {} & R(x, y_0; x, y)u(x, y_0) + R(x_0, y; x, y)u(x_0, y) - R(x_0, y_0; x, y)u(x_0, y_0) + \\ & + \int_{x_0}^x\left[b(t, y_0)R(t, y_0; x, y) - \frac{\partial R(t, y_0; x, y)}{\partial t}\right]u(t, y_0)\,dt + \\ & + \int_{y_0}^y\left[a(x_0, \tau)R(x_0, \tau; x, y) - \frac{\partial R(x_0, \tau; x, y)}{\partial \tau}\right]u(x_0, \tau)\,d\tau + \\ & + \int_{x_0}^x dt\int_{y_0}^y R(t, \tau; x, y)f(t, \tau)\,d\tau \quad (x > x_0, y > y_0) \end{aligned} \tag{3}$$

的解. 方程 (3) 直接证明了关于方程 (1) 的 Goursat 问题

$$u(x, y_0) = \varphi(x),\ u(x_0, y) = \psi(y),$$

$$\varphi(x_0) = \psi(y_0)$$

的适定性.

Riemann 法通过求出 Riemann 函数来解方程 (1) 连同给定在任一光滑非特征曲线上的初始条件的 Cauchy 问题. 这就提供了把这个问题的解写为可求积

形式的可能性.

Riemann 法已推广到一类广泛的线性双曲型偏微分方程和方程组.

在二阶线性双曲型偏微分方程组

$$u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = = f(x, y)$$

的情形，其中 a, b, c 是给定的 m 阶实对称方阵，$f = (f_1, \cdots, f_m)$ 是给定的向量，$u = (u_1, \cdots, u_m)$ 是未知向量，Riemann 矩阵（Riemann matrix）一意地定义为形如（2）的加权 Volterra 积分方程的解，此方程右端为 m 阶恒等矩阵 I.

V. Volterra 首次把 Riemann 法推广到**波动方程**（wave equation）

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = f(x, y, t). \qquad (4)$$

函数

$$R = \log\left[\sqrt{\frac{(t-\tau)^2}{r^2} - 1} + \frac{\tau - t}{r}\right]$$

（其中 $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$）起着 Riemann 函数的作用，它使方程（4）连同给定在平面 $t =$ 常数上的初始条件的 Cauchy 问题和连同给定在特征锥上的条件的 Goursat 问题的解能写为可求积的形式.

本条所述方法是 B. Riemann 于 1860 年提出的.

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959.

[2] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965（中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，II，科学出版社，1977）.

[3] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958（中译本：B. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷第一、二分册，高等教育出版社，1958）.

А. М. Нахушев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1963.

沈永欢 译

Riemann 关系 [**Riemann relation**; **Римана соотношение**]，Riemann 双线性关系（bilinear Riemann relations）

见 **Abel 微分**（Abelian differential）.

Riemann-Roch 定理 [**Riemann-Roch theorem**; **Римана-Роха теорема**]

把代数或解析簇 X 上**局部自由层**（locally free sheaf）$\mathscr{E}$ 的 **Euler 示性数**（Euler characteristic）$\chi(\mathscr{E})$ 表示成 $\mathscr{E}$ 和 X 的陈（省身）示性类（见**陈（省身）类**（Chern class））的定理. 它可被用来计算 $\mathscr{E}$ 的截面空间的维数（Riemann-Roch 问题（Riemann-Roch problem））.

经典的 Riemann-Roch 定理与非奇异代数曲线 X 有关，它断言对 X 上的**除子**（divisor）D，有

$$l(D) - l(K_X - D) = \deg D - g + 1, \qquad (1)$$

这里 $l(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ 是满足 $(f) + D \geqslant 0$ 的函数 $f \in k(x)$ 的空间的维数，K_X 是典范除子，g 是 X 的亏格. 在 19 世纪中期 B. Riemann 利用解析方法得到不等式

$$l(D) \geqslant \deg D - g + 1.$$

等式（1）是由 E. Roch 证明的.

曲线的 Riemann-Roch 定理是更广泛的 Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck 定理的一维情形. 设 X 是 n 维非奇异射影簇，且设 $H^{\cdot}X$ 是适当的**上同调**（cohomology）理论：或者当基域 $k = \mathbf{C}$ 时 $H^{\cdot}X = H^{\cdot}(X, \mathbf{Q})$ 是奇异上同调空间；或者 $H^{\cdot}X = A(X) \otimes \mathbf{Q}$，这里 $A(X)$ 是**周（炜良）环**（Chow ring）；或者 $H^{\cdot}X$ 是与 Grothendieck 环 $K^0(X)$ 相关联的环（见[2]，[7]）. 设 $\mathscr{E}$ 是 X 上 r 秩局部自由层. 对于层 $\mathscr{E}$ 可用下述方法定义一个以陈类 $c_i(\mathscr{E}) \in H^{\cdot}X$ 为变量的、有理系数的通用多项式 ch(－) 以及 td(－). 陈多项式有因式分解

$$c_t(\mathscr{E}) = c_0(\mathscr{E}) + \cdots + c_r(\mathscr{E})t^r = \prod_{i=1}^{r}(1 + a_i t),$$

这里 a_i 是一个形式符号. 指数陈特征标由以下公式定义

$$\mathrm{ch}(\mathscr{E}) = \sum_{i=1}^{r} e^{a_i}\left[e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots\right].$$

相应地，**Todd 类**（Todd class）定义为

$$\mathrm{td}(\mathscr{E}) = \prod_{i=1}^{r}\frac{a_i}{1 - e^{-a_i}};$$

$\mathrm{ch}(\mathscr{E})$ 和 $\mathrm{td}(\mathscr{E})$ 都是 a_i 的对称函数，从而可写成 $c_i(\mathscr{E})$ 的多项式.

Riemann-Roch-Hirzebruch 定理（Riemann-Roch-Hirzebruch theorem）：如果 X 是 n 维非奇异射影簇或紧复簇，且若 $\mathscr{E}$ 是 X 上 r 秩向量丛，则

$$\chi(\mathscr{E}) = \deg(\mathrm{ch}(\mathscr{E})\,\mathrm{td}(\mathscr{T}_X))_n,$$

这里 $\mathscr{T}_X$ 是 X 上切层，$\deg(\ )_n$ 表示 $H^{\cdot}X$ 内的 n

次分支. 这个定理由 F. Hirzebruch 对基域 C 的情形证明. 当 $n=2$ 以及可逆层 $\mathscr{E}=\mathscr{O}_X(D)$ 时, 它导出以下等式

$$\chi(\mathscr{O}_X(D))=\frac{1}{2}D(D-K_X)+\frac{1}{12}(K_X^2+c_2),$$

这里 $c_2=c_2(X)$ 是曲面 X 的第二陈类, K_X 是典范类, 特别当 $D=0$ 时可得 Noether 公式(Noether formula):

$$\chi(\mathscr{O}_X)=1+p_a=\frac{1}{12}(K_X^2+c_2).$$

对三维簇 ($n=3$) 定理可导出

$$\chi(\mathscr{O}_X(D))=$$

$$=\frac{1}{6}D^3-\frac{1}{4}D^2K_X+\frac{1}{12}D(K_X^2+c_2)+$$

$$-\frac{1}{24}K_Xc_2.$$

特别当 $D=0$ 时,

$$\chi(\mathscr{O}_X)=-\frac{1}{24}K_Xc_2.$$

1957年 A. Grothendieck 把 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理推广到任意代数闭域上非奇异簇的态射(见[1]). 设 K_0X 和 K^0X 分别为 X 上凝聚层与局部自由层的 **Grothendieck 群**(Grothendieck group). 函子 K_0X 是从概形和真态射的范畴到 Abel 群范畴里的共变函子. 在这种情形下对于**真态射**(proper morphism) $f: X\to Y$, 态射 $f_!: K_0X\to K_0Y$ 由下式定义:

$$f_!(\mathscr{F})=\sum(-1)^iR^if_*(\mathscr{F}),$$

这里 $\mathscr{F}$ 是 X 上任意的**凝聚层**(coherent sheaf). K^0X 是到环的范畴里的共变函子. 对于具有丰富层的正则概形, 群 K_0X 和 K^0X 重合且记为 $K(X)$. 陈特征标 ch: $K(X)\to H^\cdot X$ 是环的同态. $H^\cdot X$ 也是共变函子: Gizin 同态 $f_*: H^\cdot X\to H^\cdot Y$ 是有定义的. 当 $H^\cdot X=H^\cdot(X,\mathbf{Q})$ 时同态 f_* 是从同调空间的 f_* 借助 **Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)而得到的. 由 Grothendieck 推广而得的定理表达了同态 $f_!$ 和 ch 离开可交换性的偏移程度.

Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck 定理(Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck theorem): 设 $f: X\to Y$ 是非奇异射影簇的光滑射影态射, 则对任何 $x\in K(X)$, 有 $H^\cdot X$ 内的等式

$$\mathrm{ch}(f_!(x))=f_*(\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{td}(\mathscr{T}_f)),$$

这里 $\mathscr{T}_f=\mathscr{T}_X-f^*(\mathscr{T}_Y)\in K_X$ (态射 f 的相对切层(relative tangent sheaf of the morphism)).

当 Y 是一个点, 这个定理化为 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理. 当 Y 是具有丰富可逆层的 Noether 概形、或当 f 是真态射其纤维是局部完全交、或当奇异拟射影簇时, 这个定理都有推广(见[5], [6], [7]).

Riemann-Roch 定理的某些版本是与椭圆算子的指标问题密切相关的(见**指标公式**(index formulas)). 例如紧复簇的 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理是 Atiyah-Singer 指标定理的特殊情形.

参考文献

[1] Borel, A. and Serre, J.-P., La théorème de Riemann-Roch, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 97-136.

[2] Манин, Ю. И., 《Успехи матем. наук》, **24** (1969), 5, 3-86.

[3] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[4] Hirzebruch, F., Topological methods in algebraic geometry, Springer, 1978 (译自德文).

[5] Baum, P., Fulton, W., MacPherson R., Riemann-Roch for singular varieties, *Publ. Math. IHES*, **45** (1975), 101-145.

[6] Baum, P., Fulton, W. and MacPherson, R., Riemann-Roch for topological K-theory and singular varieties, *Acta Math.*, **143** (1979), 3-4, 155-192.

[7] Berthelot, P., et al. (eds.): Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, in Sem. Geom. Alg. 6, Lecture notes in math. Vol. 225, Springer, 1971.

Вал. С. Куликов 撰

【补注】 在代数数论和算术代数几何中有 Riemann-Roch 定理的类似结论.

参考文献

[A1] Lang, S., Algebraic number theory, Addison-Wesley, 1970.

[A2] Szpiro, K., Sem. sur les pinceaux arithmétiques: La conjecture de Mordell, *Astérisque*, 127 (1985).

陈志杰 译

Riemann-Schwarz 原理 [Riemann-Schwarz principle; Римана-Шварца принцип], Riemann-Schwarz 对称原理(Riemann-Schwarz symmetry principle)

延拓共形映射和单复变量解析函数的一种方法, 于 19 世纪由 B. Riemann 表述并由 H. A. Schwarz 证明.

关于共形映射的 Riemann-Schwarz 原理如下所述: 设复平面 $\mathbf{C}$ 中的两个区域 D_1, D_2 关于实轴 $\mathbf{R}$ 对称, 它们互不相交, 并设它们的边界含有一公共区间 $\gamma\subset\mathbf{R}$, 而 $D=D_1\cup\gamma\cup D_2$ 也是一个区域. 设 D_1^*, D_2^*, γ^* 和 D^* 具有类似的规定. 这时, 如果函数 f_1 在 $D_1\cup\gamma$ 上连续, 把 D_1 共形映射到 D_1^* 上, 且 $f_1(\gamma)=\gamma^*$, 则当 $z\in D_1\cup\gamma$ 时等于 $f_1(z)$ 而当 $z\in$

D_2 时等于 $\overline{f_1(z)}$ 的函数 $f(z)$，实现 D 到 D^* 上的**共形映射**（conformal mapping）.

当 D_1、D_2 和 D_1^*、D_2^* 是 Riemann 球面 $\bar{\mathbf{C}}$ 上的区域且分别关于两个邻域 C，$C^* \subset \bar{\mathbf{C}}$ 为对称而 $\gamma \subset C$，$\gamma \subset C^*$ 为开弧时，可有 Riemann-Schwarz 原理的比较一般的陈述（见**对称原理**（symmetry principle））.

关于全纯函数的 Riemann-Schwarz 原理．设区域 $D \subset \mathbf{C}$ 的边界包含一条实解析弧．如果函数 f 在 D 内全纯，在 $D \cup \gamma$ 中连续且它在 γ 上的值属于另一条实解析弧 γ^*，则 f 可解析延拓到 γ 的一个邻域中．

Riemann-Schwarz 原理用于构造平面区域的共形映射，也用于单复变量和多复变量函数的解析延拓理论．

参考文献

[1] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973（中译本：М. А. 拉甫伦捷夫，Б. А. 沙巴特，复变函数论方法，高等教育出版社，上册 1956，下册 1957）.

Е. М. Чирка 撰

【补注】 Riemann-Schwarz 原理也称为 Schwarz 反射原理（Schwarz reflection principle）（亦见 **Schwarz 对称定理**（Schwarz symmetry theorem））．此原理也可改述于 C^k 弧情形，此时得到非全纯延拓．它可用于证明 $\mathbf{C}$ 中 C^k 光滑有界域的共形映射在边界上的光滑性．此方法还能推广从而得到严格伪凸 C^k 光滑有界域之间双全纯映射在边界上的光滑性，见 [A2]，[A3].

类似于全纯函数的 Schwarz 反射原理的是著名的**楔棱定理**（edge-of-the-wedge theorem），见 [A6].

参考文献

[A1] Nehari, Z., Conformal mapping, Dover, reprint, 1975.

[A2] Nirenberg, L., Webster, S., Yang, P., Local boundary regularity of holomorphic mappings, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33** (1980), 305 – 338.

[A3] Пинчук, С. И., Хасанов, С. В., 《Матем. сб.》 **134** (176) (1987), 546 – 555; 576（英译本：Pinchuk, S. I., Khasanov, S. V., Asymptotically holomorphic functions and their applications, *Math. USSR-Sb.*, **62** (1989), 2, 541 – 550).

[A4] Carathéodory, C., Theory of functions, 2, Chelsea, reprint, 1954.

[A5] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979（中译本：L. V. 阿尔福斯，复分析，第二版，上海科学技术出版社，1985）.

[A6] Rudin, W., Lectures on the edge-of-the-wedge theorem, Amer. Math. Soc., 1971.

沈永欢 译

Riemann-Schwarz 曲面 [Riemann-Schwarz surface; Римана Шварца поверхность]

伸张在一个有 4 条边的**多边形**（polygon）上的**极小曲面**（minimal surface）．它是 **Plateau 问题**（Plateau problem）的最初的较一般的解之一．它可用 **Christoffel-Schwarz 公式**（Christoffel-Schwarz formula）解析地表达．由 B. Riemann (1872) 和 H. A. Schwarz (1874) 首先研究．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975.

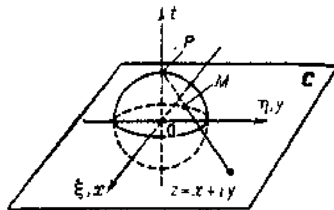
潘养廉 译

Riemann 球面 [Riemann sphere; Римана сфера]

Euclid 空间 $\mathbf{R}^3(\xi,\eta,t)$ 中的一个球面，在**球极平面投影**（stereographic projection）下扩充复平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 被共形且一对一地变换到其上．例如，单位球面

$$S_2 = \{(\xi,\eta,t) \in \mathbf{R}^3 : \xi^2+\eta^2+t^2 = 1\}$$

可取作 Riemann 球面且平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 等同于平面 $t=0$，使得实轴与轴 $\eta=0$，$t=0$ 重合，虚轴与轴 $\xi=0$，$t=0$ 重合（见图）.



在球极平面投影下，每一点 $z=x+iy\neq\infty$ 的对应点 $M(\xi,\eta,t)\neq P(0,0,1)$ 是从球面的北极 $P(0,0,1)$ 引出到 z 的射线与球面 S_2 的交点；北极 $P(0,0,1)$ 对应无穷远点，$z=\infty$．这个关系可解析地用公式表示

$$\xi+i\eta = \frac{2z}{|z|^2+1}, \quad t = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},$$

$$z = \frac{\xi+i\eta}{1-t}. \qquad (*)$$

换言之，对应 $(*)$ 决定一个一维复射影空间 $\mathbf{CP}^1$ 到空间 $\mathbf{R}^3$ 中球面 S_2 形式的可微嵌入．在函数论的许多问题中，扩充复平面被等同于 Riemann 球面．平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 的无穷远点将不再特殊．如果两点 $z,w\in\bar{\mathbf{C}}$ 之间的距离取作它们的象 $M,N\in S_2$ 之间的弦或球面的距离（chordal, spherical distance）$\chi(z,w)$:

$$\chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{|z|^2+1}\sqrt{|w|^2+1}},$$

$$\chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

推广公式 (*)，高维复射影空间 CP^n，$n>1$，可用一个复 n 维球极投影，嵌入空间 $R^{n(n+2)}$（见[2]）.

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1-2, М., 1976.

[2] Фукс, Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1962 (英译本: Fuks, B. A., Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ahlfors, L. V., Complex analysis, McGraw-Hill, 1979 (中译本: L. V. 阿尔福斯, 复分析, 上海科学技术出版社, 1984).

林向岩 译 陆珊年 校

Riemann-Stieltjes 积分 [Riemann-Stieltjes integral; Римана-Стилтьеса интеграл]

见 **Stieltjes 积分** (Stieltjes integral).

Riemann 求和法 [Riemann summation method; Римана метод суммирования]

数项级数的一种求和法. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 可以用 Riemann 方法和于数 S，如果

$$\lim_{h\to 0}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\frac{\sin nh}{nh}\right]^2\right]=S.$$

B. Riemann 在 1854 年首先引进这个方法，并且第一个证明了它的正则性（见[1]）. Riemann 求和法被应用于三角级数的理论中，通常这样叙述：具有有界系数 a_n，b_n 的**三角级数** (trigonometric series)，

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

依 Riemann 方法在点 x_0 可和于数 S，如果函数

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}$$

在 x_0 的 **Riemann 导数** (Riemann derivative) 等于 S.

参考文献

[1] Riemann, B., Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, in Gesammelte math. Abhandlungen, Dover, reprint, 1951, 227-264.

[2] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[3] Zygmund, A., Trigonometric series, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1988.

[4] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】 正则性（见**正则求和法** (regular summation methods)）用 Riemann 第一定理 (Riemann first theorem) 表述；上述条目所述定理称为 Riemann 第二定理 (Riemann second theorem). 函数 $F(x)$ 也称为 Riemann 函数 (Riemann function).

参考文献

[A1] Zeller, K. and Beekman, W., Theorie der limitierungsverfahren, Springer, 1970.

罗嵩龄 译

Riemann 曲面 [Riemann surface; Риманова поверхность]，复变量 z 的解析函数 $w=f(z)$ 的

一曲面 R，使得一般为多值的**完全解析函数** (complete analytic function) $w=f(z)$ 可看作 R 上点 p 的单值解析函数 $w=F(p)$.

Riemann 曲面概念是与研究由代数方程

$$a_0(z)w^m+a_1(z)w^{m-1}+\cdots+a_m(z)=0 \quad (1)$$

定义的代数函数 $w=f(z)$ 相联系而出现的，这里 $a_j(z)$ $(j=0,\cdots,m)$ 是常系数多项式，$a_0(z)\neq 0$，$a_m(z)\neq 0$. 在 V. Puiseux 的论著 (1850-1851) 中可发现表征这些函数 $w=f(z)$ 的多值性的清晰理解，即对于变量 z 的每个值，有变量 w 的 m 个值与之对应. B. Riemann 首次表明 (1851-1857，见[1])，如何能对每个代数函数构造一个曲面，使所给函数可看作此曲面上点的单值有理函数. 这样得到的 Riemann 曲面可等同于由方程 (1) 定义的**代数曲线** (algebraic curve). Riemann 曲面理论进一步发展的时期是同 F. Klein，H. Poincaré，P. Koebe 以及其他学者的姓名联结在一起的，一般地说，整个这一时代的特征是复变函数论的观念和方法与代数及代数几何的观念和方法这两者之间的互相渗透（有时深些，有时浅些）. 这个发展时期的里程碑是 H. Weyl 的著作 ([18]) 的第一版，书中表述了抽象 Riemann 曲面的一般概念.

定义 A：一个连通拓扑 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space) R 称为抽象 Riemann 曲面 (abstract Riemann surface) 或简称为 Riemann 曲面 (Riemann surface)，如果它具有开集构成的**覆盖** $\{U\}$，每个集合 U 对应一个**同胚** (homeomorphism) $\alpha: U\to D$，这里 $D=\{z\in C: |z|<1\}$ 是复 z 平面 C 中的单位圆盘；加之，如果点 p 属于 U 和 U'，则一一对应 $z'=\alpha'\alpha^{-1}(z)$ 应是点 $\alpha(p)\in D$ 的一个邻域内的第一类共形映射 (conformal mapping)，即 $z'=\alpha'\alpha^{-1}(z)$ 是点 $\alpha(p)\in D$ 的一个邻域内的单叶解析函数. 换言之，抽象 Riemann 曲面是一个 2 维（复 1 维）复解析流形.

带边界的 Riemann 曲面 (Riemann surface with boundary) $\bar{R}$ 的定义与定义 A 不同之处在于，连同同胚 $\alpha: U\to D$ 还有同胚 $\alpha: U\to D_0^+$，这里 $D_0^+=$

$\{z\in\mathbf{C}: |z|<1, \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$ 是 C 中的上半单位圆盘；此外通常还假定 $\bar{R}$ 不再是定义 A 意义下的 Riemann 曲面．带边界 Riemann 曲面 $\bar{R}$ 的点，如果具有同胚于 D 的邻域，就称为内点（interior point），而其他的点即映射到区间

$$\{z=x+iy\in\mathbf{C}: -1<x<1, y=0\}$$

中的点，构成 $\bar{R}$ 的边界（boundary）$\partial\bar{R}$．$\bar{R}$ 的内点的集合即 $\bar{R}$ 的内部（interior）是定义 A 意义下的 Riemann 曲面．这样，对于带边界 Riemann 曲面，通常考虑其边界是非空集．

一个（带边界）Riemann 曲面是具有可数基的可三角剖分和可定向的流形，从而是可分的和可度量化的．（不带边界的）紧 Riemann 曲面称为闭 Riemann 曲面（closed Riemann surface）；较之广泛的是有限 Riemann 曲面（finite Riemann surface）类，它包括闭 Riemann 曲面和具有由有限个连通分支构成的边界的紧 Riemann 曲面．带或不带边界的非紧 Riemann 曲面称为开 Riemann 曲面（open Riemann surface）．在某些情形下，在定义 A 中不仅允许第一类共形映射而且允许第二类共形映射更加方便．通过这种途径得到的带边界 Riemann 曲面 $\bar{R}$（或不带边界 Riemann 曲面）一般不再是可定向的，然而在它为有限的假定下，它可以共形嵌入到一个可定向闭 Riemann 曲面即 $\bar{R}$ 的双层（见 **Riemann 曲面的双层**（double of a Riemann surface））中．

设解析函数 $w=f(z)$ 由它的一个正则元 $(a, P)=(a, P(z-a))$ 即由点 $a\in\mathbf{C}$ 和以 a 为心、收敛半径为 $r(a)$ $(0<r(a)\leqslant\infty)$ 的幂级数

$$P(z-a)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(z-a)^\nu$$

构成的偶所给定．作元素 (a, P) 沿扩充复平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 中所有可能路径的**解析延拓**（analytic continuation），可得到同一类型的所有正则元 (b, Q)；其全体构成一个完全解析函数，也记为 $w=f(z)$．此外，在解析延拓中出现性质更一般的元素：

$$(b, S)=(b, S((z-b)^{1/n})),$$

即由点 $b\in\bar{\mathbf{C}}$ 和广义幂级数（Puiseux 级数（Puiseux series））

$$S((z-b)^{1/n})=\sum_{\nu=m}^{\infty}b_\nu(z-b)^{\nu/n}$$

或（在 $b=\infty$ 为无穷远点的情形）

$$S(z^{-1/n})=\sum_{\nu=m}^{\infty}b_\nu z^{-\nu/n}$$

（其中 m 是整数，n 是正整数）所组成的偶．这些级数分别当 $|z-b|<r(b)$ 或 $|z|>r(\infty)>0$ 时收敛．这些广义元 (b, S) 或更精确地，它们的等价类，其全体形成对应于给定解析函数 $w=f(z)$ 的**解析形**（analytic image）A_f．在形成解析形的元素 (b, S) 的等价类中，能按照 $n=1$ 或 $n>1$，区分为正则的或分歧的．在解析形 A_f 上引入适当的拓扑可使它成为解析函数 $w=f(z)$ 的 Riemann 曲面 R_f．例如，可以如下地引入：对 $b\neq\infty$，定义元素 (b, S) 的邻域为下列元素构成的集合：(b, S) 自身；A_f 的所有满足下述条件的正则元 (a, P)：$|b-a|<\rho^n$ $(\rho<r(b))$，且级数 $P(z-a)$ 在级数 $S((z-b)^{1/n})$ 的 n 个确定支的公共定义域内收敛到这些确定支之一，即

$$P(z-a)\equiv S(\varepsilon(z-b)^{1/n}),$$

此处 ε 是 1 的 n 次根之一 $(\varepsilon^n=1)$．元素 (∞, S) 的邻域定义为由下列元素构成的集合：(∞, S) 自身；A_f 的所有满足下述条件的正则元 (a, P)：$|a|>\rho^{-1}$，$\rho<r(\infty)$，且级数 $P(z-a)$ 收敛到级数 $S(z^{-1/n})$ 的 n 个确定支之一．空间 R_f 满足定义 A 的全部条件．

这样，每个解析函数 $w=f(z)$ 对应一个 Riemann 曲面 R_f，在其上此函数是点 $p=(b, S)\in R_f$ 的单值解析函数 $w=F(p)$．这意味着在每一点 $p_0=(b, S)$ 的一个邻域内，存在**局部单值化参数**（local uniformizing parameter）$t=(z-b)^{1/n}$，它可使 w 表示为单值解析函数 $w=P(t)=F(p)$．换言之，解析函数的 Riemann 曲面 R_f 是用以使一般而言为多值的关系 $w=f(z)$ 实现整体单值化（uniformization）的一种几何构造．在每个点 $p_0=(b, S)\in R_f$ 的一个邻域内，此关系由两个单值解析函数 $z=b+t^n$ 和 $w=S(t)$ 实现单值化．另一方面，使每个元素 $p_0=(b, S)\in R_f$ 对应到其中心 b 的投影 $\pi: (b, S)\mapsto b$ 表明，一个解析函数的 Riemann 曲面 R_f 是扩充复平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 或等价地 **Riemann 球面**（Riemann sphere）上的一个（分歧）**覆叠曲面**（covering surface）．$n>1$ 的分歧元 (b, S) 的投影是此覆叠的分支点．

同时，每个预先给定的 Riemann 曲面 R 对应无穷多个解析函数 $w=f(z)$，它们恰以 R 作为其 Riemann 曲面：$R_f=R$．对于闭 Riemann 曲面情形，这一论断已为 Riemann 于 1851 年表述并证明．相应的证明的中心是在 R 上构造具有给定奇点的调和函数．Riemann 给出的证明基于不加鉴别地应用所谓 **Dirichlet 原理**（Dirichlet principle）；Koebe 最早（1909）给出一个严格的证明；嗣后出现了这个基本论断的一些比较简单的证明，其中有基于恰当应用 Dirichlet 原理的证明（例如见[3]，[4]，[17]，[18]）．

对任何可定向拓扑曲面 S，总能构造一个同胚于 S 的 Riemann 曲面，即与 S 具有同一拓扑类型的 Riemann 曲面 R．闭 Riemann 曲面由一个数——其亏

格 $g(0 \leqslant g < +\infty)$（见**曲面的亏格**（genus of a surface））拓扑地完全确定．这样的 Riemann 曲面的拓扑型对 $g=0$ 是球面，对 $g=1$ 是环面，对 $g>1$ 是广义环面或带有 g 个环柄的球面．对于 $g=0$ 的 Riemann 曲面 R，通过沿某条弧进行截割，可得到一个二边形，它以符号 $s=aa^{-1}$ 为其拓扑模型或正规形式（normal form），这表明边 a 与 a^{-1} 上的点是等同的；当 $g \geqslant 1$ 时，必须作 $2g$ 条**典型截线**（canonical sections）$a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g$，由此得到闭 Riemann 曲面 R 的标准形式——具有 $4g$ 条成对等同的边的多边形；符号 $s=a_1\cdots$ 应指明这些边出现的顺序．例如，图 1 给出对于 $g=0$ 的球面与 $g=1$ 的环面的标准形式并给出其符号．

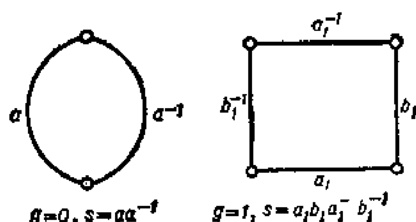


图 1

从解析观点看，一个闭 Riemann 曲面 R 为下述事实所刻画：它是由一个 m 次代数方程（1）定义的代数函数 $w=f(z)$ 的 Riemann 曲面．这个 Riemann 曲面可想像为展布在 Riemann 球面上的 m 个叶，它们以某种方式在分支点处并沿某些连接这些分支点的线互相联结起来（联结方式由方程（1）的特殊形式决定）．在此情形下，Riemann 曲面的亏格 g 可通过下述 **Riemann-Hurwitz 公式**（Riemann-Hurwitz formula）表示为叶数 m 和分支点阶数 $k_1, \cdots, k_s$ 的函数：

$$g=\sum_{\nu=1}^{s} \frac{k_\nu-1}{2}-m+1 .$$

有限 Riemann 曲面 $\bar{R}$ 完全由其亏格 $g(0 \leqslant g < \infty)$ 和边界的连通分支数 l 拓扑地刻画；它们的拓扑类型是具有 g 个环柄和 l 个洞的球面．在有限 Riemann 曲面的标准形式中，边数不一定是偶数．某些对应于保持独立状态的边界分支的边并不等同．亏格概念也能推广到开 Riemann 曲面 R，例如通过带边界紧 Riemann 曲面 $\bar{R}_\nu$ 构成的序列 $\{\bar{R}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ 逼近 R，这里 $\bar{R}_\nu$ 包含于 R 中，且 $\bar{R}_\nu$ 包含于 $\bar{R}_{\nu+1}$ 中，并有 $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bar{R}_\nu=R$．此时令 R 的亏格 $g=\lim_{\nu\to\infty} g_\nu$，其中 g_ν 是 $\bar{R}_\nu$ 的亏格．这个极限存在且不依赖于逼近序列 $\{\bar{R}_\nu\}$ 的选取，$0 \leqslant g \leqslant +\infty$．然而，亏格并不完全确定开 Riemann 曲面的拓扑类型；开 Riemann 曲面的拓扑类型可以更加多种多样．图 2 中分别给出了 $g=0$ 与 $g=2$ 的两种模型．

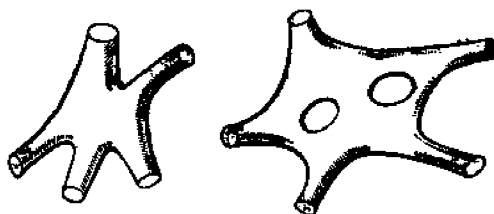


图 2a　　　图 2b

Riemann 曲面 R 的一个重要的拓扑特征是其连通性的阶：R 称为单连通的（simply connected），如果 R 中任一简单闭曲线可不越出 R 地连续变形为一个点，换言之，如果 R 的**基本群**（fundamental group）是平凡的．非单连通的 Riemann 曲面 R 称为多连通的（multiply connected）．单叶状 Riemann 曲面（schlichtartig Riemann surface）构成重要的一类 Riemann 曲面；它们是可以被其上任一简单闭曲线分割为不相交部分的（带边界或不带边界）Riemann 曲面．例如，图 2a 显示了一个多连通单叶状 Riemann 曲面的拓扑模型．单叶状 Riemann 曲面的亏格必为零．单叶状 Riemann 曲面 R 称为 n 连通的（n-connected），如果使 R 变为单连通 Riemann 曲面所必须的截线的最小数等于 $n-1$ $(n \geqslant 1)$（见图 2b）．

Riemann 曲面 R 的拓扑性质不能完全刻画 R 的解析性质，即 R 的拓扑性质不能完全刻画 R 上不同函数类的性态．特别地，令 $f: R_1 \to R_2$ 是 Riemann 曲面 R_1 上取值于另一 Riemann 曲面 R_2 中的函数．函数 f 称为在 R_1 上解析的（analytic），如果对每个点 $p_0 \in R_1$，能求得 R_1 上点 p_0 的一个邻域内的局部单值化参数 $t=\varphi(p)$ 和 R_2 上点 $q_0=f(p_0)$ 的一个邻域内的局部单值化参数 $\tau=\psi(q)$，使得复合函数

$$\tau=\psi\{f[\varphi^{-1}(t)]\}=g(t)$$

在 $t_0=\varphi(p_0)$ 的一个邻域内是复变量 t 的解析函数．两个 Riemann 曲面 R_1 和 R_2 称为共形等价的（conformally equivalent）或属于同一共形类（见 **Riemann 曲面的共形类**（Riemann surfaces, conformal classes of）），如果存在解析函数 $f: R_1 \to R_2$，它给出从 R_1 到 R_2 上的一一映射．从 Riemann 曲面上解析函数性态的观点看，共形等价的 Riemann 曲面被认为是同一 Riemann 曲面；但拓扑等价的 Riemann 曲面并不总是共形等价的．

使用 Riemann 曲面术语，Riemann 映射定理（Riemann mapping theorem）可表述如下：每个单连通 Riemann 曲面共形等价于下列 3 个区域之一：1）扩充复平面 $\bar{\mathbf{C}}=\mathbf{C} \cup\{\infty\}$，即 Riemann 球面（椭圆情形（elliptic case））；2）有限复平面 $\mathbf{C}$，即具有点孔的 Riemann 球面（抛物情形（parabolic case））；3）$\mathbf{C}$ 中的单位圆盘 $D=\{z \in \mathbf{C}: |z|<1\}$，即具有正长度

截线的 Riemann 球面（双曲情形（hyperbolic case））．一个重要的结果是：每个单叶状 Riemann 曲面共形等价于扩充复平面中的某个典型域．这样的典型域可取为具有有限或无穷多条平行于实轴的截线的整个扩充平面；而某些这种截线可退化为点．如上所述，在单连通 Riemann 曲面情形，典型域或者没有截线（椭圆型（elliptic type）），或者截线退化为一个点（抛物型（parabolic type）），或者截线具有正长度（双曲型（hyperbolic type））．这三类单连通 Riemann 曲面是共形相异的，但后两者却是拓扑等价的．迄今（1991）尚未完全解决的类型问题（problem of types）就在于求出可判断单连通 Riemann 曲面为双曲型或抛物型的附加条件（见 [6]，[7]，[10]，[11] 及 **Riemann 曲面的分类**（Riemann surfaces，classification of））．

在任意 Riemann 曲面 R 的情形中，R 的**万有覆叠**（universal covering）曲面 $\hat{R}$ 总是单连通曲面，因而属于上述三种类型之一．至于 Riemann 曲面 R 本身的类型，则按照其万有覆叠 $\hat{R}$ 所属的类型而看作椭圆型（elliptic type），抛物型（parabolic type）或双曲型（hyperbolic type）的．这种分类法的正确性为下述考察所证实．设 D 是扩充复平面、有限复平面或开单位圆盘这三个区域之一，Λ 是 D 到其自身上且在 D 内没有不动点的 Möbius 变换（自同构）的某个群．万有覆叠 $\hat{R}$ 到 D 上的共形映射 $w=W(q)$ 引出覆叠 $\hat{R}$ 的变换群 $\hat{\Lambda}$（它同构于基本群 $\pi_1(R)$）到 D 的自同构的某个群 Λ 上的变换．还可进一步把 $w=W(q)$ 看作商空间 $\hat{R}/\hat{\Lambda}$ 到商空间 D/Λ 上的共形映射，从而 $\hat{R}/\hat{\Lambda}$ 可等同于 R．这样，$w=W(q)$ 可看作 Riemann 曲面 R 到具有同构于基本群 $\pi_1(R)$ 的某个自同构群 Λ 的商空间 D/Λ 上的共形映射．

由于椭圆型 Riemann 曲面 R 必是单连通的，因而群 Λ 是平凡的，于是这样的 Riemann 曲面必是一个有理函数的反函数的 Riemann 曲面．抛物型单连通 Riemann 曲面必是一个在有限平面内亚纯的函数的反函数的 Riemann 曲面．亏格 $g=0$，$g=1$ 或 $g>1$ 的紧 Riemann 曲面分别是椭圆型、抛物型或双曲型的 Riemann 曲面．

与 Riemann 曲面的共形等价性相联系，出现了 Riemann 曲面 R 的共形自同构群 Σ 的结构问题．除某些简单情况外，群 Σ 是离散的，对于亏格 $g>1$ 的紧 Riemann 曲面它是有限的（Schwarz 定理（Schwarz theorem））．只有在 7 种例外情形群 Σ 才是连续的，这些情形（给出相应共形类的代表）是：椭圆型情形的球面；抛物型情形的具有一个或两个点孔的球面和环面；双曲型情形的开圆盘、具有点孔的开圆盘和圆环．

以不同式样表述的 Riemann 曲面的（参）模问题（moduli problem for Riemann surfaces）（见 **Riemann 曲面的（参）模**（moduli of a Riemann surface）；**（参）模问题**（moduli problem））也有很大的重要性．这个问题是要给出不同类型的共形不等价 Riemann 曲面的多样性的可能描述．例如，易于建立下述事实．共形不等价双连通单叶状 Riemann 曲面（圆环）的类型的集合依赖于一个实参数（（参）模（modulus））k $(0<k<1)$；即两个圆环 $0<r_\nu<|z|<R_\nu$ $(\nu=1,2)$ 共形等价，当且仅当其半径之比相等：$k=r_1/R_1=r_2/R_2$．共形不等价 $n\,(n>2)$ 连通单叶状 Riemann 曲面的类型的集合依赖于 $3n-6$ 个实参数．亏格 $g\geqslant 1$ 的闭 Riemann 曲面共形不等价类型的集合，当 $g=1$ 时依赖于 2 个实参数，当 $g>1$ 时依赖于 $6g-6$ 个实参数（见 **Riemann 曲面的共形类**（Riemann surfaces，conformal classes of），亦见 [3]，[12]，[13]，[15]，[16]；涉及 Riemann 曲面上别的函数类的性态，见 **Riemann 曲面的分类**（Riemann surfaces，classification of））．

Riemann 曲面理论的一个重要方面是它同单值化概念的联系．一般地说，对于多值解析函数

$$w=f(z), \tag{2}$$

其 Riemann 曲面 R_f 提供了单值化的一种几何手段：多值关系（2）代之以两个单值关系

$$w=F(p),\ z=g(p),\ p\in R_f, \tag{3}$$

这两个关系在函数（2）的整个定义域内给出 z 和 w 作为完全解析函数的单值表示式．另一方面，K．Weierstrass 构造（2）的完全解析函数概念的方法基于使用局部单值化参数 t，它可在某个点 (z_0, w_0) $(w_0=f(z_0))$ 的一个邻域内局部地把变量 z 和 w 解析地表示为单值解析函数 $z=z(t)$ 和 $w=w(t)$．就其最简单的经典形式而言，单值化问题是这两种想法的综合．必须在（2）的整个定义域内用两个解析表示式 $z=z(t)$，$w=w(t)$ 来代替关系（2），这里 t 是取值于平面上某个区域内的单值化复变量．

上述关于单值化可能性的论断由 Koebe 以及几乎同时独立地由 Poincaré 于 1907 年建立．如果函数（2）的 Riemann 曲面 R_f 是单连通的或单叶状的，则单值化问题归结为构造 R_f 到平面域 D 上的一个共形映射 $\varphi: R_f\to D$．于是表示式（3）就提供了待求的单值化：

$$z=g[\varphi^{-1}(t)],\ w=F[\varphi^{-1}(t)],\ t\in D.$$

映到平面域上的共形映射 f 仅对单叶状 Riemann 曲面 R_f 存在（一般单值化定理（general uniformization theorem））．

对于任意解析关系（2）的一般情形，Riemann 曲面 R_f 不是单叶状的，但其万有覆叠曲面 $\hat{R}_f$ 是单连通的，因而存在共形映射

$$\psi : \hat{R}_f \to D,$$

其中 D 是上面提及的区域 $\mathbf{C}$，$\overline{\mathbf{C}}$ 或开单位圆盘之一．函数 $w = f(z)$ 在 Riemann 曲面 $\hat{R}_f$ 上亚纯，因而也在 R_f 上亚纯；此外，它仅依赖于点 $q \in \hat{R}_f$ 的投影 $p = p(q)$，$p \in R_f$．这就得到形如

$$z = g[p(q)],\ w = F[p(q)]$$

的几何单值化，由此得到解析单值化

$$z = g\{p[\psi^{-1}(t)]\} = \Psi(t),$$

$$w = F\{p[\psi^{-1}(t)]\} = \Phi(t),\ t \in D,$$

此处 z 和 w 表示为变量 $t \in D$ 的亚纯函数 $\Psi(t)$ 和 $\Phi(t)$．函数 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 是 D 内关于自同构群 Λ 的**自守函数**（automorphic function），而 Λ 同构于单值化函数的 Riemann 曲面 R_f 的基本群 $\pi_1(R_f)$（见[3]，[7]，[15]，[16]）．

参考文献

[1] Riemann, B., Gesammelte mathematische Werke, Dover, reprint, 1953.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1－2, М., 1967－1968（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957）．

[3] Hurwitz, A., Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 1964.

[4] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, т. 1－2, М., 1962（译自罗马尼亚文）．

[5] Stoïlow, S., Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Gauthier-Villars, 1938.

[6] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Chelsea, reprint, 1981.

[7] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1967（中译本：R. 尼凡林那，单值化，科学出版社，1960）．

[8] Schiffer, M., Spencer, D. C., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1954.

[9] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраических функций, М.-Л., 1948（中译本：Н. Г. 捷波塔廖夫，代数函数论，高等教育出版社，1956）．

[10] Волковыский, Л. И., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР.》, 34 (1950), 3－171.

[11] Волковыский, Л. И., 《Успехи Матем. наук》, 11 (1956), 5, 77－84.

[12] Крушкаль, С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975（中译本：С. Л. 克鲁什卡，拟共形映射与 Riemann 曲面，科学出版社，1989）．

[13] Крушкаль, С. Л., Апанасов, Б. Н., Гусевский, Н. А., Клейновы группы в примерах и задачах, Новосиб., 1978（英译本：Krushkal', S. L., Apanasov, B. N., Gusevskiĭ, N. A., Kleinian groups and uniformization in examples and problems, Amer. Math. Soc., 1986）．

[14] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 16, М., 1978, 191－245（英译本：Vinberg, E. B., Shvartsman, O. V., Riemann surfaces, *J. Soviet Math.*, **14** (1980), 1, 985－1020）．

[15A] Bers, L., Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem, 载于 R. Nevanlinna, et al. (ed.), Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 89－119.

[15B] Ahlfors, L., The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, 载于 R. Nevanlinna, et al. (ed.), Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 1960, 45－66.

[15C] Bers, L., Spaces of Riemann surfaces, 载于 J. Todd, (ed.), Proc. Internat. Congress Mathematicians Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 1958, 349－361.

[15D] Bers, L., Simultaneous uniformization, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 94－97.

[15E] Bers, L., Holomorphic differentials as functions of moduli, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 206－210.

[15F] Ahlfors, L., On quasiconformal mappings, *J. d'Anal. Math.*, 3 (1954), 1－58; 207－208;

[16A] Bers, L., Uniformization, moduli, and Kleinian groups, *Bull. London Math. Soc.*, **4** (1972), 257－300.

[16B] Bers, L., The moduli of Kleinian groups, *Russian Math. Surveys*, **29** (1974), 2, 88－102（《Успехи матем. наук》, **29** (1974), 2, 86－102）．

[17] Klein, F., Riemannschen Flächen, Springer, reprint, 1986.

[18] Weyl, H., The concept of a Riemann surface, Addison-Wesley, 1955（译自德文）．

[19] Ahlfors, L. V., Sario, L., Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1974.

[20] Pfluger, A., Theorie der Riemannschen Flächen, Springer, 1957.

[21] Sario, L., Nakai, M., Classification theory of Riemann surfaces, Springer, 1970.

[22] Heins, M., Hardy classes on Riemann surfaces, Springer, 1969.

[23] Gunning, R. C., Lectures on Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1966.

[24] Gunning, R. C., Lectures on Riemann surfaces: Jacobi varieties, Princeton Univ. Press, 1972.

[25] Forster, O., Lectures on Riemann surfaces, Springer, 1981 (译自德文).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于推广到"C^n"上的 Riemann 曲面",见,例如[A6]和 **Riemann 区域**(Riemannian domain).

参考文献

[A1] Griffiths, P., Harris, J., Principles of algebraic geometry, Wiley (Interscience), 1978.

[A2] Griffiths, P., Introduction to algebraic curves, Amer. Math. Soc., 1989.

[A3] Farkas, H. M., Kra, I., Riemann surfaces, Springer, 1980.

[A4] Behnke, H., Sommer, F., Theorie der analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Springer, 1976.

[A5] Cohn, H., Conformal mapping on Riemann surfaces, Dover, reprint, 1980.

[A6] Behnke, H., Thullen, P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Springer, 1970.

[A7] Osgood, W., Lehrbuch der Funktionentheorie, 1–2, Chelsea, reprint, 1965.

【译注】

参考文献

[B1] 伍鸿熙, 吕以辇, 陈志华, 紧黎曼曲面引论, 科学出版社, 1981.

[B2] 吕以辇, 张学莲, 黎曼曲面, 科学出版社, 1991.

沈永欢 译

Riemann 曲面的分类 [Riemann surfaces, classification of; Римановых поверхностей классификация]

联系 Riemann 曲面上不同函数类的性态来研究 Riemann 曲面.

Riemann 曲面(Riemann surface) R 上的复值函数 $f: R \to \overline{\mathbf{C}}$ 称为在 R 上是解析的(analytic),如果对每个点 $p_0 \in R$,存在一个邻域 U 和把 U 同胚映射到单位圆盘 $D=\{z \in \mathbf{C}: |z|<1\}$ 上的一个**局部单值化参数**(local uniformizing parameter) $z=\varphi(p)$, $\varphi(p_0)=0$,使得复合函数 $F(z)=f[\varphi^{-1}(z)]$ 是 D 上的单值**解析函数**(analytic function).类似地可在 Riemann 曲面上定义实值和复值调和函数,次调和函数,等等.设 W 是 Riemann 曲面 R 上某个含有常数的共形不变函数类,以 $\mathcal{O}_W$ 记这样的 Riemann 曲面组成的类:在这些曲面上类 W 只含有常数;最简单地陈述的 Riemann 曲面的分类问题在于确定使得给定的 Riemann 曲面 R 属于或不属于类 $\mathcal{O}_W$ 的条件.Riemann 曲面分类理论产生于 20 世纪,它来自关于单连通 Riemann 曲面共形映射的经典 Riemann 定理,类型问题,Riemann 曲面上 **Green 函数**(Green function)存在性问题以及 Riemann 曲面的理想边界概念.

Riemann 映射定理(Riemann mapping theorem)断言,每个单连通 Riemann 曲面 R 恰能共形地(从而同胚地)映射到下列三个区域 D 之一:$D=\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$——扩充复平面($R$ 为椭圆型 Riemann 曲面(Riemann surface of elliptic type)情形);$D=\mathbf{C}$——有限复平面(R 为抛物型 Riemann 曲面(Riemann surface of parabolic type)情形);$D=\{z\in\mathbf{C}: |z|<1\}$——单位圆盘($R$ 为双曲型 Riemann 曲面(Riemann surface of hyperbolic type)情形).由于从拓扑观点看椭圆型情形已异于其他两种情形,所以仍然剩下的困难问题是鉴别一个给定的 Riemann 曲面 R 是否为双曲型或抛物型.这就是经典的类型问题(problem of types),迄今(1991)尚未解决.已经知道,亏格为 g 的闭 Riemann 曲面,当 $g=0$ 时是椭圆型的,当 $g=1$ 时是抛物型的,当 $g>1$ 时是双曲型的;这样,类型问题的重要性主要是对开 Riemann 曲面的.至于任意(不一定单连通)Riemann 曲面 R 的情形,其类型与其万有覆叠曲面(见**万有覆叠**(universal covering)) $\hat{R}$ 的类型相同,而 $\hat{R}$ 总是单连通的.

对于单连通有限 Riemann 曲面 R,寻求 R 到单位圆盘 D 上的共形映射问题等价于寻求对于 R 的 Green 函数 $G(p, p_0)$ 问题,即求出在极点 $p_0\in R$ ($z=\varphi(p)$ 是 p_0 的一个邻域内的参数,$z_0=\varphi(p_0)$) 处具有形如 $\ln(1/|z-z_0|)$ 的对数奇点并在边界 ∂R 的所有点处等于零的正调和函数.对双曲型多连通有限 Riemann 曲面也能构造出 Green 函数.对任意开 Riemann 曲面 R 的情形,可构造曲面 R 的逼近序列 $\{\overline{R}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$,每个 $\overline{R}_\nu$ 是带边界有限 Riemann 曲面并具有 Green 函数

$$G_\nu(p, p_0)=\ln\frac{1}{|z-z_0|}+\gamma_\nu+O(|z-z_0|),$$
$$z \to z_0$$

(或从某个下标 ν 起均有 $G_\nu(p, p_0)\equiv+\infty$),且有 $\overline{R}_\nu\subset R_{\nu+1}$, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\overline{R}_\nu=R$.常数 γ_ν ($-\infty<\gamma_\nu\leqslant+\infty$)称为 Riemann 曲面 $\overline{R}_\nu$ 的 **Robin 常数**(Robin constant);$c_\nu=e^{-\gamma_\nu}$ 是边界 $\partial\overline{R}_\nu$(关于固定极点 $p_0\in R$)的**容量**(capacity).当 ν 趋于 ∞ 时,$G_\nu(p, p_0)$ 和 γ_ν 的值只会递增.开 Riemann 曲面 R 的 Green 函数定义为递增序列 $\{G_\nu(p, p_0)\}$ 的极限,如果这个极限存在;在相反的情形下,如果

$$\lim_{\nu\to\infty} G_\nu(p, p_0)\equiv+\infty,$$

则称 Riemann 曲面 R 没有 Green 函数.Green 函数存在与否不依赖于极点 $p_0\in R$ 的选择.不存在 Green 函数的 Riemann 曲面构成的类记为 $\mathcal{O}_G$.换言之,类 $\mathcal{O}_G$ 由

$$\lim_{\nu\to\infty}\gamma_\nu=+\infty \text{ 或 } \lim_{\nu\to\infty}c_\nu=0$$

所刻画；这些关系同样不依赖于极点的选取.

设 R 是开 Riemann 曲面，$\{\Delta_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ 是由 R 内的闭域 Δ_ν 构成的所谓定义序列（defining sequence）即满足下列条件的序列：1）Δ_ν 的边界是 R 内的一条简单闭曲线；2）$\Delta_{\nu+1}\subset\Delta_\nu$, $\nu=1,2,\cdots$；3）$\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\Delta_\nu=\varphi$，即 Δ_ν 在 R 内非紧. 两个定义序列 $\{\Delta_\nu\}$ 和 $\{\Delta'_\nu\}$ 称为等价的，如果对每个 ν，存在 n 和 m，使得 $\Delta'_n\subset\Delta_\nu$，$\Delta_m\subset\Delta'_\nu$. 定义序列的等价类称为 R 的边界元（boundary element），而所有边界元的集合看作一个拓扑空间，形成 R 的理想边界（ideal boundary）Γ. 例如，单位圆盘 D 的理想边界由一个边界元构成. 注意：开 Riemann 曲面 R 的 Green 函数，不像双曲有限 Riemann 曲面情形，不一定在理想边界 Γ 的所有元素处都等于零. 类 $\mathcal{O}_G$ 也可刻画为具有容量为零的理想边界的 Riemann 曲面的类，或简短地刻画为具有零边界的 Riemann 曲面的类. 如果 $R\notin\mathcal{O}_G$，则 $\lim_{\nu\to\infty}c_\nu=c>0$ 称为理想边界的容量. Riemann 曲面 R 是否存在 Green 函数以及 R 上别的函数类的规模，首先取决于这一点以及理想边界涉及所提函数类自身的其他更精致的特征.

Riemann 曲面 R 上的主函数类（principal function class）W 如下：

AB——R 上有界单值解析函数类；

AD——R上具有有限 **Dirichlet 积分**（Dirichlet integral）

$$D_R(f)=\iint_R\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dx\,dy\quad(z=x+iy)$$

的单值解析函数 $w=f(z)$ 的类；

HP, HB 和 HD——分别为正的、有界的和具有有限 Dirichlet 积分的 R 上单值调和函数的类. 这些类还可以结合起来；例如，ABD 是 D 上具有有限 Dirichlet 积分的有界单值解析函数的类. 对于 R 的相应的类 $\mathcal{O}_W$，已建立下述严格包含关系和相等关系：

$$\mathcal{O}_G\subset\mathcal{O}_{HP}\subset\mathcal{O}_{HB}\subset\mathcal{O}_{AB}\subset\mathcal{O}_{ABD}=\mathcal{O}_{AD},$$

$$\mathcal{O}_{HB}\subset\mathcal{O}_{HD}\subset\mathcal{O}_{AD},\ \mathcal{O}_{HBD}=\mathcal{O}_{HD}.$$

对于平面中的区域 R，这些关系可以简化：

$$\mathcal{O}_G=\mathcal{O}_{HP}=\mathcal{O}_{HB}=\mathcal{O}_{HD},$$

$$\mathcal{O}_{AB}\subset\mathcal{O}_{ABD}=\mathcal{O}_{AD}.$$

R 上单值解析函数 $w=f(z)$ 的 **Hardy 类**（Hardy class）AH_p（$0<p\leqslant+\infty$）也具有很大的重要性. 对于 $0<p<+\infty$，称函数 $f\in AH_p$，如果次调和函数 $|f|^p$ 在整个 Riemann 曲面 R 上具有一个调和优函数；又 $AH_\infty=AB$（见**解析函数的边界性质**（boundary properties of analytic functions））.

抛物型 Riemann 曲面属于类 $\mathcal{O}_G$，因此刻画类 $\mathcal{O}_G$ 的 Riemann 曲面这一问题有时称为广义类型问题（generalized problem of types）. 已建立以不同术语描述的判断一个 Riemann 曲面属于上述各类的条件的许多结果. 这方面的深入研究在于求出给定类的 Riemann 曲面的内蕴性质. 特别是，已证实具有零边界的 Riemann 曲面在许多方面类似于闭 Riemann 曲面. 在这两种曲面上能建立类似于 **Abel 微分**（Abelian differential）的概念以及相应的积分.

Riemann 曲面 R 的理想边界的更多精致性质也可以通过 R 的不同紧化来研究. 例如，设 $N(R)$ 是 Riemann 曲面 R 上有界、连续且可调和化的函数 u 组成的 Wiener 代数（Wiener algebra）；这里可调和化意味着对任一正则域 $G\subset R$，存在在边界 ∂G 上取边值 u 的 Dirichlet 问题按 Wiener-Perron 意义的广义解（见 **Perron 法**（Perron method））. R 的 Wiener 紧化（Wiener compactification）是满足下述条件的紧 Hausdorff 空间 R^*：R 是 R^* 的开稠密子空间，每个函数 $u\in N(R)$ 可连续延拓到 R^* 上且 $N(R)$ 分离 R^* 的点. 每个 Riemann 曲面 R 存在 Wiener 紧化. 集合 $\Gamma(R)=R^*\setminus R$ 称为 R 的 Wiener 理想边界（Wiener ideal boundary）；R^* 中满足下述条件的点组成的子集 $\Delta(R)\subset\Gamma(R)$ 称为 R 的 Wiener 调和边界（Wiener harmonic boundary）：在这些点处所有来自 $N(R)$ 的位势都等于零. 使用这些术语，例如就有 $R\in\mathcal{O}_G$ 等价于 $\Delta(R)=\phi$；由此也可得到严格包含关系 $\mathcal{O}_{HP}\subset\mathcal{O}_{HB}$.

Riemann 曲面上的**可去集**（removable set）问题也与 Riemann 曲面分类问题有关. 例如，Riemann 曲面 R 上的一个紧统 K 称为 AB 可去的（AB-removable），如果对 R 上某个邻域 $U\supset K$，$U\setminus K$ 上所有 AB 函数都能解析延拓到整个邻域 U 上.

许多学者还关注与研究上述各种函数类有关的任意维数 $N\geqslant2$ 的 Riemann 流形的分类问题.

关于参考文献，见 **Riemann 曲面**（Riemann surface）.

Е. Д. Солом енцев 撰

【补注】 除 **Riemann 曲面**（Riemann surface）和 **Riemann 曲面的共形类**（Riemann surfaces, conformal classes of）两条所列参考文献外，亦见 [A1]，[A2].

参考文献

[A1] Tsuji, M.（辻正次），Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

[A2] Constantinescu, C., Cornea, A., Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963.

沈永欢 译

Riemann 曲面的共形类 [Riemann surfaces, conformal classes of；Римановых поверхностей конформные классы]

由共形等价 **Riemann 曲面**（Riemann surface）组

成的类. 闭 Riemann 曲面有一简单的拓扑不变量——其亏格 g; 此外, 亏格相同的任何两个曲面是同胚的. 在最简单的情形下, 两个 Riemann 曲面的拓扑等价性保证它们是同一 Riemann 曲面共形类的元素即它们的共形等价性, 换言之, 保证它们的共形结构相同. 例如, 对于亏格为 0 的曲面即同胚的球面, 情形就是如此. 一般地说, 情形却非如此. B. Riemann 早已注意到, 亏格 $g>1$ 的 Riemann 曲面的共形等价类依赖于 $3g-3$ 个称为 **Riemann 曲面的(参)模** (moduli of a Riemann surface) 的复参数; 对于共形等价 Riemann 曲面, 这些模相同. $g=1$ 的情形在本条第四段描述. 如果考虑亏格为 g 并具有 n 个解析边界分支的紧 Riemann 曲面, 则为使这样的曲面共形等价, 必须有 $6g-6+3n$ 个实模参数 ($g\geqslant 0$, $n\geqslant 0$, $6g-6+3n>0$) 相同. 特别是, 对于 n 连通 ($n\geqslant 3$) 平面域, 有 $3n-6$ 个这样的模; 任一双连通平面域共形等价于具有某个半径比的圆环.

上面提到的 Riemann 的观察是经典 Riemann 曲面(参)模问题 (moduli problem for Riemann surfaces) 的起源. 这个问题研究在可能情形下引进的这些参数的性质, 在引进时要使得它们能在给定亏格 g 的 Riemann 曲面的集合上定义一个复解析结构. 对于(参)模问题, 有代数方法和分析方法这两条途径. 代数方法与研究 Riemann 曲面 S 上亚纯函数的域 $K(S)$ 联系起来. 在闭曲面情形下, $K(S)$ 是代数函数域 (对 $g=0$ 是有理函数域, 对 $g=1$ 是椭圆函数域). 每个闭 Riemann 曲面 S 共形等价于由一个方程 $P(z, w)=0$ 定义的代数函数的 Riemann 曲面, 这里 P 是 $\mathbf{C}$ 上的不可约多项式. 这个方程确定了一条平面**代数曲线** (algebraic curve) X, 且 X 上的有理函数域等同于 S 上的亚纯函数域. Riemann 曲面的共形等价性对应于它们的代数函数域的双有理等价性 (一致性) 或这些曲面确定的代数曲线的双有理等价性, 后两者是相同的.

分析方法基于 Riemann 曲面的几何和解析性质. 结果证实通过设置拓扑限制来减弱 Riemann 曲面的共形等价性是方便的. 代替给定亏格 $g\geqslant 1$ 的 Riemann 曲面 S, 考虑偶 (S, f), 其中 f 是某个亏格为 g 的固定曲面 S_0 到 S 上的一个同胚; 两个偶 (S, f) 和 (S', f') 看作等价, 如果存在共形同胚 $h: S\to S'$, 使得映射

$$(f')^{-1}\circ h\circ f: S_0\to S_0$$

同伦于恒等映射. 等价类 $\{(S, f)\}$ 的集合称为曲面 S_0 的 Teichmüller 空间 (Teichmüller space) $T(S_0)$. 在 $T(S_0)$ 中能用 $S\to S'$ 的拟共形同胚引进一个度量. 类似地可对非紧 Riemann 曲面定义 Teichmüller 空间, 但此时只能用拟共形同胚 f. 对于给定的亏格为 g 的闭曲面 S_0, 空间 $T(S_0)$ 都是等距同构的, 从而可说亏格为 g 的闭曲面的 Teichmüller 空间 T_g. 亏格为 g 的 Riemann 曲面的共形类之空间 R_g 可由 T_g 以其自同构的某个可数群 Γ_g 作因子分解而得到, Γ_g 称为**模群** (modular group).

最简单的情形是亏格为 1 的曲面——环面. 在规定环面的**万有覆叠** (universal covering) 曲面已共形映射到复平面 $\mathbf{C}$ 上后, 每个环面 S 可表示为 $\mathbf{C}/G$, 这里 G 是平移构成的一个群, 具有两个生成元 ω_1, ω_2, 且满足 $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$; 两个环面 S 与 S' 共形等价当且仅当对应的生成元之比 $\tau=\omega_2/\omega_1$ 与 $\tau'=\omega_2'/\omega_1'$ 由一个模变换相联系:

$$\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\ ad-bc=1,\ a, b, c, d\in\mathbf{Z}.$$

作为给定的 Riemann 曲面共形类 $\{S\}$ 的 (复) 模, 可取**椭圆模函数** (modular function) $J(\tau)$ 的值. Teichmüller 空间 T_1 与上半平面 $H=\{\tau\in\mathbf{C}: \operatorname{Im}\tau>0\}$ 相同, Γ_1 是**椭圆模群** (elliptic modular group) $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})/\{\pm 1\}$, 而 $R_1=T_1/\Gamma_1$ 是共形等价于 $\mathbf{C}$ 的 Riemann 曲面. 所有椭圆曲线 (以及亏格为 1 的曲面) 可通过 Weierstrass 函数 $\wp(z; 1, \tau)$ 及其导数 $\wp'(z; 1, \tau)$ (见 **Weierstrass 椭圆函数** (Weierstrass elliptic functions)) 同时单值化.

对于 $g>1$, 情况复杂得多. 特别地, 已经建立空间 T_g 的下列基本性质: 1) T_g 同胚于 R_{6g-6}; 2) T_g 可双全纯地嵌入 $\mathbf{C}^{3g-3}$ 中成为一个全纯凸的有界域; 3) 模群 Γ_g 是离散的 (甚至是真不连续的), 对于 $g>2$ 它是 T_g 的双全纯自同构的完全群; 4) 覆叠 $T_g\to T_g/\Gamma_g$ 是分歧的且 $T_g/\Gamma_g=R_{6g-6}$ 是具有不可单值化奇点的正规复空间. 除 3) 中的某些例外, 同样的这些性质对于具有有限个点孔的闭 Riemann 曲面这种更一般的情形也成立, 与之对应的是有限维 Teichmüller 空间. 前述 T_g 到 $\mathbf{C}^{3g-3}$ 中的双全纯嵌入可通过**单值化** (uniformization) 并用**拟共形映射** (quasi-conformal mapping) 得到. 曲面 S_0 可表示为 $S_0=H/\Gamma_0$, 这里 Γ_0 是不连续地作用于上半平面 H 中的 **Fuchs 群** (Fuchsian group) (定义时不计 H 的所有共形自同构组成的群中的共轭), 并考虑平面 $\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 的拟共形自同构 $w=f^\mu(z)$ 即 Beltrami 方程 $w_{\bar z}=\mu(z)w_z$ 的解, 其中 $\mu(z)d\bar z/dz$ 是在 Γ_0 下不变且支集包含于 H 中的形式, $\|\mu\|_{L_\infty}<1$. 此外, 如果假定 f^μ 保持点 0, 1, ∞ 不变, 则 T_g 可等同于限制 $f^\mu|_R$ 或等价地, 限制 $f^\mu|_L$ ($L=\{z\in\mathbf{C}: \operatorname{Im}z<0\}$) 的空间, 从而 T_g 双全纯等价于复空间 $B(L, \Gamma_0)$ 中被 Schwarz 导数

$$\{f^\mu, z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2,$$

$$f = f^{\gamma}, z \in L$$

所填满的区域，其中 $B(L, \Gamma_0)$ 由方程

$$\varphi(\gamma(z))\gamma'^2(z) = \varphi(z), \gamma \in \Gamma_0$$

在 L 中的全纯解构成且具有范数

$$\|\varphi\| = \sup_L |\operatorname{Im} z|^2 |\varphi(z)|.$$

这里 $\dim B(L, \Gamma_0) = 3g-3$. 使用这一嵌入可构造具有底空间 T_g 的纤维空间 $\widetilde{T}_g$, 在 $\widetilde{T}_g$ 上也能引进一个复结构以及全纯函数 $\psi_1, \cdots, \psi_{5g-5}$, 它们使得在复射影空间 $\mathbf{C}P^n (n \geqslant 2)$ 中给出所有亏格为 g 的代数曲线的参数表示成为可能. 上述涉及 T_g 在 $B(L, \Gamma_0)$ 中嵌入的构造可推广到任意的 Riemann 曲面和 Fuchs 群. 特别对于带解析边界的紧 Riemann 曲面，所得 Teichmüller 空间中可引进相应维数的整体实解析结构.

亏格 $g>1$ 的 Riemann 曲面共形类的另一种描述可由这些曲面的所谓周期矩阵 (period matrix) 得到. 这是一些具有正定虚部的对称 $g \times g$ 矩阵. 空间 T_g 可全纯嵌入到所有这样的矩阵的集合 (Siegel 上半平面) H_g 中 (见[4], [5]).

存在具有某种对称性的闭 Riemann 曲面，其共形类依赖于数目较少的参数. 这些曲面是等价于函数 $w = \sqrt{p(z)}$ 的 2 叶 Riemann 曲面的超椭圆曲面 (hyperelliptic surface), 其中 $p(z)$ 是形如 $(z-z_1)\cdots(z-z_{2g+2})$ 的多项式. 它们可有一个共形对合并依赖于 $2g-1$ 个复参数. 所有亏格为 2 的曲面是超椭圆的; 对于 $g>2$, 这种曲面构成 T_g 中维数为 $2g-1$ 的解析子流形.

给定 Riemann 曲面 S 的共形自同构问题与 Riemann 曲面的共形类有关. 除若干特殊情形外，这样的自同构的群 Aut S 是离散的. 在亏格 $g>1$ 的闭曲面的情形，此群是有限的; 此外，Aut S 的阶不超过 $84(g-1)$.

无穷亏格非紧 Riemann 曲面的现有分类基于挑出某些共形不变量，从而并不完全确定 Riemann 曲面的共形类; 通常它通过具有某些性质的解析函数和调和函数的存在性来进行 (亦见 **Riemann 曲面的分类** (Riemann surfaces, classification of)).

参考文献

[1] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1967 (中译本: R. 尼凡林那, 单值化, 科学出版社, 1960).

[2] Springer, G., Introduction to Riemann surfaces, Chelsea, reprint, 1981.

[3] Крушкаль, С. Л., Квазиконформные отображения и римановы поверхности, Новосиб., 1975 (中译本: C. Л. 克鲁什卡, 拟共形映射与黎曼曲面, 科学出版社, 1989).

[4] Bers, L., Uniformization, moduli, and Kleinian groups, *Bull. London Math. Soc.* **4** (1972), 257 - 300.

[5] Schiffer, M., Spencer, D. C., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1954.

[6] Abikoff, W., The real analytic theory of Teichmüller space, Springer, 1980.

[7] Farkas, H. M., Kra, I., Riemann surfaces, Springer, 1980.

[8] Крушкаль, С. Л., Апанасов, Б. Н., Гусевский, Н. А., Клейновы группы в примерах и задачах, Новосиб., 1978 (英译本: Krushkal', S. L., Apanasov, B. N., Guserkii, N. A., Kleinian groups and uniformization in examples and problems, Amer. Math Soc., 1986).

[9] Lehto, O., Univalent functions and Teichmüller spaces, Springer, 1986.

С. Л. Крушкаль 撰

【补注】 参照 Riemann 曲面 S_0 的微分同胚的群的连通分支构成的群 $\Gamma_g = (\mathrm{Diff}(S_0))/(\mathrm{Diff}_0(S_0))$, 条中称为模群，也常称为映射类群 (mapping class group).

参考文献

[A1] Gardiner, F. P., Teichmüller theory and quadratic differentials, Wiley (Interscience), 1987.

[A2] Nag, S., The complex analytic theory of Teichmüller spaces, Wiley (Interscience), 1988.

[A3] Schlichenmaier, M., An Introduction to Riemann surfaces, algebraic curves, and moduli spaces, Springer, 1989.

【译注】

参考文献

[B1] 李忠, 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用, 科学出版社, 1988.

沈永欢 译

Riemann 张量 [Riemann tensor; Римана тензор], Riemann 曲率张量 (Riemann curvature tensor)

空间曲率理论中研究的一种四阶张量. 设 L_n 是具仿射联络的空间, Γ_{ij}^k 是 L_n 的联络的 **Christoffel 符号** (Christoffel symbol). Riemann 张量是一阶反变三阶共变的张量，其分量 (坐标) 形式为

$$R_{lkl}^{q} = \frac{\partial \Gamma_{li}^{q}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^{q}}{\partial x^l} - \Gamma_{lp}^{q}\Gamma_{ki}^{p} + \Gamma_{kp}^{q}\Gamma_{li}^{p},$$

这里 $\partial/\partial x^k$ 是关于空间坐标 $x^k (k=1, \cdots, n)$ 的微分符号. 在具度量张量 g_{ij} 的 Riemann 空间 V_n 中，除了张量 R_{ikl}^q 外，也研究用度量张量 g_{ij} 将上指标 q 拉下后所得的四阶共变 Riemann 张量

$$R_{ikl}^{q} g_{jq} = R_{ikl j} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^l \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^j}\right] + g_{pq}(\Gamma_{lj}^p \Gamma_{ki}^q - \Gamma_{kj}^p \Gamma_{li}^q).$$

由于在 V_n 上采用的是（无挠）Riemann 联络，这里 $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. 在任何具无挠仿射联络的空间中，Riemann 张量的坐标满足第一 Bianchi 恒等式（first Biachi identity）

$$R^q_{lki} + R^q_{kil} + R^q_{ilk} = 0,$$

$$R_{lkij} + R_{kilj} + R_{ilkj} = 0,$$

即关于前 3 个下标的循环和等于零.

Riemann 张量具有下列性质:

1) $R_{lkij} = R_{ijlk}$;

2) $R^q_{ilk} = -R^q_{ikl}$;

3) $R_{lkij} = -R_{klij}$, $R_{lkij} = -R_{lkji}$;

4) $R_{aaij} = 0$, $R_{lkbb} = 0$, 如果一对中的两个下标相同，那么对应的坐标等于零; $R^q_{aai} = 0$;

5) 对 Riemann 张量的共变导数成立第二 Bianchi 恒等式（second Bianchi identity）

$$\nabla_m R^q_{kli} + \nabla_k R^q_{lmi} + \nabla_l R^q_{mki} = 0,$$

这里 ∇_m 是坐标 x^m 方向上的共变微分符号. 对张量 R_{lkij} 成立相同的恒等式.

Riemann 张量总共有 4^n 个坐标，n 是空间的维数，它们之中有 $n^2(n^2-1)/12$ 个是本质的，由上面列出的性质推导不出这些坐标之间的任何相关关系.

当 $n=2$ 时，Riemann 张量只有一个本质坐标，R_{1212}; 它是曲面的内蕴（或称为 Riemann）曲率的定义中的一个部分: $K = R_{1212}/\det g_{ij}$（见 **Gauss 曲率**（Gaussian curvature））.

Riemann 张量由 B. Riemann 于 1861 年定义（发表于 1876 年）.

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Римакова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967（中译本: П. К. 洛薛夫斯基，黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，1955，上、下册）.

[2] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[3] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, Wiley (Interscience), 1969.

[A2] Hicks, N. J., Notes on differential geometry, v. Nostrand, 1965.

[A3] Schouten, J. A. and Struik, D. J., Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeomtrie, Noordhoff, 1924.

[A4] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1－5, Publish Perish, 1979

[A5] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982（译自德文）.

[A6] Eisenhart, L. P., An introduction to differential geometry with the use of the tensor calculus, Princeton Univ. Press, 1947.

[A7] Schouten, J. A., Ricci calculus, Springer, 1954（译自德文）.

潘养廉 译

Riemann 定理［**Riemann theorem**; **Римана теорема**］

1）关于共形映射的 Riemann 定理（Riemann theorem on conformal mappings）: 任意给定扩充复平面 $\bar{\mathbf{C}}$ 的两个单连通区域 G_1 与 G_2，既不同于 $\bar{\mathbf{C}}$ 也不同于 $\bar{\mathbf{C}}$ 去掉一点，则可找到 G_1 上无限多个单值解析函数，使得每一个函数均实现 G_1 到 G_2 的一一共形变换. 在这种情形，对于任何一对点 $a \in G_1$，$a \neq \infty$，及 $b \in G_2$ 以及任一实数 α，$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$，可以找到该类的唯一一个函数 f 满足 $f(a) = b$, $\arg f'(a) = \alpha$. 条件 $\arg f'(a) = \alpha$ 的几何意义是，从点 a 出发的每条无穷小向量在变换 $w = f(z)$ 下变成无穷小向量，该向量的方向与原向量的方向构成角 α.

Riemann 定理是**共形映射**（conformal mapping）理论的基础，也是更一般的单复变函数几何理论的基础. 加上它在多连通区域的推广，使它在单复变函数论、数学物理、弹性理论、飞行与流体力学、电磁学等领域有广泛的应用. 这一定理是由 B. Riemann (1851) 对更一般的单连通情形且通常是复平面上的非单叶域的情形作了明确的表述. 代替旨在保证共形映射 $w = f(z)$ 唯一性的标准化条件 “$f(a) = b$, $\arg f'(a) = \alpha$”，Riemann 为同一目的所采用的条件为 “$f(a) = b$, $f(\zeta) = \omega$”，其中 $a \in G_1$, $b \in G_2$，而 ζ 和 ω 分别是 G_1 和 G_2 的预先给定的边界点. 后一组条件并非总是正确，它适用于该时期对单连通区域所下的定义. 在证明这一定理的过程中，Riemann 在很大的程度上凭借了物理学的概念，这也使他深知该定理的重要的应用价值. D. Hilbert 证明了 Riemann 在他的证明中用到的所谓 **Dirichlet 原理**（Dirichlet principle），从而使 Riemann 的证明在数学上正确无误.

参考文献

[1] Riemann, B., Gesammelte mathematischen Abhandlungen, Dover, reprint, 1953.

[2] Привалов, И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966（英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969）.

Е. П. Долженко 撰

【补注】 该定理亦称 Riemann 映射定理（Riemann

mapping theorem).

参考文献

[A1] Nehari, Z., Conformal mapping, Dover, reprint, 1975.

2) 关于级数的项重排的 Riemann 定理(Riemann theorem on the rearrangement of terms of a series): 若一实数项级数收敛但非绝对收敛，则对于任何数 A 存在级数项的重排，使得所得级数的和等于 A. 而且存在该级数项的重排，使得它的和等于预先指定符号的无穷值 $+\infty$ 或 $-\infty$，也可以既不等于 $+\infty$ 又不等于 $-\infty$ 但其部分和序列具有下极限 λ 与上极限 μ 满足 $-\infty \leqslant \lambda < \mu \leqslant +\infty$ (见**级数**(series)).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer 1964.

[A2] Rudin, W., Principles of mathematical analytsis, McGraw-Hill, 1976, 75-78.

【补注】 另外一个 Riemann 定理是 Riemann 可去奇异性定理(Riemann removable singularities theorem), 见**可去集**(removablet set).

杨维奇 译

Riemann θ 函数[Riemann theta-function; Римана тета-функция]

具有半整特征 H 的一阶 **θ 函数**(theta-function) $\Theta_H(u)$ $(u=(u_1, \cdots, u_p))$ 与一阶 **Abel 积分**(Abelian integral)的叠加，1857 年 B. Riemann 用来解决 **Jacobi 反演问题**(Jacobi inversion problem).

设 $F(u, w)=0$ 是定义亏格 p 的紧 **Riemann 曲面**(Riemann surface) F 的一个代数方程；设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ 是 F 上第一类 **Abel 微分**(Abelian differential)的基，具有 $(p\times 2p)$ 阶周期矩阵

$$W=\|\pi i E, A\|=\left\|\begin{matrix} \pi' & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ . & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & \cdots & \pi' & a_{p1} & \cdots & a_{pp}\end{matrix}\right\|.$$

设

$$u(w)=\left[u_1(w_1)=\int_{c_1}^{w_1}\varphi_1, \cdots, u_p(w_p)=\int_{c_p}^{w_p}\varphi_p\right]$$

是第一类基本 Abel 积分的向量，$(c_1, \cdots, c_p)$ 是 F 内一组固定的点，$w=(w_1, \cdots, w_p)$ 是 F 内一组变动的点. 对于任意的 θ 特征

$$H=\left\|\begin{matrix} h \\ h'\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} h_1 & \cdots & h_p \\ h_1' & \cdots & h_p'\end{matrix}\right\|,$$

其中整数 h_μ, h_μ' 只取值 0 或 1，可以构造一个周期矩阵为 W 的 θ 函数 $\Theta_H(u)$，使得 $\Theta_H(u)$ 满足基本关系式

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_H(u+\pi i e_\mu)=(-1)^{h_\mu}\Theta_H(u), \\ &\Theta_H(u+e_\mu A)= \\ &=(-1)^{h'_\mu}\exp(-a_{\mu\mu}-2u_\mu)\cdot\Theta_H(u).\end{aligned}\right\}(1)$$

这里 e_μ 是恒等矩阵 E 的第 μ 个行向量，$\mu=1, \cdots, p$. 如果 $z=(z_1, \cdots, z_p)$ 是复空间 $\mathbf{C}^p$ 内的一个固定向量，则 Riemann θ 函数(Riemann theta-function) $\Phi_H(w)$ 可表示成叠加

$$\Phi_H(w)=\Theta_H(u(w)-z). \tag{2}$$

设 F^* 是从 F 中除去沿着 F 的同调基闭链 $a_1, b_1, \cdots, a_p, b_p$ 的截口后所得到的区域，Riemann θ 函数(2)在 F^* 内处处有定义且解析. 一般说来，当 Riemann θ 函数越过这些截口时就要被乘上一个因子，因子的值由基本关系式(1)确定. 在这种情形里具有零特征数 $H=0$ 的一阶 θ 函数 $\Phi(u)=\Theta_0(u)$ 起着特殊的作用. 特别地，相应的 Riemann θ 函数 $\Phi(w)=\Phi_0(w)$ 的零点 $\eta_1, \cdots, \eta_p$ 确定了 Jacobi 反演问题的解.

型为 $\Psi_H(w)=\Theta_H(u(w))$ 的 Riemann θ 函数关于公分母 $\Psi(w)=\Theta(u(w))=\Theta_0(u(w))$ 的商被用来构造求解反演问题的解析表达式. 从(1)式可以看出，这样的商 $\Psi_H(w)/\Psi(w)$ 可能具有的非平凡因子只能是 -1，这些商的平方就是 F 上单值亚纯函数，即曲面 F 上的点的有理函数. 这种情形下使用的平方以及 Θ 函数商的其他有理函数是具有 $2p$ 个周期的特殊 **Abel 函数**(Abelian function). 特殊性表现于以下的事实：当 $p>3$ 时对称矩阵 A 的 $p(p+1)/2$ 个不同元素 $a_{\mu\nu}$ 之间被由 F 的共形结构所确定的关系式所约束，所以其中只有 $3(p-1)$ 个是独立的.

设 F 是超椭圆曲面，$F(u, w)=w^2-P(u)$，这里 $P(u)$ 是次数 $n\geqslant 5$ 的没有重根的多项式. 对超椭圆曲面 F 所构造 Riemann θ 函数有时被称为超椭圆 θ 函数(hyper-elliptic theta-functions).

参考文献

[1] Чеботарев, Н. Г., Теория алгебраческий функций, М.-Л., 1948, гл. 9.

[2] Маркушевич, А. И., Введение в классическую теорию абелевых функций, М., 1979.

[3] Krazer, A., Lehrbuch der Thetafunktionen, Chelsea, reprint, 1970.

[4] Conforto, F., Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Springer, 1956.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 现在 Riemann θ 函数被定义为对应于代数曲线(或紧 Riemann 曲面)的 **Jacobi 簇**(Jacobi vari-

ety)的具半整特征数的一阶 θ 函数. 一般的 θ 函数对应于任意的 **Abel 簇**(Abelian variety). 把 Riemann θ 函数与一般 θ 函数相区分的问题称为 **Schottky 问题**(Schottky problem), 它已被解决.

参考文献

[A1] Griffiths, P. A. and Harris, J. E., Principles of algebraic geometry, 1-2, Wiley, 1978.

[A2] Arbarello, E., Periods of Abelian integrals, theta functions, and differential equations of KdV type, in A. M. Gleason (ed.). Proc. Internat. Congress Mathematicians, Berkeley, 1986, Vol. 1, Amer. Math. Soc., 1987, 623-627.

[A3] Mumford, D., Tata lectures on theta, 1-2, Birkhäuser, 1983-1984.

陈志杰 译

Riemann ζ 函数 [Riemann zeta-function; Римана дзета-функция]

见 **ζ 函数**(zeta-function).

【补注】 亦见**素数分布**(distribution of prime numbers).

Riemann 联络 [Riemannian connection; Риманова связность]

Riemann 空间(Riemann space) M 上的一种**仿射联络**(affine connection), 空间的**度量张量**(metric tensor) g_{ij} 关于这种联络是共变常数. 如果 M 上的仿射联络由局部联络形式的矩阵

$$\left.\begin{array}{c}\omega^i=\Gamma^i_k dx^k,\ \det|\Gamma^i_k|\neq 0,\\ \omega^i_j=\Gamma^i_{jk}dx^k\end{array}\right\}\qquad(1)$$

给定, 且 M 上的度量形式为 $ds^2=g_{ij}\omega^i\omega^j$, 那么 g_{ij} 是共变常数这个条件表达为

$$dg_{ij}=g_{kj}\omega^k_i+g_{ik}\omega^k_j.\qquad(2)$$

它也可表述如下: 在沿 M 中任意曲线的**平行移动**(parallel displacement)时, 两个任意向量的内积 $\langle X,Y\rangle=g_{ij}\omega^i(X)\omega^j(Y)$ 保持其值不变. 即对 M 上向量场 X, Y, Z 成立下面的等式:

$$Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_Z X,Y\rangle+\langle X,\nabla_Z Y\rangle,$$

这里 $\nabla_Z X$ 是一个向量场, 称为向量场 X 关于向量场 Z 的**共变导数**(covariant derivative), 由公式

$$\omega^i(\nabla_Z X)=Z\omega^i(X)+\omega^i_k(Z)\omega^k(X)$$

定义. 如果在 M 中使用局部规范正交标架场, 那么(限于 ds^2 为正定的情形) $g_{ij}=\delta_{ij}$, 条件(2)的形式为

$$\omega^j_i+\omega^i_j=0,$$

即形式为(1)的矩阵 ω 取值于维数为 $n=\dim M$ 的 Euclid 空间 E^n 的运动群的 Lie 代数. 于是, Riemann 联络可以解释为与 M 相切的 Euclid 空间中规范正交标架的纤维空间中的联络. Riemann 联络的和乐群(holonomy group)是 E^n 的运动群的一个子群; 而 M 上某个 Riemann 度量的 Riemann 联络是和乐群为运动群或运动群的某个子群的仿射联络.

如果在(1)中, $\omega^i=dx^i$(即在 M 上使用局部坐标系的自然标架场), 那么

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}=g_{kj}\Gamma^k_{il}+g_{ik}\Gamma^k_{jl},$$

且

$$\Gamma^k_{ij}=\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}-\frac{1}{2}S^k_{ij}-g^{kl}g_{m(i}S^m_{j)l},$$

这里

$$\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{kl}\left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right]$$

是所谓的 **Christoffel 符号**(Christoffel symbol), $S^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}$ 是 Riemann 联络的**挠率张量**(torsion tensor). 存在唯一的一个无挠(即使得 $S^k_{ij}=0$ 的)Riemann 联络, 它由形式

$$\omega^i_j=\left\{\begin{matrix}i\\ jk\end{matrix}\right\}dx^k$$

决定, 称为 **Levi-Civita 联络**(Levi-Civita connection).

参考文献

[1] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[2] Lichnerowicz, A., Global theory of connections and holonomy groups, Noordhoff, 1976(译自法文).

Ю. Г. Лумисте 撰

【补注】 亦用**度量联络**(metric connection)一词来代替 Riemann 联络.

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982(译自德文).

潘养廉 译

Riemann 坐标 [Riemannian coordinates; Римановы координаты]

见**测地坐标**(geodesic coordinates).

Riemann 曲率 [Riemannian curvature; Риманова кривизна]

Riemann 空间与 Euclid 空间的度量之间的差异的一种测度. 设 M 是 **Riemann 空间**(Riemannian space)中一点, F 是过 M 的一个 2 维正则曲面 $x^i=$

$x^i(u, v)$, L 是 F 中过 M 的一条简单闭周线，σ 是 F 上由 L 所界限的部分的面积．将一个任意的与 F 相切的向量 a^i（即向量 $\partial x^i/\partial u$, $\partial x^i/\partial v$ 的线性表达式）沿 L 作平行移动（parallel displacement）．那么，移动所得的与 F 相切的向量与 a^i 有一个角 φ 相联系（该角的所参照的正向必须与沿 L 的移动方向一致）．当 L 收缩为 M 点时，如果极限

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma}$$

存在，那么，它称为该点处沿这个 2 维曲面方向的 Riemann 曲率（Riemannian curvature）（该Riemann空间的曲率（curvature））；Riemann 曲率与该曲面无关而只与它在 M 处的方向有关，即它只与包含向量 $\partial x^i/\partial u$, $\partial x^i/\partial v$ 的 Euclid 空间的 2 维切平面的方向有关．

Riemann 曲率 K 和曲率张量（curvature tensor）由公式

$$K = \sum_{m, l, k, j} R_{mlkj} x^{ml} x^{kj}$$

相联系，这里

$$x^{ml} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^l}{\partial v} - \frac{\partial x^l}{\partial u}\frac{\partial x^m}{\partial v}\right],$$

其中应选取参数 u, v 使得向量 $\partial x^i/\partial u$, $\partial x^i/\partial v$ 构成的平行四边形的面积等于 1．

根据 БСЭ-3 中Riemann 几何学一条 撰

【补注】 将 Riemann 曲率称为截面曲率（sectional curvature）较妥．

见 **Riemann 张量**（Riemann tensor）．　潘养廉 译

Riemann(区)域 [Riemannian domain或 Riemann domain; Риманова область]，C^n 上的复（解析）流形（complex (analytic) manifold）

单复变解析函数 $w=f(z)$ 的 **Riemann 曲面**（Riemann surface）在多复变数 $z_1, \cdots, z_n (n \geq 2)$ 的解析函数 $w=f(z)$, $z=(z_1, \cdots, z_n)$ 情形的模拟．

更精确地说，一个道路连结的 Hausdorff 空间 R 称为一（抽象）Riemann 区域（(abstract) Riemann domain），如果存在一局部同胚（一射影（projection））$\pi: R \to C^n$，使得对每一点 $p_0 \in R$ 存在一邻域 $U(p_0, \varepsilon)$ 同胚地变换到复空间 C^n 的一多圆盘

$$D(z^0; \varepsilon) = \{z=(z_1, \cdots, z_n) \in C^n: |z_j - z_j^0| < \varepsilon, j=1, \cdots, n\}.$$

Riemann 区域是一可分空间．

一复函数 g 称为在 R 上是全纯的（holomorphic），如果对任意点 $p_0 \in R$, n 个复变数 $z_1, \cdots, z_n$ 的函数 $g[\pi^{-1}(z)]$ 在相应的多圆盘 $D(z^0; \varepsilon)$ 中是全纯的．射影 π 是选定的 n 个全纯函数 $\pi=(\pi_1, \cdots, \pi_n)$，它相应于 C^n 中的坐标 $z_1, \cdots, z_n$．从一解析函数 $w=f(z)$ 的一给定正则元素出发，它的 Riemann 区域的构造方法和一个复变数的给定解析函数的 Riemann 曲面一样，即开始用解析延拓的方法构造**完全解析函数**（complete analytic function）$w=f(z)$，然后利用邻域在完全解析函数元素的集合中引进拓扑．像 Riemann 曲面一样，Riemann 区域不可避免地联系一个给定解析函数元素的解析延拓．根据 B. Riemann 的思想，可把完全解析函数 $w=f(z)$ 在一区域上表示为一单值点函数．

特别地，Riemann 区域可以作为多复变解析函数的多叶全纯域．冈潔定理（Oka theorem）提出 Riemann 区域是一**全纯域**（domain of holomorphy），当且仅当它是全纯凸的（见**全纯凸复空间**（holomorphically-convex complex space））．

Riemann 区域的现代研究是在解析空间的一般理论的框架内进行的．全纯域的概念的拓广就是 **Stein 空间**（Stein space）．

参考文献

[1] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

[2] Gunning, R. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

[3] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 上述 Riemann 区域的概念已经在几个方面加以拓广：可以选择任何（模型）复解析空间 S（见**复空间**（complex space））．一个 S 上的非分歧的 Riemann 区域（unramified Riemann domain）是一三元组 (R, Φ, S)，其中 S 是一复解析空间，Φ 是一从 R 到 S 内的局部双全纯映射．

其次，S 上的一分歧的 Riemann 区域（ramified Riemann domain）是一三元组 (R, Φ, S)，其中 R 仍然是一复解析空间，而现在 Φ 是从 R 到 S 的一离散开全纯映射（[A1]）．

参考文献

[A1] Behnke, H. and Thullen, P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Springer, 1970, Chapt. VI, 2. Erweiterte Aufl.

[A2] Grauert, H. and Fritzsche, K., Several complex variables, Springer, 1976（译自德文）（中译本：H. 格劳尔特，K. 弗里切著，多复变数，科学出版社，1988）．

钟同德 译

Riemann 几何学 [Riemannian geometry; Риманова геометрия]

Riemann 空间的理论. 一个 Riemann 空间(Riemannian space)是一个 n 维连通微分流形(differentiable manifold) M^n, 其上给定了一个正定对称的秩 2 的可微共变张量场 g. 张量 g 称为度量张量(metric tensor). Riemann 几何学是 Euclid 空间 E^3 中二维曲面的内蕴几何学(见内蕴几何学(interior geometry))的高维推广. Riemann 空间的度量与所考察的区域上的 Euclid 度量在一阶小范围内是相同的. 两者之间的差可以用 Riemann 曲率(局部)估计. Riemann 曲率是 E^3 中曲面的 **Gauss 曲率**(Gaussian curvature)这个概念的高维推广.

有三个想法支持 Riemann 几何学. 其中第一个是认识到一种非 Euclid 几何学——Н. И. Лобачевский 几何学的存在这个事实, 第二个是由 C. F. Gauss 创立的曲面内蕴几何学的概念. 第三个是由 B. Riemann 于 19 世纪前半世纪发展的 n 维空间的概念. B. Riemann 在他的演讲"关于构成几何学基础的假设"([1])中统一和推广了这些想法. Riemann 几何学中的概念在 A. Einstein 的广义相对论的系统阐述中起了重要的作用, 它的发展与张量分析的方法密切相关. Riemann 几何学以及它的许多推广, 特别是在称为**大范围 Riemann 几何学**(Riemannian geometry in the large)的那部分, 已经取得了成功的进展, 并且在力学和物理学中得到了广阔和深刻的应用([4]).

下面是 Riemann 几何学中的基本概念.

标量积(scalar product)或**内积**(inner product). 在每个切空间 T_pM^n 中, $p\in M^n$, 张量 g 按公式

$$\langle X, Y\rangle = g(X, Y),\ X, Y\in T_pM^n$$

决定了一个标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 其逆也对: 如果对每一点 $p\in M^n$ 在 T_pM^n 中定义了一个可微地依赖于 p 的标量积, 那么, 它就定义了一个具有上面所列性质的张量场 g. M^n 和 g 的光滑度可因所提问题的不同而变化. 在绝大多数情形下, 要求 M^n 是三次连续可微而张量场 g 是二次连续可微就已足够(以下将不指明所需的光滑度). 在局部基为 $\{\partial_i\}$, $(i=1,\cdots,n)$ 的局部坐标系 $\{x^i\}$ 中, g 的分量形式为

$$g_{ij}=\langle\partial_i, \partial_j\rangle,$$

因而

$$\langle X, Y\rangle=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}X^iY^j,$$

这里

$$X=\sum_{i=1}^{n}X^i\partial_i,\ Y=\sum_{j=1}^{n}Y^j\partial_j.$$

作为度量空间的 Riemann 空间. 光滑曲线 $c: [0,1]\to M^n$ 的长度 l 是由公式

$$l=\int_0^1|\dot c|\,dt$$

决定的, 这里 $\dot c$ 是 $c(t)$ 的切向量. 分段光滑曲线的长度等于它的光滑部分的总长度. 如果 $x^i=x^i(t)$ 是 $c(t)$ 在局部坐标下的方程, 那么

$$\dot c=\sum_{i=1}^{n}\frac{dx^i}{dt}\partial_i,$$

$$l=\int_0^1\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt.$$

由于这个公式, M^n 中的度量记成习惯的形式

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}dx^idx^j,$$

ds 称为长度元, 而函数 $g_{ij}(x)$ 则是度量(第一基本)型的系数. 两条曲线在交点处的夹角(angle)定义为它们的切向量之间的夹角. 落在一个坐标邻域中的区域 U 的体积由公式

$$V(U)=\int_U|g|^{1/2}dx^1\cdots dx^n$$

决定, 这里 $|g|=\det\|g_{ij}\|$. 任意区域的体积则等于它的组成部分的体积之和, 这里每个组成部分落在一个特定的坐标邻域中.

两点 $p, q\in M^n$ 之间的距离(distance) $\rho(p, q)$ 定义为连接 p 和 q 的所有分段光滑曲线的长度的下确界. 任意连通区域 U 中的度量 ρ_U 按相同的方法定义. 两个 Riemann 空间 M_1^n 和 M_2^n 称为是等距的(isometric), 如果存在变换 $\varphi: M_1^n\to M_2^n$ 使得在 φ 之下成立

$$\rho_{M_1^n}(p, q)=\rho_{M_2^n}(\varphi(p), \varphi(q)),$$

或者, 同一回事, $l(c)=l(\varphi(c))$, 这里 c 是 M_1^n 中任意曲线. 如果 φ 是一个等距, 那么, 对任意点 $p\in M_1^n$, 存在坐标邻域 $U_1\ni p$ 和坐标邻域 $U_2\ni\varphi(p)$, 使得 $g_{ij}^1(x)=g_{ij}^2(\varphi(x))$, $x\in U_1$, $i, j=1,\cdots,n$. M^n 到自身上的等距映射称为运动(motion).

以两点 p 和 q 为端点的一条曲线称为最短曲线(shortest curve), 如果它的长度等于 $\rho(p, q)$. 长度泛函 l 的平稳曲线称为测地线(geodesic). M^n 中的每一条最短线总是测地线, 而测地线上充分小的弧是最短线. 如果由度量 ρ_U 决定的最短线都是 M^n 中的测地线, 那么区域 $U\subset M^n$ 称为测地凸的(geodesically convex). 如果 $x^i=x^i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ 是测地线在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中的方程, 那么这些函数 $x^i(t)$ 满足一个方程组, 当 t 是与弧长成比例的参数时, 该方程组的形式为

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma_{jk}^i\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0,\ i=1,\cdots,n,$$

这里

$$\Gamma_{jk}^i=\sum_{\alpha=1}^{n}g^{\alpha i}\Gamma_{jk,\alpha},$$

$$\Gamma_{jk,a}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ka}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^a}\right]$$

是 **Christoffel 符号**（Christoffel symbol），g^{ab} 是 $\|g_{ij}\|$ 的逆阵的元素，$i, j, k, a, b=1, \cdots, n$.

如果一个 Riemann 空间作为度量空间是完全的（如果测地线的任何弧均能向两边任意延伸），那么该 Riemann 空间称为完全的（complete）（测地完全的（geodesically complete））. Riemann 空间是完全的，当且仅当它是测地完全的. 在完全 Riemann 空间中，任何两点可用一条最短线连接（它不必是唯一的）. 在任何微分流形上可以引入完全 Riemann 空间的结构.

Riemann 空间作为具有联络的流形. 一个共变导数（covariant derivative）∇ 称为对称的（symmetric）和与空间 M^n 的度量 g 相容的（compatible），如果对称性条件

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X, Y]$$

和相容性条件

$$Z\langle X, Y\rangle=\langle\nabla_Z X, Y\rangle+\langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

都满足，这里 X, Y, Z 是向量场，$[X, Y]$ 是它们的 Lie 括号. 这些条件使导数 ∇ 由度量张量场 g 唯一地决定. 在局部坐标 $\{x^i\}$ 中，联络 ∇ 的分量取形式为 $\Gamma_{kj,i}=\langle\nabla_k\partial_j, \partial_i\rangle$，与第一类 Christoffel 符号相同，且

$$\nabla_X Y=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}X^k+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}X^jY^k\right]\partial_i.$$

任意张量的共变导数由类似的公式决定.

如果 $\nabla_{\dot c}Y=0$，那么沿曲线 $c(t)$ 的向量场 $Y(t)$ 称为平行的（parallel）. 解析地，平行向量场 $Y(t)$ 是由方程组

$$\frac{dY^i}{dt}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}Y^j\frac{dx^k}{dt}=0, \ i=1, \cdots, n$$

的解决定的，这里 $x^i=x^i(t)$ 是曲线 $c(t)$ 的方程. 这个方程组在不同的初始条件下的解决定了 $T_{c(0)}M^n$ 到 $T_{c(1)}M^n$ 的一个变换；它是一个等距，称为 Levi-Civita 平行移动（Levi-Civita parallel displacement）. 平行移动的结果，一般说来，不仅取决于端点 $c(0)$，而且取决于弧 $c(t)$ 本身. 满足 $\nabla_{\dot c}\dot c=0$ 的曲线 c 是测地线，测地线的这个性质可以取作为测地线的定义.

Riemann 空间的子流形. 如果 $M^k(k\leqslant n)$ 是 Riemann 空间 M^n 的微分子流形，那么在 M^k 的每个切空间（$T_pM^k\subset T_pM^n$）中诱导了一个标量积，于是在 M^k 上产生了具度量张量 a 的 Riemann 空间结构，a 的分量可由公式

$$a_{\alpha\beta}=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}, \ \alpha, \beta=1, \cdots, k$$

来计算，这里 $x^i=x^i(u^1, \cdots, u^k)$ 是 M^k 在局部坐标中的方程. $M^k(k\geqslant 2)$ 的外在几何学是由第二基本形式 $B(\nu_p)$ 描述的，对 M^k 的每个单位法向量 ν_p，第二基本形式由公式

$$B(\nu_p)(X, Y)=-\langle\nabla_X\nu, Y\rangle$$

决定，这里 X 和 Y 是 M^k 上的切向量场，ν 是包含 ν_p 的任意单位法向量场. 对于形式 $B(\nu_p)$，法曲率、主方向、主曲率、**平均曲率**（mean curvature）、**完全曲率**（complete curvature）等都有定义，并可导出 Gauss-Codazzi-Ricci 方程，将第一基本形式和第二基本形式的系数联系起来. 重要的子流形类是用第二基本形式的性质刻画的，如极小子流形、全测地子流形、凸子流形等. 对 $M^1\equiv c(t)$（光滑曲线），与 E^n 中曲线论类似的理论已经建立，决定了第一曲率、第二曲率等，并导出了与 **Frénet 公式**（Frénet formulas）类似的方程. 一条曲线的第一曲率，k_1，一般称为测地曲率（geodesic curvature）；如果 t 是弧长参数，那么它由公式

$$k_1=|\nabla_{\dot c}\dot c|$$

计算；在局部坐标中

$$k_1=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\mu^i\mu^j},$$

这里

$$\mu^i=\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt},$$

且 $x^i=x^i(t)$ 是 $c(t)$ 的方程.

Riemann 几何学的许多问题是与 Riemann 空间之间的**等距浸入**（isometric immersion）及对这种浸入的性质的研究有关的. 这些问题是困难的，对它们的研究还很少（在 2 维的场合研究则比较多）.

指数映射（exponential mapping）$\exp_q$：$T_qM^n\to M^n$ 由条件 $\exp_q X=r$ 决定，这里 r 是从 q 出发以 $X\in T_qM^n$ 为方向而长度为 $|X|$ 的测地线弧的末端点. 如果在点 p 的邻域中通过给点 p 以点 $\exp_q^{-1}p\in T_qM^n$ 的 Descartes 坐标的方法引入坐标系，那么就有

$$\Gamma^i_{jk}\Big|_{x=q}=\Gamma_{jk,i}\Big|_{x=q}=0, \text{ 即}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\Big|_{x=q}=0, \ i, j, k=1, \cdots, n;$$

这种坐标即所谓的（Riemann）法坐标（normal coordinates）.

曲率（curvature）. 如果在点 q 的邻域中引入法坐标，那么度量张量的分量取形式为

$$g_{ij}=\delta_{ij}-\frac{1}{3}\sum_{k,l=1}^{n}R_{ik,jl}x^k x^l+\sum_{k,l=1}^{n}\varepsilon_{ik,jl}x^k x^l,$$

这里，当 $x^i\to 0$ 时 $\varepsilon_{ik,jl}\to 0$, $i,j,k,l=1,\cdots,n$. 由此可以导出 Riemann 度量的一个重要性质：对任意点 $q\in M^n$，指数映射 $\varphi=\exp_q: T_qM^n\to M^n$ 具有性质

$$\rho_{T_qM^n}(X,Y)=|X-Y|=$$
$$=\rho_{M^n}(\varphi(X),\varphi(Y))(1+\varepsilon(X,Y)),$$

这里，当 $|X|,|Y|\to 0$ 时 $\varepsilon(X,Y)\to 0$. 一般来说，不可能通过映射 φ 的更有效选取来得到 M^n 和 T_qM^n 的度量之间的高阶重合. 因而，系数 $R_{ik,jl}$ 刻画了 M^n 的度量与 T_qM^n 的 Euclid 度量之间的偏差. 这些系数是所谓的（在点 q 的）曲率张量（curvature tensor）或 Riemann-Christoffel 张量（Riemann-Christoffel tensor）的分量. 在局部坐标 $\{x^i\}$ 中，它们可用度量张量的系数及系数的 1 阶和 2 阶导数按公式

$$R_{ik,jl}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^j}+\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i\partial x^l}+\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^j}\right]+\sum_{a,b=1}^{n}g^{ab}(\Gamma_{kj,a}\Gamma_{il,b}+$$
$$-\Gamma_{kl,a}\Gamma_{ij,b}),\ i,j,k,l,a,b=1,\cdots,n$$

表达. 伴随于曲率张量还有一系列其他的概念. 它们（从不同的侧面）刻画了 M^n 的度量与 Euclid 度量之间的偏离程度. 于是，使用曲率张量可以定义 Ricci 张量（Ricci tensor）

$$R_{ij}=\sum_{k,l=1}^{n}g^{kl}R_{ik,jl}$$

和 Einstein 张量（Einstein tensor）

$$G_{ij}=R_{ij}-\frac{R}{n}g_{ij},$$

这里

$$R=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}R_{ij}$$

称为 M^n 的数量曲率（scalar curvature）.

对 3 个向量场 X,Y,Z，赋予向量场

$$R(X,Y)Z=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z$$

的三重线性变换称为曲率变换（curvature transformation）. 它具有性质：

1) $R(X,Y)Z+R(Y,X)Z=0$;

2) $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$（第一 Bianchi 恒等式（first Bianchi identity））;

3) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=-\langle R(X,Y)W,Z\rangle$;

4) $\langle R(X,Y)Z,W\rangle=\langle R(Z,W)X,Y\rangle$.

此外，成立第二 Bianchi 恒等式（second Bianchi identity）

$$\nabla_X(R(Y,Z)W)+\nabla_Y(R(Z,X)W)+$$
$$+\nabla_Z(R(X,Y)W)=0.$$

曲率变换可以通过某种构造与平行移动联系起来. 曲率张量的代数性质可以从曲率变换的性质推导而得，这是因为利用曲率变换，特别是利用"双二次形式" $k(X,Y)=\langle R(X,Y)Y,X\rangle$，可以将曲率张量（或更精确地说，它在向量 X,Y,Z,W 上的值）唯一地（代数地）表达出来（见曲率（curvature））.

截面曲率（sectional curvature）. 设 F^2 是 M^n 中过点 p 的一个 2 维曲面，$\sigma=T_pF^2$. 设 Γ 是 F^2 中过 p 的一条简单闭曲线，S 是 F^2 中由曲线 Γ 所围区域的面积. 设 $\bar{z}$ 是 z 沿 Γ 平行移动所得的向量，φ 是 z 与 $\bar{z}$ 的切向分量之间的夹角. 那么，当 Γ 收缩于点 p 时，极限 $K(P,\sigma)=\lim\varphi/S$ 存在并称为 M^n 在点 p 处关于给定的 2 维方向 σ 的截面曲率（sectional curvature）（$K(P,\sigma)$ 与曲面 F 无关而只与 σ 有关）. 截面曲率表明 M^n 在给定点处在给定的 2 维方向上"弯曲"的程度. 一般地，这种弯曲随 2 维方向的不同而变化；然而，如果在每点曲率 $K(p,\sigma)$ 与 σ 的选取无关，那么它也与点无关（Schur 定理（Schur theorem））. M^n 局部等距于 E^n（整体上它可能与 E^n 不同）的充要条件是截面曲率恒等于零. M^n 的截面曲率也与 Riemann 几何学的其他对象有联系，例如测地三角形的亏量（盈量）（见 Gauss-Bonnet 定理（Gauss-Bonnet theorem））. Riemann 将截面曲率定义为 2 维曲面 $\exp_p\sigma$ 在点 p 处按 Gauss 公式算出的 Gauss 曲率. M^n 的度量在下面的意义上是由截面曲率唯一决定的：如果两个流形 M_1^n 和 M_2^n 的截面曲率是常数且等于同一个数 a，那么 M_1^n 和 M_2^n 是局部等距的，并且如果它们都是单连通的，那么它们就是等距的. 具常数截面曲率 a 的单连通 Riemann 空间等距于：n 维 Лобачевский 空间（Lobachevskiĭ space），当 $a<0$ 时；n 维 Euclid 空间（Euclidean space），当 $a=0$ 时；E^{n+1} 中半径为 $1/\sqrt{a}$ 的 n 维球面 S^n，当 $a>0$ 时. 一般地，下面的结果是已知的：如果 M_1^n 是一个非常数截面曲率的解析 Riemann 空间，且如果存在微分同胚 $\varphi: M_1^n\to M_2^n$ 使得 $K(p,\sigma)=K(\varphi(p),d\varphi(\sigma))$，那么如果 $n\geq 4$ 则变换 φ

是一个等距（见**等距映射**（isometric mapping））；如果 $n=3$，这个结果在某些附加假定下已被证明；而如果 $n=2$，那么这个定理不成立．然而，还不清楚（1983），除了 2 维的情形外，函数 $K(p, \sigma)$ 应该是怎样的才能有一个度量 g 以 $K(p, \sigma)$ 为截面曲率，这方面迄今还只得到一些反面的结果．

截面曲率通过公式

$$K(p, \sigma)=\frac{\langle R(X_p, Y_p)X_p, Y_p\rangle}{|X_p|^2|Y_p|^2-\langle X_p, Y_p\rangle^2}$$

与曲率变换相联系，它可用曲率张量的分量表达成：

$$K(p, \sigma)=$$

$$=\frac{\sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ik,jl}(X^iY^k-X^kY^i)(X^jY^l-X^lY^j)}{\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\begin{vmatrix}g_{ij} & g_{il}\\ g_{kj} & g_{kl}\end{vmatrix}(X^iY^j-X^jY^i)(X^kY^l-X^lY^k)},$$

这里 σ 由向量

$$X=\sum_{i=1}^{n} X^i\partial_i,\ Y=\sum_{j=1}^{n} Y^j\partial_j$$

决定．Ricci 张量 R_{ij} 在向量 X 上的值与截面曲率以下面的方式相联系：设向量 X，$Y_1, \cdots, Y_{n-1}$ 组成 T_pM^n 中的一个规范正交基，那么

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{ij}X^iX^j=\sum_{k=1}^{n-1}K(p, \sigma_k),$$

这里 σ_k 是向量 X 和 Y_k 组成的 2 维方向．

特殊类型的 Riemann 空间．除了一般（任意）的 Riemann 空间外，还有一些其上可以引入附加结构的 Riemann 空间．当某类几何的或代数的条件直接加在度量上时就会产生这些结构．一些重要类型的 Riemann 空间就是这样来定义的：常数截面曲率的流形（见**空间形式**（space forms）），**齐性空间**（homogenuous space），**对称空间**（symmetric space），Hermit 流形和 Kähler 流形（Kähler manifold），Einstein 空间等．

推广．Riemann 几何学的思想和大范围几何学的发展已经导致 Riemann 几何学的概念的一系列推广．

伪 Riemann 几何学（pseudo-Riemannian geometry）是关于**伪 Riemann 空间**（pseudo-Riemannian space）的理论．这是一种其上给定了一个非退化的对称张量场的流形．

Finsler 几何学（Finsler geometry）是关于这样的微分流形的理论，这种流形的切丛上给定了一个关于 λ 是齐 1 次的函数 $F(x, \lambda)$．一条曲线 $c(t)$ 的长度 l 如下计算：

$$l=\int_0^1 F(c, \dot{c})dt.$$

有界曲率空间（spaces of bounded curvature）指的是关于具有**内部度量**（internal metric）（对光滑性不作任何假定）且其上任何有界 Borel 集的全曲率都有定义的 2 维度量流形的理论．凸曲面的内蕴几何学与这个理论有关（[5]）．这一类度量空间可以通过对 2 维 Riemann 空间附加 2 维度量流形得到，这种 2 维度量流形的度量在每点的一个邻域中可以由 Riemann 度量借助总体上有界的绝对 Gauss 曲率的积分一致逼近．

曲率不大于 K 的空间指的是关于具内部度量的完全度量流形的理论，在这种流形中由最短线组成的三角形的内角之和不大于常数曲率 K 的平面中具有相同长度的边组成的三角形的内角之和（此外，还假定任何两点可以由唯一的最短线连接）．亦见**测地几何学**（geodesic geometry）；**共形几何学**（conformal geometry）；**广义 Riemann 空间**（Riemannian space, generalized）；**大范围 Riemann 几何学**（Riemannian geometry in the large）．

参考文献

[1] Riemann, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, in Das Kontinuum und andere Monographien, Chelsea, reprint, 1973.

[2] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967（中译本：П. К. 洛薛夫斯基，黎曼几何与张量分析，高等教育出版社，1955，上、下册）.

[3] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[4] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[5] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1984（中译本：А. Д. 亚历山大洛夫，凸面的内蕴几何学，科学出版社，1962）.

[6] Бураго, Ю. Д., Залгаллер В. А., 《Успехи матем. наук》, 32（1977）, 3, 3－55.

[7] Milnor, J. W., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963.

[8] Cartan, E., Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1928.

[9] Kulkarni, R. S., Curvature and metric, *Ann. of Math.*, 91（1970）, 2, 311－331.

[10] Wolf, J. A., Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1977.

В. А. Топоногов 撰

【补注】 在西方，也用到下面的与“测地凸”相近的概念．区域 $U\subset M^n$ 称为：1）单的（simple），如果对每一对点 $p, q\in U$，在 U 中至多存在一条连接它们的测地线；2）凸的（convex），如果对每一对点 $p, q\in U$，在 U 中恰存在一条连接它们的最短线；3）强凸的（strongly convex），如果它是单且凸的．

参考文献

[A1] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry, Acad. Press, 1983.
[A2] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982(译自德文).
[A3] Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., Riemannian geometry, Springer, 1987.
[A4] Boothby, W., An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Acad. Press, 1975

潘养廉 译

大范围 Riemann 几何学[Riemannian geometry in the large; Римановa геометрия в целом]

Riemann 几何学的一个分支，研究 Riemann 流形的局部性质和整体性质之间的联系．"大范围 Riemann 几何学"这个名称通常是指**大范围几何学**(geometry in the large)所特有的特定范围的问题和方法而言的．大范围 Riemann 几何学中最基本的是研究 Riemann 流形的曲率和拓扑之间的联系．因而，要研究与曲率满足给定条件的 Riemann 流形的拓扑结构和度量结构有关的一些问题，例如，在给定的光滑流形上曲率具有给定性质的那种 Riemann 度量的存在性问题(**截面曲率**(sectional curvature) K_σ; Ricci 曲率(Ricci curvature) Ric; **标量曲率**(scalar curvature) K_{sc}))．已经得到的大部分结果与曲率不变号的空间有关．大范围 Riemann 几何学与**齐性空间**(homogenuous space)理论和测地线的变分理论(见**测地线**(geodesic line))有密切关系．关于 Riemann 流形的子流形，见**等距浸入**(isometric immersion)和**浸入流形的几何学**(geometry of imbedded manifolds)．

大范围 Riemann 几何学的方法具有综合性的特点，除了局部微分几何学外，还广泛地用到微分方程理论和 **Morse 理论**(Morse theory)．主要的成绩是发现了一些卓有成效的构造，诸如闭测地线的构造，极小曲面或测地曲面的构造、极限球面的构造以及凸集的构造．对 Riemann 流形的拓扑的研究通常领先于其度量性质的研究．后者常常是通过与适当的标准空间作比较来完成的(见下面的比较定理)．

拓扑结构．对于闭曲面，曲率与拓扑之间的关系本质上是由 Gauss-Bonnet 公式决定的(见 **Gauss-Bonnet 定理**(Gauss-Bonnet theorem))．在闭曲面中，只有球面 S^2 和射影平面 P^2 能有正曲率的度量；只有环面和 Klein 瓶能有零曲率的度量．维数 $n>2$ 的 Riemann 流形的结构所知还甚少(1991)．下面给出一些已知定理的例子．

一个 $K_\sigma \leqslant 0$ 的单连通完全 Riemann 流形 M^n 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$(Hadamard-Cartan 定理(Hadamard-Cartan theorem))；此外，对任意点 $x \in M^n$，指数映射(exponential mapping) $\exp_x$ 是切空间 $T_x M^n$ 到 M^n 上的微分同胚．

对 $K_\sigma > 0$ 的闭 Riemann 流形球面定理(sphere theorem)成立：一个 $0<\delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$ 的完全 Riemann 流形 M^n 称为 δ 挤压(δ-pinched)流形；如果它是单连通的且 $\delta > 1/4$，那么 M^n 同胚于 S^n．对偶数 n，这个界是精确的．当 $\delta = 1/4$ 时，存在不同胚于 S^n 的流形 M^n：它们是秩 1 的对称空间且只有这些空间(见**对称空间**(symmetric space))．对奇数 n，即使 $\delta = 1/4$, M^n 同胚于 S^n 的结论仍然正确．当 $n<7$, $n \neq 4$ 时，与 S^n 同胚蕴含与 S^n 微分同胚．当 $n \geqslant 7$ 时，与 S^n 的微分同胚需用到比球面定理更强的挤压条件来建立(取 $\delta > 0.87$ 就足够，而如果 $n \to \infty$，则取 $\delta > 0.66$)．也已经知道：在更强的挤压条件下(取 $\delta > 0.98$ 就足够，当 $n \to \infty$ 时取 $\delta > 0.66$)，一个非单连通的 M^n 微分同胚于一个常数曲率的空间(S^n 关于一个离散等距子群的商空间)．关于加在 K_σ 上的能保证与秩 1 的对称空间同胚的条件则有许多结果(见[14]，[15])．

一个开的，即完全非紧的，且 $K_\sigma > 0$ 的 Riemann 流形总是与 $\mathbf{R}^n$ 微分同胚的．如果每一条端点在区域 $X \subset M^2$ 中的测地线必定全部落在 X 中，那么 X 就称为绝对凸的(absolutely convex)．设 M^n 是 $K_\sigma \geqslant 0$ 的开 Riemann 流形．那么，在 M^n 中有一个全测地的绝对凸的闭子流形 N，使得 M^n 微分同胚于 N 在 M^n 中的**法丛**(normal bundle)空间 $\nu(N)$(如果 $K_\sigma > 0$，那么 $\dim N = 0$)．当 $\dim N = 1$ 或 $n-1$ 时，以及对一切齐性空间，M^n 甚至与具有法丛标准度量的 $\nu(M)$ 是等距的．当 $n \leqslant 3$ 时，这个结果给出 $K_\sigma \geqslant 0$ 的开 Riemann 流形的完全分类．

直线(straight line)是其上的任何线段均为最短线的测地线．柱定理(cylinder theorem)陈述为：$K_\sigma \geqslant 0$ 的开流形 M^n 等距于直积 $M^{n-k} \times R^k (0 \leqslant k \leqslant n)$，这里 M^{n-k} 不包含直线．条件 $K_\sigma \geqslant 0$ 可以用 $\mathrm{Ric} \geqslant 0$ 替代．

基本群．当 $K_\sigma > 0$ 和 n 为偶数时，闭流形 M^n 或者是可定向且单连通的、或者是不可定向的且基本群 $\pi_1(M^n) = \mathbf{Z}_2$；当 n 为奇数时，它总是可定向的，但关于 $\pi_1(M^n)$，除了球面定理的一些限制外，知之甚少．即使对于常数曲率 $K_\sigma = 1$ 的空间 M^n，当 n 为奇数时，完全描述 $\pi_1(M^n)$ 可能有的结构也是一个困难的问题(见[9])．

如果 $K_\sigma = 0$，那么 M^n 的万有覆叠 $\widetilde{M}^n$ 等距于 $\mathbf{R}^n$，基本群 $\pi_1(M^n)$ 同构于 $\mathbf{R}^n$ 的一个无不动点的离散等距群；它包含平移子群作为有限指数的子群．(于是，M^n 容许平坦环面作为它的有限等距覆叠空间．)

如果在 $\widetilde{M}^n$ 上 $K_\sigma \leqslant 0$，那么 $\widetilde{M}^n$ 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$，因而对 $i>1$ 所有的同伦群 $\pi_i(M^n)$ 是平凡群，M^n 的伦型由 $\pi_1(M^n)$ 决定．如果 $K_\sigma<0$，那么 $\pi_1(M^n)$ 的任何 Abel（甚至是任何可解）子群是无限循环群，在这个意义上它是完全非交换群．当 $K_\sigma \leqslant 0$ 时，下面的结果是已知的．设 Γ 是 $\pi_1(M^n)$ 的可解子群，那么 Γ 同构于 $\mathbf{R}^n$ 的一个（无不动点的）离散等距群，M^n 包含一个等距于 $\mathbf{R}^n/\Gamma$ 的紧全测地子流形．以测地线上无共轭点的条件来替代 $K_\sigma \leqslant 0$，就足以使这个情形成立．

对于两个具有同一负常数曲率且相同维数 $n \geqslant 3$ 的流形，它们的 π_1 群同构就蕴含它们是等距的（Mostow 刚性定理（Mostow rigidity theorem））．

满足 $\max|K_\sigma| \cdot \operatorname{diam} M^n<\varepsilon$ 的 Riemann 流形称为 ε 平坦的．对任意的 $\varepsilon>0$，这种流形拓扑上可以不同于局部平坦流形．对任意的 $n \geqslant 2$，存在一个 ε_n 使得对 ε_n 平坦的 M^n 在 $\pi_1(M^n)$ 中存在有限指数的幂零子群．在这种情形下，M^n 具有一个有限（重数仅与 n 有关）覆叠，该覆叠微分同胚于一个幂零 Lie 群关于它的一个离散子群的商空间（见[8]）．

曲率 $\mathrm{Ric} \geqslant a>0$ 的完全 Riemann 流形具有有限直径 $\operatorname{diam} M^n \leqslant \pi/\sqrt{a}$ 并因而也具有有限群 $\pi_1(M^n)$．如果闭流形 M^n 满足 $\mathrm{Ric} \geqslant 0$，那么存在有限正规子群 $\Gamma \subset \pi_1(M^n)$，使得 π_1/Γ 是 $\mathbf{R}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ 的一个离散等距子群；此外，$\widetilde{M}^n$ 分解成度量直积 $M^* \times \mathbf{R}^k$，这里 M^* 是闭流形，这个分解关于 $\pi_1(M^n)$ 是不变的且 Γ 在 $\mathbf{R}^k$ 中是平凡的．

除了对 $\pi_1(M^n)$ 的研究外，还有利用 δ 挤压流形 M^n 的调和微分形式的理论对 Betti 数 b_k 的一些估计．当 $\delta>(n-3)(4n-9)^{-1}$ 和 $n \geqslant 5$ 是奇数时，$b_2=0$．

比较定理．Riemann 流形的许多整体性质是通过将所讨论的 Riemann 流形上的结构与一个标准空间上类似的结构作比较得到证明的．这种标准空间通常是常数曲率的流形，或者，比较少的场合，是别的对称空间．以下，一个 c 平面（c-plane）当 $c=0$ 时表示 $\mathbf{R}^2$，当 $c>0$ 时表示半径为 $c^{-1/2}$ 的球面 S_c^2，而当 $c<0$ 时表示曲率为 c 的 Лобачевский 平面．

下面的关于角的比较的Топоногов 定理（Toponogov theorem on the comparison of angles）有许多应用：在 Riemann 流形 M^n 中，设所有的 $K_\sigma \geqslant c$，令 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个由最短线组成的三角形的内角，$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$ 是 c 平面中一个具相同长度的边组成的三角形的对应角，那么 $\alpha_i \geqslant \alpha_i'$．如果 $K_\sigma \leqslant c$ 且 M^n 中所讨论的那个三角形的不同边上的任意两点均能用唯一的最短线连接，那么 $\alpha_i \leqslant \alpha_i'$．这个定理等价于下面的凸性条件（convexity condition）：如果在 M^n 中最短线 ab，ac 组成的角与 c 平面中同样长度的最短线 $a'b'$，$a'c'$ 组成的角相等，那么 $\rho_{M^n}(b, c) \leqslant \rho_c(b', c')$．在这里作比较的实质上是最短线的发散速率．

Rauch 比较定理（Rauch comparison theorem）比较的是：在 M^n 的截面曲率不小于 M'^n 的截面曲率这个（自然的比较）条件下，当 M^n 和 M'^n 中两条最短线 ab 和 $a'b'$ 绕它们的原点 a 和 a' 以同一速率转动时端点 b 和 b' 的运动速率，此时 b 的运动速率不大于 b' 的速率．在基本的情形（与 c 平面比较）下，Rauch 定理等价于角的比较定理的无穷小说法．

有一些与 Rauch 定理类似的定理，在这些定理中点 a，a' 在与 ab，$a'b'$ 保持正交的超曲面上运动．还有对子流形的管状邻域的体积的比较定理（见[13]、[16]）．

极值定理．比较定理导致对 M^n 的诸如直径、单射半径、闭测地线的长度、给定半径的球面体积等性质的估计．极值定理则回答与这些估计中等号成立的情形有关的问题．

对 $K_\sigma \geqslant 1$ 的 M^n，总有 $\operatorname{diam} M^n \leqslant \pi$．等号仅在单位球面时达到．如果 M^n 是闭的且当 n 是偶数时 $0<K_\sigma \leqslant 1$ 或当 n 是奇数时 $1/4<K_\sigma \leqslant 1$，那么单射半径 $r_{\mathrm{in}}(M^n) \geqslant \pi$ 且闭测地线的长度 $\geqslant 2\pi$．如果在这种情形下 M^n 上还有一条长度为 2π 的闭测地线 γ，那么，与 n 的奇偶性无关，M^n 等距于 S_1^n（见[6]）．在 $K_\sigma \leqslant c$ $(K_\sigma \geqslant c)$ 的 M^n 中半径 $r<r_{\mathrm{in}}(M^r)$ 的球面 D 的体积不小于（不大于）常数曲率 c 的空间中同一半径的球面 D_c 的体积，等号仅当 D 等距于 D_c 时成立．

极值定理并不总是与曲率估计有关的．例如，对一个闭曲面 F 中的任意点，设它的共轭点集仅由一个点组成，那么 F 等距于一个球面．

拓扑型的有限性．在具有一致有界曲率和下有界单射半径的闭 Riemann 流形中，即 $\operatorname{Vol} M^n<C_1$，$r_{\mathrm{in}}>C_2>0$，$K_\sigma<C_3$，只有有限个是两两不同伦等价的．且如果 $K_\sigma<C_3$ 换成 $|K_\sigma|<C_3$，那么只有有限个是两两不同胚的．在这个结论中，条件 $r_{\mathrm{in}}>C_2>0$ 可以用条件 $\operatorname{Vol} M^n \geqslant C_4>0$，$\operatorname{diam} M^n<C_5$ 替代，后者蕴含前者但更容易验证（见[14]）．

对 K_σ 不变号的 Riemann 流形，保证其拓扑型的有限性的条件可以简化．例如，对偶数 n 和 $K_\sigma>0$ 的情形，条件 $\max K_\sigma<C \min K_\sigma$ 就已足够．

当 $n>3$ 时，对 $-1 \leqslant K_\sigma<0$ 的 M^n，成立估计 $\operatorname{Vol} M^n>C(1+\operatorname{diam} M^n)$．因而，当 $n \neq 3$ 时，满足条件 $\operatorname{Vol} M^n<C_1$，$C_2<K_\sigma<0$ 的闭 Riemann 流形的拓扑型的个数是有限的．但是当 $n=3$ 时，有无限

多个两两不同胚的满足这些条件的 M^3(见[12]).

具有指定曲率的度量. 设 χ 是闭曲面 M^2 的 **Euler 示性数**(Euler characteristic). 为使 M^2 上的光滑函数 f 能成为 M^2 的一个 Riemann 度量的曲率，必要条件为当 $\chi>0$ 时 $\max f>0$, 当 $\chi<0$ 时 $\min f<0$, 当 $\chi=0$ 时 f 是变号的或 $f\equiv 0$. 这些条件也是充分条件. 2 次形式 ω 成为 M^2 的一个 Riemann 度量的**曲率形式**(curvature form) $\omega=KdS$ 的充要条件是 $\int_{M^2}\omega=2\pi\chi$. 如果 M^2 是闭流形 N^2 的开子流形，那么 M^2 上的任何光滑函数 f 是 M^2 的一个(可能非完全)Riemann 度量的曲率. f 成为非紧曲面的一个完全 Riemann 度量的曲率的充要条件对于有限连通曲面已经被确定(1983).

当维数增加时，曲率张量的独立分量的个数比度量张量的分量个数增加得快. 一个给定的张量场，至少局部地，能成为某个度量的曲率张量场所需的条件尚不清楚(1991). 但是对于数量曲率，当 $n>2$ 时，闭流形 M^n 上的满足 $\min f<0$ 的每个光滑函数 f 总是 M^n 中一个 Riemann 度量的数量曲率(见[4]). 如同 3 维环面的情形那样，存在不容有正数量曲率的流形(见[5]).

凸函数. Riemann 流形 M^n 上一个沿任何测地线为凸函数的标量函数 f 的存在性对这种 M^n 的结构加上了严格的限制. 例如，如果在 M^n 上存在一个凸函数 f, 那么 $\operatorname{Vol} M^n=\infty$. 如果 f 是严格凸的且对任何 c 集合 $f^{-1}(c)$ 是紧的，那么 M^n 微分同胚于 $\mathbf{R}^n$.

在许多情形下可以构造凸函数. 例如，当 $K_\sigma\leqslant 0$ 时，函数 $f_1(x)=\rho(x,p)$, $f_2(x)=\rho(x,p)^2$ $(p\in M^n)$ 都是凸函数. 如果 $K_\sigma\leqslant 0$ 且 $\gamma: M^n\to M^n$ 是一个等距，那么函数 $\delta_\gamma(x)=\rho(x,\gamma(x))$ 是凸函数. 当 $K_\sigma\geqslant 0$ 时，存在 $f^{-1}(0)$ 为紧集的凸函数; 这是与极限球面的补集(当 $K_\sigma\geqslant 0$ 时)的绝对凸性以及如果 $K_\sigma\geqslant 0$, 那么集 $U\subset M^n$ 的凸性蕴含集 $\{x\in U: \rho(x,\partial U)\geqslant t\}$ 的凸性这个事实有关系的.

对于具有附加结构的 Riemann 流形，如 Kähler 流形，大范围 Riemann 几何学的问题也已经被研究了(见[10]).

参考文献

[1] Gromoll, D., Klingenberg, W., and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

[2] Бураго, Ю. Д, Залгаллер, В. А., 《Успехи математ наук》, **32** (1977), 3, 3 – 55.

[3] Cheeger, J. and Ebin, D., Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, 1975.

[4] Исследования по метрической теории поверхностей, пер. с англ. и франц., М., 1980.

[5] Schoen, R. and Yau, S.-T., Existence of imcompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, *Ann. of Math* **110** (1979), 127 – 142.

[6] Топоногов, А., 《Сиб. матем. ж.》, **15** (1974) 6, 1348 – 1371.

[7] Gromov, M. and Lawson, H. B., Jr., Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group Ⅰ, *Ann. of Math.*, **111** (1980), 2, 209 – 230.

[8] Buser, P. and Karcher, H., Gromov's almost flat manifolds, *Astérique*, **81** (1981).

[9] Wolf, J., Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1977.

[10] Goldberg, S., Curvature and homology, Acad. Press, 1962.

[11] Besse, A. L., Manifolds all of whose geodesics are closed, Springer, 1978.

[12] Thurston, W., The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton Univ. Press, 1978. Preprint.

[13] Heintze, E. and Karcher, H., A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **11** (1978), 4, 451 – 470.

[14] Cheeger, J., Pinching theorems for a certain class of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, **91** (1969), 3, 807 – 834.

[15] Min-Oo and Ruh, E., Comparison theorems for compact symmetric spaces, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **12** (1979), 335 – 353.

[16] Gray, A., Comparison theorems for the volumes of tubes as generalizations of the Weyl tube formula, *Topology*, **21** (1982), 2, 201 – 228

Ю. Д. Бураго, В. А. Топоногов 撰

【补注】 关于曲率和基本群之间的相互关系，更多的结果可参见**多循环群**(polycyclic group)和**群和代数中的多项式和指数增长**(polynomial and exponential growth in groups and algebras)后的补注.

设 ξ 是 $m\in M$ 处的单位切向量，γ_ξ 是它的测地线. 对充分小的 t, 出发点 $m=\gamma_\xi(0)$ 和 $\gamma_\xi(t)$ 之间的距离等于 t, 但是对大的 t 这就可能不再成立. (切丛的球面子丛上的)割值函数(cut value function)是由

$$\operatorname{Cut\,val}(\xi)=t_0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} d(\gamma_\xi(0),\gamma_\xi(t))=t, \text{ 对 } t\leqslant t_0, \\ d(\gamma_\xi(0),\gamma_\xi(t))<t, \text{ 对 } t>t_0. \end{array}$$

定义的. 作为定义，$m\in M$ 的割迹(cut locus)是点集 $\{\exp_m(\operatorname{Cut\,val}(\xi)\xi)\}=\operatorname{Cut\,loc}(m)$, 这里 ξ 取遍 m 处的一切单位切向量，$\exp_m: T_mM\to M$ 是 $m\in M$ 处的指数映射; 见**指数映射**(exponential mapping)和 **Riemann 几何学**(Riemannian geometry)中的"指数映射"节.

$m\in M$ 处的单射半径(radius of injectivity),

inj(m)、定义为 $\inf\{\mathrm{Cutval}(\xi): \xi\in T_m M, \|\xi\|=1\}$. M 的整体单射半径（global radius of injectivity）是 $\inf\{\mathrm{inj}(m): m\in M\}$. 如果 M 是紧的，那么它总是正的，但如果 M 是非紧的，则它可能等于零.

割迹是 H. Poincaré 以 "ligne de partage" 的名称引入的. 每一个紧曲面容有一个常数曲率的 Riemann 度量. 沿割迹"剪贴"一个高亏格曲面 M 可以得到 M 的一个非常好的表示：一个其边成对地等同的多边形所围成的区域（见[A3]）. 对于球面，即亏格 0 的情形，一点的割迹是它的对径点.

参考文献

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces, Springer, 1988, Sect. 11. 4(译自法文).

[A2] Klingenberg, W., Riemannian geometry, W. de Gruyter, 1982, Chapt. 2.

[A3] Gallot, S., Hulin, D. and Lafontaine, J., Riemannian geometry, Springer, 1987(译自法文).

[A4] Boothby, W., An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Acad. Press, 1975.

[A5] Greub, W., Halperin, S. and Vanstone, R., Connections, curvature, and cohomology, 1–3, Acad. Press, 1992 – 1996.

潘养廉 译

Riemann 流形 [Riemannian manifold; Римановo многообразие]

带有 **Riemann 度量**（Riemannian metric）的**微分流形**（differentiable manifold）. 本质上，Riemann 流形与 **Riemann 空间**（Riemannian space）是相同的.

М. И. Войцеховский 撰 潘养廉 译

Riemann 度量 [Riemannian metric; Римановa метрика]

由一个正定**二次型**（quadratic form）给定的空间度量. 如果在空间 V_n 中引入局部坐标系$(x^1, \cdots, x^n)$，且在每一点 $X(x^1, \cdots, x^n)\in V_n$ 定义了函数 $g_{ij}(X)$ $(i, j=1, \cdots, n)$，$\det(g_{ij})>0$，$g_{ij}(X)=g_{ji}(X)$，它们是一个二阶共变张量的分量，那么这个张量称为 V_n 的基本度量张量（fundamental metric tensor）. 共变向量$(dx^1, \cdots, dx^n)$的长度 ds 可用基本张量表为：

$$ds^2=g_{ij}(X)dx^i dx^j;$$

形式 $g_{ij}dx^i dx^j$ 是正定二次型. 由形式 ds^2 决定的 V_n 的度量称为 Riemann 度量，该空间连同其中引入的那个 Riemann 度量称为一个 **Riemann 空间**（Riemannian space）. 在一个微分流形上指定一个 Riemann 度量意味着在这个流形各点的切空间上以可微地依赖于点的方式指定一个 Euclid 结构.

Riemann 度量是 3 维 Euclid 空间中曲面的第一基本形式（first fundamental form）——曲面的内部度量的推广. 空间 V_n 基于确定的 Riemann 度量的几何学称为 **Riemann 几何学**（Riemannian geometry）.

Riemann 度量的概念有多种推广. 借助于非定非退化的二次型可以定义伪 Riemann 度量（见**伪 Riemann 空间**（pseudo-Riemannian space）和**相对论**（relativity theory））. 退化的 Riemann 度量，即借助于 $\det(g_{ij})=0$ 的函数 $g_{ij}(x)$ 定义的一种度量形式，则定义了**半 Riemann 空间**（semi-Riemannian space）.

参考文献

[1] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.

[2] Рашевский, П. К., Римановa геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967（中译本：П. К. 洛舒夫斯基，黎曼几何与张量解析，高等教育出版社，1955，上、下册）.

[3] Riemann, B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, in Das Kontinuum und andere Monographien, Chelsea, reprint, 1973.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】 形容词"半 Riemann"也用于处处非退化的不定度量，见[A1]. 另外的参考文献亦见 **Riemann 张量**（Riemann tensor）.

参考文献

[A1] O'Neill, B., Elementary differential geometry, Acad. Press, 1966.

潘养廉 译

Riemann 空间 [Riemannian space; Римановo пространство]

一种空间，在它的小区域中 Euclid 几何学（除了阶数高于该区域维数的无穷小以外）近似成立，虽然在大范围内这种空间可以是非 Euclid 的. 这种空间以 B. Riemann 的名字命名，他在 1854 年概括描述了这种空间的理论基础（见 **Riemann 几何学**（Riemannian geometry））. 最简单的 Riemann 空间是 Euclid 空间和另外两种与 Euclid 空间密切相关的常数曲率空间，在这两种空间中分别成立 **Лобачевский 几何学**（Lobachevskiĭ geometry）（亦称双曲几何学（hyperbolic geometry））和 **Riemann 几何学**（Riemannian geometry）（亦称椭圆几何学（elliptic geometry））.

根据 БСЭ-3 中文章"Riemann 空间"中材料撰写.

【补注】 Riemann 空间亦称 Riemann 流形.

参考文献见 **Riemann 张量**（Riemann tensor）；**Riemann 几何学**（Riemannian geometry）.

潘养廉 译

广义 Riemann 空间 [Riemannian space, generalized; Римановo пространство обобщенное]

曲率满足某些限制的具有**内度量**（internal metric）

的空间."曲率上有界"的空间和其他一些空间属于此类(见[3]).广义 Riemann 空间不同于 **Riemann 空间**(Riemannian space)不仅在于其更具有一般性,而且在于其定义和研究仅建立在它们度量的基础上,而不依赖于坐标.当曲率和最短线(长度等于两端点间距离的曲线)的性态满足适当的条件时,广义 Riemann 空间成为 Riemann 空间,这就给出了 Riemann 空间的一个纯度量定义.

广义 Riemann 空间的定义是建立在曲率和测地三角形(geodesic triangle)的角盈(角盈(excess) = 内角和 $-\pi$)的经典关系上的.这些概念被引入具有内度量的空间,使得空间中每点有一个邻域,其中的任意两点可由一条最短线相连.以下如无另外约定总假设这一条件满足.一个三角形(triangle) $T = ABC$ 是两两连接三个不同点 A, B, C(三角形的顶点)的最短线 AB, BC, CA(三角形的边)的三元组.在任意度量空间中可定义两曲线间的夹角:设 L, M 是在具有度量 ρ 的空间中从同一点 O 出发的两条曲线.取点 $X \in L$, $Y \in M$ $(X, Y \neq O)$,以 $x = \rho(O, X)$, $y = \rho(O, Y)$, $z = \rho(X, Y)$ 为边构造 Euclid 三角形,$\gamma(x, y)$ 是边 z 所对的角.定义 L 和 M 之间的上角(upper angle)为

$$\overline{\alpha} = \overline{\lim}_{x, y \to 0} \gamma(x, y). \tag{1}$$

三角形的上角是顶点 A, B, C 处两边之间的上角 $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$,三角形的角盈是 $\overline{\delta}(T) = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma} - \pi$.

有界曲率($\leqslant K$ 且 $\geqslant K'$)的广义 Riemann 空间由下述条件定义:

A)对收缩到一点的任意三角形序列 T_n,

$$K \geqslant \overline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \geqslant \underline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \geqslant K', \tag{2}$$

其中 $\sigma(T_n^0)$ 是和 T_n 有同样边的 Euclid 三角形的面积(如果 $\sigma(T_n^0) = 0$,则 $\overline{\delta}(T_n) = 0$).在下面两个自然的附加条件下,这样的空间成为 Riemann 空间:

1) 空间的局部紧性(local compactness of the space)(这保证了在有内度量的空间中最短线的局部存在性);

2) 最短线的局部可延长性(local extendibility of shortests),即每一点有一个邻域 U,使得任意最短线 $XY(X, Y \in U)$ 可延长到端点以外.在所有这些条件下广义 Riemann 空间是 Riemann 空间(见[4]);更进一步,在每点的邻域中可引入坐标 x^i,使得度量可由线元 $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ 给出,其中系数 $g_{ij} \in W_q^2 \cap C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.所以,可以给出**平行移动**(parallel displacement)(具有连续的 Γ_{jk}^i),并且几乎处处可给出**曲率张量**(curvature tensor)(见[9]).

进一步,已经证明([9])坐标 x^i 可取成调和的,即满足方程 $\sum_{ij} g^{ij} \Gamma_{ij}^l = 0$.对任意 α, $0 < \alpha < 1$,调和坐标系形成一个 $C^{3,\alpha}$ 类的图册.

一个 $K = K'$ 的有界曲率广义 Riemann 空间满足条件 1) 和 2) 时,是一个常 **Riemann 曲率**(Riemannian curvature) K 的 Riemann 空间(见[3]).

Riemann 曲率在 K 和 $K'(K' \leqslant K)$ 之间的 Riemann 空间是曲率 $\leqslant K$ 和 $\geqslant K'$ 的广义 Riemann 空间,且满足条件 1) 和 2).

一个"曲率 $\leqslant K$ 的空间"由 (2) 中左边的不等式定义,即由以下条件定义:

A^-)对任意收敛到一点的三角形序列 T_n,

$$\overline{\lim} \frac{\overline{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \leqslant K. \tag{3}$$

另一个等价的定义和研究广义 Riemann 空间的出发点是建立在比较一个任意三角形 $T = ABC$ 和常曲率 K 的空间中具有相同长度的边的三角形 T^K 的基础上的.令 $\alpha_K, \beta_K, \gamma_K$ 是这样一个三角形的角,三角形 T 的相对上角盈定义为 $\overline{\delta}_K(T) = (\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma}) - (\alpha_K + \beta_K + \gamma_K)$.曲率 $\leqslant K$ 的空间定义中的条件 A^-)可用下列条件代替:

A_1^-)任意点都有一个邻域 R_K^-,在其中 $\overline{\delta}_K(T) \leqslant 0$ 对任意三角形 T 成立.

关于度量的凹性的更强的性质也成立,即设 L 和 M 是从同一点 O 出发的最短线,$\gamma_K(x, y)$ 是常曲率 K 的空间中边为 $x = \rho(O, X)$, $y = \rho(O, Y)$, $z = \rho(X, Y)$ $(X \in L, Y \in M)$ 的三角形 T^K 中 z 边所对的角.在 R_K^- 中(局部地)角 $\gamma_K(x, y)$ 是一个非减函数($\gamma_K(x_1, y_1) \leqslant \gamma_K(x_2, y_2)$ 当 $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$,一个 K 凹度量).因此可得到下列局部性质:

Ⅰ)从同一点出发的任意两条最短线之间存在一个角甚至一个"强意义下的角" $\alpha_C = \lim_{x, y \to 0} \gamma_K(x, y)$(所以,特别地,如果 $y =$ 常数,则 $\lim_{x \to 0}(y - z)/x = \cos \alpha_C$);

Ⅱ)对 R_K^- 中一个三角形的角 α, β, γ 和对应的三角形 T^K,

$$\alpha \leqslant \alpha_K, \beta \leqslant \beta_K, \gamma \leqslant \gamma_K;$$

Ⅲ)在 R_K^- 中,如果 $A_n \to A$, $B_n \to B$,则最短线 $A_n B_n \to AB$(所以,R_K 中端点给定的最短线是唯一的).

对偶于曲率 $\leqslant K$ 的空间,曲率 $\geqslant K$ 的空间满足对偶于 K 凹性的条件:

A_1^+)每一点有一个邻域 R_K^+,在其中对应两条最短线 L 和 M 的角 $\gamma_K(x, y)$ 是一个非增函数(一个 K 凸度量(K-convex metric),亦见**凸度量**(convex metric)).

类似于曲率 $\leqslant K$ 的空间,对曲率 $\geqslant K$ 的空间,以下类似于 Ⅰ)和 Ⅱ)的(局部)性质成立:任意两

条最短线之间存在一个强意义下的角；对 R_K^+ 中的任意三角形，$\alpha \geqslant \alpha_K$，$\beta \geqslant \beta_K$，$\gamma \geqslant \gamma_K$. 代替 III)，最短线不交叠条件，或等价地，其延长的唯一性条件成立：如果在 R_K^+ 中 $AC \supset AB$、$AC_1 \supset AB$，则或者有 $AC \supset AC_1$ 或者有 $AC_1 \supset AC$.

这样，一个有界曲率空间可由结合决定两类空间（曲率上有界和下有界）的条件得到（进一步，在不等式(3)的左边不需要取 $\underline{\delta}$）. 类似于条件 A_1^+) 和 A_1^-)、条件 A) 可由以下条件代替：

A_1) 每一点有一个邻域 $R_{KK'}$. 对任意三角形 T、$\delta_K(T) \leqslant 0$，$\delta_{K'}(T) \geqslant 0$.

上述条件又等价于：

A_2) 对 $R_{KK'}$ 中的任意四点，存在常曲率 k 空间中的相应四点，对应点间有相同的距离，其中 $K' \leqslant k \leqslant K$，一般地，$k$ 依赖于 $R_{KK'}$ 中四点的选取（见[10]）.

曲率 $\leqslant K(\geqslant K')$ 的广义 Riemann 空间的一个例子是 Riemann 空间中的如下区域，其中每点处所有二维曲面元的 Riemann 曲率有上界 K（下界 K'）.

具有内度量的空间中的集合 V 称为凸的（convex），如果任意两点 X，$Y \in V$ 可由一条最短线 XY 连接并且每一条这样的最短线均位于 V 中.

在[7]中给出了如下结果：如果具有内度量的空间 R 是由两个曲率 $\leqslant K$ 的空间 R'，R'' 沿凸集 $V' \subset R'$，$V'' \subset R''$ 粘接而成的，则 R 也是曲率 $\leqslant K$ 的空间. 粘接条件是 $R = R' \cup R''$，$V' = V'' = R' \cap R''$，并且 R'，R'' 的度量由空间 R 的度量所诱导.

由定义，从一点 O 出发的两条曲线 L，M 在点 O 有相同方向（same direction），如果它们之间的上角为 0（如果 $L = M$，则称 L 在点 O 有确定的定向方向）. 点 O 的一个方向（direction）定义为在点 O 有相同方向的一类曲线. 点 O 的所有方向构成一个度量空间，其中两个方向间的距离由它们的任意两个代表之间的上角决定. 这个空间称为点 O 的方向空间（space of directions）.

下述结果已被证明（[5]）：如果点 O 位于曲率 $\leqslant K$ 的空间的一个同胚于 E^n 的邻域中，则点 O 的方向空间的曲率 $\leqslant 1$. 一般情形下，它不同胚于（$n-1$）维球面.

在二维情形，曲率 $\leqslant K$ 的流形的理论作为特殊情形包含于有界曲率流形的理论中（见**二维有界曲率流形**（two-dimensional manifold of bounded curvature））. 曲率 $\leqslant K$ 的二维流形的一个例子是具有内度量的 R_K 中的直纹面，即由端点割出两条可求长曲线 L_1，L_2 的最短线内部构成的曲面. 如果曲线 L_2 退化为一点 O，则此曲面称为由点 O 在曲线 L_1 上张成的最短线锥（cone of shortests）. 如果 L_1 是一个三角形 OAB，则这样的锥称为曲面三角形（surface triangle）（见[3]）.

度量空间之间的映射 $\varphi: M_1 \to M_2$ 称为非伸长的（non-stretching），如果对任意 X，$Y \in M$，$\rho_{M_1}(X, Y) \geqslant \rho_{M_2}(\varphi(X), \varphi(Y))$. M_1 中闭曲线 Γ_1 到 M_2 中闭曲线 Γ_2 上的映射 $\varphi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 称为保长的（length-preserving），如果在映射 φ 下 Γ_1 和 Γ_2 的对应弧长相等. 设 V 是常曲率 K 空间中的凸域，L 是 V 的周界. 如果存在一个区域 V 到度量空间 M 中的非伸长映射，同时是 L 到 M 中闭曲线 Γ 的保长映射，则称 V 优化（majorize）Γ，这个映射称为优化（majorizing）映射.

设 R_K 是有内度量的凸空间，C 是点 $O \in \Gamma$（Γ 是 R_K 中的可求长闭曲线）在 Γ 上张成的最短线锥，又设当 $K > 0$ 时，Γ 的长度 $l < 2\pi/\sqrt{K}$，则在常曲率 K 的空间中存在一个凸域 V 优化 Γ，并且对于相应的优化映射 φ 有 $\varphi(V) = C$. 这一性质是曲率 $\leqslant K$ 的空间特有的. V 的周界 L 到 Γ 上的保长非伸长映射的存在性已经是充分的（见[8]）.

圆盘 B 到度量空间 M 的连续映射 f 称为 M 中的一个曲面（surface）. 设 P 是一个三角剖分多边形，即内接于 B 的三角形 T_i 的复形. 顶点为 X，Y，Z 的三角形 T_i 对应于三边等于点 $f(X)$，$f(Y)$，$f(Z)$ 之间的距离的 Euclid 三角形 T_i^0. 设 $S_0(P)$ 是所有三角形 T_i^0 的面积 $S(T_i^0)$ 的和；这时，曲面 f 的面积（area of the surface f）$S(f)$ 定义为（见[3]）当 P 的顶点无限接近 B 时 $S_0(P)$ 的下极限，$S(f) = \lim S_0(P)$. 这一定义可修改如下（见[6]）：代替 $f(X)$，$f(Y)$，$f(Z)$，复形 P 的三角形 T_i 的顶点 X，Y，Z 对应于 M 中的点 X^P，Y^P，Z^P，其中复形 P 的顶点对应于相同的点，当且仅当它们在 f 下的象重合. 在对复形 P 的所有顶点 X_k，$\rho(f(X_k), X_k^P)$ 均趋于 0 的附加假设下，曲面 f 的面积 $L(f)$ 取为三边等于 X^P，Y^P，Z^P 之间的距离的 Euclid 三角形 T_i^0 的面积之和的下极限. 总有 $L(f) \leqslant S(f)$.

α) 如果 R_K 中的曲面序列 f_n 一致收敛于曲面 f，则

$$L(f) \leqslant \lim L(f_n) \text{（半连续性）}.$$

β) 如果 p 是 R_K 到 R_K 中的非伸长映射，且 f 是 R_K 中曲面，则

$$L(p \circ f) \leqslant L(f) \text{（Колмогоров 原理）}.$$

γ) R_K 中的曲面三角形 T 的面积 $S(f)$ 不大于对应的三角形 T^K 的面积，当且仅当 T 等距于 T^K 时二者相等（局部性质）.

δ) 在优化映射（见上述）的存在定理的条件下，面积 $S(G)$ 不大于常曲率 K 空间中周长为 1 的圆盘的面积（等周不等式）（见[3]，[6]）.

在[6]中解决了关于 R_K 中闭曲线上所张极小面积的曲面的存在性的 **Plateau 问题**(Plateau problem). 下述结论已被证明: 设 R_K 是曲率 $\leqslant K$ 的度量完全空间(对 $K>0$, 直径 $d(R_K)<\pi/2\sqrt{K}$)且设 Γ 是 R_K 中一条闭 Jordan 曲线, 则存在张在曲线 Γ 上的具有极小面积 $L(f)$ 的曲面 f. 设 Γ, $\Gamma_n(n=1,2,\cdots)$ 是这样一个空间中的闭 Jordan 曲线, $a(\Gamma)$, $a(\Gamma_n)$ 分别是 Γ 和 Γ_n 上所张曲面的极小面积, 如果 Γ_n 在某些参数化下一致收敛于 Γ, 则 $a(\Gamma)\leqslant \lim(\Gamma_n)$.

对具有不定度量的有界曲率二维流形已有研究. 具有不定度量的有界曲率高维空间, 特别是广义相对论中的空间的不依赖于坐标的定义问题, 尚未解决(1990).

参考文献

[1] Александров, А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.-Л., 1948(中译本: А. Д. 亚历山大洛夫, 凸曲面的内蕴几何学, 科学出版社, 1962).

[2] Александров, А. Д., 《Труды. Матем. ин-та АН СССР》, **38** (1951), 5 – 23.

[3] Александров, А. Д., Schrift. Inst. Math. Deutsch. Acad. Wiss., H. 1 (1957), 33 – 84.

[4] Берестовский, В. Н., 《Сиб. матем. ж.》, **16** (1975), 4, 651 – 662.

[5] Николаев, И. Г., 《Сиб. матем. ж.》, **19** (1978), 6, 1341 – 1348.

[6] Николаев, И. Г., 《Сиб. матем. ж.》, **20** (1979), 2, 345 – 353.

[7] Решетняк, Ю. Г., 《Матем. сб.》, **52** (1960), 3, 789 – 798.

[8] Решетняк, Ю. Г., 《Сиб. матем. ж.》, **9** (1968), 4, 918 – 927.

[9] Николаев, И. Г., 《Сиб. матем. ж.》, **24** (1983), 2, 114 – 132.

[10] Берестовский, В. Н., 《Сиб. матем. ж.》, **27** (1986), 1, 11 – 25.

А. Д. Александров, В. Н. Берестовский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rinow, W., Die innere Geometrie der metrischen Räume, Springer, 1961.

[A2] Gromov, M., Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Cedec-Nathan, 1981.

[A3] Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui, Astérisque (1985).

[A4] Pogorelov, A. V., Intrinsic geometry of surfaces, Amer. Math. Soc., 1973(译自俄文).

[A5] Busemann, H., The geometry of geodesics, Acad. Press, 1955.

陆珊年 译

齐性 Riemann 空间[**Riemannian space, homogeneous**; **Риманово пространство однородное**]

一个 **Riemann 空间**(Riemannian space)(M,γ), 其上具有一个有效传递运动群(见**运动**(motion)). 设 K 是固定点 $o\in M$ 的迷向子群, 那么通过一一映射 $G/K\ni gK \Longleftrightarrow go\in M$, 流形 M 等同于商空间 G/K. Riemann 度量被看作为 G/K 上的一个 G 不变度量. 通常人们还假定 G 是完全运动群中的闭子群. 在这种情形下, 迷向群 K 是紧的.

设 K 是一个 **Lie 群**(Lie group)G 的紧子群, 它不包含 G 的正规子群. 那么**齐性空间**(homogeneous space)$M=G/K$ 容有一个如下定义的不变 Riemann 度量 γ. 设 $\mathfrak{G}=\mathfrak{K}+\mathfrak{M}$ 是 M 中的化约结构, 即 G 的 **Lie 代数**(Lie algebra)$\mathfrak{G}$ 关于 K 的 Lie 代数 $\mathfrak{K}$ 和 $\mathfrak{G}$ 中在 K 的伴随表示 $\mathrm{Ad}\,K$ 下不变的子空间 $\mathfrak{M}$ 的直和分解. 空间 $\mathfrak{M}$ 自然地等同于点 $o=eK$ 处的切空间 $T_oM\approx\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. 群 K 在 T_oM 中的迷向表示等同于表示 $\mathrm{Ad}K|\mathfrak{M}$. M 上的任何 G 不变 Riemann 度量 γ 可由 $\mathfrak{M}$ 中某个 $\mathrm{Ad}\,K$ 不变内积 γ_0 经 G 的平移:

$$\gamma_{go}(X,Y)=\gamma_0(g^{-1}X,g^{-1}Y),$$
$$X,Y\in T_{go}M,\ g\in G$$

得到. 这种内积的存在性由迷向群 $\mathrm{Ad}K|\mathfrak{M}$ 是紧的这个事实导出.

任何与单连通齐性 Riemann 空间 $\widetilde{M}$ 局部等距的齐性 Riemann 空间都可由 $\widetilde{M}$ 关于任一 Clifford-Wolf 离散等距群(即流形 $\widetilde{M}$ 的将一切点作等距离位移的运动, 见[2])的因子化来得到.

研究得最清楚的几类齐性 Riemann 空间是 Riemann 对称空间(亦见**对称空间**(symmetric space)); 齐性 Kähler 空间(见 **Kähler 流形**(Kähler manifold))和齐性四元数空间;(在[9],[10]被分类的)迷向不可约齐性 Riemann 空间; 正规齐性 Riemann 空间, 这种空间中 $\mathfrak{M}$ 的数积 γ_0 是由 $\mathfrak{G}$ 上的一个非退化的对称 $\mathrm{Ad}\,G$ 不变双线性形式定义的; 自然约化齐性 Riemann 空间, 这种空间的特征是其中的任何测地线是单参数运动群的轨线.

具有各种不同曲率张量条件的齐性 Riemann 空间的结构被很好地研究过. 例如, 具有正截面曲率的齐性 Riemann 空间的分类是已知的([5]). 具有非正曲率的([8]), 或非负曲率和非负 Ricci 曲率的([4])齐性 Riemann 空间的单传递运动群的结构已有刻画. 具有可解运动群 G 的齐性 Riemann 空间总有一非正数量曲率 sc, 而 $sc=0$ 的情形只可能出现于局部 Euclid 空间. 单连通齐性 Riemann 空间 G/K 上的任何不变 Riemann 度量有非正数量曲率, 当且仅当 K 是 G 的极大紧子群(见[4]).

如果（M, γ）的 **Ricci 张量**（Ricci tensor）ρ 与度量成比例：$\rho=\lambda\gamma$，$\lambda=$ 常数，那么齐性 Riemann 空间（M, γ）称为 Einstein 齐性 Riemann 空间. 刻画 Einstein 齐性 Riemann 空间的问题尚未解决（1991）. 人们只知道许多特殊的结果. 设（$M=G/K$, γ）是一个数量曲率为 sc 的 Einstein 齐性 Riemann 空间. 1）如果 $sc>0$，那么 M 是紧流形. 所有的这种空间在下列情形都已被刻画：a）如果（M, γ）是一个四元数空间；b）如果 M 微分同胚于一个秩 1 的对称空间；和 c）对某一类的自然约化齐性 Riemann 空间（见[7]）和对迷向不可约齐性 Riemann 空间（见[10]）. 2）如果 $sc=0$，那么 M 是一个局部 Euclid 空间. 3）如果 $sc<0$ 且 G 是么模群（即它的伴随表示算子的行列式等于 1），那么群 G 是半单的.

参考文献

[1] Kobayasi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1 – 2, Wiley, 1963 – 1968.

[2] Wolf, J., Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1977.

[3] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978.

[4] Berard Bergery, L., Sur le courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes, *Ann. Sci, Ecole Norm. Sup.*, 11 (1978), 4, 545 – 576.

[5] Berard Bergery, L., Les variétés riemanniennes simplement connexes de dimension impairé à courbure strictement positive, *J. Math. Pures Appl.*, 55 (1976), 47 – 67.

[6] Jensen, G. R., Einstein metrics on principal fiber bunduls, *J. Dif. Geom.*, 8 (1973), 599 – 614.

[7] d'Atri, J. E. and Ziller, W., Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 18 (1979), 1 – 72.

[8] Azencott, R. and Wilson, E. N., Homogeneous manifolds with negative curvature Ⅱ, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 8 (1976), 1 – 102.

[9] Мантуров, О. В., 《Тр. сем. по вект. и тенз. анализу》, 13 (1966), 68 – 145.

[10] Wolf, J., The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces, *Acta. Math.*, 120 (1968), 59 – 148.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】 关于 Einstein 流形的相当详尽的论述参见[A1]，特别是其中的第 7、8 两章.

通常 Riemann 空间的等距（isometry of a Riemannian space）是作为运动的同义词使用的，而在 Clifford-Wolf 离散群中的等距则称为 Clifford 平移（Clifford translation）（[2]）.

参考文献

[A1] Besse, A. L., Einstein manifolds, Springer, 1987.

潘养廉 译

Riesz 基 [**Riesz basis**; **Рисса базис**]

见 **Riesz 函数系**（Riesz system）.

Riesz 凸性定理 [**Riesz convexity theorem**; **Рисса теорема выпуклости**]

双线性型

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

在集合

$$\sum_{i=1}^{m}|x_i|^{1/\alpha}\leqslant 1,\quad \sum_{j=1}^{n}|y_j|^{1/\beta}\leqslant 1$$

（如果 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$，则分别是 $|x_i|\leqslant 1\,(i=1,\cdots,m)$ 和 $|y_j|\leqslant 1\,(j=1,\cdots,n)$）上的模的上确界 $M(\alpha,\beta)$ 的对数 $\ln M(\alpha,\beta)$，关于参数 α 和 β 是区域 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ 上的**凸函数（实变量的）**（convex function (of a real variable)），如果这个双线性型是实的（a_{ij}, x_i, $y_j\in\mathbf{R}_+$）；是区域 $0\leqslant\alpha$、$\beta\leqslant 1$, $\alpha+\beta\geqslant 1$ 上的凸函数（实变量的），如果这个双线性型是复的（a_{ij}, x_i, $y_j\in\mathbf{C}$）. 这一定理是由 M. Riesz（[1]）证明的.

这一定理被推广用于线性算子的情形（见[3]）. 设 $L_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 是某个测度空间上满足下述条件的所有复值函数的集合：当 $1\leqslant p<\infty$ 时函数的 p 次幂可积，当 $p=\infty$ 时函数本质有界. 如果 $T: L_{p_i}\to L_{q_i}(1\leqslant p_i, q_i\leqslant\infty, i=0,1)$ 是连续线性算子，则 T 是 $L_{p_t}\to L_{q_t}$ 的连续线性算子，其中

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},\quad t\in[0,1],$$

而且，T（作为从 L_{p_t} 到 L_{q_t} 的算子）的范数 k_t 满足不等式 $k_t\leqslant k_0^{1-t}k_1^t$（即它是对数凸函数）. 这一定理称为 Riesz-Thorin 插值定理（Riesz-Thorin interpolation theorem），有时也称为 Riesz 凸性定理（[4]）.

Riesz 凸性定理成为分析学中研究线性算子插值性质这一整个方向的出发点. Marcinkiewicz 插值定理（Marcinkiewicz interpolation theorem）（[5]）是 Riesz 凸性定理的首批推广中的一个，对于 $1\leqslant p_i\leqslant q_i\leqslant\infty$（$i=0,1$），在比 Riesz-Thorin 定理更弱的条件下，该定理证明了算于 $T: L_{p_t}\to L_{q_t}(t\in(0,1))$ 的连续性. 也见**算子的插值**（interpolation of operators）.

参考文献

[1] Riesz, M., Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, 49 (1926), 465 – 497.

[2] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G., Inequalities, Cambridge Univ. Press, 1934 (中译本: G. H. 哈代, J. E. 李特伍德, G. 波利亚, 不等式, 科学出版社, 1965).
[3] Thorin, G. O., An extension of a convexity theorem due to M. Riesz, *K. Fysiogr. Saallskap. i Lund Forh.*, **8** (1936), no. 14.
[4] Stein, E. M. and Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1975 (中译本: Elias M. Stein, Guido Weiss, 欧氏空间上的 Fourier 分析引论, 上海科学技术出版社, 1987).
[5] Marcinkiewicz, J., Sur l'interpolation d'opérateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **208** (1939), 1272 – 1273.
[6] Крейн, С. Г., Петунин, Ю. И., Семенов, Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978 (英译本: Krein, S. K., Petunin, Yu. I. and Semenov, E. M., Interpolation of linear operators, Amer. Math. Soc., 1982).
[7] Triebel, H., Interpolation theory, Springer, 1978.

В. М. Тихомиров 撰 朱学贤 译 刘和平 校

Riesz-Fischer 定理 [Riesz-Fischer theorem; Рисса-Фишера теорема]

建立空间 l_2 和空间 $L_2[a,b]$ 之间联系的一条定理: 设函数系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[a,b]$ 上规范正交 (参见**规范正交系** (orthonormal system)), 数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

(即 $c_n \in l_2$), 则存在函数 $f \in L_2[a,b]$ 使得

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \; c_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt.$$

而且, 作为空间 $L_2[a,b]$ 中的元素, 函数 f 是唯一的 (即不考虑 Lebesgue 零测度集上的值). 特别地, 如果规范正交系 $\{\varphi_n\}$ 在 $L_2[a,b]$ 中闭 (完全, 参见**完全函数系** (complete system of functions)), 则由 Riesz-Fischer 定理可得: 空间 l_2 与空间 $L_2[a,b]$ 是同构而且等距的.

这一定理由 F. Riesz ([1]) 和 E. Fischer ([2]) 分别独立地证得.

参考文献

[1] Riesz, F., Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 615 – 619.
[2] Fischer, E., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **144** (1907), 1022 – 1024, 1148 – 1150.
[3] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, с. 168 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 高等教育出版社, 1956).

Б. И. Голубов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Kadison, R. V. and Ringrose, J. R., Fundamentals of the theory of operator algebras, I, Acad. Press, 1983.

朱学贤 译

Riesz 不等式 [Riesz inequality; Рисса неравенство]

1) 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $[a,b]$ 上函数的规范正交系 (orthonormal system) 并假定对任意 n, $|\varphi_n| \leqslant M$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立.

a) 设 $f \in L_p[a,b]$ $(1 < p \leqslant 2)$, 则 f 的关于 $\{\varphi_n\}$ 的 Fourier 系数 (Fourier coefficients with respect to $\{\varphi_n\}$)

$$c_n = \int_a^b f\bar{\varphi}_n dx$$

满足 Riesz 不等式

$$\|\{c_n\}\|_q \leqslant M^{2/p-1}\|f\|_p, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

b) 对于满足 $\|\{c_n\}\|_p < \infty$ $(1 < p \leqslant 2)$ 的任意序列 $\{c_n\}$, 存在函数 $f \in L_q[a,b]$, f 以 c_n 作为它的 Fourier 系数并满足 Riesz 不等式

$$\|f\|_q \leqslant M^{2/p-1}\|\{c_n\}\|_p, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

2) 设 $f \in L_p[0,2\pi]$ $(1 < p \leqslant \infty)$, 则 f 的**共轭函数** (conjugate function) $\bar{f} \in L_p[0,2\pi]$ 且 Riesz 不等式

$$\|\bar{f}\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$$

成立, 其中, A_p 是仅与 p 有关的常数.

结论 1) 是由 F. Riesz 首先证明的 ([1]), 早些时候, W. H. Young 及 F. Hausdorff 曾研究过它的特殊情形. 结论 2) 是由 M. Riesz 首先证明的.

参考文献

[1] Riesz, F., Ueber eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel, *Math. Z.*, **18** (1923), 117 – 124.
[2] Riesz, M., Sur les fonctions conjuguées, *Math. Z.*, **27** (1927), 218 – 244.
[3] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 211, 566 (英译本: Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).
[4] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

Т. П. Лукашенко 撰

【补注】 关于 2), 也见**算子的插值** (interpolation of operators) (它是 Marcinkiewicz 插值定理与共轭算子的弱 (1,1) 型性质的推论) 及 [A3].

参考文献

[A1] Butzer, P. L. and Nessel, R. J., Fourier analysis

and approximation, 1, Birkhäuser, 1971, Chapt. 8.

[A2] Hausdorff, F., Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourier-reihen, *Math. Z.*, **16** (1923), 163 – 169.

[A3] Stein, E. M. and Weiss, G., Fourier analysis on Euclidean space, Princeton Univ. Press, 1975, Chapt. Ⅵ, § 5 (中译本: Elias, M Stein, Guido Weiss, 欧氏空间上的 Fourier 分析引论, 上海科学技术出版社, 1987).

朱学贤 译

Riesz 插值公式 [Riesz interpolation formula; Рисса интерполяционная формула]

通过**三角多项式** (trigonometric polynomial) 在有限个点的值给出其在某个点导数的表达式的一个公式. 如果 $T_n(x)$ 是 n 次实系数三角多项式, 则对任何实数 x, 下述等式

$$T_n'(x)=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\sin^2(x_k^{(n)}/2)}T_n(x+x_k^{(n)})$$

成立, 其中, $x_k^{(n)}=(2k-1)\pi/2n$, $k=1,\cdots,2n$.

Riesz 插值公式可以推广到指数型的整函数: 若 f 是实轴 $\mathbf{R}$ 上有界的 σ 阶整函数, 则

$$f'(x)=\frac{\sigma}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left[\dfrac{k+1}{2}\right]^2}f\left[x+\frac{2k+1}{2\sigma}\pi\right],$$

$$x\in\mathbf{R}.$$

此外, 上述等式右边的级数在整个实轴上一致收敛.

该结果是由 M. Riesz ([1]) 建立的.

参考文献

[1] Riesz, M., Formule d'interpolation pour la dérivée d'une polynôme trigonométrique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **158** (1914), 1152 – 1154.

[2] Бернштейн, С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. 1, Л.-М., 1937.

[3] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Riesz, M., Eine trigonometrische interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome, *Jahresber. Deutsch. Math.-Ver.*, **23** (1914), 354 – 368.

[A2] Timan, A. F., Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon, 1963, Chapt. 4 (译自俄文).

[A3] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988, Chapt. Ⅹ.

王仁宏 檀结庆 译

Riesz 位势 [Riesz potential; Рисса потенциал], α 位势 (α-potential)

形如

$$V_\alpha(x)=V(x;\alpha,\mu)=\int\frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha},\ \alpha>0,$$

的位势, 其中 μ 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 上具有紧支集的正 **Borel 测度** (Borel measure), $|x-y|$ 是点 x, $y\in\mathbf{R}^n$ 之间的距离. 当 $n\geqslant 3$ 和 $\alpha=n-2$ 时, Riesz 位势与经典的 **Newton 位势** (Newton potential) 相同; 当 $n=2$ 且 $\alpha\to 0$ 时, Riesz 位势的极限在某种意义下是**对数位势** (logarithmic potential). 当 $n\geqslant 3$ 且 $0<\alpha\leqslant n-2$ 时, Riesz 位势在整个空间 $\mathbf{R}^n$ 上为**上调和函数** (superharmonic function); 此外, 在古典情况 $\alpha=n-2$ 时, 位势 $V(x)=V_{n-2}(x)$ 在 μ 的支集 $S(\mu)$ 的外部为**调和函数** (harmonic function). 当 $\alpha>n-2$ 时, Riesz 位势 $V_\alpha(x)$ 在 $S(\mu)$ 的外部是**下调和函数** (subharmonic function). 对于所有 $\alpha>0$, Riesz 位势 $V_\alpha(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是下半连续函数, 在 $S(\mu)$ 的外部是连续的.

在 Riesz 位势的一般性质当中, 下述是最重要的. 连续性原理 (continuity principle): 如果 $x_0\in S(\mu)$ 且函数的限制 $V_\alpha(x)|_{S(\mu)}$ 在点 x_0 是连续的, 则 $V_\alpha(x)$ 作为 $\mathbf{R}^n$ 上的函数在 x_0 也连续. 限制最大值原理 (restricted maximum principle): 如果 $V_\alpha(x)|_{S(\mu)}\leqslant M$, 则在 $\mathbf{R}^n$ 上处处有 $V_\alpha(x)\leqslant 2^\alpha M$. 当 $n-2\leqslant\alpha<n$ 时, 更精确的最大值原理 (maximum principle) 成立, 即, 若 $V_\alpha(x)|_{S(\mu)}\leqslant M$, 则在 $\mathbf{R}^n$ 上处处有 $V_\alpha(x)\leqslant M$ (这个命题对于 $n=2$ 且 $\alpha\to 0$ 的情形, 即对于对数位势也成立).

关于 Riesz 位势的**容量** (capacity) 理论可以建立在, 例如, 测度 μ 的 α 能量

$$E_\alpha(\mu)=\iint\frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha},\ \alpha>0,$$

这个概念的基础上. 对于紧集 K, 可以设

$$V_\alpha(K)=\inf\{E_\alpha(\mu)\},$$

其中下确界是对所有集中在 K 上且满足 $\mu(K)=1$ 的测度 μ 取的; 于是, α 容量 (α-capacity) 等于

$$C_\alpha(K)=\{V_\alpha(K)\}^{-1/\alpha}.$$

如果 $V_\alpha(K)<+\infty$, 那么容量测度 (capacity measure) λ (也称为平衡测度 (equilibrium measure)) 达到上述下确界, λ 集中在 K 上且 $\lambda(K)=1$, 它生成的位势称为容量 α 位势 (capacitary α-potential) $V(x;\alpha,\lambda)$

(亦见**容量位势**(capacity potential)). 采用古典容量相同的方法, 可以进一步定义关于任意集合的 α 容量.

Riesz 位势的命名是因为 M. Riesz 获得了许多关于 Riesz 位势的重要性质(见[2]); 而最先研究这种位势的是 O. Frostman(见[1]).

参考文献

[1] Frostman, O., Potentiel d'equilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, 3(1935), 1 – 118.

[2] Riesz, M., Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, *Acata Sci. Math. Szeged*, 9(1938), 1 – 42.

[3] Ландкоф, Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966 (英译本: Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[4] Hayman, W. and Kennedy, P., Subharmonic functions, Acad. Press, 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 当 n 是偶数且 $\alpha = n - 2m \leqslant 0$ 时, $|x-y|^{2m-n}\log|x-y|$ 是**多调和方程**(polyharmonic equation) $\Delta^m u = 0$ 的**基本解**(fundamental solution); 否则, $|x-y|^{2m-n}$ 是基本解. Riesz 位势在阶数 >2 的椭圆型偏微分方程理论中得到应用, 见[A2]. 在扫除空间(balayage spaces)的框架下关于 Riesz 位势的叙述可见[A1].

Riesz 核 $|x-y|^{-\alpha}$ 是卷积核的标准例子. 于是, Riesz 位势可认为是特殊的奇异积分. 关于这种有趣的观点之详情见于[A3].

参考文献

[A1] Bliedtner, J. and Hansen, W., Potential theory. An analytic and probabilistic approach to balayage, Springer, 1986 (中译本: J. 波里特诺、W. 汉森, 位势理论——扫除的分析与概率方法, 厦门大学出版社, 1994).

[A2] Schulze, B. W. and Wildenhain, G., Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Birkhäuser, 1977.

[A3] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.

[A4] Carlesson, L., Selected problems on exceptional sets, v. Nostrand, 1967.

高琪仁 吴炯圻 译

Riesz 积 [Riesz product; Рисса произведение]

如下形式的**无穷积**(infinite product):

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k \cos n_k x),\ x\in[0,\ \pi],\qquad (1)$$

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant q > 1,\ |a_k| \leqslant 1,\ \forall k\in\mathbf{N}.$$

借助于这样一些积(对于一切 $k\in\mathbf{N}$, $a_k = 1$, $n_k = 3^k$), F. Riesz 提出了其 Fourier 系数的阶不为 $o(1/n)$ 的具有有界变差的连续函数的第一个例子. 如果 $q>3$, 则恒等式

$$\prod_{k=1}^{m}(1+a_k\cos n_k x) = 1+\sum_{k=1}^{p_m}\gamma_k \cos kx,$$

$$p_m = n_1 + \cdots + n_m,\ m\in\mathbf{N},\ x\in[0,\ \pi]$$

给出级数

$$1+\sum_{k=1}^{p_m}\gamma_k\cos kx,\qquad (2)$$

称这个级数表示 Riesz 积(1). 当 $q\geqslant 3$, 对于一切 $k\in\mathbf{N}$, 有 $-1\leqslant a_k\leqslant 1$ 时, 级数(2)是非减连续函数 F 的 Fourier-Stieltjes 级数. 如果 $q>3$, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 = +\infty,\ -1\leqslant a_k\leqslant 1,\ \forall k\in\mathbf{N},$$

则几乎处处有 $F'(x)=0$. 此外, 如果 $a_k\to 0$, 则级数(2)几乎处处收敛到零.

有一些主要是**三角级数**(trigonometric series)理论中的问题, 可以用 Riesz 积的自然推广来解决, 这时, (1)中的 $a_k\cos n_k x$ 由特别选取的三角多项式 $T_k(x)$ 来代替.

参考文献

[1] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961 (英译本: Bary, N. K., A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[2] Zygmund, A., trigonometric series, 1 – 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

В. Ф. Емельянов 撰 杜小杨 译

Riesz 空间 [Riesz space; Рисса пространство], 向量格(vector lattice)

一种实偏序向量空间 X(见**偏序集**(partially ordered set); **向量空间**(vector space))其中

1) 向量空间结构与偏序是相容的, 即由 $x,y,z\in X$ 和 $x<y$ 推出 $x+z<y+z$, 又由 $x\in X$, $x>0$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $\lambda>0$ 推出 $\lambda x>0$;

2) 对任意两元素 $x,y\in X$ 存在 $\sup(x,\ y)\in X$. 特别地, 任意有限集的上确界和下确界存在.

在苏联的科学文献中 Riesz 空间通常称为 K 线性系(K-lineal). 这样的空间首先是由 F. Riesz 于 1928 年引进的.

具有逐点序的实连续函数空间 $C[a,\ b]$ 是 Riesz 空间的一个例子. 对 Riesz 空间的任意元素 x 可定义 $x_+ = \sup(x,\ 0)$, $x_- = \sup(-x,\ 0)$ 和 $|x| = x_+ + x_-$. 于是 $x = x_+ - x_-$. 在 Riesz 空间中可以引进序列 $\{x_n\}$ 的两种类型的收敛性. 序收敛(order convergence), o 收敛(o-convergence): $x_n \xrightarrow{o} x_0$, 如

果存在一个单调增序列 $\{y_n\}$ 和一个单调减序列 $\{z_n\}$ 使得 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ 且 $\sup y_n = \inf z_n = x_0$. 相对一致收敛 (relative uniform convergence), r 收敛 (r-convergence): $x_n \xrightarrow{r} x_0$, 如果存在一个元素 $u > 0$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$, $|x_n - x_0| < \varepsilon u$ (r 收敛也称为以正则子收敛 (convergence with a regulator). o 收敛和 r 收敛概念有数列收敛的许多通常性质且可自然地推广到网 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset X$.

一个 Riesz 空间称为 Archimedes 的 (Archimedean), 如果 x、$y \in X$ 且对 $n = 1, 2, \cdots$, $nx \leqslant y$ 蕴涵 $x \leqslant 0$. 在 Archimedes 的 Riesz 空间中, $\lambda_n \to \lambda_0$ 和 $x_n \xrightarrow{o} x_0$ 蕴涵 $\lambda_n x_n \xrightarrow{o} \lambda_0 x_0$ (λ_n, $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, x_n, $x_0 \in X$), 且 r 收敛蕴涵 o 收敛.

参考文献

[1] Riesz, F., Sur la décomposition des opérations fonctionelles linéaires, in Atti del Congr. Int. dei Math., Vol. 3, Bologna, 1930, 143 – 148.

[2] Luxemberg, W. and Zaanen, A., Riesz spaces, 1, North-Holland, 1971

[3] Вулих, Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961 (英译本: Vulikh, B. Z., Introduction to the theory of partially ordered spaces, Wolters-Noordhoff, 1967).

В. И. Соболев 撰

【补注】 Riesz 空间 L 的 Riesz 子空间 (Riesz subspace) 是 L 的线性子空间 K 使得当 f, $g \in K$ 时 $\sup(f, g) = f \vee g$ 和 $\inf(f, g) = f \wedge g$ 在 K 中 (这里 sup 和 inf 是 L 中的). L 的一个子空间 A 如果又是一个序理想 (order ideal), 即 $f \in A$, $g \in L$, $|g| \leqslant |f|$ 蕴涵 $g \in A$, 则称为 Riesz 理想 (Riesz ideal). 在俄文文献中这样的子空间分别称为子谱系 (sublineals) 和正规子谱系 (normal sublineals). 一个带 (band) 是一个 Riesz 理想 A, 使得对 $D \subset A$ 如果 $\sup D$ 在 L 中存在则 $\sup D$ 在 A 中. 在前苏联文献中一个带常称为分量 (component).

从 Riesz 空间 L 到 Riesz 空间 M 的线性算子 T 称为正的 (positive), 如果对所有的 $f \geqslant 0$, $f \in L$, 有 $Tf \geqslant 0$. L 中集合 D 称为序有界的 (order bounded), 如果存在 f, $g \in L$ 使得对所有的 $d \in D$, $f \leqslant d \leqslant g$. 线性算子 T 称为序有界, 如果它把序有界集映成序有界集. 取正算子的集合作为正锥, 在序有界算子空间上定义了一个序结构, 使它成为一个 Dedekind 完全 Riesz 空间 (Freudenthal-Канторович 定理 (Freudenthal-Kantorovich theorem)). 回想起一个格是 Dedekind 完全的 (Dedekind complete), 如果每一个下 (分别地, 上) 有界子序有下确界 (分别地, 上确界). 正算子是序有界的; 正算子的差 $T_1 - T_2$ 也是如此, 称为正则算子 (Dedekind operators). 如果 M 是 Dedekind 完全的, 则其逆成立: 每一个序有界算子 T 可以有一个作为两个正算子的差的 Jordan 分解 (Jordan decomposition) $T = T_1 - T_2$.

Riesz 空间上的范数是 Riesz 范数 (Riesz norm), 如果 $|f| \leqslant |g|$ 蕴涵 $\|f\| \leqslant \|g\|$. Riesz 半范数 (Riesz semi-norm) 是具有同样相容性条件的半范数. 带有 Riesz 范数的 Riesz 空间称为赋范 Riesz 空间 (normed Riesz space). 依范数完全的赋范 Riesz 空间是 **Banach 格** (Banach lattice). 由一个 Banach 格到一个 Dedekind 完全赋范 Riesz 空间的序有界算子 T 是按范数有界的.

设 $T_b(L, M)$ 是由 Riesz 空间 L 到 Dedekind 完全 Riesz 空间 M 的序有界算子的空间. $T \in T_b(L, M)$ 称为序列序连续的 (sequentially order continuous), 或 τ 序连续的 (τ-order continuous), 如果对每一序列 $u_n \downarrow 0$ (即单调减少到0), 随之有 $\inf|Tu_n| = 0$; T 称为序连续, 如果对 L 中每一下有向系 $u_\tau \to 0$ (见有向集(directed set)), 有 $\inf|Tu_\tau| = 0$. 对序连续和序列序连续线性算子前苏联所用的术语是 o 线性和 (o) 线性. 序连续和 τ 序连续算子的集合均是 $T_b(L, M)$ 中的带. Riesz 空间 L 的序对偶 (order dual) 是 L 到 $\mathbf{R}$ 中序有界算子的空间. 此序对偶是 Dedekind 完全的这一结果可追溯到 F. Riesz.

在 Riesz 空间理论中有第二个重要的对偶性概念, 联想起线性对偶性和代数几何学的对偶性: "理想 $\Leftrightarrow$ 零集", 对概形理论它是基本的, 被称之为 Baker-Benyon 对偶性 (Baker-Benyon duality) (见补充条目这一卷).

线性拓扑空间理论中 (见拓扑向量空间 (topological vector space)) 用到以下的集合有界性准则 (criterion for boundedness): 集合 B 是有界的 (在此理论中), 当且仅当对每一序列 $(x_n)_n$, $x_n \in B$, 和每一收敛于零的实数序列 $(\lambda_n)_n$, 有 $(\lambda_n x_n)_n$ 收敛于零当 $n \to \infty$. 产生了这样的问题: Riesz 空间中的序有界集是否可用这种方式来刻画其特征, 即用 $(\lambda_n x_n)_n$ 序收敛于零取代上述的收敛. 对任意的 Dedekind 完全 Riesz 空间这不一定为真. 使得此准则成立的 Dedekind 完全 Riesz 空间称为 K^+ 空间.

现设 L 是赋范空间而 M 是 Dedekind 完全 Riesz 空间. 一个线性算子 $U: L \to M$ 称为 bo 线性的 (bo-linear), 如果按范数 $x_n \to x$ 蕴涵按序收敛 $Ux_n \to Ux$. 如果 M 是 K^+ 空间, 则 $U: L \to M$ 是 bo 线性的, 当且仅当 L 中单位球面 S 的象 $U(S)$ 是序有界的. 由

$$|U| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |Ux|$$

定义的 M 中的元素 $|U|$ 则称为算子 U 的抽象范数 (abstract norm).

(abstract norm).

对 Riesz 空间有种种类似于 Hahn-Banach 型扩张和存在定理的结果．其中之一如下．设 L 是赋范空间，E 是 L 的线性子集而 $U: E \to M$ 是映到 Dedekind 完全 Riesz 空间 M 中的一个 bo 线性算子．设 U 有一抽象范数．则算子 U 容许有一个具有同样抽象范数的到整个 L 上的 bo 线性扩张．这是 Канторович 扩张定理 (Kantorovich extension theorems) 之一．对 Riesz 空间的另一个扩张定理，也属于 Л. В. Канторович，涉及正算子的扩张：设 X 是 Riesz 空间而 E 是控制 X 的一个线性子集，即对每一个 $x \in X$ 存在 $e \in E$ 使得 $|x| \leqslant e$．设 $U: E \to M$ 是从 E 到 Dedekind 完全 Riesz 空间 M 中的一个正加性算子．则存在一个到整个 X 上的 U 的加性正扩张．用这些结果以及（或）有关扩张定理可以证明，被一 Riesz 半范控制的 Riesz 空间 L 的 Riesz 子空间上的正线性泛函可以扩张成整个 L 上的正泛函，此结果转而可用以讨论何时 L 的序对偶至少是非零的．

Riesz 空间的例子可由拓扑空间上的实值函数（也可以是扩充的实函数）的空间提供，其中的序是逐点定义的．如同在 **Banach 代数** (Banach algebra) 情况下 **Гельфанд 表示** (Gel'fand representation) 提供了答案，人们问是否任一个 Riesz 空间可以看成适当的（理想的）空间上实值函数的空间．对 Riesz 空间的答案是由**吉田耕作表示定理** (Yosida representation theorem) 及其有关的结果给出的．

在（实函数的）积分理论中，$f=f^+-f^-$，$|f|=f^++f^-$ 这样的运算起着基础性的作用，其中 $f^+(x)=\max(f(x),0)$，$f^-(x)=\max(-f(x),0)$，这一点至少令人相信 Riesz 空间可为积分理论提供合适的抽象框架．下面将讨论的 Freudenthal 谱定理形式下的情形确实是这样．

设 X 是具有零元 0 的一个格．令 Y 是 X 的非空子集；$x \in X$ 称为与 Y **不相交的** (disjoint)，如果对所有 $y \in Y$，$x \wedge y=0$．与 Y 不交的所有的 $x \in X$ 的集合称为 Y 在 X 中的**不相交补** (disjoint complement)，记为 Y^d．在 Riesz 空间 L 中两个元素 f, g 称为不交的，如果 $|f| \wedge |g|=0$.（如果 f 和 g 都是正的，它与前面的定义一致.）

在 Riesz 空间 L 中给定了一个带 A，则其不交补 A^d 也是一个带．如果 L 是 Dedekind 完全的，则 $L=A \oplus A^d$．一般地，使得 $L=A \oplus A^d$ 的带 A 称为投影带 (projection band)．一个 Riesz 空间称为有（主）投影性质，如果每个（主）带是投影带．这样，Dedekind 完全 Riesz 空间有**投影性质** (projection property)，且更不容置疑地有**主投影性质** (principal projection property).

设 L 是有主投影性质的 Riesz 空间，设 e 是 L 的一个非零正元又设 f 是由 e 生成的带中的一个元素．对 $-\infty<\alpha<\infty$，令 $u_\alpha=\sup(\alpha e-f, 0)$，又设 p_α 是在分解 $L=B_\alpha \oplus B_\alpha^d$ 下 e 在 u_α 生成的带 B_α 中的分量．集合 $(p_\alpha)_\alpha$ 称为 f 关于 e 的**谱系** (spectral system)．现假设存在有限区间使得 $ae \leqslant f \leqslant (b-\varepsilon)e$ 对某个 $\varepsilon>0$．则对 $\alpha \leqslant a$，$p_\alpha=0$；而对 $\alpha \geqslant b$，$p_\alpha=e$．对 $[a,b]$ 的每一划分 π: $a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n=b$，构造下和与上和

$$s(\pi, f)=\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1}(p_{\alpha_k}-p_{\alpha_{k-1}}),$$

$$u(\pi, f)=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(p_{\alpha_k}-p_{\alpha_{k-1}}).$$

那么有以下的**抽象积分论** (abstract integration theory) 中的结果，称为 **Freudenthal 谱定理** (Freudenthal spectral theorem)．设 $L, e, f, a, b, \varepsilon$ 如上．则

$$\sup_\pi s(\pi, f)=f=\inf_\pi u(\pi, f).$$

在 L 是某空间（特别是 $\mathbf{R}$ 的一个子集）上实值函数的一个 Riesz 空间且 $e(x)=1$ 的情形，这谱定理表示 L 中函数用"阶梯函数"逼近的性质、测度论中的 **Radon-Nikodým 定理** (Radon-Nikodým theorem) 和开圆盘上有界调和函数的 **Poisson 公式** (Poisson formula) 是该谱定理的特殊情形．Freudenthal 谱定理是 Riesz 空间理论的出发点之一．

参考文献

[A1] Zaanen, A. C., Riesz spaces, II, North-Holland, 1983.

[A2] Schaefer, H. H., Banach lattices and positive operators, Springer, 1974.

[A3] Jonge, E. de and Rooy, A. C. M. van, Introduction to Riesz spaces, Tracts, 8, Math. Centre, 1977.

[A4] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25. Amer. Math. Soc., 1973.

[A5] Канторович, Л. В., Вулих, Б. З., Пинскер, А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.-Л., 1950（中译本：Л. В. 康托洛维奇等，半序空间泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1960）.

[A6] Freudenthal, H., Teilweise geordneten Moduln, *Proc. Royal Acad. Sci. Amsterdam*, 39 (1936), 641-651.

[A7] Nakano, H., Modern spectral theory, Maruzen, 1950.

葛显良 译　吴绍平 校

Riesz 求和法 [Riesz summation method; Рисса метод суммирования]

求数项级数与函数级数和的一种方法；记为 (R, λ, k)．级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 依 **Riesz 求和法** (Riesz sum-

mation method）(R, λ, k) 可和于和 s，如果

$$\lim_{\omega \to +\infty} \sum_{\lambda_n \leqslant \omega} \left[1 - \frac{\lambda_n}{\omega} \right]^k a_n = s,$$

其中 $k>0$，$0 \leqslant \lambda_0 < \cdots < \lambda_n \to \infty$，$\omega$ 为连续参数．这个方法是 M．Riesz 为解决 **Dirichlet 级数**（Dirichlet series）求和引进的．方法 (R, λ, k) 是正则的；当 $\lambda_n = n$ 时，它等价于 Cesàro 求和法 (C, k)（见 **Cesàro 求和法**（Cesàro summation methods）），并且这些方法相容（见**求和法的相容性**（compatibility of summation methods））．

对于借助序列 $\{\sigma_m\}$ 的极限所定义的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的可和性，Riesz 还研究了一种方法，上述 σ_m 是

$$\sigma_m = \frac{1}{P_m} \sum_{k=0}^{m} p_k s_k,$$

$$P_m = \sum_{k=0}^{m} p_k \neq 0,\ s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n.$$

这个方法记作 (R, p_n)．方法 (R, λ, k) 是方法 (R, p_n)（$k=1$ 时）的限制并且是它在任意 $k>0$ 时的推广．

参考文献

[1] Riesz, M., Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **152** (1911), 1651 – 1654.

[2] Riesz, F., Sur la sommation des séries de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **149** (1909), 18 – 21.

[3] Hardy, G. H. and Riesz, M., The general theory of Dirichlet series, Cambridge Univ. Press, 1915.

[4] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon Press, 1949.

И. И. Волков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Zeller, K. and Beekman, W., Theorie der limitierungsverfahren, Springer, 1970.

罗嵩龄 译

Riesz 函数系 [Riesz system; Рисса система]

正交系理论中的一个概念（见**规范正交系**（orthonormal system））．设在空间 $L_2 = L_2(a,b)$ 中给定一个**完全函数系**（complete system of functions）$\{\psi_n\}$．假定它是规范的，或更一般地，假定它是几乎规范的，即，存在常数 $m>0$ 和 $M>0$ 使得 $m \leqslant \|\psi_n\| \leqslant M$ 对所有 $n \in \mathbf{N}$ 成立．减弱对于函数系 $\{\psi_n\}$ 正交性方面的要求：假定存在 L_2 中的一个完全函数系 $\{g_n\}$，使得 $(\psi_n, g_n) = 1$ 及 $(\psi_n, g_m) = 0$ 对所有的 $n \neq m$ 成立．特别地，如果函数系 $\{\psi_n\}$ 本身就是规范正交系，则取 $g_n = \psi_n$，$n \in \mathbf{N}$．如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$$

在 L_2 中收敛到函数 f，则有 $a_n = (f, g_n)$，$n \in \mathbf{N}$．因此，有理由称数 a_n 是函数 f 关于函数系 $\{\psi_n\}$ 的第 n 个 Fourier 系数．在正交级数理论的一些定理的证明中，**Bessel 不等式**（Bessel inequality）和 **Riesz-Fischer 定理**（Riesz-Fischer theorem）起着最为重要的作用．但对于一般情形，这些定理不再适用．因此有必要遴选出特殊的一类即 Riesz 函数系，也就是满足下列条件的函数系 $\{\psi_n\}$：

1）对任意函数 f，其 Fourier 系数的平方组成的级数绝对收敛，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, g_n)|^2 < +\infty,$$

2）对任意数列 $\{a_n\} \in l_2$，存在函数 f 使得 a_n 是它关于函数系 $\{\psi_n\}$ 的 Fourier 系数，即 $a_n = (f, g_n)$，$n \in \mathbf{N}$．

上述关于函数系 $\{\psi_n\}$ 的第一个条件用以代替 Bessel 不等式，而第二个条件代替 Riesz-Fischer 定理．Н．К．Бари 证明（见 [2]），函数系 $\{\psi_n\}$ 是 Riesz 函数系，当且仅当存在 L_2 中可逆的连续线性算子 A，使得函数系 $\{A\psi_n\}$ 是完全的和规范正交的．因而，Riesz 函数系也被称为 Riesz 基（Riesz basis），它等价于一组规范正交基．对于 Riesz 函数系，Бари 还给出了一个很便于应用的判则：L_2 中的完全函数系 $\{\psi_n\}$ 是 Riesz 函数系，当且仅当 **Gram 矩阵**（Gram matrix）$\|(\psi_n, \psi_m)\|$ 确定了 l_2 的一个可逆的连续线性算子．Riesz 函数系中元素的任意一个排列仍是 Riesz 函数系．反过来，L_2 中的一组基，如果将它的元素任意排列后仍是一组基，则对它规范化后就得到一个 Riesz 函数系．Riesz 函数系的一个自然推广是将 L_2 换成由函数系 $\{\psi_n\}$（ψ_n 是某 Hilbert 空间中的元素）的线性生成按该 Hilbert 空间范数所取的闭包（见 [4]）．

参考文献

[1] Бари, Н. К., 《Докл. АН СССР》, **54** (1946), 383 – 386.

[2] Бари, Н. К., 《Уч. зап. МГУ》, **148** (1951), 69 – 107.

[3] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965（英译本：Gohberg, I. C. {I. Ts. Gokhberg} and Krein, M. G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1969）.

[4] Гапошкин, В. Ф., 《Успехи матем. наук》, **21** (1966), 3 – 82.

В. Ф. Емельянов 撰　朱学贤 译　刘和平 校

Riesz 定理 [Riesz theorem; Рисса теорема]

1）下调和函数的 Riesz 表示定理（Riesz theorem on the representation of a subharmonic function）：如果 u 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的区域 D 里的**下调**

和函数(subharmonic function),则存在唯一的 D 上的正 **Borel 测度**(Borel measure)μ,使得对于任意的相对紧集 $K\subset D$,u 可表示(称为 Riesz 表示(Riesz representation))为一个带负号的**位势**(potential)与一个**调和函数**(harmonic function)h 之和:

$$u(x)=-\int_K E_n(|x-y|)d\mu(y)+h(x), \quad (1)$$

其中

$$E_2(|x-y|)=\ln\frac{1}{|x-y|};$$

$$E_n(|x-y|)=\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \ (n\geqslant 3),$$

而 $|x-y|$ 是点 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 之间的距离(见[1]). 该测度 μ 称为 u 的相伴测度(associated measure)或者 Riesz 测度(Riesz measure).

设 $\bar{K}=\bar{H}$ 是区域 H 的闭包. 此外,若还存在广义 **Green 函数**(Green function)$g(x,y;H)$,则公式(1)可写成形式:

$$u(x)=-\int_{\bar{H}} g(x,y;H)d\mu(y)+h^*(x), \quad (2)$$

其中 h^* 是 u 在 H 的**最小调和强函数**(harmonic majorant).

公式(1)和(2)在某些附加条件下可以扩张到整个区域 D(见**下调和函数**(subharmonic function),亦见[3],[5]).

2)下调和函数平均值的 Riesz 定理(Riesz theorem on the mean value of subharmonic function):如果 u 是球壳$\{x\in\mathbf{R}^n:0\leqslant r\leqslant|x-x_0|\leqslant R\}$里的下调和函数,则在以 x_0 为中心,ρ 为半径($r\leqslant\rho\leqslant R$)的球面 $S_n(x_0,\rho)$ 上,u 的平均值 $J(\rho)$,即

$$J(\rho)=J(\rho;x_0,u)=\frac{1}{\sigma_n(\rho)}\int_{S_n(x_0,\rho)} u(y)d\sigma_n(y),$$

其中 $\sigma_n(\rho)$ 是 $S_n(x_0,\rho)$ 的面积,当 $n\geqslant 3$ 时,是关于 $1/\rho^{n-2}$ 的凸函数;而当 $n=2$ 时,是关于 $\ln\rho$ 的凸函数. 如果 u 在整个球$\{x\in\mathbf{R}^n:|x-x_0|\leqslant R\}$中是下调和函数,则在 $J(0)=u(x_0)$ 的条件下,$J(\rho)$ 是关于 ρ 的不减的连续函数(见[1]).

3)Hardy 类 $H^\delta(\delta>0)$ 解析函数的 Riesz 定理(Riesz theorem on analytic functions of Hardy classes H^δ, $\delta>0$):如果 $f(z)$ 是单位圆盘 $D=\{z=re^{i\theta}\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 中的 Hardy 类 $H^\delta(\delta>0)$ 的正则**解析函数**(analytic function)(见**解析函数的边界性质**(boundary properties of analytic functions);**Hardy 类**(Hardy classes)),则以下关系成立:

$$\lim_{r\to 1}\int_E |f(re^{i\theta})|^\delta d\theta=\int_E |f(e^{i\theta})|^\delta d\theta,$$

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})-f(e^{i\theta})|^\delta d\theta=0,$$

其中 E 是圆周 $\Gamma=\{z=e^{i\theta}:|z|=1\}$ 上的任意正测度集,而 $f(e^{i\theta})$ 是 $f(z)$ 在 Γ 上的边界值. 此外,$f(z)\in H^1$,当且仅当它的积分在闭圆盘 $D\cup\Gamma$ 中是连续的且在 Γ 上是绝对连续的(见[2]).

定理 1)-3)由 F. Riesz 证得(见[1],[2]).

参考文献

[1A] Riesz, F., Sur les fonctions sous harmoniques et leur rapport à la theorie du potentiel I, *Acta Math.*, **48**(1926), 329-343.

[1B] Riesz, F., Sur les fonctions sous harmoniques et leur rapport à la theorie du potentiel II, *Acta Math.*, **54**(1930), 321-360.

[2] Riesz, F., Ueber die Randwerte einer analytischer Funktion, *Math. Z.*, **18**(1923), 87-95.

[3] Привалов, И. И., Субгармонические функции, М.-Л., 1937.

[4] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950.

[5] Hayman, W. K. and Kennedy, P. B., Subharmonic functions, Acad. Press, 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在抽象位势论中,开集 U 上的**位势**(potential)是 U 上的一个**上调和函数**(superharmonic function)$u\geqslant 0$,使得 u 的任意调和弱函数在 U 上是负的. Riesz 表示定理(Riesz representation theorem)现在成为如下形式:U 上的任一上调和函数可以唯一地表成 U 上的一个位势和一个调和函数之和,见[A2].

在一个有序的 Banach 空间 E 中,Riesz 插值性质(Riesz interpolation property)指的是,对于任意 $a,b\leqslant d,e$,存在一个 $c\in E$ 使得 $a,b\leqslant c\leqslant d,e$. 一个等价形式是分解性质(decomposition property):对于 $0\leqslant a\leqslant b+c$,存在 d 和 e 使得 $a=d+e$ 且 $d\leqslant b$,$e\leqslant c$. 这些性质被用在 **Choquet 单形**(Choquet simplex)理论和细超调和函数理论,见[A1]和[A2].

参考文献

[A1] Asimow, L. and Ellis, A. J., Convexity theory and its applications in functional analysis, Acad. Press, 1980.

[A2] Constantinescu, C. and Cornea, A., Potential theory on harmonic spaces, Springer, 1972.

高琪仁 吴炯圻 译

Riesz 定理[Riesz theorem; Риссов теорема]

1)关于有界解析函数的 Riesz 唯一性定理. 如果 $f(z)$ 是单位圆盘 $D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\}$ 内的有界正则**解析函数**(analytic function),在圆周 $\Gamma=\{z:|z|=1\}$ 的一个正测度子集 E(即 $\operatorname{mes}E>0$)上具

有零径向边界值（radial boundary value），则 $f(z)\equiv 0$. 此定理由 F. Riesz 和 M. Riesz 兄弟于 1916 年表述并证明（见[1]）.

上述定理是关于解析函数唯一性的第一批边值定理之一. Н. Н. Лузин 和 И. И. Привалов 独立于 Riesz 兄弟得到了关于唯一性的一般边值定理（见[2]，[3] 和 **Лузин-Привалов 定理**（Luzin-Privalov theorems））.

2）关于 Cauchy 积分的 Riesz 定理. 如果 $f(z)$ 在单位圆盘 D 中是 **Cauchy 积分**（Cauchy integral）:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

其边值 $f(\zeta)=f(e^{i\theta})$ 是 Γ 上的有界变差函数，则 $f(\zeta)$ 在 Γ 上是绝对连续函数（见[1]）.

这一定理可推广到沿任何可求长围道 Γ 的 Cauchy 积分（见[3]）.

参考文献

[1] Riesz, F., Riesz, M., Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion, 载于 G. Mittag-Leffler (ed.): 4 th Congress Math. Scand., Almqvist & Wiksells, 1920, 27 – 44.

[2] Привалов, И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918.

[3] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950（中译本：И. И. 普里瓦洛夫，解析函数的边界性质，科学出版社，1956）.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 F. Riesz 和 M. Riesz 定理（F. and M. Riesz theorem）通常表述如下：如果 μ 是单位圆周 Γ 上的复 Borel 测度，且

$$\int_{\Gamma}e^{-int}d\mu(t)=0,\ n=-1,-2,\cdots,$$

则 μ 关于 Lebesgue 测度绝对连续，且 Lebesgue 测度关于 μ 绝对连续.

这一定理已推广到函数代数与群上的调和分析这两个方面. 作为第一方面的例子有下述定理.

设 X 是紧 Hausdorff 空间，Φ 是 X 上的函数代数 A 的一个连续同态. 假定 Φ 在 X 上只有一个表示测度 μ. 令 $\nu\in A^{\perp}$，即对每个 $f\in A$ 有 $\int f d\nu=0$，设

$$\nu=\nu_{\mu}+\nu_{s}$$

是 ν 关于 μ 的 Lebesgue 分解，则 $\nu_{\mu}\in A^{\perp}$，$\nu_{s}\in A^{\perp}$.

还有一条比较一般的定理，其中去掉了 Φ 只有一个表示测度的条件，见[A5]. 另一方面，还试图从一个测度的谱的部分为零推断它关于不变测度为绝对连续，见[A1].

另一条属于 F. Riesz 的定理是 Riesz 表示定理（Riesz representation theorem）. 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，$C_0(X)$ 是 X 上具有紧支集的连续函数的空间，则 $C_0(X)$ 上每个有界线性泛函 Φ 具有下述形式:

$$\Phi(f)=\int_X f d\mu\quad(f\in C_0(X)),$$

其中 μ 是 X 上的一个复正则 Borel 测度；μ 还是唯一的. 例如，见[A6].

参考文献

[A1] Brummelhuis, R. G. M., An F. and M. Riesz theorem for bounded symmetric domains, *Ann. Inst. Fourier*, 37 (1987), 139 – 150.

[A2] Duren, P. L., Theory of H^p spaces, Acad Press, 1970.

[A3] Garnett, J., Bounded analytic functions, Acad. Press, 1981.

[A4] Koosis, P., Introduction to H_p spaces, Cambridge Univ. Press, 1980.

[A5] Rudin, W., Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, Springer, 1980.

[A6] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966（中译本：W. Rudin，实分析和复分析，人民教育出版社，1981）.

【译注】 还有关于正线性泛函的 Riesz 表示定理：设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，$C_0(X)$ 是 X 上具有紧支集的连续函数的空间，Φ 是 $C_0(X)$ 上的正线性泛函，则存在一个含有 X 的一切 Borel 集的 σ 代数 $\mathscr{M}$，并存在 $\mathscr{M}$ 上唯一的（正）测度 μ，使对每个 $f\in C_0(X)$，有

$$\Phi(f)=\int_X f d\mu.$$

此定理当 $X=[0,1]$ 时的原始形式是 F. Riesz 于 1909 年作出的.

关于 Hilbert 空间的对偶空间的 Riesz 定理是 Hilbert 空间理论的基本定理之一. 设 X 是 Hilbert 空间，X' 是其对偶空间，则对每个 $f\in X'$，存在唯一的 $y\in X$，使对任一 $x\in X$ 有

$$f(x)=(x,y),$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 X 中的内积；此外还有 $\|f\|=\|y\|$.

F. Riesz 于 1907 年建立了上述定理；M. Fréchet 也于同年独立地得到了这一定理.

参考文献

[B1] Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear operators, Part I: General theory, Interscience Pub., 1958.

[B2] Hewitt, E., Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, I, Springer, 1963.

[B3] Riesz, F., Sz.-Nagy, B., Leçons d'analyse fonc-

tionnelle, 3 ème éd., Budapest, 1955 (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维 - 纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷 1963, 第二卷 1981).

沈永欢 译

装备 Hilbert 空间 [**rigged Hilbert space** 或 equipped Hilbert space; **оснащенное гильбертово пространство**]

包含一处处稠密的线性子集 Φ 的 **Hilbert 空间** (Hilbert space) H, 且在 Φ 上定义了一拓扑向量空间结构使得嵌入 $\Phi \subset H$ 是连续的. 这嵌入生成对偶空间的连续嵌入 $H' \subset \Phi'$ 和一个连续嵌入的链 $\Phi \subset H \subset \Phi'$ (用标准等同 $H' = H$). 最有兴趣的情形是其中 Φ 是一个**核型空间** (nuclear space). 下面关于作用于 H 上自伴算子的谱定理的加强是对的: 连续地 (按 Φ 的拓扑) 映 Φ 到其自身上的任何**自伴算子** (self-adjoint operator) A 有广义本征函数的完全系 $\{F_\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}\}$ ($\mathfrak{A}$ 是指标集), 即元素 $F_\alpha \in \Phi'$ 使得对任意的 $\varphi \in \Phi$,

$$F_\alpha(A\varphi) = \lambda_\alpha F_\alpha(\varphi), \alpha \in \mathfrak{A},$$

这里函数 $\alpha \to \lambda_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ 的值的集合包含于 A 的谱中 (见**算子的谱** (spectrum of an operator)) 且对任一元素 $f \in H$ 的**谱测度** (spectral measure) $\sigma_f(\lambda)$, $f \in H$, $\lambda \in \mathbf{R}$ 有满测度. 系的完全性是指对任意元素 $\varphi \in \Phi$, $\varphi \neq 0$, 至少有一 $\alpha \in \mathfrak{A}$, 使 $F_\alpha(\varphi) \neq 0$. 此外, 对任意元素 $\varphi \in \Phi$, 它关于广义本征函数系 $\{F_\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}\}$ 的展开式存在且推广了已知的关于有离散谱的算子的本征向量基的展开式.

例: 展开成 **Fourier 积分** (Fourier integral)

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{isx} \tilde{f}(s) ds, \ x \in \mathbf{R}, \ f, \tilde{f} \in L_2(\mathbf{R}),$$

$\{e^{isx}: s \in \mathbf{R}\}$ 是作用在 $L_2(\mathbf{R})$ 上由 Schwartz 空间 $S(\mathbf{R})$ 自然装备此空间引起的微分算子的广义本征函数系 (见**广义函数空间** (generalized functions, space of)). 对作用在一个装备 Hilbert 空间上的酉算子, 同样的论断也正确.

参考文献

[1] Гельфанд, И. М., Шилов, Г. Е., Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., 1958 (中译本: И. М. 盖勒范德等, 广义函数 (3), 科学出版社, 1983).

[2] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961 (中译本: И. М. 盖勒范德等, 广义函数 (4), 科学出版社, 1965).

[3] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskiy, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

Р. А. Минлос 撰

【补注】 装备 Hilbert 空间 $\Phi \subset H \subset \Phi'$ 也称为 Гельфанд 三元组 (Gel'fand triple). 有时也可见到嵌套 Hilbert 空间 (nested Hilbert space) 这一词.

葛显良 译 鲁世杰 校

装备流形 [**rigged manifold**; **оснащенное многообразие**], 标架流形 (framed manifold)

法丛 (normal bundle) 带有一个确定的平凡化的光滑流形. 准确地讲, 设 n 维光滑流形 M 嵌入在 $\mathbf{R}^{n+k}$ 中, 并设相应于这嵌入的 (k 维) 法纤维化 v 是平凡的. 纤维化 v 的任何平凡化均称为流形 M 相应于该嵌入的装备 (rigging) 或标架 (framing). 标架流形是为证明 $\mathbf{R}^{n+k}$ 中 n 维标架流形的**配边** (cobordism) 群同构于同伦群 $\pi_{n+k}(S^n)$ 而于 1950 年左右引进的. 群 $\pi_{n+1}(S^n)$ 和 $\pi_{n+2}(S^n)$ 即用此方式算出.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 "标架流形" 这一术语还可用于表示一个微分流形 M, 其切丛的每个纤维 T_xM 均给定一组基, 基的选取依赖于 x 处的可微性.

n 维光滑流形 M 上的标架丛 (frame bundle) $F(M)$ 是 M 上的一个 n^2 维光滑纤维丛 (于是其全空间维数为 $n^2 + n$), 其 $x \in M$ 处的纤维由所有线性同构 $T_xM \cong \mathbf{R}^n$ 组成. 等价地讲, x 处的纤维由 T_xM 的所有有序基 (亦称为标架 (frames)) 组成. 更精确地讲, 一个标架流形 $\dot{M}$ 是一个偶对 (M, s), 其中 M 为光滑流形, $s: M \to F(M)$ 是标架丛的一个截面. 这种截面称为一个标架 (framing).

当然, 更一般地, 术语 "标架" 是作为向量空间中基的一种替代物而使用的. 该术语的产生是由于时空中的一个基从力学角度讲提供了一个参照系的标架 (frame of reference).

参考文献

[A1] Milnor, J. W., Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press, Virginia, 1965 (中译本: J. W. 米尔诺, 从微分观点看拓扑, 上海科学技术出版社, 1983).

[A2] Milnor, J. W., A survey of cobordism theory, L'Enseign. Math., 8 (1962), 16 - 23.

[A3] Thom, R., Quelque propriétés globales des variétés différentiables, Comm. Math. Helvet., 28 (1954), 17 - 28.

[A4] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology 1900 - 1960, Birkhäuser, 1989.

[A5] Dodson, C. T. J., Categories, bundles, and space-

time topology, Kluwer, 1988, p. 94ff.

[A6] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.

李贵松 译 潘建中 校

右群 [right group; правая группа]

右单 (见**单半群** (simple semi-group)) 且满足左消去律的半群. 右群是**完全单半群** (completely simple semi-group). 半群 S 是右群等价于下列条件之一: a) S 是右单的且包含幂等元, b) S 是正则的 (见**正则半群** (regular semi-group)) 且满足左消去律; c) S 可被分划为若干个左理想, 且所有左理想都是 (必须同构的) 群; d) S 是一个群与一个右零半群的直积 (见**幂等元半群** (idempotents, semi-group of)). 左群 (left group) 的概念类似于右群的概念. 只有群同时是右群和左群. 任何完全单半群可被分划为若干右 (左) 理想, 且所有右 (左) 理想是 (必须同构的) 右 (左) 群.

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1-2, Amer. Math. Soc., 1961-1967.

Л. Н. Шеврин 撰 田振际 郑恒武 译 郭聿琦 校

右序群 [right-ordered group; правоупорядоченная группа]

在其元素的集合上定义了全序 $\leqslant$ 的群 (group) G (见**全序群** (totally ordered group)), 并且对所有 $x, y, z \in G$, 不等式 $x \leqslant y$ 蕴涵 $xz \leqslant yz$. G 的正元素的集合 $P = \{x \in G: x > e\}$ 是一个纯 (即 $P \cap P^{-1} = \varnothing$) 线性 (即 $P \cup P^{-1} \cup \{e\} = G$) 子半群 (pure linear sub-semi-group). 任意群的每一纯线性子半群 P 定义一个右序, 即 $x < y$, 当且仅当 $yx^{-1} \in P$.

一个全序集 X 的自同构群 $A(X)$ 可以用自然的方式右序. 每个右序群序同构于一适当全序集 X 的 $A(X)$ 的一个子群 (见 [1]). 一个 Archimedes 右序群, 即 Archimedes 公理成立的右序群 (见 **Archimedes 群** (Archimedean group)) 序同构于实数加群的一个子群. 与 (两侧) 序群不同, 存在没有真凸子群的非交换右序群 (见**凸子群** (convex subgroup)). 右序群类关于字典式扩张封闭. 一个右序群 G 的所有凸子群的系统对子包含关系是全序的, 并且是完全的. 这个系统是可解的 (亦见**可解群** (solvable group)), 当且仅当对任意正元素 $a, b \in G$, 存在一自然数 n, 使得 $a^n b > a$. 如群 G 有一个商群是无挠的可解子群系统 $S(G)$, 那么 G 可以用使 $S(G)$ 中所有子群皆变为凸的方式右序化. 在一个局部幂零右序群中, 凸子群系统是可解的.

一个群 G 可以右序化, 当且仅当对 G 的元素的任意有限系统 $\{x_i \neq e: 1 \leqslant i \leqslant n\}$, 存在数 $\varepsilon_i = \pm 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 使得由集合 $\{x_1^{\varepsilon_1}, \cdots, x_n^{\varepsilon_n}\}$ 生成的半群不包含 G 的单位元.

群 G 的每一个格序是它的一些右序的交 (见**格序群** (lattice-ordered group)).

参考文献

[1] Кокорин, А. И., Копытов, В. М., Линейно упорядоченные группы, М, 1972.

[2] Mura, R. B. and Rhemtulla, A., Orderable groups, M. Dekker, 1977.

В. М. Копытов 撰

【补注】 一个群 G 容许一个全序, 使得用这个序, G 变成右序群, 就称这个群为右可序的 (right orderable). G 上这样的序称为右序 (right order 或 right ordering).

关于右序群的更多的一些概念和结果可以在 [A1] - [A4] 中找到.

参考文献

[A1] Anderson, M. and Feil, T., Lattice ordered groups. An introduction, Reidel, 1988, p. 35, 38 ff.

[A2] Glass, A. M. W. and Holland, W. C., Lattice ordered groups. Advances and techniques, Kluwer, 1989.

[A3] Powell, W. B., Universal aspects of the theory of lattice-ordered groups, in J. Martinez (ed.): Ordered Algebraic structures, Kluwer, 1989, 11-50.

[A4] Darnell, M. R., Recent results on the free lattice ordered group over a right-orderable group, in J. Martinez (ed.), Ordered Algebraic Structures, Kluwer, 1989, 51-57.

卢景波 译 王世强 校

刚性解析空间 [rigid analytic space; жесткое аналитическое пространство]

关于基域 K 是完全非 Archimedes 赋范域的情况**解析空间** (analytic space) 概念的一种不同形式.

远在 19 世纪末在代数数论中就已考虑 p 进变数的解析函数, 然而相应的整体对象——刚性解析空间——则仅仅在 20 世纪 60 年代初才由 J. Tate 引进 (见 [1]). 这个构造是按复解析流形理论模型进行更直接构造. 后者的主要不足之处是, 由于通常解析函数的局部定义是作为在每一点的邻域可展开为幂级数是不适应于基域 K 是完全不连续这个事实. 这种方法定义的解析函数变得"太数值化"(并且, 相应地, 解析流形"太少"). 例如, 每一在 K 上的紧解析流形是有限多个闭球的并 (见 [2]). Tate 的构造由局部对象——仿射型空间 (affinoid spaces) 出发, 类似于代数几何中的仿射簇. 令 T_n 为 K 上 n 个变数 $t_1, \cdots, t_n$ 在多圆盘 $|t_1| \leqslant 1, \cdots, |t_n| \leqslant 1$ 收敛的幂级数的代数. T_n 的商代数称为仿射型代数 (affinoid algebras).

这些代数是 Noether 的，并且它们有一自然的 Banach 拓扑，其中所有理想是闭的和所有同态是连续的．结果是这样的代数的每一极大理想的余维都是有限的和极大理想空间 Max A 在相差一个共轭的意义下是由定义在 K 的有限扩张上的几何点构成．特别地，Max T_n 是单位半径的多圆盘，并且更一般地，对任意 A，空间 Max A 是多圆盘的解析子集（见**解析集**（analytic set））．同态 $\varphi: A \to B$ 定义态射 φ^*: Max $B \to$ Max A，使得仿射型空间形成一范畴．

拓扑空间 X 上的一刚性结构（rigid structure）是一集合（T, Cov U, $\mathcal{O}_X$），其中 T 是 X 中的一开集族，称为容许的（admissible）；每一 $U \in T$, Cov U 是 U 的由容许集组成的一族覆盖（容许覆盖（admissible coverings））；而 $\mathcal{O}_X$ 是 T 上环的预层（pre-sheaf）．对于一容许覆盖要求满足某些自然的公理，特别地，容许覆盖是可加细的（见**加细**（refinement）），又预层 $\mathcal{O}_X$ 必须是关于所有由容许集合组成的容许覆盖的层（sheaf）．带有刚性结构的空间的态射，以及刚性结构诱导到一子空间的概念，对于环空间也可用这些概念类似地定义．每一仿射型空间都可赋于一标准的刚性结构，它在态射下不变．一刚性解析空间（rigid analytic space）由定义是一带有刚性结构的拓扑空间在其上存在一容许覆盖 $X = \bigcup X_i$，使得每一 X_i（带有诱导刚性结构）同构于一带有标准刚性结构的仿射型空间．

对于刚性解析空间几个类似于复空间理论中的熟知定理的结果已经得到．因此有类似于 Cartan 定理 A 和 B 的定理（见 **Cartan 定理**（Cartan theorem），[4]）．更确切地，在仿射型空间上 $\mathcal{O}_X$ 模的凝聚层由它们的截面的模和它们的维数 $\geqslant 1$ 的上同调空间所唯一决定．类似于关于**凝聚层**（coherent sheaf）在一真映射下的象的凝聚性的 Grauert 定理也成立（然而，真映射的定义与通常的十分不一样）．代数曲线和代数簇的**单值化**（uniformization）的 p 进模拟已经构造出来（见[5]）．刚性解析空间的概念和代数几何中的形式**概形**（scheme）的概念之间有关系已经发现（见[5]）．

参考文献

[1] Tate, J., Rigid analytic spaces, *Invent. Math.*, 12 (1971), 257 – 289.

[2] Bourbaki, N. A., Variétés différentielles et analytique, Fascicule de résultats, Éléments de mathématique, Hermann, 1967 – 1971, Fasc. XXXIII (Par. 1 – 7); Fasc. XXXVI (Par. 8 – 15).

[3A] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965.

[3B] Serre, J.-P., Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.

[4] Housel, C., Espaces analytiques rigides, Sém. Bourbaki (1966/1967), Exp. 32, Benjamin, 1968.

[5A] Mumford, D., An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Compos. Math.*, 24 (1972), 2, 129 – 174.

[5B] Mumford, D., An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete ring, *Compos. Math.*, 24 (1972), 2, 239 – 272.

А. Н. Паршин 撰 钟同德 译

刚性[**rigidity**; **жесткость**]

Riemann 空间（Riemannian space）V 中浸入子流形 M 的一种性质，其定义为：M 的每一个等距形变（见**无穷小形变**（infinitesimal deformation））都是平凡的，即对应的 M 上的速度场 z 是由 V 上的一个 **Killing 向量**（Killing vector）场 ζ 诱导的：$z = \zeta \circ i$，这里 $i: M \to V$ 是 M 到 V 的**等距浸入**（isometric immersion）．子流形的刚性问题——本质上是曲面论中基本方程组的线性化微分方程组的解的唯一性问题——在 $\dim M > 2$ 和 $\dim V > 3$ 的情形实际上从未被考虑过；然而，在最简单的情形（$\dim M = \dim V - 1 = 2$），对于位于常数曲率空间中的正曲率曲面曾经有可能构造一个多少有些完整的理论（见 **Векуа 法**（Vekua method））．关于非正曲率或混合曲率的曲面的刚性已知的只是一些零星的结果；原来，除了曲面在空间中的形状以外，所讨论的形变的正则性的次数对曲面的刚性也有影响．

一般而言，非闭曲面不是刚性的，但是：a）已构造出一些具有**平坦点**（flat point）m 的曲面例子，m 的每一个邻域是刚性的或者容许一个有界正则性的无穷小形变；b）存在刚性的全曲率为 4π 的非闭凸曲面，它们以平面抛物线为边界（类型 T 的曲面（surfaces of type T）的一部分）．

对曲面的边界或曲面中曲线的可变性的限制程度会影响曲面的刚性．例如：1）沿一张平面滑动的球面截形 S 按 S 大于或小于半球面而分别是刚性或非刚性的；2）一片包含两条固定的相交母线的双曲抛物面是刚性的；3）一片具有固定边界的平面不是刚性的．

对于闭曲面的刚性已经研究得比较详尽；例如，α）闭凸曲面是刚性的（见 **Blaschke-Weyl 公式**（Blaschke-Weyl formula），亦见[2]）；β）同时，存在非刚性的具有混合曲率的旋转闭曲面；γ）环面是刚性的；δ）闭**柱形面**（cylindroid）是刚性的，当且仅当中截面的面积满足方程

$$S_{mc} = \frac{1}{4}(S_1 + S_2),$$

这里 S_1 和 S_2 是上底面和下底面的面积；ε）k 个 2

维球面的度量积在 Euclid 空间 E^{3k} 中是刚性的，而且在 $E^{3k+l}(l>0)$ 中不是刚性的．

这里定义的刚性概念有时称为一阶刚性．二阶或更高阶的刚性也已引入．刚性概念也引伸到非正则曲面的情形，例如，对多面体；然而，在那里主要的结果与凸多面体有关（见关于多面体的 **Cauchy 定理**（Cauchy theorem）），刚性概念也引伸到 Riemann 空间中曲面的情形，例如，任意亏格的具正极值曲率的闭曲面是刚性的．

参考文献

[1] Ефимов，Н. В.，《Успехи матем. наук》，3（1948），2，47－158．

[2] Погорелов，А. В.，Внешняя геометрия выпуклых поверхностей，М.，1969．

[3] Кон-Фоссен，С. Э.，Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом，М.，1959．

[4] Векуа，И.，Обобщенные аналитические функции，М.，1959．

[5] Александров，А. Д.，Выпуклые многогранники，М.-Л.，1950．

[6] Фоменко，В. Т.，《Матем. заметки》，16（1974），3，441－445．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Huck，H.，Roitzsch，R.，Simon，U.，Vortisch，W.，Walden，R.，Wegner，B. and Wendland，W.，Beweismethoden der Differentialgeometrie im Grossen，Lecture notes in math.，335，Springer，1973．

潘养廉 译

环［ring；кольцо］

定义了加法和乘法这两个二元代数运算的集合 R，关于加法是一个 **Abel 群**（Abelian group）（环的加法群（additive group of the ring）），乘法对加法满足分配律：

$$a(b+c)=ab+ac,\ (b+c)a=ba+ca,$$

这里 $a,b,c\in R$．一般对乘法不作限制，即 R 关于乘法是一个广群（groupoid）（称为环的乘法广群（multiplicative groupoid of the ring））．

一个非空子集 $A\subset R$ 称为 R 的子环（subring），如果关于在 R 上定义的运算，A 本身是一个环，即 A 必须是 R 的加法群的一个子群及这个环的乘法广群的子广群．显然，环本身和仅由零元素组成的零子环是该环的子环．环的子环的（集合论的）交是一个子环．环 R 的一族子环 A_α 的并是指包含全体 A_α 的所有子环的交，$\alpha\in I$．一个给定环的所有子环的集合，关于子环交和并的运算，是一个格（lattice）$S(R)$．该环的理想（ideal）的集合成为 $S(R)$ 的一个子格．

关于环论的各个方向，见**环与代数**（rings and algebras）；**结合环与结合代数**（associative rings and algebras）；**非结合环与非结合代数**（non-associative rings and algebras）．

О. А. Иванова 撰

【补注】 在许多文献中不指明地约定，环含有单位元，记为 1，而子环取带有相同单位元的子环．在这情况下，理想的集合不是 $S(R)$ 的子格．

蔡传仁 译

多项式环［ring of polynomials；многочленов кольцо］

元素为系数在某个确定的域（field）k 中的**多项式**（polynomial）的环．也可讨论任一交换结合环 R 上的，例如整数环上的多项式环．环 R 上的变元为 $x_1,\cdots,x_n$ 构成的有限集的多项式环通常记为 $R[x_1,\cdots,x_n]$．也可以谈论变元为无限集的多项式环，只要约定其中每个单独的多项式仅依赖于有限多个变元．环 R 上的多项式环是 R 上的有幺元的（交换的）**自由代数**（free algebra）；变元集是这个代数的自由生成元组．

任意**整环**（integral domain）上的多项式环仍是整环．**唯一分解环**（factorial ring）上的多项式环仍是唯一分解环．

对于域 k 上的有限多个变元的多项式环有 Hilbert 基定理：$k[x_1,\cdots,x_n]$ 中的每个理想都是有限生成的（作为理想）（见 **Hilbert 定理**（Hilbert theorem））．域上的一个变元的多项式环，$k[x]$ 是**主理想环**（principal ideal ring），即它的每个理想都由一个元素生成．进而言之，$k[x]$ 是 **Euclid 环**（Euclidean ring）．$k[x]$ 的这个性质使得可以完全刻画它上面的有限生成模，特别地，可以把有限维向量空间中的线性算子简化为典范形式（见 **Jordan 矩阵**（Jordan matrix））．当 $n>1$ 时环 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 不是主理想环．

设 S 是有幺元的交换结合 k 代数，又设 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 是 Descartes 幂 S^n 中的一个元素，则存在唯一的由 n 元多项式环到 S 的 k 代数同态：

$$\varphi_a:k[x_1,\cdots,x_n]\to S,$$

使得对于所有的 $i=1,\cdots,n$，都有 $\varphi_a(x_i)=a_i$，且 $\varphi_a(1)$ 是 S 中的幺元．在此同态下，多项式 $f\in k[x_1,\cdots,x_n]$ 的象称作它在点 a 处的值（value）．一个点 $a\in S^n$ 称作一个多项式组 $F\subset k[x_1,\cdots,x_n]$ 的零点，如果 F 中的每个多项式在这个点处的值为 $0\in S$．对于多项式环有 Hilbert 零点定理：设 $\mathfrak{A}$ 是环 $R=k[x_1,\cdots,x_n]$ 中的一个理想，令 M 为 $\mathfrak{A}$ 在 $\bar{k}^n$ 中的零点集，其中 $\bar{k}$ 是 k 的代数闭包，又设 g 是在 M 中的所有点处取值皆为零的一个多项式，则存在自然数 m，使得 $g^m\in\mathfrak{A}$（见 **Hilbert 定理**（Hilbert theorem））．

设 A 是环 $R=k[x_1,\cdots,x_n]$ 上的任意一个模，则存在自由 R 模 $X_0,\cdots,X_n$ 和同态 $X_i\to X_{i-1}$，使

得同态序列

$$\{0\} \leftarrow A \leftarrow X_0 \leftarrow \cdots \leftarrow X_n \leftarrow \{0\}$$

正合，即一个同态的核是后面一个同态的象．这个结果是多项式环关于合冲的 **Hilbert 定理**（Hilbert theorem）的可能的表达方式之一．

系数在主理想环中的有限多个变元的多项式环上的有限生成的投射模是自由的（见[5]，[6]）；这是 Serre 问题（Serre problem）的答案．

仅在某些特殊情形已有下述问题的答案：1) 多项式环的自同构群是否由初等自同构生成？2) $k[x_1,\cdots,x_n]$ 是否被任意一组使得 $\det\|\partial f_i/\partial x_j\|$ 为非零常数的 $f_1,\cdots,f_n$ 生成？3) 如果 $S\otimes k[y]$ 同构于 $k[x_1,\cdots,x_n]$，S 是否一定同构于 $k[x_1,\cdots,x_{n-1}]$？

参考文献

[1] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[2] Bourbaki, N., Algèbre. Eléments de mathématiques, 2, Masson, 1981, Chapts 4; 5; 6.

[3] Hilbert, D., Ueber die vollen Invariantensysteme, *Math. Ann.*, **42** (1893), 313 – 373.

[4] Hilbert, D., Ueber die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Ann.*, **36** (1890), 473 – 534.

[5] Суслин, А. А., «Докл. АН СССР», **229** (1976), 1063 – 1066.

[6] Quillen, D., Projective modules over polynomial rings, *Invent. Math.*, **36** (1976), 167 – 171.

Ю. А. Бахтурин 撰　赵春来 译

表示环［**ring of representations**, representation ring; **представлений кольцо**］

如下定义的一个**交换环**（commutative ring）R．R 的加法群是由群 G 在一个域 K 上的线性表示的等价类所生成，定义关系有形式 $\pi=\pi_1+\pi_2$，这里 π 是表示的一个等价类，π_1 是它的一个子表示的等价类，而 π_2 是对应的 π 的商表示的等价类；R 的乘法是对于两个表示 π_1 和 π_2 令它们的张量积与之对应．表示环有时也称为这个群的 Grothendieck 环（Grothendieck ring）．对于局部紧群 G 来说，表示环常意味着在 G 的连续酉表示的等价类的集合内由直和与张量积所定义的交换环 R．如果 G 是紧的，R 的结构是很有用的．它通过块代数而导致对偶理论．对于更一般的类型 Ⅰ 的群的情形来说，R 的研究可以归结为不可约酉表示的张量积的研究．　　А. И. Штерн 撰

【补注】 常对所考虑的表示加上一些有限性的条件，否则表示环将会是零环．

第二种表示环（representation ring）是通过考虑适当的表示模分裂的短正合列（以代替短正合列）的等价类而得到的．除非所涉及的表示类全部由完全可约表示组成（如在紧群的情形下），这两个表示环可以是很不相同的．

参考文献

[A1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Methods of representation theory, Ⅱ, Wiley (interscience), 1987.

郝钢新 译

均幂环［**ring with divided powers**］

【补注】 设 R 是有幺元的交换环，又设 A 是一个增广 R 代数，即给定了一个 R 代数同态 $\varepsilon: A\to R$．R 上的（或更确切地，增广理想 $I(A)=\ker(\varepsilon)$ 上的）一个均幂结构（divided power structure）是映射的序列

$$\gamma_r: I(A)\to I(A),\ r=1,2,\cdots$$

使得

1) $\gamma_1(x)=x$;

2) $\gamma_r(x)\gamma_s(x)=\binom{r+s}{s}\gamma_{r+s}(x)$;

3) $\gamma_t(x+y)=\sum_{r=0}^t\gamma_r(x)\gamma_{t-r}(y)$;

4) $\gamma_s(\gamma_r(x))=\varepsilon_{s,r}\gamma_{rs}(x)$;

5) $\gamma_r(xy)=r!\gamma_r(x)\gamma_r(y)$;

其中 3) 中的 $\gamma_0(x)=1$，以及

$$\varepsilon_{s,r}=\binom{r}{r-1}\binom{2r}{r-1}\cdots\binom{(s-1)r}{r-1}.$$

在 A 是 R 上的分次交换代数，$A_0=R$ 的情形，这些要求还须增添（同时稍微改变）如下：

6) $\gamma_r(A_k)\subset A_{rk}$,

代替 5) 的是

5′)

$\gamma_r(xy)=r!\gamma_r(x)\gamma_r(y)$，当 $r\geqslant 2$ 且 x,y 为偶次元；

$\gamma_r(xy)=0$，当 $r\geqslant 2$ 且 x,y 为奇次元．

给定一个 R 模 M，可如下构作均幂代数 $\Gamma(M)$：它（作为 R 代数）由符号 $m^{(r)}$（$m\in M$，$r=1,2,\cdots$）生成，并在这些符号之间引入关系：

$$(m_1+m_2)^{(t)}=\sum_{r=0}^{t}m_1^{(r)}m_2^{(t-r)},$$

$$(\alpha m)^{(t)}=\alpha^t m^{(t)},\ \alpha\in R,$$

$$m^{(r)}m^{(s)}=\binom{r+s}{r}m^{(r+s)}.$$

这个 $\Gamma(M)$ 满足 1) – 5)．增广映射把 $m^{(r)}$ 映为 0（$r>0$）．如果指定 $m^{(r)}$ 的次数为 $2r$，则得到一个分次交换代数，它里面 $\Gamma(M)_0=R$，$\Gamma(M)_1=M$．它满足条件 1) – 4)，5′)，6)．

如果 A 是 $\mathbf{Q}$ 代数，则总可以定义均幂为 $a\mapsto(r!)^{-1}a^r$．关系 1) – 5) 可被理解为表达这些"均幂"之间的关系（例如由二项式定理得到的结果）的

方式，而不必用整数作除法．

在余代数（co-algebra）(C,μ) 中的均幂序列（divided power sequence）是指元素为 $y_0=1, y_1, y_2, \cdots$ 的序列，它们满足

$$\mu(y_n)=\sum_{i+j=n} y_i \oplus y_j .$$

均幂序列应用于 Hopf 代数和形式群的理论（见形式群（formal group）；**Hopf 代数**（Hopf algebra））（[A1]－[A3]）．具有均幂的环出现在代数拓扑中（在那里它们提供了幂上同调算子的自然的设定）（[A4]－[A5]），以及形式群的理论中（[A3]，[A2]）．

参考文献

[A1] Roby, N., Les algèbres à puissances divisées, *Bull. Soc. Math. France*, 89(1965), 75－91.

[A2] Hazwinkel, M., Formal groups and applications, Acad. Press, 1978.

[A3] Cartier, P., Exemples d'hyperalgèbres, in Sem. S. Lie 1955/56, Vol. 3, Secr. Math. Univ. Paris, 1957.

[A4] Thomas, E., The generalized Pontryagin cohomology operations and rings with divided powers, Amer. Math. Soc., 1957.

[A5] Eilenberg, S. and MacLane, S., On the groups $H(\pi, n)$, II, *Ann. of Math.*, 60(1954), 49－189.

赵春来 译

可除环 [**ring with division** 或 division ring; **кольцо с делением**]

一个环（ring）（不一定是结合的），在其中方程

$$ax=b, \; ya=b$$

对任意两个元素 $a\neq 0$ 和 b 都是可解的．当这些方程的解唯一确定时，该环称为拟可除环（quasi-division ring）．与任意可除环不同，拟可除环不能有零因子（zero divisor）；拟可除环的非零元关于乘法组成一个**拟群**（quasi-group）．任一没有零因子的环（不一定是结合的）可以嵌入一个拟可除环．一个结合可除环是一个（结合）**除环**（skew-field）．亦见**可除代数**（division algebra）．

参考文献

[1] Курош, А. Г., *Лекции по общей алгебре*, 2 изд., М., 1973（英译本：Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963）.

О. А. Иванова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jacobson, N., The theory of rings, Amer. Math. Soc., 1943.

裴定一 译　赵春来 校

含算子环 [**ring with operators**; **операторное кольцо**]，含算子域 Σ 的环（ring with domain of operators）

一个环（ring），在其上（按合成的外法则）定义了给定集合 Σ 的元素对环的元素的一个作用（"乘法"），满足下述公理：

$$(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha, \tag{1}$$

$$(ab)\alpha=(a\alpha)b=a(b\alpha), \tag{2}$$

这里 α 是 Σ 的元素，$a,b,a\alpha,b\alpha$ 是环的元素．这样，算子作用成加群的自同态，且与环元素的乘法可交换．一个带算子域 Σ 的环，或更简洁地，一个 Σ 算子环（operator ring），可以视为一个**泛代数**（universal algebra），带两个二元运算（加法和乘法），带一个一元运算的集合 Σ，如同通常的环恒等式一样，由恒等式（1）和（2）相联系．与含算子群类似，以相同的方法可定义 Σ 容许子环（permissible subring），Σ 容许理想（permissible ideal），Σ 算子同构（operator isomorphism），和 Σ 算子同态（operator homomorphism）的概念．见**算子群**（operator group）．如果 Σ 算子环 R 含有单位元，则环 R 的所有理想和所有单侧理想都是 Σ 容许的．

环 R 被称为含算子环 Σ 的环（ring with a ring of operators），如果它是一个算子环，它的算子域 Σ 本身也是一个结合环，并且对任何 $\alpha,\beta\in\Sigma$，$a\in R$，以下等式成立：

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta, \tag{3}$$

$$a(\alpha\beta)=(a\alpha)\beta . \tag{4}$$

含算子环的环也可以定义为一个环，它同时是一个 Σ 模，并且满足公理（2）．每个环可以自然地视为整数环上的算子环．

对 R 的所有元素 a 和 Σ 的所有元素 α,β，元素 $a(\alpha\beta-\beta\alpha)$ 是 R 的一个**零化子**（annihilator）．因此，如果 R 是一个没有零化子的含算子环，则它的算子环 Σ 必定是交换的．

最常研究的含算子环其算子域是一个有单位元的结合交换环．这种环通常被称为交换环上的代数，也称为线性代数．最常研究的线性代数是域上的代数；这些代数的理论同环（不带算子）的一般理论平行地展开．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973（英译本：Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963）.

К. А. Жевлаков 撰

【补注】其实，对于含非交换算子环 R 的环 A，双线性性质（1），（2）和模性质（3），（4）实际上是不相容的，因为这要求对所有 $a,b\in A$，$\alpha,\beta\in R$，$b\cdot$

$a(\alpha\beta-\beta\alpha)=0$. 这就是通常仅考虑交换环上的代数的原因. 有时也用向量代数(vector algebra)这一词汇来代替(环上的)代数. 但在现今, 向量代数和线性代数(linear algebra)这两个词汇极少用于环上的代数.

对于非交换环上的代数, 双线性性质(2)弱化为 $(ab)\alpha=a(b\alpha)$. 亦见**代数**(algebra)和**环**(ring).

蔡传仁 译

戴环空间 [**ringed space**; **окольцованное пространство**]

具有**环层**(sheaf) $\mathscr{O}_X$ 的**拓扑空间**(topological space) X. 层 $\mathscr{O}_X$ 称为戴环空间 $(X, \mathscr{O}_X)$ 的结构层(structure sheaf). 通常总是假设 $\mathscr{O}_X$ 是具有单位元的交换结合环的层. 二元组 $(f, f^{\#})$ 被称为从戴环空间 $(X, \mathscr{O}_X)$ 到戴环空间 $(Y, \mathscr{O}_Y)$ 里的态射(morphism), 如果 $f: X \to Y$ 是连续映射, $f^{\#}: f^{*}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$ 是 X 上环层的同态, 它把茎上的单位元映到单位元. 戴环空间及其态射构成一个范畴. 给出同态 $f^{\#}$ 等价于给出同态

$$f_{\#}: \mathscr{O}_Y \to f_{*}\mathscr{O}_X,$$

它把单位元映到单位元.

如果 $\mathscr{O}_X$ 是**局部环**(local ring)的层, 则称戴环空间 $(X, \mathscr{O}_X)$ 为局部戴环空间(local ringed space). 在定义局部戴环空间 $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ 间的态射 $(f, f^{\#})$ 时, 要进一步假设对任意的 $x \in X$, 同态

$$f_x^{\#}: \mathscr{O}_{Y, f(x)} \to \mathscr{O}_{X, x}$$

是局部的. 局部戴环空间构成所有戴环空间的范畴里的子范畴. 另一个重要的子范畴是在(固定的)域 k 上的戴环空间的范畴, 即戴环空间 $(X, \mathscr{O}_X)$, 其中 $\mathscr{O}_X$ 是 k 上代数的层, 且态射与代数结构相容.

戴环空间的例. 1) 对于每个拓扑空间 X 有一个对应的戴环空间 (X, C_X), 这里 C_X 是 X 上连续函数的芽层.

2) 对于每个**微分流形**(differentiable manifold) X (譬如是 C^∞ 类的), 存在相应的戴环空间 (X, D_X), 这里 D_X 是 X 上 C^∞ 类函数的芽层. 此外, 微分流形的范畴是 $\mathbf{R}$ 上戴环空间范畴的满子范畴.

3) 域 k 上的**解析流形**(analytic manifold)和**解析空间**(analytic space)构成了 k 上戴环空间范畴的满子范畴.

4) **概形**(scheme)是局部戴环空间范畴里的满子范畴.

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

[2] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 如果 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的层, $f: X \to Y$ 是拓扑空间的映射, 则 Y 上的诱导层(induced sheaf) $f_{*}\mathscr{F}$ 是由 $(f_{*}\mathscr{F})(V)=\mathscr{F}(f^{-1}V)$ 对所有开集 $V \subset Y$ 所定义的层.

陈志杰 译

广环 [**ringoid**; **кольцоид**]

结合环概念的推广, 见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras). 设 (Ω, Λ) 是符号差 Ω 的**泛代数簇**(variety of universal algebras)(亦见**泛代数**(universal algebra)). 代数 $\mathbf{G}=\{G, \Omega\cup(\cdot)\}$ 称为簇 (Ω, Λ) 的代数 $\mathbf{G}^{+}=\{G, \Omega\}$ 上的广环(ringoid over the algebra), 或 (Ω, Λ) 广环(ringoid), 如果 $\mathbf{G}^{+}$ 属于 (Ω, Λ), 代数 $\mathbf{G}$ 关于乘法 $(\cdot)$ 是一个子群, 并且对乘法的右分配律成立:

$$(x_1 \cdots x_n \omega) \cdot y=(x_1 y) \cdots (x_n y) \omega,$$
$$\forall\ \omega \in \Omega,\ x_i \in G.$$

Ω 的运算称为广环 $\mathbf{G}$ 的加法运算(additive operations of the ringoid), 而 $\mathbf{G}^{+}$ 称为广环的加法代数(additive algebra of the ringoid). 广环称为分配的(distributive), 如果左分配律也成立, 即

$$y \cdot (x_1 \cdots x_n \omega)=(y x_1) \cdots (y x_n) \omega.$$

通常的结合环 $\mathbf{G}$ 是 Abel 群上的分配广环(而 $\mathbf{G}^{+}$ 是 $\mathbf{G}$ 的加法群). 群上的广环称为近环(near-ring), 半群上的广环是半环(semi-ring), 幺拟群上的广环是新环(neo-ring). 环上的广环也被考虑(有各种名称, 其中一个是 Menger 代数(Menger algebra)).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Общая алгебра, лекции 1969–1970 (英译本: Kurosh, A. G., Lectures on general algebra, Chelsea, 1963).

О. А. Иванова 撰

【补注】 术语"广环"至少在两个无关的含义下类似于广群(groupoid), 见 [A1]–[A3].

参考文献

[A1] Hilton, P. J. and Lebermann, W., Homology and ringoids I, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 54 (1958), 156–167.

[A2] Hilton, P. J. and Lebermann, W., Homology and ringoids II, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 55 (1959), 149–164.

[A3] Hilton, P. J. and Ledermann, W., Homology and ringoids III, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 56 (1960), 1–12.

蔡传仁 译

环与代数 [**rings and algebras**; **кольца и алгебры**]

带有两个通常称为加法和乘法的二元运算的集合. 这样一个带有加法和乘法的集合称为环 (ring), 如果: 1) 它关于加法是一个 **Abel 群** (Abelian group) (特别地, 环有零元, 记为 0, 每个元素 x 有一个负元 $-x$); 2) 乘法对加法左右分配, 即对环中所有元素 x, y, z, 有 $x(y+z)=xy+xz$ 和 $(y+z)x=yx+zx$.

如果环 K 没有零因子, 即对任何非零 $x, y\in K$, $xy\neq 0$, 则环的全部非零元的集合关于乘法是一个**广群** (groupoid). 如果全部非零元的集合关于乘法是一个**群** (group), 则环是一个除环 (skew-field). 环 K 称为结合的 (associative), 如果乘法满足结合律, 即对 K 中所有 x, y, z, 有 $(xy)z=x(yz)$. 如果环中的乘法是交换的, 即对 K 中所有 x, y, 有 $xy=yx$, 则环称为交换的 (commutative). 所谓单位元 (identity), 指的是环的元素 1, 对所有 $x\in K$, 有

$$x\cdot 1=1\cdot x=x.$$

一般地, 环不一定有单位元. 每个除环是有单位元的无零因子结合环. 有单位元的无零因子交换结合环被称为整环 (integral domain).

设 Φ 是有单位元 1 的结合环, 则环 A (不一定是结合的) 被称为 Φ 上的代数 (algebra), 或含算子环 Φ 的**含算子环** (ring with operators), 若对任意两个元素 $\alpha\in\Phi$, $a\in A$, 存在唯一的积 $\alpha a\in A$, 使得对任意 $\alpha, \beta\in\Phi$, $a, b\in A$, 下列关系式成立:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a,\ \alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b,\\ \alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a,\ 1a=a,\ \alpha(ab)=(\alpha a)b.\end{array}\right\}\quad(1)$$

如果 Φ 是交换的, 通常将条件 (1) 的最后一条增强为:

$$\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b).\qquad(2)$$

任何环可以视为整数环上的代数, 积 na (n 为整数) 是通常的, 即 $a+\cdots+a$ (n 次). 因此环可以被看成代数的特殊情形.

如果 A 是域 Φ 上的代数, 那么, 由定义, A 是 Φ 上的一个**向量空间** (vector space), 因此有一组基. 这样, 只要定义基元的乘法表, 就可以构造域上的一个代数. 一个域上的代数, 如果有一组有限基, 即作为域上向量空间是有限维的, 则称为有限维的 (finite dimensional).

代数的最著名的例子是域上的矩阵代数, 多项式代数和形式幂级数代数.

如同其他代数理论, 同态和同构的概念在环与代数的理论中起重要作用. 许多论证和刻画"精确到同构", 即同构的环与代数是不加区别的. 同态的概念与理想 (ideal) 和子代数 (子环) 的概念密切相关.

设 A 和 B 是两个代数 (在某个含单位元的固定环 Φ 上). 集合 A 到集合 B 的映射 $\varphi: A\to B$, 称为 A 到 B 的代数同态 (homomorphism of the algebra), 如果它"保持代数运算", 即对所有 $x, y\in A$, $\alpha\in\Phi$

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$$

$$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x).$$

同态 φ 称为同构 (isomorphism), 如果 φ 是 A 到 B 上的一一映射. 这等于说, φ 的同态象 (image of the homomorphism),

$$\operatorname{Im}\varphi=\varphi(A)=\{\varphi(\alpha);\ a\in A\},$$

一般为 B 的子代数, 这时与整个 B 相重, φ 的同态核 (kernel of the homomorphism),

$$\operatorname{Ker}\varphi=\{a\in A;\ \varphi(a)=0\},$$

一般为 A 的双侧理想, 此时为零理想. 代数 A 的所有的双侧理想均为从这个代数出发的同态映射的核. A 的同态象, 精确到同构, 由 A 关于一切可能的双侧理想的商代数得到.

由一个代数到它的子代数和它的同态像, 是获得新的代数的一个方法. 例如, 作为域 Φ 上多项式代数 (含足够多变量) 的同态象, 可得到 Φ 上任何交换结合代数. 其他应提及的常用构造是环与代数的直和、直积和次直积.

历史资料. 直到 19 世纪中期, 仅知道环的个别例子: 由代数方程理论的需求而出现的数环, 即复数的子环, 以及数论中的整数的剩余类环. 环的一般概念还不存在.

非交换的环与代数的最初的例子在 W. R. Hamilton 和 H. Grassmann 的工作中可见 (1843 - 1844). 这些是**四元数** (quaternion) 除环, 八元数代数和**外代数** (exterior algebra). 超复数系的概念开始被阐述, 用现代术语来说, 就是实数域 **R** 或复数域 **C** 上的有限维结合代数. 1870 年 B. Peirce 的论文里出现了**幂等元** (idempotent) 和**幂零元** (nilpotent element) 的概念; 并且证明了如果超复数系的元素不都是幂零的, 则至少存在一个非零幂等元. 这一结果发展为"幂等元技巧"和"Peirce 分解", 它们广泛地应用于有限维代数的研究. 1870 年以后开始了超复数系的更一般的研究. 在 R. Dedekind 的工作中可遇到 (结合) 环、除环和域上代数 (超复数系) 的一般概念, 尽管他称环为序 (order). 术语"环"后来被 D. Hilbert 引

人. K. Weierstrass 和 Dedekind 证明了实数域上任何不含幂零元的有限维交换结合代数是域的直和，这些域同构于 **R** 或者 **C**. 1878 年 G. Frobenius 证明了实数域上仅有的有限维非交换除环是四元数除环.

20 世纪初，超复数系理论的著名结果来自 S. E. Molin 和 E. Cartan 的论文. 这时，同态的理论已相当成熟，同态与理想之间的关系已非常明晰，代数的直和的概念也已出现. 根据对 **C** 上有限维结合代数的思考，Molin 引入了单代数的概念，并且证明了单代数恰好是 **C** 上的一般矩阵代数. 他也引入了根（现称为经典根）的概念，实质上证明了，如果一个代数的根是零，那么这个代数是单代数的直和，见**环与代数的根**（radical of rings and algebras）. 这些结果被 Cartan 再发现，并推广至 **R** 上的代数.

20 世纪初，不再局限于实数域和复数域，开始研究任意域上的（结合有限维）代数. J. M. Wedderburn 使用 Peirce 的精美的幂等元技巧，将 Molin 和 Cartan 的结果推广至任意域上的情形. 他还证明了任何有限除环是交换的.

最后，在 20 年代和 30 年代，终于开始了对任意**结合环与结合代数**（associative rings and algebras）的研究，而环的左和右理想开始发挥重要作用. 在 1925－1926 年，W. Krull 和 E. Noether 引入并系统地运用左理想的极大条件和极小条件. 1927 年 E. Artin 将 Wedderburn 关于半单代数分解的结果运用于左理想同时满足极大条件和极小条件的所有结合环与代数. 1929 年 Noether 指出，只要求满足极小条件就足够了. 1939 年证明了在极小条件下（如同在极大条件下），环的根是它的最大的幂零左理想，见 **Artin 环**（Artinian ring）；**Noether 环**（Noetherian ring）. 这样，1940 年左右 Molin-Cartan-Wedderburn 理论被推广至满足左（或右）理想极小条件的结合环与代数.

环与代数理论的基本趋向. 结构理论刻画了（通常，满足某个有限性条件的）代数，将其表示为具有简单结构的代数的直和或次直积的形式. 现今（大约自 1970 年以来），结合环和结合代数的经典的 Molin-Cartan-Wedderburn-Artin 理论被推广至满足主左理想极小条件的环与代数. 在这一条件下，实际上证明了如果代数没有幂零理想，则可分解为单代数（不一定有限个）的直和，若连幂零元也没有，则可分解为除环的直和. 当代数含有幂零理想时，它的结构是非常复杂的. 关于这种代数的最著名的定理是“分裂根”的 **Wedderburn-Мальцев 定理**（Wedderburn-Mal'tsev theorem）. 此时，有限维结合代数分解为根和半单子代数的半直和. 交错代数的深刻的结构理论也被给出，见**交错环与交错代数**（alternative rings and algebras）. 事实上，完整的 Molin-Cartan-Wedderburn-Artin 理论对此成立. 对 Jordan 代数也有同样的结果，见 **Jordan 代数**（Jordan algebra）.

许多没有有限性条件的结构定理也被获得. Krull 早已证明：不含幂零元的任何交换结合环分解为无零因子环的次直积. 随后表明 Krull 定理中的交换性要求可以略去. 接着又发现一些准则，判别任意非结合代数能否分解为无零因子代数和唯一除法代数的次直积.

单代数和除环的理论与结构理论密切相关，因为许多结构定理将环与代数的研究归结为单代数和除环的研究. 于是刻画了带单位元有极小左理想的结合单代数，有限维交错单代数和 Jordan 单代数. 还考虑了结合单代数和除环的自同构与导子. 见**代数系统的自同构**（algebraic system, automorphism of an）；**微分代数**（differential algebra）.

根的理论也与结构理论密切相关，结构定理通常是这样一些定理，它们所涉及的环与代数在一些根的意义下是半单的. 为了获得新的结构定理，引入了各种不同的根：Baer 下诣零根，Левицкий 局部幂零根，拟正则 **Jacobson 根**（Jacobson radical），Brown-McCoy 根，等等. 在 50 年代初，创建了与模论和表示论紧密联系的根的一般理论. 见**环与代数的根**（radical of rings and algebras）.

此后，带恒等式关系的代数开始吸引了代数学者的注意，人们认识到（非平凡的）恒等式的存在强烈影响着环和代数的结构. 在这方面，有关于结合代数的 Kaplansky 指数定理：如果 A 是一个本原代数，带有一个 d 次多项式恒等式，则 A 是它的中心上的有限维单代数，并且它的维数不超过 $[d/2]^2$（见 [6]）. 对于带恒等式关系的非结合代数，也有一些结果. 见**环簇**（variety of rings）.

自由代数（free algebra）和代数的**自由积**（free product）是环与代数理论中的重要结构，这是因为（某个簇的）任何代数是这个簇的自由代数的同态象. 自由非结合代数的任何子代数本身也是自由的，并且自由交换代数，自由反交换代数和自由 Lie 代数的所有子代数都是自由的. 这方面的研究与带恒等式关系的代数，与代数簇紧密联系，因为所给簇的恒等式是这个簇的自由代数中的定义关系.

嵌入理论大量研究结合环与结合代数到除环和单代数中的嵌入问题，其中，这样或那样的方程是可解的. 见**环的嵌入**（imbedding of rings）. 不能嵌入除环的无零因子结合代数的例子刺激了这一理论的发展. 于是发现了无零因子结合环和结合代数的（经典）分式除环存在性准则，以及环嵌入除环的充要条件. 分式环的理论也与嵌入理论有关. 见**分式环**（fractions, ring of）.

理想的加性理论（additive theory of ideals）的出现将算术基本定理推广至带极大条件的任何交换结合

环(Noether 环),该定理等价于将整数环的任何理想表示成素理想方幂的交,这个理论的基本目的是要将环的任何理想表示成有限个某种特殊形式(准素的,原的,叔的,等等)的理想的交. 这里选择"特殊"理想的形式和分解形式,使得在某个有限性条件下,"存在性定理"(即任何理想有分解)和"唯一性定理"(每个理想分解成的简单理想的确定集合与分解无关)成立. 这个目的,在 Noether 环中对准素理想的经典 Noether 理论已经实现. 这个定理也被推广到非交换情形.

交换代数(commutative algebra)最初是出现在代数数论中的数环. 现今,在代数和代数几何的交汇处,交换环的理论得以迅速发展.

赋范的,拓扑的,有序的,以及其他带有附加结构的环与代数经常出现在泛函分析和数学的其他领域中. 带有附加结构环的详细的情形见**赋范环**(normed ring);**拓扑代数**(topological algebra);**序环**(ordered ring).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, 1960.

[2] Bourbaki, N., Eléments de mathématiques. Algèbre: Polynômes; Corps commutatives; Groupes et corps ordonnés, Masson, 1981, Chapts. 4 – 6.

[3] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structrures. Linear algebra, 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2(译自法文).

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Commutative algebra, Addison-Wesley, 1972(译自法文).

[5] Jacobson, N., The theory of rings, Amer. Math. Soc., 1943.

[6] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[7] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962(中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

[8] Zariski, O. and Samuel, P., Commutative algebra. 1 – 2, Springer, 1975.

[9] Atiyah, M. and Macdonald, I. G., Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley, 1969.

[10] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968.

[11] Курош, А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962(英译本: Kurosh, A. G., Higher algebra, Mir, 1972).

[12] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1974.

[13] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1 – 2, Springer-Verlag, 1955 – 1959(中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, 1 – 2, 科学出版社, 1963 – 1976).

[14] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973(英译本: Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958).

[15] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968(英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984)

[16] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories, 1, Springer, 1973.

B. A. Анбрунакиевич 撰

【补注】 对非交换环 R 在环 A 上的作用,双线性条件 $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$ 同模条件 $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta\alpha$ 和 $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ 实际上是不相容的. 它要求对全部 $a,b\in A$, $\alpha,\beta\in R$, 有 $((\alpha\beta-\beta\alpha)a)b=0=b((\alpha\beta-\beta\alpha)a)$. 因此,当考虑环 A 上非交换算子环 Φ 时,不强求双线性条件(2)成立.

使用下列术语: 若条件(1)成立,称 A 是带算子环 Φ 的环; 若(1)和(2)成立,则 A 是 Φ 代数; 或 Φ 上的代数.

参考文献

[A1] Rowen, L., Theory of rings, I – II, Acad. Press, 1988.

【译注】

参考文献

[B1] 刘绍学, 环与代数, 科学出版社, 1983.

蔡传仁 译

统计程序的风险[risk of a statistical procedure; риск статистической процедуры]

统计决策问题中,表示试验的平均损失的特征,从而是所用统计程序优劣的特征.

设随机变量 X 取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathsf{P}_\theta)(\theta\in\Theta)$, 需要根据 X 的实现在可测决策空间 $(D,\mathscr{A})$ 中作出关于参数 θ 的决定 d. 其次,假设在随机变量 X 服从分布律 P_θ 的情形下,由于作出决定 d,统计员的损失等于 $L(\theta,d)$,其中 L 是定义在 $\Theta\times D$ 上的函数. 在这种情形下,如果统计员在决策问题中采用非随机化**决策函数**(decision function)$\delta:\mathfrak{X}\to D$,则作为该函数 δ 的特征,使用函数

$$R(\theta,d)=\mathsf{E}_\theta L(\theta,\delta(X))=\int_{\mathfrak{X}}L(\theta,\delta(X))\,d\mathsf{P}_\theta(x),$$

称之为基于决策函数 δ 关于损失函数 L 的、统计程序的风险函数(risk function)或简称为风险(risk).

利用风险概念,可以在一切非随机化决策函数的集合 $\Delta=\{\delta\}$ 中引进偏序关系: 对于两个不同决策函数 δ_1 和 δ_2,如果对一切 θ 一致有 $R(\theta,\delta_1)\leqslant R(\theta,\delta_2)$,则认为 δ_1 较好.

如果决策函数 δ 是随机化的,则统计程序的风险定义为

$$R(\theta,\delta)=\int_{\mathfrak{X}}\int_D L(\theta,d)\,dQ_x(d)\,d\mathsf{P}_\theta(x),$$

其中 $\{Q_x(d)\}$ 是决定随机化程序的 Марков 转移概率分布族．

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[2] Ченцов, Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972 (英译本：Chentsov, N. N., Statistical decision rules and optimal inference, Amer Math. Soc., 1982).

[3] Wald, A., Statistical decision functions, Wiley, 1950 (中译本：A. 瓦尔特，统计决策函数，上海科学技术出版社，1960).

М. С. Никулин 撰 周概容 译

Ritz 法 [Ritz method; Ритца метод]

解变分法（variational calculus）中的问题，且一般是解有限维极值问题的一种方法，基于有限维子空间或流形上一个泛函的极小化．

设提出了求可分 **Banach 空间**（Banach space）U 上泛函 $J: U \to \mathbf{R}$ 的极小值点的问题，这里 J 是下有界的．设 U 中某一完全的元素系 $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset U$ 已经给定（所谓的坐标系）．按 Ritz 方法，第 n 次逼近中的极小化元素是在最先的 n 个坐标元素 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 的线性包中去寻找，即逼近元

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(n)} \varphi_j$$

的系数 $c_1^{(n)}, \cdots, c_n^{(n)}$ 是由 $J(u_n)$ 在所指定的那些元素中是极小这个条件所确定的．代替坐标系可以指定一个子空间的序列 $U_n \subset U$，这些子空间不必一个包含于另一个．

设 H 是具有标量积 (u, v) 的 Hilbert 空间，设 A 是 H 中一个自伴正定的（即 $\exists \gamma > 0$: $(Au, u) \geqslant \gamma \|u\|^2$ 对一切 $u \in D(A)$），可能是无界的算子，又设 H_A 是由 A 的定义域 $D(A) \subseteq H$ 对由标量积 $(u, v)_A = (Au, v)$, $u, v \in D(A)$ 生成的范数 $\|u\|_A$ 作完全化而得的 Hilbert 空间．设要求解问题

$$Au = f. \qquad (1)$$

这等价于求二次泛函

$$\Phi(u) = (Au, u) - (u, f) - (f, u)$$

的极小值点的问题，以上泛函可写成形式

$$\Phi(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2, \quad u \in H_A,$$

其中 $u_0 = A^{-1} f$ 是方程 (1) 的解．设 $H_n \subset H_A$, $n = 1, \cdots$，是闭（通常为有限维的）子空间使得对每一 $u \in H_A$ 当 $n \to \infty$ 时 $\|u - P_n u\|_A \to 0$，这里 P_n 是 H_A 中投影到 H_n 上的正交投影．借助于在 H_n 上极小化 Φ，就得到方程 (1) 的解的一个 Ritz 逼近 $u_n = P_n u_0$；此外 $\|u_n - u_0\|_A = \|u_0 - P_n u_0\|_A \to 0$ 当 $n \to \infty$．如果 $\dim H_n = n$ 且 $\varphi_1^{(n)}, \cdots, \varphi_n^{(n)}$ 是 H_n 中的一个基，则该元素

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(n)} \varphi_j^{(n)}$$

的系数由线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})_A c_j^{(n)} = (f, \varphi_i^{(n)}), \quad i = 1, \cdots, n, \qquad (3)$$

确定．

也可以不用问题 (1) 的变分说法而达到一个 Ritz 逼近．即由条件

$$(Au_n - f, \varphi_i^{(n)}) = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

定义逼近 (2)（Галеркин 法（Galerkin method）），也得到同样的方程组 (3)．这是为什么对方程 (1) 的 Ritz 法有时称为 Ritz-Галеркин 法（Ritz-Galerkin method）．

Ritz 的方法广泛地应用于解本征值问题、边值问题和一般的算子方程．设 A 和 B 是 H 中自伴算子．此外，设 A 是正定的，B 是正的，$D(A) \subseteq D(B)$，且设算子 $A^{-1}B$ 在 H_A 中完全连续（见**完全连续算子**（completely-continuous operator））．由于以上的要求，$A^{-1}B$ 在 H_A 中是自伴和正的，且问题

$$Au = \lambda Bu \qquad (4)$$

的谱由正本征值

$$Au_k = \lambda_k B u_k, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots; \quad \lambda_k \to \infty \text{ 当 } k \to \infty$$

组成．

Ritz 的方法是基于变分地确定本征值．例如

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_A} \frac{(Au, u)}{(Bu, u)};$$

借助于仅在子空间 $H_n \subset H_A$ 上实施极小化得到 λ_1, u_1 的 Ritz 逼近 λ_{1n}, u_{1n}．如上所述，如果 $\varphi_1^{(n)}, \cdots, \varphi_n^{(n)}$ 是 H_n 中的一个基，则 λ_k 的 Ritz 逼近 λ_{kn}, $k = 1, \cdots, n$，由方程

$$\det(A_n - \lambda B_n) = 0,$$

$$A_n = \{(A\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})\}_{i,j=1}^{n},$$

$$B_n = \{(B\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})\}_{i,j=1}^{n}$$

确定，u_k 的逼近

$$u_{kn} = \sum_{j=1}^{n} c_{jk}^{(n)} \varphi_j^{(n)}$$

的系数向量 $\mathbf{c}_{k,n} = (c_{1k}^{(n)}, \cdots, c_{nk}^{(n)})$ 是线性齐次方程组 $(A_n - \lambda_{kn} B_n)\mathbf{c}_{kn} = 0$ 的非平凡解．Ritz 法提供了本征值的一个上方逼近，即 $\lambda_{kn} \geqslant \lambda_k$, $k = 1, \cdots, n$.

如果问题(4)的第 k 个本征值是单的($\lambda_{k-1}<\lambda_k<\lambda_{k+1}$),则 Ritz 法的收敛速率由以下关系式

$$\lambda_{kn}-\lambda_k=\lambda_k(1+\varepsilon_{kn})\|u_k-P_nu_k\|_A^2,$$

$$\|u_k\|_A=1,\ \|u_{kn}-u_k\|_A=$$

$$=(1+\varepsilon'_{kn})\|u_k-P_nu_k\|_A,$$

$$\|u_{kn}\|=\|u\|_A=1$$

刻画,这里 $\varepsilon_{kn}, \varepsilon'_{kn}\to 0$ 当 $n\to\infty$. 类似的关系式可继续用于乘子 λ_k 的情况,但是它们需要某些精细形式(见[2]). W. Ritz([4])于 1908 年提出他的方法,但甚至更早,Rayleigh 爵士已用这方法解某些本征值问题. 由于这个关系、Ritz 法常称为 Rayleigh-Ritz 法(Rayleigh-Ritz method),特别是如果谈到解本征值问题时.

参考文献

[1] Вайнберг, М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972 (英译本: Vainberg, M. M., Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, Wiley, 1973).

[2] Красносельский, М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969 (英译本: Krasnosel'skii, M. A., et al., Approximate solution of operator equations, Wolter-Noordhoff, 1972).

[3] Михлин, С. Г., Вариационные методы в математической физике, 2 изд., М., 1970.

[4] Ritz, W., Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. Reine Angew. Math.*, 135 (1908), 1-61.

Г. М. Вайникко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Golub, G. H. and Loan C. F. van, Matrix computations, John Hopkins Univ. Press, 1989.

[A2] Strang, G. and Fix, G. J., An analysis of the finite element method, Printice-Hall, 1973.

[A3] Stoer, J. and Bulirsch, R., Einführung in die numerischе Mathematik, 2, Springer, 1978.

[A4] Ciarlet, P. G., The finite element method for elliptic problems, North-Holland, 1975.

葛显良 译 吴绍平 校

Robin 常数 [Robin constant; Робена постоянная]

Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geq 2)$ 中的点集的一个数值特征,它与该集合的容量(capacity)紧密关联.

设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧集,μ 是(质量)集中在 K 上的正 Borel 测度且由条件 $\mu(K)=1$ 规范化. 下面积分是 μ 的能量(见**测度的能量**(energy of measures)):

$$V(\mu)=\iint_{K\times K}E_n(x,y)d\mu(x)d\mu(y),$$

其中 $E_2(x,y)=\ln(1/|x-y|)$; $E_n(x,y)=1/|x-y|^{n-2}$ $(n\geq 3)$, 而 $|x-y|$ 是两点 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 间的距离. 紧集 K 的 Robin 常数(Robin constant of the compact set)定义为下确界 $\gamma(K)=\inf V(\mu)$, 其中 μ 取遍上述所说的那种类型的所有测度. 如果 $\gamma(K)<+\infty$, 那么这个下确界是有限的而且存在(唯一的)测度 $\lambda>0$ 达到此下确界并满足: λ 集中在 K, $\gamma(K)=V(\lambda)$, $\lambda(K)=1$, 称之为平衡(equilibrium)测度或者容量(capacititary)测度; 如果 $\gamma(K)=+\infty$, 那么对上述那种类型的所有测度 μ 有 $V(\mu)=+\infty$. 紧集 K 的 Robin 常数与它的容量的关系见诸于下面公式:

$$\gamma(K)=\frac{1}{C(K)},\quad \text{当 } n\geq 3 \text{ 时},$$

$$\gamma(K)=-\ln C(K),\quad \text{当 } n=2 \text{ 时}.$$

如果 K 的边界 S 充分光滑, 例如, 它由有限个两两不交的 $C^{1,\alpha}$ 类 $(0<\alpha<1)$ 的简单闭曲面 $(n\geq 3)$ 或者闭曲线 $(n=2)$ 所组成的, 则平衡测度 λ 集中在余集 $CK=\mathbf{R}^n\setminus K$ 的那个包含无穷远点的连通分支的边界 $\widetilde{S}\subset S$ 上. 在这种情况下, 平衡位势(equilibrium potential), Robin 位势(Robin potential), 或者**容量位势**(capacity potential), 也就是平衡测度的位势

$$u(x)=\int E_n(x,y)d\lambda(y)$$

在 $\widetilde{S}$ 上取常数值, 即等于 $\gamma(K)$, 这使得有可能计算出最简单的紧集的 Robin 常数(见 **Robin 问题**(Robin problem)). 例如, 在 R^2, 半径为 $r>0$ 的圆盘的 Robin 常数是 $-\ln r$, 而在 $\mathbf{R}^n$ $(n\geq 3)$, 半径为 $r>0$ 的球的 Robin 常数是 $1/r^{n-2}$. 对于任意具正容量的紧集 K, 处处有 $u(x)\leq\gamma(K)$; 而在平衡测度 λ 的支集 $S(\lambda)$ 上, 除了可能在某个极集的点外, 处处有 $u(x)=\gamma(K)$; 此外 $S(\lambda)\subset K$.

设 D 是扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的包含无穷远点的区域且具有以无穷远点为极点的 **Green 函数**(Green function) $g(z,\infty)$. 那么下列表达式成立:

$$g(z,\infty)=\ln|z|+\gamma(D)+\varepsilon(z,\infty),\qquad (1)$$

这里 $z=x+iy$ 是复变量, $\gamma(D)$ 是区域 D 的 Robin 常数(Robin constant of the domain), 而 $\varepsilon(z,\infty)$ 是 D 中的调和函数(harmonic function); 并且

$$\lim_{|z|\to\infty}\varepsilon(z,\infty)=0.$$

用(1)定义的、区域 D 的 Robin 常数与紧集 ∂D 的 Robin 常数相同: $\gamma(D)=\gamma(\partial D)$. 如果区域 D 不存在 Green 函数, 则假定 $\gamma(D)=+\infty$.

通过推广表达式(1)到具有 Green 函数的 **Rie-**

mann 曲面(Riemann surface)R，可以得到具有极点 p_0 的 Green 函数 $g(p,p_0)$ 的局部表示：

$$g(p,p_0)=\ln\frac{1}{|z-z_0|}+\gamma(R;p_0)+\varepsilon(p,p_0),\quad(2)$$

其中 $z=z(p)$ 是在极点 p_0 的一个邻域里的局部一致参数，$z(p_0)=z_0$，$\gamma(R;p_0)$ 是 Riemann 曲面 R 相对于极点 p_0 的 Robin 常数，而 $\varepsilon(p,p_0)$ 是 p_0 的邻域里的调和函数且满足 $\lim_{p\to p_0}\varepsilon(p,p_0)=0$．对于没有 Green 函数的 Riemann 曲面 R，假定 $\gamma(R;p_0)=+\infty$．在表达式(2)中，Robin 常数 $\gamma(R;p_0)$ 的值依赖于 $p_0\in R$ 的选取．但是，关系式 $\gamma(R;p_0)<+\infty$ 和 $\gamma(R;p_0)=+\infty$ 都与极点 p_0 的选取无关．这使得可能把 Robin 常数的概念应用于 **Riemann 曲面的分类**(Riemann surfaces, classification of)．

参考文献

[1] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文)．
[2] Stoïlow, S. [S. Stoilov], Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Gauthier-Villars, 1938.
[3] Sario, L. and Nakai, M., Classification theory of Riemann surfaces, Springer, 1970.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 亦见**容量**、**测度的能量**(energy of measures)、**Robin 问题**(Robin problem)中引用的参考文献．

高琪仁 吴炯圻 译

Robin 问题[**Robin problem; Робена задача**]，平衡问题(equilibrium problem)，静电问题(electrostatic problem)

关于在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 的紧集 K 的边界 S 上的一个正 Borel 测度 λ 的分布的问题，该测度产生的 **Newton 位势**(Newton potential)$(n\geqslant 3)$ 或者**对数位势**(logarithmic potential)$(n=2)$ 在 K 的内部的任一连通分支上取常数值，此即关于导体 K 的表面 S 上的电荷 $\lambda(K)$ 的平衡分布问题．

对最简单的古典情形，即当 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中与球同胚的闭区域，其边界是 $C^{1,\alpha}$ 类$(0<\alpha<1)$光滑的简单曲面或者(当 $n=2$)曲线 S，$0\in K$ 时，解 Robin 问题归结为求第二类齐次 Fredholm 积分方程

$$\frac{1}{2}v(x)+\frac{1}{k_n}\int_S v(y)\frac{\partial}{\partial n_x}E_n(x,y)dS(y)=0,\quad x\in S,\quad(1)$$

在规范化条件

$$\lambda(S)=\int_S v(y)dS(y)=1\quad(2)$$

下的非平凡解 $v(x)$，$x\in S$．这里

$$E_2(x,y)=\ln\frac{1}{|x-y|};$$

$$E_n(x,y)=\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\ (n\geqslant 3);$$

$|x-y|$ 是两点 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 之间的距离，n_x 是 S 在点 $x\in S$ 的外法线方向，$v(x)$ 是绝对连续测度 λ 关于 S 上 Lebesgue 测度的导数，或者密度，

$$k_2=2\pi;\ k_n=\frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\ (n\geqslant 3);$$

$dS(y)$ 是曲面 S 的面积元．考虑由 S 界定的区域，在零值边界条件下的内部 **Neumann 问题**(Neumann problem)，就得到方程(1)．根据 Robin 问题的条件，单层位势

$$u(x)=u(x,K)=\int_S v(y)E_n(x,y)dS(y)$$

在 K 上取常数值，被称为 Robin 位势(Robin potential)，平衡位势(equilibrium potential)或者**容量位势**(capacity potential)(见**位势论**(potential theory)，亦见[2])．在所指定的条件下，问题(1)、(2)的，属于连续函数类 $C(S)$ 的解 $v(x)$ 总存在．测度

$$\lambda(E)=\int_E v(y)dS(y),\ E\subset S,$$

给出了 Robin 问题的解，称为平衡测度(equilibrium measure)．

对较复杂的情形，即当紧集 K 的边界由有限个 $C^{1,\alpha}$ 类$(0<\alpha<1)$的不相交的简单闭曲面或者(当 $n=2$)曲线组成时(见[2])，可按类似的方法求解 Robin 问题．此外，在开集 $G=CK=\mathbf{R}^n\setminus K$ 的每个有界连通分支上，Robin 位势也取常数值，即在这些分支的边界上密度 $v(x)=0$．

设紧集 K 是连通的．Robin 位势 $u(x)$ 在 K 上所取的常数值

$$\gamma=\int_S v(y)E_n(x,y)dS(y),\ x\in K,$$

称为紧集 K 的 Robin 常数(Robin constant)．当 $n\geqslant 3$ 时，它与 K 的调和容量(capacity)(或称 Newton 容量)$C(K)$ 有简单的关系：$C(K)=1/\gamma$；且 $0<\gamma<+\infty$，$0<C(K)<+\infty$．当 $n=2$ 时，Robin 常数可以取所有值 $-\infty<\gamma<+\infty$；调和容量用公式 $C(K)=e^{-\gamma}$ 表示．

可用另一种方法定义平衡测度 λ，即它是在所有集中分布在 K 上且满足 $\mu\geqslant 0$，$\mu(K)=1$ 的诸测度 μ 中使得能量积分

$$\iint_{K\times K}E_n(x,y)d\mu(x)d\mu(y)$$

达到最小值的测度．当紧集 K 具有光滑边界时，这样的测度 λ 与上面所求得的 λ 是相同的；而对任意

紧集 $K \subset \mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的一般情形，只要 $C(K) > 0$，λ 也存在．其相应的平衡位势(equilibrium potential)

$$u(x) = u(x;\ K) = \int E_n(x,y)\, d\lambda(y),$$

是 Robin 位势的推广，它在 K 上除了可能在某个零容集的点上例外，处处取常数值 $\gamma = 1/C(K)(n \geqslant 3)$ 或者 $\gamma = -\ln C(K)$ $(n = 2)$．

"Robin 问题"的命名是与 G．Robin 的研究工作紧密关联的(见[1])．

参考文献

[1] Robin, G., Sur la distribution de l'electricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts', *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **3** (1886), 31－358.

[2] Günter, N. M., Potential theory and its application to basic problems of mathematical physics, F. Ungar, New-York, 1967(译自法文).

[3] Ландкоф, Н. С., Основы современной теорий потенциала, М., 1966(英译本: Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer, 1972).

[4] Hayman, W. and Kennedy, P., Subharmonic functions, Acad. Press, 1976.

Е．Д．Соломенцев 撰

【补注】 Robin 在[1]中重新研究并推广了 S．Poisson (1811)所阐述的问题．

参考文献

[A1] Tsuji, M., Potential theory in modern function theory, Chelsea, reprint, 1975.

高琪仁 吴炯圻 译

稳健统计[robust statistics; робастная статистика]

【补注】 数理统计(mathematical statistics)的一个分支，涉及在通常的假设不成立时，仍然有好性质的统计程序(如参数估计和检验)的构造和研究．例如，实际问题中、由于抄写错误、小数点错位以及特别稀有现象等原因，观测数据中常含有异常值(outliers)(亦称离群值)，使得观测值可能不严格服从正态(Gauss)分布．

众所周知，即使只有一小部分数据异常，某些传统的方法(如样本均值(sample average))就会失去其最优性，并且实际上可以给出任意坏的结果．在这种情况下，应用统计学人员转而去使用另外一些方法，这些方法受可能存在的异常值的影响较小(如样本中位数(sample median))．直到 60 年代，对稳健性(robustness)的研究才真正引起人们的关注．稳健统计理论的创建经历了下面三个发展阶段．

第一种数学方法要归功于 P．J．Huber([A1])，他得到了极小化极大变分问题(minimax variational problem)的解 T^*：

$$\sup_{G \in \mathscr{P}_\varepsilon} V(T^*, G) = \inf_T \sup_{G \in \mathscr{P}_\varepsilon} V(T, G),$$

其中 $V(T, G)$ 是估计量 T 在分布 G 下的渐近方差．集合 $\mathscr{P}_\varepsilon$(对某个 $\varepsilon > 0$)是所有混合分布 $G = (1-\varepsilon)\Phi + \varepsilon H$ 的集合，其中 Φ 是标准正态分布(normal distribution)，H 是任意分布(如 Cauchy 分布)．在一元位置参数情形下，T^* 称为 Huber 估计量(Huber estimator)．关于此工作的介绍见[A2]．

第二种方法基于影响函数(influence function)([A3])．

$$IF(x; T, \Phi) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[T((1-\varepsilon)\Phi + \varepsilon \Delta_x)\right]_{\varepsilon=0},$$

其中 Δ_x 是全部质量都集中在点 x 的概率分布．影响函数(在渐近意义下)描述单个异常点 x 对估计量 T 的影响．该方法通过渐近效率的最大化，使之在影响函数的上确界范数上达到上限，从而得到最优稳健估计量和检验．与极小化极大方差法不同的是，这种方法也可用于解决多变量的问题．这种方法的主要结果见[A4]．

第三种方法目的在于找出一个高分离点．估计量的分离点(breakdown point of an estimator)，是可以容忍而不致变为无界的，任意异常值的最大分点．该方法超过第二种方法，第二种方法只考虑单个异常点的作用．在线性回归(linear regression)分析中，第一个同变的高分离估计量是最小平方中位数(least median of squares)([A5])，它由

$$\underset{\hat{\beta}}{\text{minimize}} \underset{i=1,\cdots,n}{\text{median}}\ r_i^2$$

定义，其中 $\hat{\beta}$ 是回归系数向量，r_i 是第 i 个观测值的残差．高分离估计量也存在于其他多变量的情形中，关于该方法的介绍及其应用见[A6]．

90 年代主要致力于构造既有高分离点又是有界影响函数，并且有好的渐近效率的估计量．最近，估计量研究中越来越增加了对计算机的使用．

参考文献

[A1] Huber, P. J., Robust estimation of location parameter, *Ann. Math. Stat.*, **35** (1964), 73－101.

[A2] Huber, P. J., Robust statistics, Wiley, 1981.

[A3] Hampel, F. R., the influence curve and its role in robust estimation, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **69** (1974), 383－393.

[A4] Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J. and Stahel, W. A., Robust statistics: the approach based on influence functions, Wiley, 1986.

[A5] Rousseeuw, P. J., Least median of squares regression, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **79** (1984), 871－880.

[A6] Rousseeuw, P. J. and Leroy, A. M., Robust regression and outlier detection, Wiley, 1987.

P．J．Rousseeuw 撰 周概容 王健 译

Rodrigues 公式 [Rodrigues formula; Родрира формула]

1) 将曲面的**法向量**(normal) **n** 的微分与曲面的**径向量**(radius vector) **r** 在**主方向**(principal direction)上的微分联系起来的公式:

$$d\mathbf{n} = -k_1 d\mathbf{r} \text{ 或 } d\mathbf{n} = -k_2 d\mathbf{r},$$

这里 k_1 和 k_2 是主曲率.

该公式由 O. Rodrigues (1815) 得到.

А. В. Иванов 撰

2) 使用微分法由权函数作出的**正交多项式**(orthogonal polynomials)的表示. 如果权函数 $h(x)$ 满足 Pearson **微分方程**(Pearson differential equation)

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_0 + p_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} \equiv \frac{A(x)}{B(x)},$$

$$x \in (a, b),$$

且如果在正交性区间的端点还成立下列条件:

$$\lim_{x \downarrow a} h(x)B(x) = \lim_{x \uparrow b} h(x)B(x) = 0,$$

那么正交多项式 $P_n(x)$ 可用 Rodrigues 公式:

$$P_n(x) = c_n \frac{[h(x)B^n(x)]^{(n)}}{h(x)}$$

表示, 这里 c_n 是常数. Rodrigues 公式仅对正交多项式及从正交多项式经变量的线性变换后得到的多项式成立. 最初, 该公式是由 O. Rodrigues ([1]) 对 **Legendre 多项式**(Legendre polynomials)建立的.

参考文献

[1] Rodrigues, O., Mémoire sur l'attraction des spheroides, *Correspondence sur l'Ecole Polytechnique*, 3 (1816), 361-385.

П. К. Суетин 撰

【补注】 部分 1) 亦见 [A1], [A2]. 部分 2) 亦见 [A3], [A4].

参考文献

[A1] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1-4, Chelsea, reprint, 1972.

[A2] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976, p. 145 (中译本: 多卡模, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988).

[A3] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[A4] Chihara, T. S., An introduction to orthogonal polynomials, Gordon & Breach, 1978.

潘养廉 译

Rolle 定理 [Rolle theorem; Ролля теорема]

若实值函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在该区间的每个内点上有有限导数或定号无限导数, 而在该区间的两端点取相同的值, 那么 f 的**导数**(derivative)至少在区间 (a, b) 内一点处为零.

Rolle 定理的几何意义是, 在满足定理条件的函数的图象上, 存在一点 $(\xi, f(\xi))$, $a<\xi<b$, 使得图象在该点的切线与 x 轴平行.

Rolle 定理的力学解释是, 沿直线连续运动的任何质点, 如果经过一段时间又回到出发点, 那么必有一瞬间, 该质点的瞬时速度为零.

这定理首先由 M. Rolle ([1]) 对代数多项式获得.

参考文献

[1] Rolle, M., Traité d'algèbre, Paris, 1690.

[2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975 (中译本: С. М. 尼科尔斯基, 数学分析教程, 第一卷, 一、二分册, 人民教育出版社, 1980).

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 亦见**有限增量公式**(finite-increments formula).

参考文献

[A1] Stromberg, K., An introduction to classical analysis, Wadsworth, 1981.

[A2] Apostol, T. M., Calculus, 1, Blaisdell, 1967 (中译本: T. M. 阿波斯托, 微积分学, 高等教育出版社, 1987).

王斯雷 译

罗马数字 [Roman numerals; Римские цифры]

一种中世纪的数字系统, 由原始的罗马数字系统发展而来. 罗马数字系统基于使用特殊的符号表示十进位数字: $I=1$, $X=10$, $C=100$, $M=1000$, 它们的一半是 $V=5$, $L=50$, $D=500$. 正整数用重复这些数字而写出. 当一个字母继之以一个表示较小值的字母时, 加上这个较小值(加法原理), 当一个字母继之以一个表示较大值的字母时, 从较大的值减去较小的值(减法原理). 后一规则仅用来避免同一字母重复四次. 在这个系统中, 用多重数字进行算术运算很不方便. 现在, 不再使用罗马数字, 除非在某些特殊情况, 诸如表示西历纪元和年代, 以及表示时期时的月份, 次序数, 有时表示高于三阶的低阶导数: y^{IV}, y^{V}, 等等.

БСЭ-3

【补注】 上面提到的原始罗马数字系统如下: 1000 用圆括中加 1 表示: (1); 10000 用 ((1)) 表示, 等等. 后来, (1) 变成 M; 它的一半 1) 后来变成 D.

参考文献

[A1] Friedlein, G., Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des Christlichen Abendlandes von 7. bis 13. Jahrhundert, Schaan, reprint, 1982.

[A2] Ifrah, G., From one to zero: a universal history of numbers, Penguin, 1987 (译自法文).

[A3] Cajori, F., A history of mathematical notations, 1, Open Court, 1974.

部分罗马数字表

1	I	30	XXX
2	II	40	XL 或 XXXX
3	III	50	L
4	IV或 IIII	60	LX
5	V	70	LXX
6	VI	80	LXXX
7	VII	90	XC
8	VIII	99	XCIX 或 IC
9	IX或 VIIII	100	C
10	X	101	CI
11	XI	200	CC
12	XII	300	CCC
13	XIII	400	CCCC
14	XIV	500	IO 或 D
15	XV	600	DC
16	XVI	700	DCC
17	XVII	800	DCCC
18	XVIII	900	DCCCC
19	XIX	1000	CIO 或 M
20	XX	2000	CIOCIO 或 MM
		5000	IOO
		10000	CCIOO
		100000	CCCIOOO
		500000	IOOOO
		1000000	CCCCIOOOO

杜小杨 译

Romberg 法 [**Romberg method**; **Ромберга метод**], Romberg 法则 (Romberg rule)

基于 **Richardson 外插** (Richardson extrapolation) 的一种计算定积分的方法．设 I 为需计算的某泛函之值；又设，计算得到的近似值 $T(h)$ 依赖于参数 h 使得作为一个计算结果，近似等式 $I \cong T(h)$ 成立．关于差 $I-T(h)$ 的性态的信息假设已知，看作 h 的一个函数，即

$$I - T(h) = \alpha h^m, \tag{1}$$

其中 m 是正整数，而 α 依赖于被逼近的泛函，依赖于计算该泛函时所取的函数，依赖于逼近方法和（弱）依赖于 h．如果 $T(h)$, $T(2h)$ 同时算得，则由 Richardson 方法可得 I 的逼近

$$I \cong \frac{2^m T(h) - T(2h)}{2^m - 1}. \tag{2}$$

当 (1) 中 α 与 h 的相关性愈弱时，这个近似就愈精确．特别地，如果 α 与 h 无关，那么 (2) 就变为准确的等式．

Romberg 方法用于计算如下积分

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

这里积分区间 $[0,1]$ 的选取只是为了表叙的方便，事实上它可以是任何的有限区间．令

$$T_{k0} = 2^{-k-1}\left[f(0) + 2\sum_{j=1}^{2^k-1} f(j2^{-k}) + f(1)\right],$$

$$k = 0, 1, \cdots. \tag{3}$$

Romberg 方法的计算归结为下面的表

$$\begin{array}{lllll}
T_{00} & T_{01} & \cdots\cdots & T_{0,n-1} & T_{0n} \\
T_{10} & T_{11} & \cdots\cdots & T_{1,n-1} & \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots & & \\
T_{n-2,0} & T_{n-2,1} & T_{n-2,2} & & \\
T_{n-1,0} & T_{n-1,1} & & & \\
T_{n0} & & & &
\end{array}$$

其中第一列即为**梯形公式** (trapezium formula) 的求积和 (3)，第 $l+2$ 列元素由第 $l+1$ 列元素经下面公式计算得到

$$T_{k,l+1} = \frac{2^{2l+2} T_{k+1,l} - T_{kl}}{2^{2l+2} - 1},$$

$$k = 0, \cdots, n-l-1. \tag{4}$$

依据所列出的表，主要计算量在于第一列元素的计算，接下来其余列元素的计算仅略复杂于有限差分的计算．

表中每个元素 T_{kl} 是一个逼近积分的求积和，

$$I \cong T_{kl}. \tag{5}$$

求积和 T_{kl} 的节点为点 $j2^{-k-l}$, $j=0,\cdots,2^{k+l}$，且其系数为正数．求积公式 (5) 对于不超过 $2l+1$ 次的所有多项式都是精确的．

假设被积函数在 $[0,1]$ 上具有 $2l+2$ 阶连续导数，则差 $I-T_{kl}$ 可表为 (1) 的形式，其中 $m=2l+2$．于是可见，由公式 (4) 计算得出的第 $l+2$ 列元素比第 $l+1$ 列上元素有较好的 Richardson 逼近．特别地，梯形求积公式的误差有下列表示式

$$I - T_{k0} = -\frac{f''(\xi)}{12} h^2,$$

$$h = 2^{-k},\ \xi \in [0,1].$$

而且 Richardson 方法提供了关于 I 的较好逼近:

$$T_{k1}=\frac{4T_{k+1,0}-T_{k0}}{3}\ ,\ k=0,\cdots,n-1.$$

T_{k1} 恰是 **Simpson 公式**(Simpson formula)的求积和. 而由于这个公式的误差有下面的表示式成立

$$I-T_{k1}=-\frac{f^{(iv)}(\eta)}{180}h^4,$$

$$h=2^{-k-1},\ \eta\in[0,1].$$

故又可继续使用 Richardson 方法, 等等.

在 Romberg 方法中, 可取 T_{0n} 逼近 I; 仍需假定在 $[0,1]$ 上存在着连续导数 $f^{(2n)}(x)$, 推测 T_{0n} 逼近精度的设想是将 T_{0n} 与 $T_{1,n-1}$ 作比较.

最先描述了该方法的是 W. Romberg([1]).

参考文献

[1] Romberg, W., Vereinfachte numerische Integration, *Norske Vid. Sels. Forh.*, **28**(1955), 7, 30 – 36.

[2] Bauer, F. L., Rutishauser, H. and Stiefel, E., New aspects in numerical quadrature, in N. C. Metropolis, et al. (ed.): Experimental Arithmetic, high-speed computing and mathematics, Proc. Symp. Appl. Math., Vol. 15, Amer. Math. Soc., 1963, 199 – 218.

И. П. Мысовских 撰 张宝琳 袁国兴 译

根 [root; корень]

1) 数 a 的 n 次根(n-th root of a number). 数 $x=a^{1/n}$, 它的 n 次幂 x^n 等于 a.

2) 域 k 上代数方程

$$a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根(root of an algebraic equation). 属于 k 或 k 的一个扩张(见**域的扩张**(extension of a field))的元素 c, 使得用 c 替代 x 时该方程成为恒等式. 这个方程的根也称做多项式

$$f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的根或零点. 如果 c 是多项式 $f(x)$ 的根, 那么 $f(x)$ 可被 $x-c$ 整除(余式为零)(见 **Bezout 定理**(Bezout theorem)). 每个实或复系数多项式至少有一个根(因而根的总数等于多项式的次数, 此处计数要算根的重数). 多项式 $f(x)$ 可以表示成乘积

$$f(x)=a_0(x-c_1)\cdots(x-c_n),$$

其中 $c_1,\cdots,c_n$ 是它的根. 如果 $f(x)$ 的根 $c_1,\cdots,c_n$ 中有一些是相等的, 那么它们的公共值称做重根(multiple root)(如果一个根出现 m 次, 那么 m 称做这个根的重数(multiplicity)).

3) 单位根(root of unity). 域 k 中满足方程 $x^m=1$ 的元素, 此处 m 是某个自然数. 单位根形成 k 的乘法群的一个子群. 反过来, 域 k 的乘法群的任何有限子群的所有元素都是单位根(见 **Fermat 小定理**(Fermat little theorem)), 并且这个子群是循环的. 特别地, 对于含在 k 的代数闭包 $\bar{k}$ 中具有给定次数 n 的全部单位根组成的子群 U_n, 亦即所有满足方程 $\zeta^n=1$ 的元素 $\zeta\in\bar{k}$ 所组成的子群, 上述结论是正确的. 如果 n 与域 k 的特征互素(或若如果域的特征是0), 那么群 U_n 是 n 阶的, 并且它的生成元称为本原 n 次单位根(primitive n-th root of unity). U_n 中这种根的个数由 **Euler 函数**(Euler function) $\varphi(n)$ 给出, 亦即与 n 互素的模 n 剩余的个数. 在特征 $p>0$ 的域中除了 1 以外没有 p 次单位根.

如果域 k 是在它的素子域上有限生成的, 那么 k 中单位根的个数是有限的.

在复数域中, 数 z 是 n 次单位根, 当且仅当 $|z|=1$ 并且 $\arg z=2\pi m/n$, 其中 m 和 n 是整数, 亦即当且仅当

$$z=e^{2\pi im/n}=\cos\frac{2\pi m}{n}+i\sin\frac{2\pi m}{n};$$

此时本原单位根恰好就是适合 $(m,n)=1$ 的那些根. 在复平面上, n 次单位根与单位圆的内接正 n 边形的顶点相一致; 这阐明了单位根与化圆为方问题(多边形作图, 见**几何作图**(geometric constructions))的联系.

数论中单位根是作为各种重要的数论函数(Abel 数值特征; **Legendre 符号**(Legendre symbol); **Möbius 函数**(Möbius function); **范剩余符号**(norm-residue symbol); 等等)的值出现的. 在域论和代数数论中, 把单位根添加到某些基本域中所得到的新域占有重要的位置. (见**分圆域**(cyclotomic field); **分圆扩张**(cyclotomic extension); **Kummer 扩张**(Kummer extension)).

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, vol. 1, 2, Springer, 1967, 1971. (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学, 科学出版社, 1963(第 I 卷), 1976(第 II 卷)).

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 关于 Lie 代数理论中根的概念, 见**半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple)及**根系**(root system).

朱尧辰 译 戚鸣皋 校

根系 [root system; корневая система]

R 上向量空间 V 的有限集 R, 具有以下性质: 1) R 不含零向量, 并且生成 V; 2) 对每个 $\alpha\in R$, 存在 V 的对偶空间 V^* 的元素 α^*, 使得 $\alpha^*(\alpha)=2$,

并且 V 的自同态 $s_\alpha: x \mapsto x - \alpha^*(x)\alpha$ 映射 R 到自身；3) 对所有 $\alpha, \beta \in R$，$n(\alpha,\beta) = \alpha^*(\beta) \in \mathbf{Z}$.

具有上述性质的向量集首先在复半单 Lie 代数的理论中作为这种代数的极大环面的伴随表示的权集出现（见 **Lie 代数表示的权**（weight of a representation of a Lie algebra）；**半单 Lie 代数**（Lie algebra, semi-simple））. 后来注意到这样的向量系自然地出现在其他的数学分支中，例如代数几何（[4]，[7]），奇点理论（[7]）和整数值二次型理论（[5]）. 数论中的某些问题最终也同根系有关（[6]）.

根系的一般性质． 自同态 s_α 是关于 α 的反射（reflection），并由性质 1) 和 2) 唯一确定． s_α 的不动点集是 $\mathrm{Ker}\,\alpha^*$，而 $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$. R 的元素称为根系 R 的根（root）. 它的秩（rank）是 $\dim V$. 根系 R 称为约化的（reduced），若对任意 $\alpha \in R$，$-\alpha$ 是仅有的与 α 共线的根． 集合 $R^* = \{\alpha^* : \alpha \in R\}$ 是 V^* 中的根系，而对所有 $\alpha \in R$，$\alpha^{**} = \alpha$；它称为 R 的对偶（dual）（或逆（inverse））. 由 V 的将 R 映到其自身上的所有自同构生成的有限群 $A(R)$ 称为根系 R 的自同构群（automorphism group）. $A(R)$ 的由反射 $s_\alpha (\alpha \in R)$ 生成的子群 $W(R)$ 称为 R 的 Weyl 群（Weyl group）. 若 V 是子空间 $V_i (i = 1, \cdots, l)$ 的直和，R_i 是 V_i 中的根系，则 $R = \bigcup_{i=1}^{l} R_i$ 是 V 中的根系，称为根系 R_i 的直和（direct sum）. 非空根系 R 称为不可约的（irreducible），若它不是两个非空根系的直和． 每个根系是若干不可约根系的直和，不计它们的顺序，这个分解是唯一的．

集合 $V - \bigcup_{\alpha \in R} \mathrm{Ker}\,\alpha^*$ 的单连通分支是开的单纯锥体，通常称为 V 中根系 R 的**房**（chamber）. Weyl 群单可迁地作用在所有的房组成的集合上． 任何房 C 的闭包 $\bar{C}$ 是离散群 $W(R)$ 的**基本区域**（fundamental domain）. 设 $L_1, \cdots, L_r$ 是房 C 的墙． 对每个墙 L_i，存在唯一的根 α_i，使得 $L_i = \mathrm{Ker}\,\alpha_i^*$，并且 α_i 同 C 位于 L_i 的同一侧． 这组根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 构成 V 的一组基，称为由房 C 确定的根系的基（basis of the root system defined by the chamber C）. 也可以说，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是由房 C 确定的单根（simple root）的集合． 群 $W(R)$ 由反射 $s_{\alpha_i} (i = 1, \cdots, l)$ 生成，此外 $(s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1$ 是 $W(R)$ 的一组定义关系，这里 m_{ij} 是 $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$ 的阶，这样 $W(R)$ 是一个 **Coxeter 群**（Coxeter group）. 群 $A(R)$ 是 $A(R)$ 中保持集合 $\alpha_1 \cdots, \alpha_r$ 不变的所有元素的子群同 $W(R)$ 的半直积．

选取一个房 C，就定义了 V 上的一个序关系（与向量空间结构不矛盾），使得正元素恰好是单根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的非负系数的线性组合． 任何根或者是正的，或者是负的，并且它们关于基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的所有坐标都是整数． V 的由根系 R 生成的子群 $Q(R)$ 是在 Weyl 群 $W(R)$ 下不变的格（即秩 r 的离散子群，见 **Lie 群的格**（Lattice in a Lie group））. 它的元素称为根系 R 的根权（radical weight）. 根系的 Weyl 群恰好是由反射生成的这些离散线性群，它有一个不变格，没有非零向量被固定． 若将 $Q(R)$ 视为空间 V 的平移的群，则 $W(R)$ 和 $Q(R)$ 的半直积 $W_a(R)$ 就是所谓 R 的仿射 Weyl 群（affine Weyl group）. $W_a(R)$ 是 V 的由超平面

$$L_{\alpha,k} = \{v \in V;\ \alpha^*(v) = k\}$$

中的反射生成的离散变换群，这里 $\alpha \in R$，$k \in \mathbf{Z}$. V 关于 $W_a(R)$ 的商空间是紧的；若 R 是不可约的，则 $W_a(R)$ 的基本区域是一个单形．

可以选取 V 上的一个在 $W(R)$ 下不变的正定对称双线性型 $(\,,\,)$（这个选取不是唯一的）． 这个双线性型给 V 一个 Euclid 空间结构，$W(R)$ 的元素是其中的正交变换，而对所有 $x \in V$，$\alpha \in R$，反射 s_α 具有下述形式：

$$s_\alpha(x) = x - 2(x,\alpha)\frac{\alpha}{(\alpha,\alpha)}.$$

利用双线性型 $(\,,\,)$ 可以对空间 V 和 V^* 不加区别，则有 $\alpha^* = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$；根系定义中的条件 3) 还意味着对所有 α，$\beta \in \mathbf{R}$，$n(\alpha,\beta) = 2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta) \in \mathbf{Z}$.

有了双线性型 $(\,,\,)$，就可以谈及根之间的度量关系，特别是根之间的夹角和根的长度．由此推出角的大小与 $(\,,\,)$ 的选取无关，而当根系 R 不可约时，两个根的长度之比也是如此．

根系的分类． 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是约化根系 R 的一组给定的基，设 $n_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j)$. 矩阵 $\|n_{ij}\| (1 \leqslant i, j \leqslant r)$ 称为根系 R 的 Cartan 矩阵（Cartan matrix）：在这个矩阵中 $n_{ii} = 2$，而 $n_{ij} (i \neq j)$ 可以为 $0, -1, -2$ 或 -3. 不计指标的排列． Cartan 矩阵与基的选取无关． 带有同一 Cartan 矩阵的两个根系是同构的．

对任何根系，通常伴随一个 Coxeter 图（Coxeter graph），它的顶点是基元素 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$，根据积 $n_{ij} n_{ji}$ 等于 1,2,3 或 0，顶点 α_i 和 α_j 分别用一条、两条或三条边相连，或完全不连． 一个根系是不可约的，当且仅当它的 Coxeter 图是连通的． Coxeter 图仅确定基本根对之间的角；它不确定 Cartan 矩阵（虽然它确定 Weyl 群）：存在带有相同 Coxeter 图的对偶的非同构根系． 但是，Cartan 矩阵（以及同它一起的根系）由有向 Coxeter 图（directed Coxeter graph）完全确定，也称为根系的 Dynkin 图（Dynkin diagram）或单根图（simple root diagram）. 方向由下述规则来定义：如果单根 α_i 和 α_j 不正交，并且长度不同，则连结第 i 和第 j 个顶点的二或三条边被指派一个不等号 $>$，

方向朝着长度较小的根所对应的顶点． 有时可以在Coxeter 图的每个顶点的上方写一个与对应根长度平方成比例的数（对所有的根有相同的比例因子）；这个加权图也唯一确定原来的根系．

下面以单根图的方式完全列出了两两不同构的不可约的约化根系：

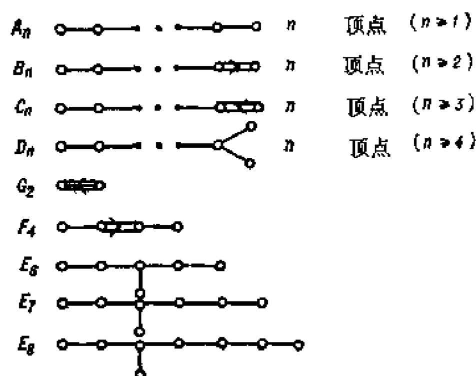


图 1

不可约根系的结构． 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的典范基、$(\ ,\ )$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的标准标量积，对此 $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$，Γ_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中由向量 $e_1,\cdots,e_n$ 生成的格．

1）设 V 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中与向量 $e_1+\cdots+e_{n+1}$ 正交的超平面，则

$$R=\{\alpha\in V\cap\Gamma_{n+1}:(\alpha,\alpha)=2\}=$$
$$=\{e_i-e_j:i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n+1\}$$

是 A_n 型根系（root system of type A_n）．对 $n=2$，这个根系形为

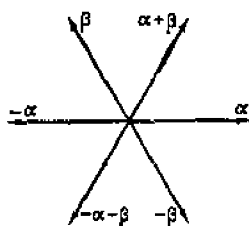


图 2

2）$\mathbf{R}^n$ 中向量的集合

$$\{\alpha\in\Gamma_n:(\alpha,\alpha)=1\text{ 或 }2\}=$$
$$=\{\pm e_i,\ \pm e_i\pm e_j:i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n\}$$

是 B_n 型根系（root system of type B_n）．$n=2$ 的形式见图 3．

3）C_n 型根系（root system of type C_n）对偶于 B_n 型根系，含有的向量为

$$\{\pm e_i\pm e_j,\ \pm 2e_i:i\neq j,\ i,j,=1,\cdots,n\}.$$

4）$\mathbf{R}^n$ 中向量的集合

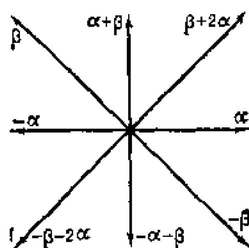


图 3

$$\{\alpha\in\Gamma_n:(\alpha,\alpha)=2\}=$$
$$=\{\pm e_i\pm e_j:i\neq j,\ i,j=1,\cdots,n\}$$

是 D_n 型根系（root system of type D_n）．

5）G_2 型根系（root system of type G_2）形式为

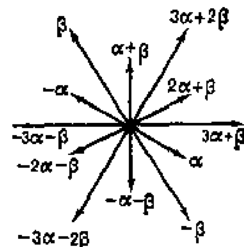


图 4

这可以刻画为由三次单位根生成的分圆域的范数为 1 或 3 的代数整数的集合．

6）$\mathbf{R}^4$ 中向量的集合

$$\left\{\pm e_i,\ e_i\pm e_j,\ \frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4):\right.$$
$$\left.i\neq j,\ i,j=1,\cdots,4\right\}$$

是 F_4 型根系（root system of type F_4）．

7）$\mathbf{R}^8$ 中向量集

$$\left\{\pm e_i\pm e_j,\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{m(i)}e_i\right\},$$

这里

$$\{\sum m(i)\equiv 0\bmod 2:i\neq j,i,j=1,\cdots,8\}$$

是 E_8 型根系（root system of type E_8）．

8）E_6 型根系（root system of type E_6）可以由 E_8 型根系同 $\mathbf{R}^8$ 的由 $e_1,\cdots,e_6$ 张成的子空间的交得到．

9）E_7 型根系（root system of type E_7）可以由 E_8 型根系同 $\mathbf{R}^8$ 的由 $e_1,\cdots,e_7$ 张成的子空间的交得到．

10）对每个维数 $n\geqslant 1$，恰好存在一个（精确到同构）非约化的不可约根系 BC_n，即 B_n 和 C_n（见上）的并．对 $n=2$，这个根系的形式为

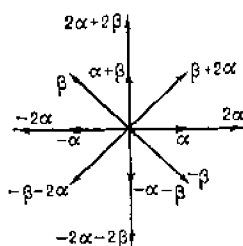


图 5

有关仿射根系，见[6].

参考文献

[1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Eléments de mathématique, Hermann, 1968, Chapts. IV – VI.

[2] Serre, J.-P., Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.

[3] Steinberg, R., Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Press, 1967.

[4] Манин Ю. И., Кубические Формы, М., 1972.

[5] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973.

[6] Macdonald, I. G., Affine root systems and Dedekind's eta function, *Invent. Math.*, 15 (1972), 91–143.

[7] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, 30 (1975), 5, 3–65.

В. Л. Попов 撰

【补注】 在西方的文献中、特别是涉及 Lie 理论时，通常用 Dynkin 图（Dynkin graph）来取代 Coxeter 图. 有向 Coxeter 图或单根图通常称为 **Dynkin 图**（Dynkin graph）.

关于根系的介绍亦见[A4]. 注意上文中使用的 Coxeter 图的概念与 N. Bourbaki 使用的概念（[1]）略有区别.

在某种意义上，根系在半单 Lie 群中带有组合的意思，且人们愿意用根系的组合术语来解释半单 Lie 群的结果（例如表示的分类）. 这个原理的一个例子是 Kazhdan-Lusztig 多项式（Kazhdan-Lusztig polynomial），由 Coxeter 群的纯组合术语定义，用来刻画 Verma 模的合成因子的重数（[A7]）.

根系也有一个细致的特殊函数理论，在某种程度上产生于半单 Lie 群理论并与之相联系，例如 Macdonald 恒等式（Weyl 分母公式的仿射形式[6]）、θ 函数的不变性理论（[A8]）和超几何型函数理论（[A9]）. 后者的结构也符合 L. G. Macdonald 的常数项猜想（见后面）.

多数情形首先对 A_{n-1} 或 BC_n 来建立公式和证明，并不涉及根系. Dyson 猜想（Dyson conjecture）可以表达为:

$$CT\prod_{1\le i\ne j\le n}\left[1-\frac{x_i}{x_j}\right]^k=\frac{(nk)!}{(k!)^n},$$

这里 k 是非负整数而 CT 表示 $x_1,\cdots,x_n$ 的 Laurent 级数展开中的常数项系数. Macdonald 猜想（Macdonald conjecture）([A5]) 将此由根系 A_{n-1} 以下述方式推广至任意不必是约化的根系 R. 对每个 $\alpha\in R$，设 k_α 是仅依赖于 α 长度的非负整数. 设 R_+ 是选取的一个正根集. 令 $\rho_k=(1/2)\sum_{\alpha\in R_+}k_\alpha\alpha$，当 $\alpha/2\notin R$ 时 $k_{\alpha/2}=0$. 于是

$$CT\prod_{\alpha\in R}(1-e^\alpha)^{k_\alpha}=$$

$$=\prod_{\alpha\in R}\frac{(|\alpha^\vee(\rho_k)+k_\alpha+(1/2)k_{\alpha/2}|)!}{(|\alpha^\vee(\rho_k)+(1/2)k_{\alpha/2}|)!}.$$

Selberg 积分（Selberg integral）是

$$\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{i=1}^n t_i^{x-1}(1-t_i)^{y-1}\prod_{1\le i<j\le n}|t_i-t_j|^{2z}dt_1\cdots dt_n=$$

$$=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\Gamma(x+jz)\Gamma(y+jz)\Gamma((j+1)z+1)}{\Gamma(x+y+(n+j-1)z)\Gamma(z+1)}.$$

x,y,z 取值于离散集，这等价于 Macdonald 的 BC_n 猜想. 类似地，Macdonald 一般猜想的左边可以写成

$$\int_T\prod_{\alpha\in R}(1-e^{i\alpha(x)})^{k_\alpha}dx$$

或

$$\int_T\prod_{\alpha\in R}|e^{-i\alpha(x)/2}-e^{i\alpha(x)/2}|^{2k_\alpha}dx,$$

这里 T 是环面 $V^*/(2\pi Q(R^\vee))$，dx 是 T 上正规化 Lebesgue 测度. Macdonald 猜想由不同的作者以各种不同的方法对特殊的根系给出了证明. 关于仿射根系的 q 类似和 Moris 猜想的参考文献和描述，见概要[A1]. 最后，Macdonald 猜想在[A6]中不使用根系的分类以完全一般的形式被证明. 这个证明用到移位算子（shift operator）和与根系有关的正交多项式（Jacobi 多项式（Jacobi polynomial））.

设 $P=\{\lambda\in V:\alpha^\vee(\lambda)\in\mathbf{Z},\ \forall\ \alpha\in R\}$ 是 R 的权格，设 P_+ 由所有这样的权 λ 组成，对所有 $\alpha\in R_+$，$\alpha^\vee(\lambda)\geqslant0$. 设 $\geqslant$ 是 P 上的偏序，当 $\lambda-\mu$ 为正根的非负整系数线性组合时 $\lambda\geqslant\mu$. T 上指数多项式空间（由 $e^{i\lambda}$, $\lambda\in P$，张成）在 Weyl 群 W 下不变，定义其上的 Hermite 内积

$$(f,g)_k=$$

$$=\int_T f(x)\overline{g(x)}\prod_{\alpha\in R_+}|e^{-i\alpha(x)/2}-e^{i\alpha(x)/2}|^{2k_\alpha}dx,$$

这里 k_α 是仅依赖于 $|\alpha|$ 的非负实数. 对 $\mu\in P_+$，在

T 上的 Jacobi 多项式 (Jacobi polynomial) P_μ^k 定义为:

1) $P_\mu^k(x)=\sum_{\lambda\in C(\mu)}\Gamma_\lambda(\mu,k)e^{\mu(x)}$ (这里 $C(\mu)$ 是 $W\cdot\mu$ 的同 $\mu+Q(R)$ 相交的凸包), 并且有 $\Gamma_\mu(\mu,k)=1$, $\Gamma_{w\lambda}(\mu,k)=\Gamma_\lambda(\mu,k)$, , $\forall w\in W$.

2) $(P_\mu^k,P_v^k)=0$, 对所有 $v\in P_+$ 且 $v<\mu$.

[A2] 证明了, 随后 [A3] 更简捷地证明了: 只要 $v\neq\mu$, 均有 $(P_\mu^k,P_v^k)_k=0$.

参考文献

[A1] Habsieger, L., Macdonald conjectures and the Selberg integral, in q-Series and Partitions, IMA Vol. Math. Appl., Vol. 18, Springer, 1989, 99 – 108.

[A2] Heckman, G. J., Root systems and hypergeometric functions II, *Compositio Math.*, **64** (1987), 353 – 373.

[A3] Heckman, G. J., An elementary approch to the hypergeometric shift operators of Opdam, *Invent. Math.*, **103** (1991), 341 – 350.

[A4] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1980.

[A5] Macdonald, I. G., Some conjectures for root systems, *SIAM. J. Math. Anal.*, **13** (1982), 988 – 1007.

[A6] Opdam, E. M., Some applications of hypergeometric shift operators, *Invent. Math.*, **98** (1989), 1 – 18.

[A7] Kahzdan, D. and Lusztig, G., Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.*, **53** (1979), 165 – 184.

[A8] Looyenga, E., Root systems and elliptic curves, *Invent. Math.* **38** (1976), 17 – 32.

[A9A] Heckman, G. J., and Opdam, E. M., Root systems and hypergeometric functions, I, II, *Comp. Math.*, **64** (1987), 329 – 352; 353 – 373.

[A9B] Heckman, G. J. and Opdam, E. M., Root systems and hypergeometric functions, III, IV, *Comp. Math.*, **67** (1988), 21 – 49; 191 – 209.

[A10] Freudenthal, H. and Vries, H. de, Linear Lie groups, Acad. Press, 1969.

[A11] Jacobson, N., Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964).

蔡传仁 译

根向量 [**root vector; корневой вектор**], 域 k 上向量空间 V 的线性变换 A 的

线性变换 (linear transformation) $(A-\lambda E)^n$ 的核内的一个向量 $v\in V$, 这里 $\lambda\in k$, n 是一个依赖于 A 和 v 的正整数. 数 λ 一定是 A 的一个本征值. 在这些条件下, 如果 $(A-\lambda E)^{n-1}v\neq 0$, 就称 v 是一个属于 λ 的高度为 n 的根向量.

根向量的概念推广了线性变换 A 的**本征向量** (eigenvector) 的概念: 本征向量恰是高度为 1 的根向量. 属于一个固定的本征值 λ 的根向量的集合 V_λ 是 V 的一个在 A 之下不变的线性子空间, 称为属于本征值 λ 的根子空间 (root subspace). 属于不同的本征值的根向量是线性无关的; 特别, 如果 $\lambda\neq\mu$, 则 $V_\lambda\cap V_\mu=0$.

令 V 是有限维的. 如果 A 的特征多项式的所有根都在 k 内 (例如, 当 k 是代数闭的时候), 则 V 分解成不同的根子空间的直和:

$$V=V_\alpha\oplus\cdots\oplus V_\delta. \qquad (*)$$

这个分解是一个向量空间 V 关于线性变换的一个分裂幂零 Lie 代数 L 的权分解的特殊情形: 在这个情形, 这个 Lie 代数是由 A 在 V 的一切线性变换的 Lie 代数内所生成的一维子代数 (见 **Lie 代数表示的权** (weight of a representation of a Lie algebra)).

如果 A 关于某个基的矩阵是一个 **Jordan 矩阵** (Jordan matrix), 那么分解 $(*)$ 的分支可以描述如下: 根子空间 V_λ 是对应于具有本征值 λ 的 Jordan 块的基向量集合的线性包.

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Линейная алгебра, М., 1974.

[2] Мальцев, А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970 (中译本: 马力茨夫, 线代数基础, 高等教育出版社, 1957).

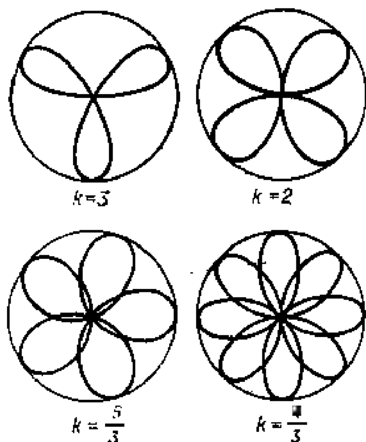
郝锕新 译

玫瑰线 [**roses (curves)** 或 rhodoneas; **розы**]

一些平面曲线, 在极坐标中, 它们的方程具有形式

$$\rho=a\sin k\varphi,$$

其中 a 和 k 为常数. 如果 $k=m/n$ 是有理数, 则玫瑰线是偶数次代数曲线 (algebraic curve).



玫瑰线的次数等于 $m+n$, 如果 m 和 n 都是奇数; 等于 $2(m+n)$, 如果 m 或 n 是偶数. 整条玫瑰线都处于半径为 a 的圆内, 并且由一些全等的部分

——瓣（petals）组成（见图）．如果 k 是整数，则当 k 为奇数时，玫瑰线由 k 瓣组成，当 k 为偶数时，由 $2k$ 瓣组成．如果 $k=m/n$，而 m 和 n 是互素的，则当 m 和 n 为奇数时，玫瑰线由 m 瓣组成，当 m 或 n 为偶数时，由 $2m$ 瓣组成．

当 k 是无理数时，存在无穷多个瓣．玫瑰线属于**旋轮类曲线**（cycloidal curve）族．当 $k>1$ 时它们是内摆线，当 $k<1$ 时它们是外摆线．

玫瑰线与旋轮类曲线之间还存在以下关系：玫瑰线是内和外摆线关于它们的固定圆的中心的垂足曲线．

玫瑰线的弧长由第二类椭圆积分给出．一瓣的面积是 $S=\pi a^2/4k$．

玫瑰线也称为 Guido Grandi 曲线（Guido Grandi curves），他于 1728 年首先描述了这种曲线．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, Chelsea, reprint, 1971.

杜小杨 张鸿林 译

旋转[rotation; вращение]

一类特殊的**运动**（motion），它至少保持空间中一个点不动．如果它是平面中的旋转，那么该不动点称为旋转中心（centre of the rotation）；如果它是空间中的旋转，那么其不动直线称为旋转轴（axis of rotation）．Euclid 空间中的旋转，根据空间的**定向**（orientation）保持不变或改变，而称为正常的（proper）（第一类旋转）或反常的（improper）．

平面上的一个正常旋转在 Descartes 直角坐标 x，y 中可由公式

$$\tilde{x}=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\ \tilde{y}=x\sin\varphi+y\cos\varphi$$

解析地表示，这里 φ 是旋转角，旋转中心是坐标原点．旋转角为 φ 的一个正常旋转可以表示为两个轴对称**反射**（reflection）的乘积，这两个轴的夹角为 $\varphi/2$．平面上的反常旋转在 Descartes 直角坐标 x，y 中可由公式

$$\tilde{x}=x\cos\varphi+y\sin\varphi,\ \tilde{y}=x\sin\varphi-y\cos\varphi$$

解析地表示，这里 φ 是旋转角，旋转中心是坐标原点．平面上的一个反常旋转可以表示为一个正常旋转与一个轴对称的乘积．

n 维 Euclid 空间中的旋转可由一个**正交矩阵**（orthogonal matrix）以规范形式

$$M=\left\|\begin{matrix} u_1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & u_k & & \\ & & & \varepsilon^p & \\ 0 & & & & -\varepsilon^q \end{matrix}\right\|$$

解析地表示，这里

$$u_i=\left\|\begin{matrix}\cos\varphi_i & \sin\varphi_i\\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i\end{matrix}\right\|,$$

ε^s 是 s 阶（$s=p,q$）的单位矩阵．可能有下面几种情形：

1) $p=n$ —— 恒等变换；

2) $q=n$ —— 旋转是中心对称；

3) $p+q=n$ ——旋转是关于一个 p 平面的对称（关于 p 平面的反射）；

4) M 不包含子矩阵 ε^p 和 $-\varepsilon^q$ —— 旋转称为绕唯一不动点的旋转（rotation around a unique fixed point）；

5) M 包含子矩阵 u_i 和 ε^p 但不包含子矩阵 $-\varepsilon^q$ —— 旋转是绕一 p 平面的旋转（rotation around a p-plane）；

6) M 包含子矩阵 u_i 和 $-\varepsilon^q$ 但不包含子矩阵 ε^p —— 旋转称为关于一 $(n-q)$ 平面的旋转反射（rotational reflection in an $(n-q)$-plane）．

Euclid 空间 E_n 中绕一给定点的旋转关于旋转的乘法构成一个群．这个群同构于向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的正交变换群（见**正交变换**（orthogonal transformation））或域 $\mathbf{R}$ 上的 n 阶正交矩阵群．空间 E_n 的旋转群是一个 $n(n-1)/2$ 维的不可迁作用于 E_n 上的 Lie 群．

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Многомерные пространства, М., 1966.

[2] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

[3] Широков, П. А., Тензорное исчисление, Алгебра тензоров, 2 изд., Казань, 1961.

В. Т. Базылев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987（译自法文）（中译本：M. 贝尔热，几何，第一——五卷，科学出版社，1987－1991）.

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A3] Greenberg, M., Euclidean and non-Euclidean geometry, Freeman, 1980.

[A4] Rosenfeld, B. A. [B. A. Rozenfel'd], A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988（译自俄文）.

[A5] Artmann, B., Lineare Algebra, Birkhäuser, 1986.
[A6] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958
潘养廉 译

旋转标形 [rotation indicatrix; вращений индикатриса]

与曲面的无穷小形变(infinitesimal deformation)相伴的12个 **Darboux 曲面**(Darboux surfaces)中的一个.它是空间中由位置向量 **y** 确定的点的集合,向量 **y** 平行于由方程 $d\mathbf{z}=[\mathbf{y}d\mathbf{x}]$ 定义的旋转向量(rotation vector)(瞬时角速度),这里 **z** 是位置向量 **x** 描述的曲面的无穷小形变的速度向量(velocity vector).位移标形(displacement indicatrix)(位移图(displacement diagram))是用类似的方法由位移向量 $\mathbf{s}=\mathbf{z}-[\mathbf{yx}]$ 定义的.

参考文献

[1] Ефимов, Н. В., «Успехи матем. наук», 3 (1948), 2(24), 47-158.
[2] Кон-Фоссен, С. Э., Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Darboux, G., Leçons sur la théorie générales des surfaces, Chelsea, reprint, 1972.
[A2] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1-5, Publish or Perish, 1979.
[A3] Efimov, N. V., Qualitative problems of the theory of deformation of surfaces, Amer. Math. Soc., 1951 (译自俄文).

潘养廉 译

旋转法 [rotation method; вращений метод], Jacobi 法(Jacobi method)

求解 **Hermite 矩阵**(Hermitian matrix)的**本征值的完全问题**(complete problem of eigenvalues)的方法,该方法建立在使用一系列平面旋转把 Hermite 矩阵化成对角型的相似变换之上.旋转法是一种迭代法;它有一个简单的计算格式并总是收敛的,收敛的速度是渐近二次的.矩阵出现多重或稠密本征值并不带来困难.该方法既可通过求解本征向量来计算本征值,也可不必经过本征向量来计算本征值.由旋转法计算得到的本征向量组是标准正交的.

[1]中提出了该方法的基本思想,方法的现代形式已经成为在计算机上求解矩阵本征值的完全问题的最为先进和有效的方法之一.

经典的旋转法包括构造矩阵列 $A_0, A_1, \cdots$,其中 $A_0=A$ 为初始矩阵,$A_k=U_k^* A_{k-1} U_k$,而 U_k 为平面旋转矩阵,它把矩阵 A_{k-1} 的最大模数的非对角元素消成零.在此,若 $A_k=\| a_{ij}^{(k)} \|$,$|a_{pq}^{(k-1)}|=\max_{i\neq j}|a_{ij}^{(k-1)}|$,则矩阵 $U_k=\| u_{ij}^{(k)} \|$,它只有四个元素 $u_{pp}^{(k)}, u_{qq}^{(k)}, u_{pq}^{(k)}, u_{qp}^{(k)}$ 与单位阵不同.在实的情形下,当 A 为**对称矩阵**(symmetric matrix)时,

$$\left.\begin{aligned} &u_{pp}^{(k)}=u_{qq}^{(k)}=\cos\varphi;\\ &u_{pq}^{(k)}=-u_{qp}^{(k)}=\sin\varphi,\\ &\tan 2\varphi=\frac{2a_{pq}^{(k-1)}}{a_{pp}^{(k-1)}-a_{qq}^{(k-1)}},\\ &|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{4}.\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

在复的情况下,关系式(*)变得十分复杂,但并无很大意义.

矩阵 A_k 的序列收敛到对角矩阵 Λ,其收敛速度是渐近二次的.Λ 的对角元即为 A 的近似本征值,而矩阵 $U^{(k)}=U_1\cdots U_k$ 的列即为近似本征向量.

旋转法的上述形式的实现包括了每一步都要选取模数最大的非对角矩阵元素,这在计算机上实现时将要求可观的计算量.

还有在计算机上实现起来更有效的其他一些旋转法的变形:循环旋转法,有闸旋转法,包含最优元素选取的旋转法.

在循环旋转法(cyclic rotation method)中,需要消成零的元素的一对指标 (p,q) 循环地取遍一切上对角线位置,这个方法的缺点是它必须执行大量的非有效的旋转把小的非对角元素消成零.

上述不足可以部分地在带闸的旋转法(rotation method with a barrier)中得以弥补,该方法包括引入一列称为闸的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$,它们单调下降趋于零.在循环检查指标 (p,q) 的过程中,只有那些模数比 α_1 大的非对角元素被消成零.在下一步中,当一切非对角元素都变得比 α_1 小时,闸 α_1 由 α_2 替代并继续进行上述消元过程.在实际工作中使用这种形式的旋转法有时会遇到一些困难,这涉及到最优闸的选取问题.

最适合在实际计算中使用的一种方法是选择最优元的旋转法(rotation method with selection of an optimal element)([4]).在这个方法中指标对 (p,q) 对应着几乎最大元素,它们是这样选取的:p 是具有最大 Euclid 长度的行数,而 q 是在第 p 行中具最大模数的某非对角元素的列数.由于除去第 p 行和第 q 行以外,矩阵的其他行在过程中的每一步其长度不改变,所以指标 (p,q) 的选取并不显著增加所含的计算量.经典的旋转法的整个理论完全可应用于这种修改的形式([2]).

在计算机上执行算术运算的实际环境下,用于计算(*)的不同的旋转法公式都能保证旋转法实行过程的收敛性质,同时也能保证本征值和本征向量两者的

高精度([5]).

参考文献

[1] Jacobi, C. G. J., Ueber ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen, *J. Reine Angew. Math.*, 30 (1846), 51 – 94.

[2] Воеводин, В. В., Численные методы алгебры, М., 1966.

[3] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, 1969 (中译本: J. H. 威尔金森, 代数特征值问题, 科学出版社, 1987).

[4] Воеводин, В. В., Ким, Г. Д., Программа для нахождения собственных значений и собственных векторов симметрической матрицы методом вращений, в сб., Вычислительные методы и программирование, М., 1962, 269 – 277.

[5] Ким, Г. Д., в сб., Численный анализ на ФОРТРАН'е, в. 3, М., 1973, 97 – 113.

Г. Д. Ким 撰

【补注】 称 Jacobi 法是当今可采用的最有效方法之一是一种夸张. 实际上, 对于 Hermite 矩阵所谓 QR 法(QR method)(见[A1]和 **Jacobi 法**(Jacobi method))具有三次收敛性, 而例如 Jacobi 法的循环形式只有二次收敛性.

参考文献

[A1] Golub, G. H. and Loan, C. F. Van, Matrix computations, Johns Hopkins Univ. Press, 1989 (中译本: G. H. 格罗布, C. F. 万罗安, 矩阵计算, 大连理工大学出版社, 1990).

张宝琳 袁国兴 译

旋转数 [rotation number; вращения число]

【补注】 设 $c: [a, b] \to \mathbf{R}^2$ 是正则曲线(regular curve), 即 $c(t)$ 是光滑的且对一切 $t \in [a, b]$, $\dot{c}(t) \neq 0$. 那么有一个连续分段可微的函数 $\theta(t)$ 使得 $c(t)$ 处的正规化速度向量 $\dot{c}(t)/|\dot{c}(t)|$ 等于 $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$. 此外, 差 $\theta(b) - \theta(a)$ 与 θ 的选取无关.

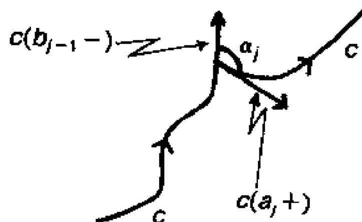


图 A1

现在, 设 $c: [0, A] \to \mathbf{R}^2$ 是分段光滑正则闭曲线, 且 $0 = b_{-1} = a_0 < b_0 = a_1 < \cdots < b_k = A$ 是$[0, A]$的区间划分, 使得对一切 j 限制于 $[a_j, b_j]$ 上 c 是可微的. 设 α_j 是在角点 $c(b_{j-1}) = c(a_j)$ 处切向量所成的外角, 即 α_j 是 $\dot{c}(b_{j-1}-)$ 和 $\dot{c}(a_j+)$ 的夹角 $(-\pi < \alpha_j \leqslant \pi)$. 数

$$n_c = \frac{1}{2\pi}\sum_j(\theta_j(b_j) - \theta_j(a_j)) + \frac{1}{2\pi}\sum_j \alpha_j$$

称为曲线 c 的旋转数(ratation number).

如果 $\mathbf{R}^2$ 等同于复平面 $\mathbf{C}$, 且 c 是光滑的(结果所有的 α_j 等于零), 那么 n_c 是闭曲线 $t \mapsto \dot{c}(t)/|\dot{c}(t)|$ 关于原点的卷绕数(winding number).

设 $c: [0, A] \to R^2$ 是分段光滑的、正则的、闭的且简单的(即无自相交点的), 并假定外角的绝对值总不等于 π. 那么所谓的旋转指标定理(Umlaufsatz)指出 $n_c = \pm 1$, 符号决定于定向. 由此容易计算具有自相交点的闭曲线的 n_c. 例如, 8字形曲线的旋转数等于零.

由这些结果容易得出, 例如, 凸 n 边形的内角和是 $(n-2)\pi$. 对于由圆弧段组成的三角形(及其他图形)也可得出各种各样的公式, 例如在图 A2 中左边画出的圆弧段三角形的情形, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180°$. 而在图 A2 中右边画出的圆弧段三角形的情形, $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180°$, 这里 β_i 代表涉及的圆弧段的度数, $0 \leqslant \beta_i \leqslant 360°$, $i = 1, 2, 3$.

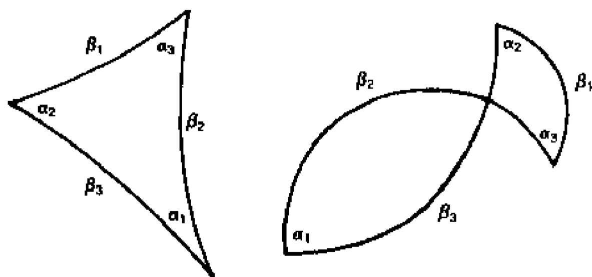


图 A2

关于圆弧段三角形的平面几何学, 更多的材料见, 例如, [A2], [A3].

参考文献

[A1] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1978, §2.1 (译自德文).

[A2] Bieberbach, L., Zur Euklidischen Geometrie der Kreisbogendreiecke, *Math. Ann.*, 130 (1955), 46 – 86.

[A3] Holz, W. K. B., Das ebene obere Dreieck. Eine Aufgabestellung, Selbstverlag Hagen, 1944.

[A4] Hopf, H., Über die Drehung der Tangenten und Sehen ebener Kurven, *Compositio Math.*, 2 (1935), 50 – 62.

潘养廉 译

向量场的旋转度 [rotation of a vector field; вращение векторного поля], 在一个平面上

向量场(vector field)的特征之一, 它在同伦下是

不变的．设 X 是 Euclid 平面 $\mathbf{E}^2$ 的区域 G 上的一个向量场，θ 是 X 与某固定方向之间的夹角；那么 X 的旋转度（rotation）就是当绕行一条闭定向曲线 $L \subset \mathbf{E}^2$（沿着 L，$X \neq 0$）一周时，角 θ 的增量除以 2π．例如，如果 L 是一条 C^2 阶的光滑曲线，则沿 L 切于 L（或法于 L）的场 τ（或 ν）的旋转度等于 L 的全曲率（curvature）除以 2π；如果 X 是区域 G（以 ∂G 为 Jordan 边界）上的（有或没有孤立奇点）的向量场，则 X 在 ∂G 上的旋转度等于 X 在 G 的闭包中的**奇点的指标**（singular point, index of a）．向量场的旋转度在不通过 X 的奇点的曲线 L 的同伦形变下保持不变．

推广由在一个 n 维流形 M 上在 v 的孤立点 p 处的向量场 v 的指标（index of a vector field）的概念组成．它定义为从绕 p 点的小球面到单位球面的映射 $x \mapsto v(x)/|v(x)|$ 的度（见**映射度**（degree of a mapping））．它与 **Euler 示性数**（Euler characteristic）有关．也见 **Poincaré 定理**（Poincaré theorem）；**Kronecker 公式**（Kronecker formula）．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 也见曲线的**旋转度数**（rotation number），它是曲线单位切向量场沿该曲线的旋转度．

参考文献

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer, 1988（译自法文）．

[A2] Greub, W., Halperin, S. and Vanstone, R., Connections, curvature, and cohomology, 1－3, Acad. Press, 1972.

[A3] Guillemin, V. and Pollack, A., Differential topology, Prentice-hall, 1974.

徐森林 译

旋转曲面[rotation surface; вращения поверхность]

平面曲线 L 绕所在平面上一根轴旋转生成的曲面．如果 L 由方程 $y=\rho(u)$, $z=z(u)$ 定义，那么旋转曲面的位置向量是 $\mathbf{r}=\{\rho(u)\cos v, \rho(u)\sin v, z(u)\}$，这里 u 是曲线 L 的参数，ρ 是曲面上点到旋转轴 z 的距离，v 是旋转角．旋转曲面的线素是

$$ds^2=(\rho'^2+z'^2)du^2+\rho^2 dv^2.$$

Gauss 曲率（Gaussian curvature）是 $K=-z'M/\rho N^4$，**平均曲率**（mean curvature）是 $H=(z'N^2-\rho M)/2\rho N^3$，这里 $M=z'\rho''-z'\rho''$, $N=\sqrt{\rho'^2+z'^2}$．曲线 $u=$ 常数称为旋转曲面的平行线（paralles），它们是位于与旋转轴垂直的平面上的圆．曲线 $v=$ 常数称为子午线（meridians），它们合同于该旋转曲线并位于过旋转轴的平面上．旋转曲面的子午线和平行线是它的曲率线并构成**等温网**（isothermal net）．

旋转曲面容有到另一旋转曲面的**形变**（deformation）．在此形变下，它的曲率线网保持不变，因而是形变的主基．旋转曲面的**脐点**（umbilical point）的特征是该点处子午线的曲率中心位于旋转轴上．平行线的半径与旋转曲面的测地线和平行线的交角的余弦的乘积沿测地线为常数（Clairaut 定理（Clairaut theorem））．

仅有的极小旋转曲面是**悬链面**（catenoid）．直纹旋转曲面是**单叶双曲面**（one-sheet hyperboloid）或它的退化情形之一：柱面、锥面或平面．具一根以上旋转轴的旋转曲面是球面或平面．

旋转曲面的度量可以表达成以下形式：

$$ds^2=\Lambda^2(r)(dx^2+dy^2),\ r^2=x^2+y^2. \quad (1)$$

形如（1）的度量的存在性和这些度量作为旋转曲面到 $\mathbf{R}^n$ 中的等距浸入参见[1]．

参考文献

[1] Sabitov, I. Kh., Abstracts Coll. Diff. Geom. (August 1989, Eger, Hungary), 47－48.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988（译自法文）．

[A2] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976（中译本：多卡模，曲线和曲面的微分几何学，上海科学技术出版社，1988）．

[A3] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1－5, Publish or Perish, 1979.

[A4] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Einführung in die Differentialgeometrie, Springer, 1973.

【译注】 一般地，旋转曲面定义为空间一条曲线 Γ 绕一根固定直线旋转所生成的曲面（[B1]）．例如，取固定直线（旋转轴）为 z 轴，设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x=f(t),\ y=g(t),\ z=h(t),\ (a\leqslant t\leqslant b).$$

那么，Γ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面方程可表达为

$$\begin{cases} x=\sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\cos\theta, \\ y=\sqrt{f^2(t)+g^2(t)}\sin\theta, & \begin{pmatrix} a\leqslant t\leqslant b \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi \end{pmatrix} \\ z=h(t). \end{cases}$$

参考文献

[B1] 吕林根等，解析几何，高等教育出版社，1982．

潘养廉 译 沈一兵 校

旋转定理[rotation theorems; вращения теоремы]

表征**共形映射**（conformal mapping）下辐角改变的一类定理．关于圆盘 $|z|<1$ 内正则单叶函数 $f(z)=z+c_2z^2+\cdots$ 所组成的类 S 的旋转定理给出该类函

数的导数的辐角的精确估计:

$$|\arg f'(z)|\leqslant\begin{cases}4\arcsin|z|, & \text{当 } |z|\leqslant 2^{-\frac{1}{2}},\\ \pi+\ln\dfrac{|z|^2}{1-|z|^2}, & \text{当 } 2^{-\frac{1}{2}}\leqslant|z|<1.\end{cases} \quad (*)$$

此处所考虑的 $\arg f'(z)$ 的分支在 $z=0$ 为 0. 对圆盘 $|z|<1$ 中每一点 z, 由不等式(*)给出的关于 $\arg f'(z)$ 的上界和下界都是精确的. 这一旋转定理是 Г. М. Голузин([1],[5])得到的; И. Е. Базилевич([2])首先证明不等式(*)对 $2^{-\frac{1}{2}}<|z|<1$ 是精确的; J. A. Jenkins([3])对该估计中等号的情形作出了完全的分析.

类 S 中的旋转定理(rotation theorems)也是给出 $\arg(f(z)/z)$ 及形如

$$\lambda\arg f'(z')-(1-\lambda)\arg\frac{f(z)}{z}, \quad 0<\lambda<1$$

的表达式的估计的诸定理的通称. 关于 S 类的最简单的这类估计是精确不等式:

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad |z|<1;$$

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad |z|<1.$$

(考虑辐角的适当分支.)还有关于其他实现该圆盘或其外部的共形映射的函数类的旋转定理, 以及多连通区域中的单叶函数类的旋转定理(见[5], [3], **畸变定理**(distortion theorems); **单叶函数**(univalent function)). 旋转定理亦已推广到包括 p 值函数的情形(见[5]的补编, 亦可见**多叶函数**(multivalent function)).

参考文献

[1] Голузйн, Г. М., 《Матем. сб.》, 1 (43), (1936), 1, 127 – 135.

[2] Базилевич, И. Е., 《Матем. сб.》, 1 (43) (1936), 3, 283 – 292.

[3] Jenkins, J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958.

[4] Grunsky, H., Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein-und mehrfach zusammenhängender Bereiche, *Schriftenreiche Math. Sem. Inst. Angew. Math. Univ. Berlin*, 1 (1932), 95 – 140.

[5] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд. М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

Г. В. Кузьмина 撰

【补注】 关于类 S 亦可见 **Bieberbach 猜想**(Bieberbach conjecture).

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

杨维奇 译

旋转图[rotations diagram; поворотов диаграмма]

椭圆空间 E^3 中由 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 的两个等距光滑曲面 F 和 F^* 定义的曲面, 其定义方法与 $\mathbf{R}^3$ 中无穷小形变定义**旋转标形**(rotation indicatrix)的方法相同. L. Bianchi 是提及椭圆空间中与旋转图重合的那些曲面的第一人, 当时他在研究曲面的形变基的球面表示, 他证明了这个球面表示重合于旋转图中渐近线在 Clifford 意义下的表示.

设 F 和 F^* 是两个等距的定向恒同的光滑曲面, 在等距中对应的两点 M 和 M^* 处, 由对应的等距的两条曲线 $v=$ 常数和 $u=$ 常数的切向量 x_u, x_v 和 x_u^*, x_v^* 和法向量 n 和 n^* 组成的三面形是相等的, 即

$$(x_u)^2=(x_u^*)^2,\ (x_v)^2=(x_v^*)^2,$$

$$(n^*)^2=(n)^2=1,\ (x_u,x_v)=(x_u^*,x_v^*),$$

$$(n,x_u)=(n^*,x_u^*)=(n,x_v)=(n^*,x_v^*)=0,$$

因而其中一个可由另一个通过绕单位方向向量为 V 的轴旋转角 χ(除 2π 外是确定的)而得到. 设

$$Q=\cos\frac{\chi}{2}+\dot{V}\sin\frac{\chi}{2}$$

是表示这个旋转的**四元数**(quaternion), 它的模等于 1, 除一个符号外是确定的. 用点 $M\in F$(或 $M^*\in F^*$)参数化的这种四元数集定义了椭圆空间中的一个点集, 称为等距曲面 F 和 F^* 的旋转图(rotations diagram). 例如, 如果 F 和 F^* 是等距的柱面片, 那么旋转图是 Clifford 曲面的一部分, 而对应于圆柱面的情形则是极小 Clifford 曲面. 如果 $|\chi|<\pi$, 那么在旋转图的外面有一椭圆平面, 且在椭圆空间到 Euclid 平面的测地映射

$$Q=\dot{V}\sin\frac{\chi}{2}+\cos\frac{\chi}{2}\to y=\dot{V}\tan\frac{\chi}{2}$$

之下, 旋转图的象是对应于 F 和 F^* 的中位曲面(median surface)的某个无穷小形变的旋转标形(见 **Cohn-Vossen 变换**(Cohn-Vossen transformation))(如果 $|\chi|<\pi$, 那么它是正则的).

Gauss 曲率为正的等距曲面的旋转图的性质与旋转标形的性质类似. 例如, 旋转图的特殊内部曲率总是负的, 因而它在研究凸曲面的等距时起着旋转标形同样的作用.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spivak, M., A comprehensive introduction to differ-

ential geometry, 1 − 5, Publish or Perish, 1979.

[A2] Pogorelov, A. V., Intrinsic geometry of surfaces, Amer. Math. Soc., 1973(译自俄文).

[A3] Pogorelov, A. V., Extrinsic geometry of convex surfaces, Amer. Math. Soc., 1973(译自俄文).

潘养廉 译

Rouché 定理[Rouché theorem; Руше теорема]

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是区域 D 内的单复变量 z 的正则**解析函数**(analytic function),设逐段光滑的简单闭曲线 Γ 连同由它围成的区域 G 均属于 D 且假定在 Γ 上不等式 $|f(z)|>|g(z)|$ 处处成立;则在区域 G 内 $f(z)+g(z)$ 与 $f(z)$ 具有相同的零点数目.

这一定理系由 E. Rouché([1])得到. 它是**辐角原理**(argument, principle of the)的一个推论,且蕴含关于多项式的代数基本定理.

对于多维全纯映射也有例如如下形式的 Rouché 定理的推广(generalization of Rouché theorem). 设 $f(z)=(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ 与 $g(z)=(g_1(z),\cdots,g_n(z))$ 是复空间 $\mathbf{C}^n$ 的区域 D 到 $\mathbf{C}^n(n\geqslant1)$ 的具有孤立零点的全纯映射(见**解析映射**(analytic mapping)),设同胚于球面的光滑曲面 Γ 连同由它围成的区域 G 均属于 D 且在 Γ 上有如下不等式

$$|f(z)|=\sqrt{|f_1(z)|^2+\cdots+|f_n(z)|^2}>|g(z)|.$$

则在 G 内映射 $f(z)+g(z)$ 与 $f(z)$ 具有相同的零点数目.

参考文献

[1] Rouché, E., *J. Ecole Polytechn*, **21** (1858).

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, 1967(英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977).

[3] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1 − 2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Rouché 定理有一种对称形式. 它断言: 若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 解析且在 Γ 上满足 $|f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$, 则 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 Γ 的内部有相同的零点个数. 关于单变量的 Rouché 定理的推广见[A2]−[A3]; 关于多变量的情形见[A1].

参考文献

[A1] Aizenberg, L. A. and Yuzhakov, A. P., Integral representations and residues in multdimensional complex analysis, Amer. Math. Soc., 1983(译自俄文).

[A2] Burckel, R. B., An introduction to classical complex analysis, 1. Acad. Press, 1979.

[A3] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1978(中译本: 康威, J. B., 单复变函数, 上海科学技术出版社).

杨维奇 译

粗系统[rough system; грубая система], 结构稳定(动力)系统(structurally-stable (dynamical) system)

一个具有以下性质的光滑**动力系统**(dynamical system): 对任意 $\varepsilon>0$ 均有 $\delta>0$, 使得对系统的任意在 C^1 度量下不大于 δ 的扰动, 均存在相空间的一个**同胚**(homeomorphism)使点以不大于 ε 的移动即可把未扰动系统的轨道转化为扰动系统的轨道. 形式上, 这个定义假设了在相流形上有某个 Riemann 度量. 事实上, 人们当相流形为闭时讨论结构稳定系统, 或在其轨道成为某一紧区域 G 的一部分而 G 有一个不切于轨道的光滑边界时讨论它; 这时, 只在 G 上考虑扰动和同胚, 由于有紧性, 度量的选取没有关系.

于是, 结构稳定系统的一个(在 C^1 意义下的)小扰动给出一个就拓扑性质而言等价于原系统的系统(然而此定义包含了一个附加的要求, 即等价性应由一个接近于恒等映射的同胚来实现). "粗"和"(结构)稳定"两个词在此是在广义的意义下使用的, 即仅仅指此系统的某个性质在小扰动下保持(这时最好是说就这一性质而言的结构稳定性). 亦见**局部结构稳定性**(local structural stability).

结构稳定系统是由 А. А. Андронов 和 Л. С. Понтрягин 引入的([1]). 若相流形维数是小的(对离散时间是一维, 对连续时间是一或二维), 结构稳定系统可以用轨道性态的定性性质简单地刻画(这时称它们为 **Morse-Smale 系统**(Morse-Smale system); 这时它们构成赋有 C^1 拓扑的动力系统空间中的处处稠密开集([1], [2]). 于是, 轨道展现一种更复杂的性态或对小扰动更为敏感的系统就被看作是例外情况. 如果维数更大, 正如 Smale 所证明的([3]), 以上事实均不成立. 他提出了一些假设, 使得在这些假设下, 尽管有以上的复杂性, 都可以在一般情况下按轨道的性态的定性图象, 给出结构稳定的必要充分条件如下: 1) **非游荡点**(non-wandering point)应构成一**双曲集**(hyperbolic set) Ω, 而周期轨道在其中处处稠密(所谓 Smale 公理 A(Smale axiom A); 2) Ω 中任两个轨道的稳定与不稳定流形横截相交(强横截性条件(strong transversality condition). 这些条件的充分性几乎在所有情况下都已证明, 而其必要性, 迄今(20 世纪 70 年代)只在结构稳定性之定义稍作改变后才能证明(见[4]或[5]).

参考文献

[1] Андронов, А. А. Понтрягин, Л. С., 《Докл. АН СССР》, 14 (1937), 5, 247 − 250.

[2A] Peixoto, M. M., Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, 1 (1962), 2, 101 − 120.

[2B] Peixoto, M. M., Structural stability on two-dimensional manifolds —— a further remark, *Topology*, 2 (1963), 2. 179 – 180.

[3] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 747 – 817.

[4A] Kushnirenko, A. G., Problems in the general theory of dynamical systems on a manifold, *Transl. Amer. Math. Soc.*, **116** (1981), 1 – 42. (Ninth Math. Summer School (1976), 52 – 124.)

[4B] Katok, A. B., Dynamical systems with hyperbolic structure, *Transl. Amer. Math. Soc.*, **116** (1981), 43 – 96. (Ninth Math. Summer School (1976), 125 – 211.)

[4C] Alekseev, V. M., Quasirandom oscillations and qualitative questions in celestial mechanics, *Transl. Amer Math. Soc.*, **116** (1981), 97 – 169. (Ninth Math. Summer School (1976), 212 – 341.)

[5] Nitecki, Z., Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms, M. I. T., 1971.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 结构稳定性是否等价于公理 A 与强横截性条件，这个问题称为 Palis-Smale 猜想(Palis-Smale conjecture). 这些条件是充分的，这一点早已知道(对于微分同胚见[A4]，对于由向量场定义的流见[A5]). 关于其必要性，已知只需证明结构稳定性蕴涵公理 A 即可. 关于闭流形上的 C^1 微分同胚，在[A2]中已证明了这一点. (在[A3]中还同时证明了 Ω 稳定性蕴涵公理 A，一个微分同胚若在其 Ω 极限集上是结构稳定的，就称为 Ω 稳定的，见**轨道的极限集**(limit set of a trajectory).

结构稳定系统当维数 ≥ 3 时并不构成(所有系统所成的赋有 C^1 拓扑的空间中的)稠密集，这一事实表明，它们并不如原来所设想的那样是一个可以普遍应用的工具，即并非所有物理过程都在本质上可用结构稳定系统来描述(见[A6]). Аносов 系统(见 **Y 系统**(Y-system); [A1])和双曲奇怪吸引子(见**双曲集**(hyperbolic set); **奇怪吸引子**(strange attractor))是重要的结构稳定系统. 但应用中产生的绝大多数奇怪吸引子和浑沌系统都不是结构稳定的(例如 **Lorenz 吸引子**(Lorenz attractor)). [A7]中提出了稳定性的另一种定义，按此定义，绝大多数吸引子是稳定的，且稳定系统是稠密的. 这个定义的基础是"系统的邻域"的概念，它与应用密切相关，且可应用于数值计算和物理实验，以模拟含有 ε 误差的数据，这里 $\varepsilon>0$ 是给定的.

参考文献

[A1] Аносов, Д. В., Геодезическое точение на компактной многообразия с отрицательной кривизной, 《Труды Матем. Инст. Стеклова》, **90** (1969).

[A2] Mañé, R., A proof of the C^1-stability conjecture, *Publ Math. IHES*, **66** (1988), 161 – 210.

[A3] Palis, J., On the C^1 Ω-stability conjecture, *Publ Math IHES*, **66** (1988), 211 – 215.

[A4] Robbin, J., A structural stability theorem, *Ann. of Math.*, **94** (1971), 447 – 493.

[A5] Robinson, R. C., Structural stability of vector fields, *Ann. of Math.*, **99** (1974), 154 – 175.

[A6] Thom, R., Structural stability and morphogenesis, Benjamin, 1976 (译自法文).

[A7] Zeeman, E. C., Stability of dynamical systems, *Nonlinearity*, 1 (1988), 115 – 155.

齐民友 译

一般旋轮线[**roulette**; **рулетта**]

一种平面曲线的名称，这种曲线是当某条曲线在另一条固定曲线上滚动时该曲线上一固定点形成的轨线. 假如一个圆在直线上滚动，这种一般旋轮线称为**摆线**(cycloid); 如果一个圆在另一个圆上滚动，那么这种曲线称为**旋轮类曲线**(cycloidal curve); 如果一条双曲线、一个椭圆或抛物线在直线上滚动，那么就称为 Sturm **曲线**(Sturm curves). 一个椭圆在另一个椭圆上滚动产生的轨线称为外椭圆摆线(epi-ellipse). 每一条平面曲线可以用许多方式看作为一般旋轮线; 例如，任何曲线可以由一条直线在它的**渐屈线**(evolute)上滚动而形成.

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热，几何，第一——五卷，科学出版社，1987 – 1991).

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A3] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976 (中译本: 多卡模，曲线和曲面的微分几何学，上海科学技术出版社，1988).

[A4] Lawrence, J. D., A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

潘养廉 译

舍入[**rounding-off** 或 rounding; **округление**]，数的

用有限个数字对某数系中一个数的近似表示法. 舍入的需要由计算要求所决定，在计算时通常最后的结果不可能完全精确地得到，也必须避免过多位数无意义的表示，一切数都仅限制在必要的位数以内.

数的舍入就是由近似地描述它的另一个数(称为 t 位数字的，或 t 位数)取代. 由此产生的误差称作**舍入误差**(rounding-off error 或 round-off error 或 ro-

unding error).

为了对一个数进行舍入，可使用许多方法．最简单的作法是丢弃该数中超过 t 位的后面的有效数字．此时绝对舍入误差不超过该数 t 位数的一个单位．在手算的情况下，在对一个数进行舍入时通常取最靠近的 t 位数．此时的绝对误差不超过被舍入的那个数 t 位数的半个单位．这个方法可给出一切用 t 位数舍入方法的最小可能的误差．

计算机所用舍入的方法由其设计目的及其技术上的可能性来决定，一般依赖于舍入的精度而生成最接近的 t 位数．计算机采用基于两个主要算术运算系统的任何一个：浮点系统和定点系统．在浮点系统（近来几乎全部采用这种系统）上，一个数的舍入结果具有确定的有效数字位数；在定点系统中，确定的数字位数是在小数点之后．在第一种情形下，习惯上称舍入到第 t 位，而在第二种情形则称舍入到小数点后第 t 位．在第一种情形控制了相对舍入误差，而第二种情形是绝对误差．

与计算机应用相关，已经研究了较大规模计算中的误差积累现象．分析数值方法中的误差积累，使人们可根据方法对舍入误差的敏感性来评介方法，制订把各种方法引入计算实践的策略，估计舍入误差，进而估计最终计算结果的精度．

参考文献

[1] Крылов, А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 5 изд., М.-Л., 1950.

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966（英译本：Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, 1, Pergamon, 1973).

[3] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[4] Воеводин, В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

Г. Д. Ким 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wilkinson, J. H., Rounding errors in algebraic processes, Prentice-Hall, 1963（中译本：J. H. Wilkinson，代数过程的舍入误差，人民教育出版社，1982).

张宝琳　袁国兴 译

通向浑沌的道路 [routes to chaos]

【补注】 这一短语讲的是一**动力系统**（dynamical system）的简单吸引集（例如不动点或周期轨道）当外部参数变化时变成浑沌的过程．

考虑一族含单参数的微分方程

$$\frac{d}{dt}x(t)=F_\lambda(x(t)),\quad x(0)=x_0,\qquad (A1)$$

或差分方程（映射）

$$x_{n+1}=F_\lambda(x_n),\qquad (A2)$$

F 是实参数 λ 和点 x 的光滑函数，x 属于某有限维相空间（如 $\mathbf{R}^n$）；x_0 是初始条件．（其他区域有时也有趣味；例如圆周 S^1 或环面 T^2 的映射．）设对 λ 的某固定值，在相空间的某开集中的初始条件趋向某个紧集 A，而 A 表现出对初始条件的敏感的依赖性．（这个集 A 也称为吸引子（attractor）．然而吸引子并没有普遍满意的定义（例如见[A1]）．本文中，这个词表示一个映射或流的**不变集**（invariant set），而且吸引其某个开邻域中几乎一切初始条件，且此不变集不能分裂为彼此不相交的非平凡的闭的不变子集，且运动在此集合上是返回的．关于一维映射的敏感依赖性的讨论可见[A2]．亦见**排斥集**（repelling set）；**奇怪吸引子**（strange attractor））．粗略说来，若 x_0、y_0 是 A 上两个相近的初始条件，其轨道只在一个短时间内接近．然后，轨道立即以指数型的变化率分离以致后来的运动似乎是完全无关的．（因为 A 是有界集，分离的变化率终将填满 A．）若 A 显示出对初始条件的敏感依赖性，则称吸引子 A 是浑沌的（chaotic）（亦见**浑沌**（chaos））．本文讨论（A1）或（A2）当参数 λ 变化时，出现浑沌吸引子的四种道路．这些是已知的最普通的通向浑沌的道路，有大量物理实验证实它们的存在．也找到了通向浑沌的其他道路（例如见[A3]），无疑地还有更多的有待发现，特别是在高维系统中．[A4]是一篇综述，并有详细文献．

由周期倍增通向浑沌的道路．在这条通向浑沌的道路中，当参数越过某临界值时有一个不动点失稳（出现音叉形分歧（pitchfork bifurcation），见**分歧**（bifurcation）），变成一个吸引的周期 2 轨道．对于参数的以后的一个值，周期 2 轨道再次失稳（出现音叉形分歧）成一周期 4 轨道，并依此类推．使得周期倍增（period doubling）的这些参数值成一上升序列而趋向于某有限值 λ_∞，这时，原来的不动点变成一个无周期吸引子（而当 $\lambda>\lambda_\infty$ 时可能是混沌的）．

M. J. Feigenbaum（[A5]）原来是讨论差分方程

$$x_{n+1}=F_\lambda(x_n)=\lambda x_n(1-x_n)\qquad (A3)$$

（亦称二次映射（quadratic mapping））的周期倍增性的．当 $\lambda>1$ 时，F_λ 在 $x_f=1-1/\lambda$ 处有非零的不动点，而当 $1<\lambda<3$ 时它是稳定的，因为

$$\left|\frac{dF_\lambda(x_f)}{dx}\right|=|2-\lambda|<1.$$

当 $\lambda=\lambda_1=3$ 时，在 x_f 处的导数为 -1．对稍大的 λ，导数绝对值大于 1 而 x_f 成为不稳定的：[0, 1] 中几乎所有初始值都被吸引到一个周期 2 轨道

$x_1 = F_\lambda(x_2)$，$x_2 = F_\lambda(x_1)$．对 $F_\lambda^2(x_i) = F_\lambda(F_\lambda(x_i)) = x_i$，$i = 1, 2$，作类似的导数估计又知，当 $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \approx 3.449$ 时，每个 x_i 都是稳定的．在 λ_2 处，因为 $dF_{\lambda_2}^2(x_i)/dx = -1$，故每个 x_i 都失去稳定性．和前面一样，每个 x_i 都被代以一对吸引点 x_{i1}，x_{i2}，使 $x_{i1} = F_\lambda^2(x_{i2})$，$x_{i2} = F_\lambda^2(x_{i1})$，$i = 1, 2$．当 λ 略大于 λ_2 时，点 x_{ij} 相应于 F_λ 的一个吸引周期 4 轨道．这个过程可以无限地继续下去；每次分歧时，周期轨道变成一个周期加倍的新的吸引周期轨道．使分歧发生的参数值构成增序列 $\{\lambda_k\}$，它以数 $\lambda_\infty \approx 3.5699$ 为上界，而且有以下的性质

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \delta \approx 4.6692 . \qquad (A4)$$

δ 称为 Feigenbaum 常数（Feigenbaum constant）．值得注意的是 δ 与映射 F_λ 的细节无关，只需要 F_λ 满足某些一般的假设；详见[A5]，[A6]．对于 $\lambda < 4$ 的许多值，二次映射中都产生浑沌．事实上，M. Jakobson（[A7]）证明了这些参数值构成正测度集．

对于高维情况，即对 $n > 1$ 时的映射 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 也有类似结果成立（[A8]）．在[A9]中表明了，当参数变化时，在"马蹄"形成中怎样会发生周期倍增瀑布．[A10]中有许多论文描述了在许多物理情况下有周期倍增存在．

由阵发通向浑沌的道路． Y. Pomeau 和 P. Manneville 在[A11]中描述了，当 $\lambda < \lambda_c$ 时的一个吸引周期轨道（像一个不动点）怎样在 $\lambda > \lambda_c$ 时会消失而被代以一个浑沌吸引子．当 λ 略大于 λ_c 时，靠近周期轨道的附近的初始值长久地停留在那里．这种正则的性态被一阵"爆发"打断，轨道从周期轨道的邻域移开，表现一种可能是不正则的性态．最后，轨道又回到周期轨道附近的区域，而这个过程又重复下去．$\lambda > \lambda_c$ 时的动态性态的特性就是它有一个区间的无限序列，在这些区间中近乎周期的（平流的）运动后面接着一阵爆发．当 λ 接近 λ_c 时，平流区域的长度大约是 $(\lambda - \lambda_c)^{-1/2}$ 的尺度（[A11]）．

有三种不同的阵发，视相关的偏导数 Jacobi 矩阵在周期轨道上的本征值而定．对 $\lambda < \lambda_c$，有一个稳定的和一个不稳定的周期轨道共存，而在 $\lambda = \lambda_c$ 时重合，这时就有 1 型阵发（type-1 intermittency）发生（在重合后的周期轨道处 Jacobi 矩阵有本征值1），在 $\lambda > \lambda_c$ 时周期轨道消失（即在 λ_c 处有鞍点——结点分岐）．一个用差分方程表示的例子是

$$x_{n+1} = F_\lambda(x_n) = 1 - \lambda x_n^2, \qquad (A5)$$

见[A4]．当 $\lambda > 1.75$ 时 F_λ^3 有一个稳定的和一个不稳定的周期 3 轨道．当 $\lambda = 1.75$ 时，这两个周期轨道重合，而当 λ 略小于 1.75 时，上述迭代过程表现出一种接近于周期 3 的运动而被一阵爆发打断．1 型阵发在 Lorenz 方程（见 **Lorenz 吸引子**（Lorenz attractor）[A11]）的 Poincaré 映射中，在关于振荡化学反应的实验中（[A12]）都找到过．

2 型阵发（type-2 intermittency）发生在相关的 Jacobi 矩阵之本征值为复值，且在离开实轴处越过单位圆时．在 3 型阵发（type-3 intermittency）中，本征值越过 -1．直观的论证以及数值的验证说明，当 λ 经过 λ_c 时所生成的浑沌吸引子的 **Ляпунов 特征指数**（Lyapunov characteristic exponent）之尺度是 $(\lambda - \lambda_c)^{-1/2}$，至少在 1 型和 3 型阵发的情况下是如此[A11]）．

Ruelle-Takens-Newhouse 的通向浑沌的道路． 设（A1）当 $\lambda < \lambda_1$ 时有一个吸引的不动点，而在 $\lambda = \lambda_1$ 通过 Hopf 分岐（Hopf bifurcation）而失稳（即此不动点变成一个吸引的周期轨道）．此外，又设当 $\lambda = \lambda_2 > \lambda_1$ 时发生另一个 Hopf 分岐而成为拟周期轨道（即现在吸引子成为环面 T^2）．在 $\lambda = \lambda_3 > \lambda_2$ 再次发生 Hopf 分岐产生一个拟周期三维环面．然而，S. E. Newhouse，D. Ruelle 和 F. Takens 在[A13]中证明，当 $n \geqslant 3$ 时，环面 T^n 上的每一个常值向量场都可以通过任意小的扰动生成一个具有浑沌吸引子的新向量场．例如，有一个实验，在其中可以见到一个分岐由一个 2 频率拟周期流变成为浑沌吸引子；例如见[A14]，[A15]．这种通向湍流的道路与 L. Landau，和 E. Lifshitz 的经典理论（[A16]）全然不同，后一理论说湍流的产生是由于当参数改变时，不断增加不可通约的频率．

由危机通向浑沌的道路． 前面的例子都表明当参数改变时现存的吸引子的特性会改变．在一个危机中，则当 $\lambda > \lambda_c$ 时原来只有一个浑沌瞬态（chaotic transient），即相空间中某个区域的初始条件趋向一个看来是浑沌吸引子的东西，而且在它的附近停留一个很长时间．然而，后来轨道离开而到相空间的另一部分而且再也不回来．当 $\lambda \to \lambda_c$ 时，停留在浑沌瞬态附近的时间越长．当 $\lambda \leqslant \lambda_c$ 时，浑沌瞬态变成了一个浑沌吸引子；原来会逃逸的初始条件现在永远停下来了．

二次映射（A3）就是危机的简单例子．对于 $\lambda > 4$，区间 $I = [0, 1]$ 中的几乎每一个初始条件都产生一个轨道而有一段时间在 I 中浑沌地跳动．最后，有一些迭代落到 0 的左方，而轨道趋向 $-\infty$．$\lambda = 4$ 时，瞬态变成了吸引子：I 中几乎每一个初始条件都趋向一个浑沌吸引子．

在这个例子中，$\lambda < 4$ 时浑沌吸引子含于 $(0, 1)$ 中．$\lambda = 4$ 时发生危机，这时 $(0, 1)$ 的一个内点映为 1，而它是不稳定不动点 0 的稳定流形的一部

分. $\lambda > 4$ 时, 区间 I 的一部分被映入 $-\infty$ 的吸引区域内(见浑沌(chaos)), 于是浑沌吸引子被浑沌瞬态所取代. 在逃逸到 $-\infty$ 之前, 典型的初始条件停在 I 中的平均时间之数量级是 $(\lambda-4)^{-1/2}$ 而与参数有关([A17]).

高维情况也有类似结果成立. [A17] 讨论了 Hénon 映射(Hénon mapping)

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + y_n,$$

$$y_{n+1} = 0.3x_n,$$

当 $1.0624 < \lambda < \lambda_c \approx 1.08074$ 时, 有一个 6 片的浑沌吸引子和一个 4 片的浑沌吸引子共存. 当 $\lambda \to \lambda_c$ 时, 6 片吸引子趋向一个周期 6 鞍点轨道的稳定流形, 而后者是 4 片吸引子的吸引区域边界的一部分. 当 $\lambda > \lambda_c$ 时, 6 片吸引子有一部分越过这个稳定流形. 这样, $\lambda > \lambda_c$ 时, 6 片吸引子变成一个瞬态——某个迭代终于映入 4 片吸引子的吸引区域中. 数值实验提示我们, 停留在浑沌瞬态附近的平均时间与 $(\lambda-\lambda_c)^{-\gamma}$ 成比例, γ 是一个"临界指数"而可用与危机中出现的周期轨道相联结的 Jacobi 矩阵的本征值来表示([A18]). 对于 Lorenz 方程和环面的映射也曾证明了有危机存在([A17]).

参考文献

[A1] Milnor, J., On the concept of attractor, *Commun. Math. Phys.*, **99** (1985), 177-195.

[A2] Guckenheimer, J., Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps, *Commun. Math., Phys.*, **70** (1979), 133-160.

[A3] Lorenz, E. N., *Physica D*, **35** (1989), 299-317.

[A4] Eckmann, J.-P., Roads to turbulence in dissipative dynamical systems, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981), 643-654.

[A5A] Feigenbaum, M. J., Qualitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, **19** (1978), 25-52.

[A5B] Feigenbaum, M. J., The universal metric properties of non-linear transformations, *J. Stat. Phys.*, **21** (1979), 669-706.

[A6] Collet, P., Eckmann, J.-P. and Lanford, O. E., Universal properties of maps on an interval, *Commun. Math. Phys.*, **76** (1980), 211-254.

[A7] Jakobson, M., Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps, *Commun. Math. Phys.*, **81** (1981), 39-88.

[A8] Collet, P., Eckmann, J.-P. and Koch, H., Period doubling bifurcations for families of maps on $\mathbf{R}^n$, *J. Stat. Phys.*, **25** (1981), 1-14.

[A9] Yorke, J. A. and Alligood, K. T., Period doubling cascades of attractors: a prerequisite for horseshoes, *Commun. Math. Phys.*, **101** (1985), 305-321.

[A10] Cvitanović, P., (ed.), Universality in chaos, Adam Hilger, 1989.

[A11] Pomeau, Y. and Manneville, P., Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Commun. Math. Phys.*, **74** (1980), 189-197.

[A12] Argoul, F., Arneodo, A., Richetti, P., Roux, J. C. and Swinney, H. L., *Acct. Chem. Res.*, **20** (1987), 436-442

[A13] Newhouse, S. E., Ruelle, D. and Takens, F., Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flow on T^m, $m \geqslant 3$, *Commun. Math. Phys.*, **64** (1978), 35-40.

[A14] Giglio, M., Musazzi, S. and Perini, U., Transition to chaotic behaviour via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations, *Phys. Rev. Lett.*, **47** (1981), 243-246.

[A15A] Fenstermacher, P. R., Swinney, H. L. and Gollub, J. P., Dynamical instabilities and transition to chaotic Taylor vortex flow, *J. Fluid Mech.*, **94** (1979), 103-128.

[A15B] Brandstäter, A. and Swinney, H. L., *Phys. Rev. A*, **35** (1987), 2207-2220.

[A16] Ландау. Л. и Лифшиц, Е., Механика сплошных сред. Наука, М., 1986 (英译本: Landau, L. and Lifshitz, E., Fluid mechanics. Pergamon 1987).

[A17] Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J. A., Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos, *Physica D*, **7** (1983), 181-200.

[A18] Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J. A., *Phys. Rev. Lett.*, **57** (1986), 1284-1287.

E. J. Kostelich 撰 齐民友 译

Routh-Hurwitz 准则 [**Routh-Hurwitz criterion**; **Рауса-Гурвица критерий**], Hurwitz 准则(Hurwitz criterion)

使 $a_0 > 0$ 且系数为实数的多项式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

的一切根均有负实部的充分必要条件: Hurwitz 矩阵(Hurwitz matrix) H 的所有主子式 Δ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, 均为正的(见子式(minor)). 这里, H 是 n 阶矩阵, 它的第 i 行为

$$a_{2-i}, a_{4-i}, \cdots, a_{2n-i},$$

并且约定当 $k < 0$ 或 $k > n$ 时, $a_k = 0$ (Hurwitz 条件(Harwitz condition)或 Routh-Hurwitz 条件(Routh-Hurwitz condition)). 这个准则由 A. Hruwitz([1])得到, 它是 E. J. Routh(见 **Routh 定理**(Routh theorem))工作的推广.

满足 Hurwitz 条件的多项式称为 Hurwitz 多项式(Hurwitz polynomial), 或者, 在应用 Routh-Hurwitz 准则于振动系统的稳定性理论中, 也称为稳定多项式

(stable polynomial). 多项式的稳定性还有其他准则，例如 Routh 准则，**Liénard-Chipart** 准则 (Liénard-Chipart criterion)，而且决定多项式实根个数的一些方法也已知．

参考文献

[1] Hurwitz, A., Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt, *Math. Ann.*, **46** (1895) 273 – 284.

[2] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967 (中译本：Φ. P. 甘特马赫尔，矩阵论，上、下卷，高等教育出版社，1956).

Е. Н. Кузьмин 撰

【补注】 亦见 **Routh 定理** (Routh theorem).

王斯雷 译

Routh 定理 [Routh theorem; Рауса теорема]

通过 Routh 格式，用以求出实系数多项式 $f(x)$ (在正则情形) 的具有正实部复根个数的一个定理．

将 $f(x)$ 写成形式

$$f(x) = a_0 x^n + b_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \\ + b_1 x^{n-3} + \cdots \quad (a_0 \neq 0).$$

该多项式的 Routh 格式 (Routh scheme) 定义为如下的数组:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \\ d_0 & d_1 & d_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

其中，前面两行是由 f 的系数组成，而从第三行起，每行的元素都是用它前两行元素依下法得到的：从第一行减去第二行的某个常数倍，使得第一个元素为零．删去这第一个零元素，即得到所需的行．例如，对第三行，

$$c_i = a_{i+1} - b_{i+1}\frac{a_0}{b_0}, \; i = 0, 1, \cdots.$$

上述 Routh 格式的第一行中，元素的个数等于 $(n+1)/2$ 的整数部分，在第二行中等于 $n/2$ 的整数部分，而在第 k 行中 $(k>2)$，元素的个数小于第 $(k-2)$ 行中元素的个数．整个格式包含 $n+1$ 行．如果第一列中的元素全不为零，则称为正则的 (regular).

Routh 定理：对于正则情形的实系数多项式，它的位于右半平面 (即实部为正) 的复根个数等于 Routh 格式中第一列元素符号改变的次数．在正则情形，多项式不可能有位于虚轴上的根．Routh 准则 (Routh criterion)：实系数多项式 $f(x)$ 的每个根均有负实部，当且仅当 Routh 格式第一列元素全不为零且有相同的符号．这些定理由 E. J. Routh ([1]) 建立．Routh 格式也可用来求在某些非正则情形多项式的位于右半平面根的个数．

Routh 格式的构作仅对具有给定数值系数的多项式才有效．还有应用更广的方法，那就是用 Hurwitz 矩阵代替 Routh 格式并且格式的第一列用主子式列 Δ_i, $i = 1, \cdots, n$, 来代替 (见 **Routh-Hurwitz 准则** (Routh-Hurwitz criterion)；**子式** (minor))．于是有类似于 Routh 定理的 Routh-Hurwitz 定理 (Routh-Hurwitz theorem)：若所有子式 Δ_i 均不为零，则 $f(x)$ 的位于右半平面的根的个数等于序列

$$a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

中符号改变的次数，且 $f(x)$ 无位于虚轴上的根．在某些附加条件下，这个方法还可以应用于某些子式 Δ_i 等于零的情形．

参考文献

[1] Routh, E. J., A treatise on the stability of a given state of motion, Macmillan, 1877.

[2] Routh, E. J., The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, Macmillian, 1905.

[3] Ляпунов, А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.-Л., 1950 (英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966).

[4] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967 (中译本：Φ. P. 甘特马赫尔，矩阵论，上、下卷，高等教育出版社，1956).

И. В. Проскуряков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Obreschkoff, N., Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1963 (译自俄文).

王斯雷 译

行有限求和法 [row-finite summation method; конечнострочный метод суммирования]

由行有限矩阵决定的一种**矩阵求和法** (matrix summation method)，行有限矩阵是每行只有有限个非零表值的矩阵．行有限求和法一个重要的特殊情形是**三角求和法** (triangular summation method).

在序列的所有正则矩阵求和法中 (见**正则求和法** (regular summation methods))，行有限求和法与在所有有界序列集合上可以构造出来的方法等价并且相容 (见[3]) (见**求和法的包含** (inclusion of summation methods)；**求和法的相容性** (compatibility of summation methods))．但是，存在着不等价于所有序列集

合上行有限求和法的正则矩阵求和法（例如，见[4]）.

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[2] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequences spaces, MacMillan, 1950.

[3] Брудно, А. Л., 《Матем. сб.》, 16 (1945), 191－247.

[4] Erdös, P. and Piranian, G., Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 397－401.

И. И. Волков 撰　罗嵩龄 译

直纹曲面[ruled surface; линейчатая поверхность]

1) 微分几何学中的直纹曲面是由一条直线运动而生成的曲面. 属于这个曲面的那些直线称为（直）母线（(rectilinear) generators）, 每一条与所有母线相交的曲线称为准线（directrix）. 如果 $\rho=\rho(v)$ 是准线的位置向量, $m=m(v)$ 是过 $\rho(v)$ 的母线的单位向量, 那么直纹面的位置向量是

$$r(u,v)=\rho(v)+um(v),$$

这里 u 是母线上点的坐标. 直纹曲面的线素是

$$ds^2=du^2+2(m\rho')du\,dv+$$
$$+(\rho'^2+2(m'\rho')u+m'^2u^2)dv^2.$$

直纹曲面的特征是它的**渐近网**（asymptotic net）是半测地的. 直纹曲面总可以以一种唯一的方式弯曲使得其上一条任给的曲线变成渐近线（Beltrami 定理（Beltrami theorem））. 此外, 如果一张不可展的直纹曲面弯曲成另一张直纹曲面, 那么或者它们的母线重合或者它们都可弯曲成一张二次曲面, 使得母线族对应的网成为该二次曲面上的渐近网（Bonnet 定理（Bonnet theorem））.

直纹曲面上使得母线的正交轨线的**测地曲率**（geodesic curvature）在该处等于零的点构成的集合称为直纹曲面的严格线（line of striction）（或缔括线（line of contraction））, 因为在极限意义上, 两条无限接近的母线的公垂线通过其上的每一点, 严格点（point of striction）. 严格点的坐标是 $u=-(\rho'm')/m'^2$; 在**柱面**（cylinder）上, 严格线没有定义, 而在**可展曲面**（developable surface）上它是**背棱**（edge of regression）. 两条无限接近的母线之间的最短距离与它们的夹角之比的极限 p 称为直纹曲面的分配参数: $p=(mm'\rho)/m'^2$; 可展曲面的特征是 $p=0$. 直纹曲面的 **Gauss 曲率**（Gaussian curvature）是

$$K=-\frac{p^2(m')^2}{\gamma},$$

这里

$$\gamma=\rho'^2+2u(\rho'm')+u^2m'^2-(\rho'm)^2.$$

仅有的极小直纹曲面是**螺旋面**（helicoid）. 旋转直纹曲面是单叶双曲面, 可能退化为柱面、锥面或平面. 如果直纹曲面的所有母线平行于一个平面, 那么它是一个 **Catalan 曲面**（Catalan surface）.

参考文献

[1] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1, М.-Л., 1947.

[2] Щуликовский, В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложений, М., 1963.

[3] Rashevskii, P. K., A course of differential geometry, Moscow, 1956（俄文）.

И. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Brauner, H., Differentialgeometrie, Vieweg, 1981.

[A2] Hoschek, J., Liniengeometrie, Bibliogr. Inst. Mannheim, 1971.

[A3] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential geometry, Springer, 1988（译自法文）.

[A4] Darboux, G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1－4, Chelsea, reprint, 1972.

[A5] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976（中译本: 多卡模, 曲线和曲面的微分几何学, 上海科学技术出版社, 1988）.

【译注】 除平面外, 仅有的极小直纹曲面是正螺面（right helicoid）（见**螺旋面**（helicoid））.

2) 代数几何学中的直纹曲面是一个代数闭域 k 上双有理等价于曲面 $P^1\times C$ 的光滑射影曲面, 这里 P^1 是射影直线, C 是亏格 $g\geqslant 0$ 的光滑射影曲线. 直纹曲面的一个例子是 C 上秩 2 的关于 Zariski 拓扑是局部自由的层（sheaf）$\mathscr{E}$ 的射影化 $P_C(\mathscr{E})$.

如果存在一个其每条纤维同构于 P^1 的光滑态射 $p: F\to C$, 那么 F 称为底为 C 的几何直纹曲面（geometrically-ruled surface）. 当 C 是零亏格的曲线时, 几何直纹曲面称为有理直纹曲面（rational ruled surface）; 当 C 的亏格等于 $g\geqslant 1$ 时, 则称为亏格 g 的几何直纹曲面（geometrically-ruled surface of genus g）. 根据 **Noether-Enriques 定理**（Noether-Enriques theorem）, 态射 p 总有一个截面 $s: C\to F$（见[1], [2], [5]）.

直纹曲面的性质如下（见[1], [2], [6]）: a) 每一个底为 C 的几何直纹曲面具有形式 $P_C(\mathscr{E})$, 这里 $\mathscr{E}$ 是 C 上的秩 2 的**局部自由层**（locally free sheaf）, 且在 C 上

$$P_C(\mathscr{E})\cong P_C(\mathscr{E}'),$$

当且仅当有一个 C 上的可逆层(invertible sheaf) $\mathscr{L}$ 使得 $\mathscr{E}\cong\mathscr{E}'\otimes\mathscr{L}$.

b) 除同构外，所有的有理几何直纹曲面被可数系列个曲面

$$F_n=P_{P^1}(\mathscr{O}_{P^1}\oplus\mathscr{O}_{P^1}(n))$$

穷尽，这里 $n\geqslant 0$ 是整数，$\mathscr{O}_{P^1}(n)$ 是 P^1 上的 n 次可逆层；除 Veronese 曲面 $V_4\subset P^5$ 外(见 **Veronese 映射** (Veronese mapping))，P^{n+1} 中所有的 n 次曲面都是有理几何直纹曲面或正规有理曲线上的锥面.

c) 如果 F 是 k 上双有理等价于 $P^1\times C$ 的极小光滑射影曲面，这里 C 是亏格 $g\geqslant 1$ 的曲线，那么 F 是底为 C 的几何直纹曲面，且 C 除同构外由 F 唯一决定.

d) 如果 F 是底为 C 的几何直纹曲面且 $p: F\to C$ 是相应的态射，那么

(i) $\mathrm{Pic}(F)\cong p^*\mathrm{Pic}(C)\oplus\mathbf{Z}^S$，这里 S 是某个截面类；

(ii) $q(F)=g$，$P_g(F)=0$，$P_n(F)=0$，对 $n\geqslant 2$，且

$$K_F^2=8(1-g),$$

这里 g 是 C 的亏格，$q(F)=\dim H^1(F,\mathscr{O}_F)$ 是非正则性，$P_g(F)=\dim H^2(F,\mathscr{O}_F)$ 是几何亏格，$P_n(F)=\dim H^0(F,\mathscr{O}_F(nK_F))$ 是 n 阶亏格，K_F 是 F 的典范除子.

e) 如果 F 是底为 C 的几何直纹曲面，S 是态射 $p: F\to C$ 的某个截面类，那么存在 C 上的一个可逆层 $\mathscr{L}$，使得可逆层 $\mathscr{M}=\mathscr{O}_F(S)\otimes p^*\mathscr{L}$ 决定同构嵌入 $\varphi_{\mathscr{M}}: F\to P^N$，在此嵌入下 p 的纤维映到位于 $F'=\varphi_{\mathscr{M}}(F)$ 上的直线上且覆盖 F'，即 F' 是一个通常意义上的直纹曲面.

直纹曲面在代数曲面的 Enriques 分类法中构成重要的一类(见[1],[2],[3]). 它们可由下面的对直纹曲面的判别法则中的任何一个来刻画(见[1],[3],[4],[5],[7]):

α) 小平 维数 $\kappa(F)=-\infty$.

β) n 阶亏格 $P_n(F)=0$，对 $n=12$.

γ) F 的某个(等价地，任何一个) **极小模型** (minimal model) F^* 满足添加终止条件，也就是说，对任何除子 $D\in\mathrm{Div}(F^*)$ 存在一个整数 n_0，使得线性系 $|D+nK_F|$ 对一切 $n\geqslant n_0$ 是空的，这里 K_F 是典范除子.

δ) 在某个(等价地，任何一个)极小模型 F^* 上有一条曲线 E，使得 $(E\cdot K_{F^*})<0$.

参考文献

[1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 75).

[2] Beauville, A., Surfaces algébriques complexes, Astérisque, **54** (1978).

[3] Bombieri, E. and Husemoller, D., Classification and embeddings of surfaces, in R. Hartshorne (ed.): Algebraic Geometry (Arcata. 1974), Proc. Symp Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., 1975, 329 – 420.

[4] Bombieri, E. and Mumford, D., 'Enriques' classification of surfaces in char p II, in W. L. Baily, jr. and T. Shioda (eds): Complex Analysis and Algebraic Geometry, Cambridge Univ. Press, 1977, 23 – 42.

[5] Enriques, F., Lezioni sulla teoria geometrica delle superficie algebriche, CEDAM, 1932.

[6] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[7] Kodaira, K., On the structure of complex analytic surfaces IV, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 4, 1048 – 1066.

В. А. Исковских 撰

【补注】

参考文献

[A1] Edge, W., The theory of ruled surfaces, Cambridge Univ. Press, 1931.

[A2] Barth, W., Peters, C. and Ven, A. van de, Compact complex surfaces, Springer, 1984.

潘养廉 译

Runge 区域 [Runge domain; Рунге область]，第一类的

复变量 $(z_1,\cdots,z_n)$ 的空间 $\mathbf{C}^n$ 中具有下述性质的区域 G: 对于 G 内全纯的任一函数 $f(z_1,\cdots,z_n)$，存在在 G 内收敛于 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 的多项式序列

$$\{P_k(z_1,\cdots,z_n)\}_{k=1}^{\infty},\qquad(1)$$

它在任一有界闭集 $E\subset G$ 上一致收敛. 以有理函数序列 $\{R_k(z_1,\cdots,z_n)\}_{k=1}^{\infty}$ 代替序列(1)，就得到第二类 Runge 区域(Runge domain of the second kind)的定义. 对于 $n=1$，任一单连通域是第一类 Runge 区域而任一区域是第二类 Runge 区域(见 **Runge 定理** (Runge theorem)). 对于 $n\geqslant 2$，并非所有单连通域是 Runge 区域，而且并非所有 Runge 区域是单连通的.

参考文献

[1] Фукс, Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963 (英译本: Fuks, B. A., Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965).

[2] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T.,

1966).

[3] Stolzenberg, G., Polynomially and rationally convex sets, *Acta Math.*, 109 (1963), 259 − 289.

Е. П. Долженко 撰

【补注】 满足 $G \subset D$ 的两个区域 G 和 D 称为一个 Runge 偶 (Runge pair), 如果每一在 G 中全纯的函数可由 D 中的全纯函数在 G 的任一紧子集上一致逼近. 此时也称 G 在 D 中是(相对)Runge 的. G 是(第一类)Runge 区域等价于 $(G, \mathbf{C}^n)$ 是 Runge 偶.

此外还有下述推广: 设 $G_1 \subset G_2 \subset \mathbf{C}^n$ 是两个区域, 则 G_1 称为在 G_2 内是相对 Runge 的, 如果每一在 G_1 上全纯的函数可由 G_2 上的全纯函数在 G_1 的任一紧子集上一致逼近. 于是 G 是第一类 Runge 区域当且仅当 G 在 $\mathbf{C}^n$ 中是相对 Runge 的.

参考文献

[A1] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer, 1986.

[A2] Fornaess, J. E., Stensønes, B., Lectures on counterexamples in several variables, Princeton Univ. Press, 1987.

[A3] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

沈永欢 译

Runge-Kutta 法 [Runge-Kutta method; Рунге-Кутта метод]

数值求解常微分方程组

$$u' = f(t, u) \tag{1}$$

的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 的单步方法. Runge-Kutta 法的基本思想是由 C. Runge ([1]) 提出, 后由 Kutta ([2]) 等人发展的. 最初, 该思想只用来构造此方法的显格式, 即在形式

$$y_{j+1} = y_j + \tau \sum_{i=1}^{q} A_i k_i \tag{2}$$

中求取, 其中

$$y_{j+\alpha} \cong u(t_j + \alpha\tau),\ k_1 = f(t_j, y_j),$$

$$k_n = f\left(t_j + \alpha_n \tau,\ y_j + \tau \sum_{m=1}^{n-1} \beta_{nm} k_m\right),\ n = 2, \cdots, q,$$

而常数值 A_i, α_n, β_{nm} $(i = 1, \cdots, q;\ n = 2, \cdots, q;\ m = 1, \cdots, n-1)$, 则是由 (2) 式关于 (1) 的精确解的误差应具有的最高阶 (即展式中主导项的步长 τ 的幂) 决定.

对比多步法, Runge-Kutta 法作为另一种单步方法, 只要求近似解在最后时刻点的值, 且在对方程 (1) 是很自然的初始条件下就可以进行计算. 对不等间隔网格也可直接用它. 然而, 由于此方法并没有用上在前面网格节点上解的信息, 一般说, 并不比 **Adams 法** (Adams method) 等省时.

典型的 Runge-Kutta 法 (例如, 见 [3]) 是方法:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}\tau(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(t_j, y_j),\ k_2 = f\left(t_j + \frac{1}{2}\tau,\ y_j + \frac{1}{2}\tau k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_j + \frac{1}{2}\tau,\ y_j + \frac{1}{2}\tau k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_j + \tau,\ y_j + \tau k_3).$$

它属于 (2) 式中取 $q = 4$, 4 阶精度, 依赖于两个自由参数的方法族. 最简单的一阶精度显式 Runge-Kutta 法由 (2) 式取 $q = 1$ 得到; 它也是用得最广泛的. 此法通称为 Euler 法 (Euler method). 由 (2) 取 $q = 2, 3$, 可以分别得到 2 和 3 阶精度依赖于 1 和 2 个自由参数的 Runge-Kutta 法族. 对 $q > 4$, 上述 q 值与最优精度阶数之间的对应关系不再有效. 形式 (2) 的 Runge-Kutta 法, 5 阶精度只能对 $q = 6$ 实现, 6 阶精度对 $q = 7$, 7 阶精度对 $q = 9$ 等等. 这种情况下, 如果 q 增加 1, (2) 式中待选定的常数 A_i, α_i, β_{nm} 集合的拓广, 往往不能充分满足显式 Runge-Kutta 法精度阶数增加 1 时要求的条件. 为了增加 (2) 中待选参数个数, 例如可以考虑下列基于 Runge 的概念的单步法结构:

$$k_n = f\left(t_j + \alpha_n \tau,\ y_j + \tau \sum_{m=1}^{q} \beta_{nm} k_m\right), \tag{3}$$

$$n = 1, \cdots, q.$$

一般说, 形式为 (2), (3) 的方法已经是隐式的了. 这使数值计算过程明显地变复杂: 每一步都必须从方程组 (3) (一般讲是非线性的) 求出值 k_n, $n = 1, \cdots, q$. 但是, 由于待选定的常数个数增加很多, 这种方法带来下面的性质 (见 [4]): 对任一 q 值, 存在一精度阶数为 $2q$ 的隐式 Runge-Kutta 法. 进而, 在 Runge-Kutta 法的这种拓广之下, 出现了很适合于**刚性微分组** (stiff differential system) 的方法.

构造数值求解方程 (1) 的单步法的 Runge 概念可以作进一步的修改 (例如见 [5]). 即从 (1) 出发, 写出等式

$$u(t_j + \tau) - u(t_j) = \tau \int_0^1 f(t_j + \alpha\tau,\ u(t_j + \alpha\tau))\, d\alpha.$$

用下列 q 个节点的求积公式作为最后积分的近似值:

$$u(t_j+\tau)\cong$$
$$\cong u(t_j)+\tau\sum_{i=1}^{q}A_i f(t_j+\alpha_i\tau,\ u(t_j+\alpha_i\tau)).\quad(4)$$

若选择所考虑的求积公式的节点 α_i 及系数 $A_i(i=1,\cdots,q)$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{q}A_i=1,\ \sum_{i=1}^{q}A_i\alpha_i^n=\frac{1}{n+1},\quad(5)$$

$$n=1,\cdots,p-1,$$

则近似式(4)的误差的阶是 τ^{p+1}. 对 $p\leqslant 2q$，方程组(5)可解，近似式(4)可构造. 类似地，可以写出(4)式右边未知值 $u(t_j+\alpha_i\tau)$ 的近似式；这时，对它们精度的限制可降低阶数，等等.

下列精度阶数为 3 的预设修正型的方法是上述构造单步法的例子(见[6])：

$$y_{j+1/4}=y_j+\frac{1}{4}\tau f(t_j,\ y_j),$$

$$y_{j+1/2}=y_j+\frac{1}{2}\tau f\left(t_j+\frac{\tau}{4},\ y_{j+1/4}\right),$$

$$y_{j+1}^{*}=y_j+\tau f\left(t_j+\frac{\tau}{2},\ y_{j+1/2}\right),$$

$$y_{j+1}=y_j+\frac{1}{6}\tau\left[f(t_j,\ y_j)+4f\left(t_j+\frac{\tau}{2},\ y_{j+1/2}\right)+\right.$$
$$\left.+f(t_j+\tau,\ y_{j+1}^{*})\right].$$

若(4)式中有一个 α_i 设为 1，则同样的方式可以构造隐式方法，例如方法

$$y_{j+1}=y_j+\frac{1}{2}\tau[f(t_j,\ y_{j+1}-\tau f(t_j+\tau,\ y_{j+1}))+$$
$$+f(t_j+\tau,\ y_{j+1})],$$

具有 2 阶精度.

上述为类型(1)的方程构造数值解法的做法可推广到高阶常微分方程(见[6],[7])，在构造偏微分方程的差分格式时也可应用.

参考文献

[1] Runge, C., Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 46 (1895), 167 – 178.

[2] Kutta, W., Beitrag zur naherungsweisen Integration von Differentialgleichungen, *Z. Math. und Phys.*, 46 (1901), 435 – 453.

[3] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[4] Butcher, J. C., Implicit Runge-Kutta processes, *Math. Comp.*, 18 (1964), 50 – 64.

[5] Бобков, В. В., 《Весцi АН БССР Сер. фiз.-мат. навук》, 1967, 4, 27 – 35.

[6] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977.

[7] Collatz, L., Numerical treatment of differential equations, Springer, 1966 (译自德文).

В. В. Бобков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Butcher, J. C., The numerical analysis of ordinary differential equations. Runge-Kutta and general linear methods, Wiley, 1987.

沈海玉 译

Runge 法则[Runge rule; Рунге правило]

估计数值积分(integration, numerical)公式误差的方法之一. 令 $R=h^kM$ 为某数值积分公式的余项，其中 h 为积分区间或其一部分的长度，k 为一固定的数，而 M 是某常数与被积函数在积分区间某点处的第 $(k-1)$ 次导数之积. 若以 J 表示积分的准确值，I 表示它的近似值，则 $J=I+h^kM$.

根据 Runge 法则，同一积分可在值 $h/2$ 代替 h 的情况下由相同的数值积分公式计算. 或即，为了得到整个区间上的积分值，积分公式可使用两次. 如果 M 中的导数在所论区间上的变化不剧烈，则

$$R\approx h^kM=\frac{I_1-I}{1-\frac{1}{2^{k-1}}},$$

其中 I_1 是关于 $h/2$ 计算得到的积分值.

Runge 法则还用于数值求解微分方程. 这个法则是由 C. Runge(20 世纪初)提出的.

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[2] Modern numerical methods for solving ordinary differential equations, Moscow, 1979 (俄文，译自英文).

А. Б. Иванов 撰 张宝琳 袁国兴 译

Runge 定理[Runge theorem; Рунге теорема]

由 C. Runge 首次证明(1885)的关于用多项式逼近全纯函数的可能性的一条定理(亦见**复变函数逼近**(approximation of functions of a complex variable)).

设 D 是复 z 平面中的单连通域，则全纯于 D 内的任一函数 f 可由 z 的多项式在 D 内部任何紧集上

一致逼近．更精确地说，对任一紧集 $K \subset D$ 和 $\varepsilon > 0$，存在复系数多项式 $p(z)$，使对所有 $z \in K$ 有 $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$．

换言之，任一在单连通域 $D \subset \mathbf{C}$ 内全纯的函数 f 可表示为 z 的多项式的一个级数，此级数在 D 内部任一紧集上绝对且一致收敛于 f．

Runge 定理的一个等价陈述是：设 K 是 $\mathbf{C}$ 中的紧集且具有连通补集 $\mathbf{C} \setminus K$，则在 K 的邻域内全纯的任一函数可由 z 的多项式在 K 上一致逼近．按此种表述，Runge 定理便是 **Мергелян 定理**（Mergelyan theorem）的特殊情形．

下述有理逼近定理（theorem on rational approximation）也称为 Runge 定理：在区域 $D \subset \mathbf{C}$ 内全纯的任一函数 f 可由极点在 D 外部的有理函数在 D 内任何紧集上一致逼近．

Runge 定理在复变函数论和泛函分析中有许多应用．类似于 Runge 定理的命题对非紧 Riemann 曲面成立．Runge 定理推广于多复变量函数的是冈潔 - Weil 定理（见冈潔定理（Oka theorems））．

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 4 изд., М., 1978（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论简明教程，人民教育出版社，1963）．

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1, М., 1976.

Е. М. Чирка 撰

【补注】 关于 Runge 定理及其推广，如 Walsh 定理（Walsh theorem），**Келдыш 定理**（Keldysh theorem），**Лаврентьев 定理**（Lavrent'ev theorem）的更多材料，复平面情形见[A6]、[A1]，第八章及[A3]第三章；Riemann 曲面情形见[A2]第 25 节；多复变量情形见[A4]第 7 节．

参考文献

[A1] Burckel, R. B., An introduction to classical complex analysis, 1, Acad. Press, 1979.

[A2] Forster, O., Lectures on Riemann surfaces, Springer, 1981（译自德文）．

[A3] Gaier, D., Vorlesungen über Approximation im Komplexen, Birkhäuser, 1980（中译本：D. 加意耳，复变函数逼近论，湖南教育出版社，1985）．

[A4] Wermer, J., Banach algebras and several complex variables, Springer, 1976.

[A5] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1978（中译本：W. 卢丁，实分析和复分析，人民教育出版社，1981）．

[A6] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1－2, М., 1967－1968（中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957）．

沈永欢 译

Russell 悖论 [Russell paradox; Рассела парадокс]

见悖论（antinomy）．

S

S对偶性 [S-duality; S-двойственность], 平稳对偶性 (stationary duality), Spanier 对偶性 (Spanier duality)

(在对空间维数不加限制的情况下)存在于同伦论中的一种**对偶性** (duality). 它是普通同伦群与上同伦群在纬垂范畴中的对应物. 它在构成特别的(广义)同调与上同调理论的 S 同伦群与 S 上同伦群, 或平稳同伦群与平稳上同伦群间建立起关系. 一个纬垂范畴 (suspension category), 或 S 范畴 (S-category), 是这样一个**范畴** (category), 它以拓扑空间 X 为对象, 而它的态射是从 p 重**纬垂** (suspension) S^pX_1 到 S^pX_2 的 S 同伦映射 (S-homotopic mappings) f 的类 $\{f\}$, 这里 f 与 g: $S^qX_1 \to S^qX_2$ 被认为是 S 同伦的, 如果存在 $\gamma \geq \max(p, q)$ 使得纬垂 $S^{r-p}f$ 与 $S^{r-q}g$ 在通常意义下同伦. 这些称为 S 映射 (S-mappings) 的类的集合 $\{X_1, X_2\}$ 在所谓径迹加法下构成一个 Abel 群 ([1], [2], [4], [5]). 群 $[X_1, X_2]$ 是通常的同伦类集合 $[S^kX_1, S^kX_2]$ 的定向谱的极限, 以纬垂映射为它的投射, 当 k 充分大时, 它是一个具有同态的群谱. 存在同构 S: $\{X_1, X_2\} \to \{SX_1, SX_2\}$, 其中相对应的元素由一个相同的映射 $S^pX_1 \to S^pX_2$, $p \geq 1$, 表示. 某个球面 S^n 中的多面体 X 的 n 对偶多面体 (n-dual polyhedron) 是 S^n 中的某个任意多面体 D_nX, 且它是补空间 $S^n \setminus X$ 的 S 形变收缩核, 即对应于嵌入 $D_nX \subset S^n \setminus X$ 的态射是 S 等价. 对于所有的 X, 多面体 D_nX 存在, 并且 X 可视为 D_n^2X.

对于任意多面体 X_1, X_2 以及对偶于它们的任意多面体 D_nX_1, D_nX_2, 存在唯一的映射

$$D_n: \{X_1, X_2\} \to \{D_nX_2, D_nX_1\}$$

满足以下条件:

a) 它是一个对合反变函子的同构. 即 D_n 是一个同构, 使得如果

$$i: X_1 \subset X_2 \text{ 并且 } i': D_nX_2 \subset D_nX_1,$$

则有

$$D_n\{i\} = \{i'\};$$

如果

$$\{f_1\} \in \{X_1, X_2\} \text{ 及 } \{f_2\} \in \{X_2, X_3\},$$

则有

$$D_n(\{f_2\} \cdot \{f_1\}) = D_n\{f_1\} \cdot D_n\{f_2\};$$

如果 θ 是 $\{X_1, X_2\}$ 或 $\{D_nX_2, D_nX_1\}$ 中的元素, 则 $D_nD_n\theta = \theta$.

b) 如下关系成立:

$$SD_n = D_{n+1} \text{ 并且 } D_{n+1}S = D_n,$$

此处 SD_nX_i 与 D_nX_i 视为多面体, 它们分别 ($n+1$) 对偶于多面体 X_i 与 SX_i, $i=1, 2$; 这意味它与 n 无关, 从而关于纬垂平稳.

c) 它满足方程

$$D_a^n\theta_* = (D_n\theta)^*D_a^n,$$

其中

$$\theta_*: H_p(X_1) \to H_p(X_2)$$

与

$$(D_n\theta)^*: H^{n-p-1}(D_nX_1) \to H^{n-p-1}(D_nX_2)$$

是 S 映射 $\theta \in \{X_1, X_2\}$ 与 $D_n\theta$ 诱导的上述同调和上同调群的同态, 并且

$$D_a: H_p(X_i) \to H^{n-p-1}(D_nX_i), \ i=1, 2$$

是由 **Alexander 对偶性** (Alexander duality) 同构得到

的同构，其中集合 $S^n \setminus X$ 被它的 S 形变收缩核 $D_n X$ 所替换.

D_n 的构造依赖于将一个给定的映射表示为某个嵌入与某个 S 形变收缩的合成.

空间 X 的 S 同伦群（S-homotopy group）$\Sigma_p(X)$ 是群 $\{S^p, X\}$，而 X 的 S 上同伦群（S-cohomotopy group）$\Sigma^p(X)$ 是群 $\{X, S^p\}$. 正如在普通同伦论中，可以定义同态

$$\varphi_p: \Sigma_p(X) \to H_p(X),$$
$$\varphi^p: \Sigma^p(X) \to H^p(X).$$

视球面 S^p 与 S^{n-p-1} 相互 n 对偶，导致同构

$$D_n: \Sigma_p(X) \to \Sigma^{n-p-1}(D_n X)$$

以及交换图式

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_p(X) & \xrightarrow{\varphi_p} & H_p(X) \\ D^n \downarrow & & \downarrow D_n^* \\ \Sigma^{n-p-1}(D_n X) & \xrightarrow{\varphi^{n-p-1}} & H^{n-p-1}(D_n X). \end{array}$$

因此，正如 Alexander 对偶性同构 D_n^* 把同调群联系到上同调群，同构 D_n 将 S 同伦群联系于 S 上同伦群. S 范畴中的任何对偶如果在空间上施加的条件保证了上述类的集合与 S 同伦类的集合间存在某个一一对应，它就引出通常同伦类中的某个对偶.

在这一理论中对偶假设的例子包括 Hurewize 同构定理，以及 Hopf 分类定理. D_n 将这些定理之一转换为另一个，这意味着 S 同伦群被 S 上同伦群替换，同调群为上同调群替换，映射 φ_p 被映射 φ^{n-p-1} 替换，具有非平凡同调群的最低维数被具有非平凡上同调群的最高维数替换，反之亦然. 在普通同伦论中，某个 n 上同调群的定义要求空间的维数不超过 $2n-2$（或较为一般地，该空间 $(2n-1)$ 上连通，$n>1$），它减弱了对偶性的完整的一般性.

这一理论具有若干个一般化的趋势：例如，对于具有多面体的 S 同伦型的空间，相对的情形，具有支集的理论等等. 研究工作已经开展（[3]，[5]，[6]，[7]）. 这一理论曾经是发展平稳同伦论的起点之一（[8]）.

参考文献

[1] Spanier, E. H., Duality and S-theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **62** (1956), 194 – 203.

[2] Spanier, E. H. and Whitehead, J. H. C., Duality in homotopy theory, *Mathematika*, **2** (1955), 3, 56 – 80.

[3] Spanier, E. H. and Witehead, J. H. C., Dualiey in relative homotopy theory, *Ann. of Math.*, **67** (1958), 2, 203 – 238.

[4] Barratt, M. G., Track groups 1; 2, *Proc. London Math. Soc.*, **5** (1955), 71 – 106; 285 – 329.

[5] Spanier, E. H. and Whitehead, J. H. C., The theory of carriers and S-theory, in Algebraic Geometry and Topology (A Symp. in honor of S. Lefschetz), Princeton Univ. Press, 1957, 330 – 360.

[6A] Eckmann, B. and Hilton, P. J., Groupes d'homotopie et dualité, Group absolus, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 17, 2444 – 2447.

[6B] Eckmann, B. and Hilton, P. J., Groupes d'homotopie et dualite. Suites exactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 18, 2555 – 2558.

[6C] Eckmann, B. and Hilton, P. J., Groupes d'homotopie et dualité. Coefficients, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 21, 2991 – 2993.

[6D] Eckmann, B. and Hilton, P. J., Transgression homotopique et cohomologique, *C. R. Acad. Paris*, **247** (1958), 6, 620 – 623.

[6E] Eckmann, B. and Hilton, P. J., Décomposition homologique d'un polyhèdre simplement connexe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 14, 2054 – 2056.

[7] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966 (中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987).

[8] Whitehead, G. W., Recent advances in homotopy theory, Amer. Math. Soc. 1970.

Г. С. Чогошвили 撰 段海豹 译 沈信耀 校

Saccheri 四角形 [Saccheri quadrangle; Саккери четырехугольник]

一个四角形 $ABCD$，A 与 B 是直角且有相等的边 AD 与 BC. G. Saccheri (1733) 企图通过讨论它来证明关于平行线的 Euclid 第五公设. 在 C 与 D 处的角有三个可能性：它们是直角，它们是钝角或它们是锐角，第一个等价于 Euclid 第五公设（fifth postulate），第二个导致球面椭圆几何学. 关于第三个可能性，Saccheri 做出了它也与 Euclid 其他公理与公设相矛盾的错误的推论.

参考文献

[1] Каган, В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.-Л., 1949.

[2] Погорелов, А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968 (中译本：A. B. 波格列洛夫，几何基础，高等教育出版社，1988).

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bonola, R., Non-Euclidean geometry, Dover, reprint, 1955, p. 23.

[A2] Coxeter, H. S. M., Non-Euclidean geometry, Univ. Toronto Press, 1965, p. 5, 190.

[A3] Efimov, N. V., Higher geometry, Mir, 1980 (译自俄文，中译本：H. B. 叶菲莫夫，高等几何学，高

等教育出版社，1954）.

[A4] Borsuk, K. and Szmielew, W., Foundation of geometry, North-Holland, 1960.

林向岩 译 陆珊年 校

鞍点 [saddle; седло]，自治系统的平面常微分方程

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbf{R}^2,\ f: G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \qquad (*)$$

的自治系统（autonomous system）在奇点（**平衡位置**（equilibrium position））x_0 的邻域中的一种轨道排列类型，$f \in C(G)$，其中 G 是唯一性区域．这种类型刻画如下．存在 x_0 的邻域 U，使得对系统在 $U \setminus \{x_0\}$ 中起始的所有的轨道，它们的正半轨道和负半轨道都是分叉的（随着时间消逝，它们离开任何紧集 $V \subset U$）．有四条轨道是例外，称为鞍点的分界线（separatrices of the saddle）．其中两条轨道的负半轨道发散而正半轨道收敛于 x_0，另外两条的情形正好相反．前两条分界线称为稳定的（stable），后两条称为不稳定的（unstable）．x_0 的稳定分界线构成一条经过 x_0 的光滑曲线——鞍点的稳定流形（stable manifold of the saddle）．不稳定分界线加上 x_0 构成光滑的鞍点的不稳定流形（unstable manifold of the saddle）．点 x_0 称为鞍点（saddle）．

在 Ляпунов 意义下（见 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability）），鞍点 x_0 是不稳定的．它的 Poincaré 指数是 -1（见**奇点**（singular point））．对于具有非零矩阵 $A = f'(x_0)$ 的 C^1 类（$f \in C^1(G)$）系统（*），如果 A 的本征值 λ_1, λ_2 满足条件 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$，则平稳点 x_0 是鞍点（图 1 是一个简单鞍点，其中 $x_0 = 0$），但当 $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$ 或 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时，x_0 也可能是鞍点．

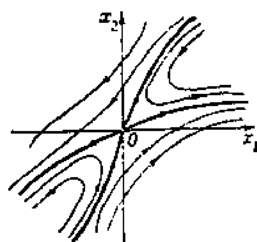


图 1

在上述的所有情形下，鞍点的分界线在 x_0 都相切于 A 的本征向量所定的方向．

若系统（*）是线性的（$f(x) = A(x - x_0)$，A 是本征值为 λ_1 和 λ_2 的常数矩阵），则点 x_0 为鞍点的充分条件是 $\lambda_1 \lambda_2 < 0$．这时，鞍点 x_0 的分界线是直线，而所有其他（不同于 x_0 的）轨道都是形为 $x_2 = c|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$（$c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$）的双曲线的仿射象（图 2）．

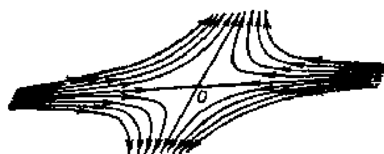


图 2

在弧立平稳点 x_0 的邻域 U 中，系统（*）的轨道的任一排列也使用术语“鞍点”，这时在 $U \setminus \{0\}$ 中仅有有限的 m（$m \geqslant 2$）条轨道逼近 x_0，且由 x_0 得到的每一条这种轨道都按确定的方向到达该点（m 分界线鞍点（m-separatrix saddle））．n（$\geqslant 3$）阶常微分方程自治系统的某些类型平稳点也称为鞍点．参考文献见微分方程的**奇点**（singular point）．

А. Ф. Андреев 撰

【补注】 亦见**双曲点**（hyperbolic point）和**双曲集**（hyperbolic set）及其参考文献． 白苏华 胡师度 译

无穷远鞍点 [saddle at infinity; седло в бесконечности]，奇异鞍点（singular saddle point）

动力系统（dynamical system）的一种轨道排列类型．定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的动力系统 f^t（或 $f(\cdot, t)$，见 [1]）称为具有一无穷远鞍点，如果存在点 x_k 和数 $\tau_k < 0$，$\theta_k > 0$（$k \in \mathbf{N}$），使得序列

$$\{f^{\tau_k} x_k\}_{k \in \mathbf{N}},\ \{f^{\theta_k} x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$$

收敛，且当 $k \to \infty$ 时 $|x_k| \to \infty$．此定义属于 В. В. Немыцкий，并由 M. V. Bebutov 推广到定义在任意度量空间上的动力系统；这时，条件“当 $k \to \infty$ 时 $|x_k| \to \infty$”换成“序列 $\{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ 不包含任一收敛的子序列”．

没有无穷远鞍点是动力系统整体可直化（见**完全不稳定性**（complete instability））的必要条件．对于定义在度量空间上的完全不稳定动力系统，没有无穷远鞍点的充分必要条件是：动力系统的商空间为 Hausdorff 空间．

参考文献

[1] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М., 1949（中译本：В. В. 涅梅茨基，В. В. 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，科学出版社，1956）.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 “动力系统的商空间”通常称为轨道空间（orbit space）． 白苏华 胡师度 译

鞍结点 [saddle-node; седло-узел]

常微分方程的二维自治系统（autonomous system）

$$\dot{x}=f(x),\quad x\in\mathbf{R}^2,\quad f:G\to\mathbf{R}^2 \qquad (*)$$

的轨道在奇点 x_0 的邻域中的一种分布的类型. 这里 $f\in C(G)$ 而 G 是唯一性区域. 这种类型可以刻画如下. 设 x_0 的某一个邻域 U 被分割为 m 个 ($3\leqslant m<+\infty$) 曲边扇形 (见**常微分方程理论中的扇形** (sector in the theory of ordinary differential equations)), 这些扇形是由趋向 x_0 的半轨 (即鞍结点的分界线 (separatrices of the saddle-node)) 分隔而成的. 设这些扇形中有 h 个是鞍点扇形 ($2\leqslant h<m$), 其余是开结点扇形, 又设每个趋向 x_0 的半轨, 再补上 x_0 点本身, 都在 x_0 以确定方向相切. 这时 x_0 就称为鞍结点.

鞍结点在 Ляпунов 意义下是不稳定的(见 **Ляпунов 稳定性** (Lyapunov stability)). 其 Poincaré 指标是 $1-(h/2)$ (见**奇点** (singular point)). 若 $f\in C^1(G)$ 而矩阵 $A=f'(x_0)\neq 0$, 则奇点 x_0 只当 A 的本征值 λ_1,λ_2 满足以下两条件之一时才可能成为鞍结点:

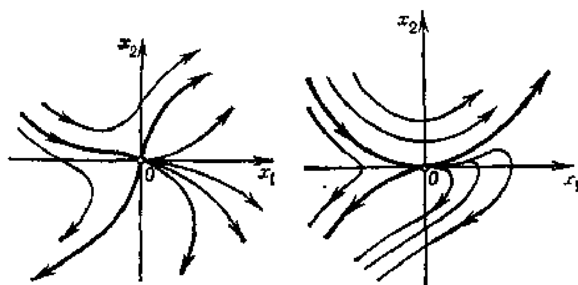


图 1 图 2

a) $\lambda_1=0\neq\lambda_2$;

b) $\lambda_1=\lambda_2=0$.

在其中任一个情况下, x_0 都还可能成为 (*) 的**鞍点** (saddle) 或**结点** (node), 而在情况 b) 下可能是其他类型的点. 若它是鞍结点, 则 $m=3,h=2$, 而且这个系统的所有趋近 x_0 的半轨都在此点切于 A 的本征向量的方向 (见图 1, 图 2, 其中黑线表示在鞍结点 $x_0=0$ 上的分界线, 箭头指的方向是系统的轨道当 t 增加时的运动方向; 也可能是相反方向).

参考文献

[1] Баутин, Н. Н., Леонтович, Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976.

А. Ф. Андреев 撰

【补注】 流在鞍结点附近没有**结构稳定性** (structural stability). 若 x_0 是 (*) 的鞍结点, 则 x_0 在 $\mathbf{R}^2$ 中有一邻域 N, 使得对任意 $\varepsilon>0$, 都有一个系统 $\dot{x}=y(x)$ 在 N 中没有平衡位置, 但 $|f-g|<\varepsilon$, $|(\partial f/\partial x_j)-(\partial g/\partial x_j)|<\varepsilon$ ($j=1,2$). 然而鞍结点就分岐 (bifurcation) 而言是牢固的, 不会被扰动而散开 ([A1]) (亦见**粗系统** (rough system)).

参考文献

[A1] Guckenheimer, J. and Holmes, P., Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields Springer, 1983.

[A2] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973).

齐民友 译

鞍点 [**saddle point**; **седловая точка**], 光滑曲面的

光滑曲面上的一种点, 曲面在该点近旁位于其切平面的两侧. 如果一个二阶连续可微曲面上的一点是鞍点, 那么曲面在该点的 **Gauss 曲率** (Gaussian curvature) 是非正的. 鞍点是**双曲点** (hyperbolic point) 的推广.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 其上所有的点均为鞍点的曲面是**鞍形曲面** (saddle surface).

可微函数 $f: M\to R$ 的鞍点指微分流形 M 上的这种点 x: 它是临界点, 即 $df(x)=0$, 非退化的, 即 Hesse 矩阵 $(\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j)$ 是非奇异的, 且 x 不是局部极大值点或局部极小值点, 即 Hesse 矩阵是不定的. 于是, $f: M\to R$ 的一个非退化的临界点是鞍点, 如果它的指标 (index) (该点处的 Hesse 矩阵的负本征值的个数) $\neq 0$, $\dim M$. (指标与局部坐标的选取无关.) 两个变量的实值函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 在鞍点近旁的图看上去有点像一个马鞍. 亦见**对策论中的鞍点** (saddle point in game theory).

$\mathbf{R}^2$ 上微分方程的鞍 (saddle) 也常称为该微分方程的鞍点. 更一般地, 对 $\mathbf{R}^n$ 上 (或微分流形上) 给定的一个动力系统 $\dot{x}=f(x)$, 可考察在平衡点 x_0 处 $Df(x_0)$ 的本征值. 如果正的本征值和负的本征值都存在, 那么 x_0 称为鞍点 (saddle 或 saddle point), 或者有时称为 Poincaré 鞍点 (Poincaré saddle point).

参考文献

[A1] Hirsch, M. W. and Smale, S., Differential equations, dynamical systems, and linear algebra, Acad. Press, 1974, p. 190ff.

[A2] Chillingworth, D. R. J., Differential topology with a view to applications, Pitman, 1976, p. 150ff.

潘养廉 译

对策论中的鞍点 [**saddle point in game theory**; **седловая точка (в теории игр)**]

定义在两个集合 X 和 Y 的 Descartes 积 $X\times Y$

上的函数 F 的满足下列条件的点 $(x^*,y^*)\in X\times Y$:

$$F(x^*,y^*)=\max_{x\in X}F(x,y^*)=\min_{y\in Y}F(x^*,y). \quad (*)$$

对于函数 F，鞍点的出现等价于对于**二人零和对策**(two-person zero-sum game) $\Gamma=(X,Y,F)$ 的局中人的最优策略的存在(见**策略(对策论中的)**(strategy (in game theory)))。 В. Л. Крепс 撰

【补注】 满足条件 $(*)$ 的点 $(x^*,y^*)\in X\times Y$ 一般称为 F 的鞍点．如果 F 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可微函数，且 $(\partial F/\partial x_i)(x^*)=0$, $i=1,\cdots,n$, Hesse 矩阵(Hessian matrix) $(\partial^2F/\partial x_i\partial x_j)(x^*)$ 是非异的，且既非正定，也非负定，那么在 x^* 附近，x^* 是一个局部鞍点．$\mathbf{R}^n$ 在 x^* 附近的对应的分裂是由 Hesse 矩阵在 x^* 上的正负本征子空间来确定．

事实上，由 **Morse 引理**(Morse lemma)，在 x^* 附近，有坐标 $y_1,\cdots,y_n$，使得 F 有下列形式:

$$F(y)=F(x^*)-y_1^2-\cdots-y_r^2+y_{r+1}^2+\cdots+y_n^2,$$

其中 r 是由对称矩阵 $(\partial^2F/\partial x_i\partial x_j)(x^*)$ 确定的二次型的指数(index). (二次型的指数(index of a quadratic form)是它在其上负定的最大子空间；它也称为惯性负指数(negative index of inertia)(也见**二次型**(quadratic form)和 **Morse 指数**(Morse index).)

设 X,Y 是零和对策中的两个局中人的策略空间，$F:X\times Y\to\mathbf{R}$ 是支付函数(pay-off function)的(第一分量)(见**对策论**(games, theory of))．那么鞍点也称为均衡点．这个概念可推广到 n 人非合作对策，见[A2]，第 2 章；**对策论**；**Nash 定理(对策论中的)**(Nash theorem (in game theory))；**非合作对策**(non-cooperative game).

参考文献

[A1] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976, Chapt. 6.

[A2] Szép, J. and Forgo, F., Introduction to the theory of games, Reidel, 1985, 171; 199.

史树中 译

鞍点法[saddle point method; перевала метод]

计算形如

$$F(\lambda)=\int_\gamma f(z)e^{\lambda S(z)}dz \quad (*)$$

的积分的渐近展开的一种方法，其中 $\lambda>0$, $\lambda\to+\infty$ 是一个大参数，γ 是复 z 平面中的一条围道，函数 $f(z)$ 和 $S(z)$ 在包含 γ 的区域 D 内全纯．$S'(z)$ 的零点称作是 $S(z)$ 的鞍点(saddle point)．鞍点是曲面 $U=\operatorname{Re}s(x+iy)$ 上的一个山口形处的点．鞍点方法的实质如下．将围道 γ 进行变形使之成为一条位于 D 内且端点不变的围道 $\tilde\gamma$ 并使 $\max_{z\in\tilde\gamma}\operatorname{Re}S(z)$ 仅在鞍点或 $\tilde\gamma$(**最速下降围道**(contour of steepest descent))的端点处达到．积分 $(*)$ 沿最速下降路径的渐近性可借助于 **Laplace 法**(Laplace method)进行计算，它等于来自鞍点的基值之和．点 z_0 的基值 $V_{z_0}(\lambda)$ 是一个 $(*)$ 型的积分，积分路径为 $\tilde\gamma$ 上包含点 z_0 的一个小弧段．如果 z_0 是 $\tilde\gamma$ 的一个内点且 z_0 是满足 $S''(z_0)\neq 0$ 的鞍点，则有

$$V_{z_0}(\lambda)=\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(z_0)}}\,e^{\lambda S(z_0)}[f(z_0)+O(\lambda^{-1})]$$

最速下降围道有一个极小极大性质；在该围道上，下述极小极大值可以达到

$$\min_\gamma\max_{z\in\gamma'}\operatorname{Re}s(z),$$

其中，极小值取遍所有位于 D 内与 γ 有相同端点的围道 γ'．使用该方法的主要困难是选取鞍点，即选择对应于 γ 的围道 $\tilde\gamma$.

鞍点法属于 P. Debye([1])，尽管该方法的思想早些时候曾被 B. Riemann([2])提到过．关于鞍点及围道端点的基值的计算，见[3]－[9].

鞍点方法实质上是计算形如 $(*)$ 式积分的渐近展开的唯一方法．该方法可用来推出 Laplace 变换，Fourier 变换和 Mellin 变换的渐近展开式，也可用来推导多项式的指数型变换以及许多特殊函数的渐近展式．

设 $z\in\mathbf{C}^n$, γ 是具有 n 维 C^∞ 类边界的一个有界流形，函数 $f(z)$ 和 $S(z)$ 在包含 γ 的某个确定区域 D 内全纯并令 $dz=dz_1\cdots dz_n$．设 $\max_{z\in\gamma}\operatorname{Re}S(z)$ 仅在点 z^0 处达到，z^0 是 γ 的一个内点且为 $S(z)$ 的一个非奇异鞍点，即 $\Delta_S(z^0)\equiv\det S''(z^0)\neq 0$，则 z^0 的基值为

$$F(\lambda)=$$

$$=\left[\frac{2\pi}{\lambda}\right]^{n/2}(-\Delta_S(z^0))^{-1/2}e^{\lambda S(z^0)}[f(z^0)+O(\lambda^{-1})].$$

参考文献

[1] Debye, P., Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grosse werte des Arguments und unbeschränkt veranderliche werte des Index, *Math. Ann.*, 67 (1909), 535－558.

[2] Riemann, B., Mathematische Werke, Dover, reprint, 1953.

[3] Erdélyi, A., Asymptotic expansions, Dover, reprint, 1956.

[4] Bruin, N. G. de, Asymptotic methods in analysis, Dover, reprint, 1981.

[5] Евграфов, М. А., Асимптотические оценки и целые функции, 2 изд., М., 1962.

[6] Copson, E. T., Asymptotic expansions, Cambridge Univ. Press, 1965.

[7] Olver, F. W. J., Asymptotics and special functions, Acad. Press, 1974.
[8] Риекстыньш, Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1－2, Рига, 1974－1977.
[9] Федорюк, М. В., Метод перевала, М., 1977.
М. В. Федорюк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wong, R., Asymptotic approximations of integrals, Acad. Press, 1989.
王仁宏 檀结庆 译

鞍形曲面 [saddle surface; седловая поверхность]

负曲率的曲面(negative curvature, surface of) 的一种推广. 设 M 是 3 维 Euclid 空间 E^3 中一个曲面, 由 2 维流形 W 到 E^3 中的浸入 $f: W \to E^3$ 定义. 如果平面 α 截 M 使得集合 $M \backslash \alpha$ 在 W 中的逆象的连通分支中有一个具有紧闭包, 那么就称 α 从 M 上割下一个痂. M 上对应于这个连通分支的部分称为一个痂(crust)(见图).



曲面 M 称为鞍形曲面, 如果任何平面都不可能从 M 上割下一个痂. 鞍形曲面的例子有单叶双曲面、双曲抛物面和直纹曲面. 一个二阶连续可微曲面是鞍形曲面的充要条件为曲面的 **Gauss 曲率**(Gaussian curvature) 处处非正. 所有的点均为**鞍点**(saddle point) 的曲面是鞍形曲面.

一条可求长曲线界限的鞍形曲面、关于它的由空间度量诱导的内蕴度量, 是具有非正曲率的 2 维流形. 负曲率曲面的许多性质可以推广到鞍形曲面类, 但是这些曲面似乎还不构成像凸曲面那样自然的曲面类.

参考文献

[1] Бакельман, И. Я., Вернер, А. Л., Кантор, Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию, 《в целом》, М., 1973.
[2] Шефель, С. З., Исследования по геометрии седловых поверхностей, Новосиб., 1963.
Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975, § 455.
潘养廉 译

样本 [sample; выборка], 数理统计中的

见**抽样法**(sample method); **总体**(general aggregate).

样本均值 [sample average; выборочное среднее]

对**经验分布**(empirical distribution) 所取的**数学期望**(mathematical expectation).

样本区组 [sample block; выборочный блок], 样本区间(sample interval).

由变列(variational series) 的相邻两项形成的区间.

【补注】"变列"的概念在西方文献中几乎从来不出现, 代之以较为熟知的是顺序统计量系列(series of order statistics). 见**顺序统计量**(order statistic).

周概容 译

样本特征 [sample characteristic; выборочная характеристика]

经验分布(empirical distribution) 的泛函. 样本特征作为理论分布的类似泛函的统计估计量使用.

周概容 译

样本束 [sample cluster; выборочная гроздь], 样本(sample).

样本空间(sampling space) 中, 描绘在一系列试验中观测到的一切具体的、不可分结局的**样本点**(sample point) 的集合.

周概容 译

样本函数 [sample function; выборочная функция], 样本路径(sample path)

对应于随机过程 $X_t \in E (t \in T)$ 的每个观测的自变元 t 的函数 $X_t = X_t(\omega)$, 其中 $\{\omega\} = \Omega$ 是基本事件的集合. 等价于"样本函数"和"样本路径"的术语, "实现(realization)"和"轨道(trajectory)"也是经常使用的. 一个随机过程 X_t 是由其样本函数空间中的概率测度表征的. 在研究样本函数 X_t 的局部性质时(其中 $E = \mathbf{R}^1$, 而 $T = \mathbf{R}^m$ 是 m 维 Euclid 空间, $m = 1, 2, \cdots$), 总假定 X_t 为一可分随机过程, 或者说, 可以找到一个其样本函数有给定局部性质的等价随机过程. **Gauss 过程**(Gaussian process) 样本函数的局部性质是被最广泛地研究过的.

对于 Gauss 随机过程(场) X_t, 如下事实成立: 几乎所有的样本函数 X_t 或者为连续, 或者在某个区间上无界. 对于 $t, s \in T$, 由 $d(t, s) = [\mathrm{E}|X_t - X_s|^2]^{1/2}$ 定义一个"距离", $B(t, \delta) = \{s: d(s, t) \leq \delta\}$ 为一"球", 而 $N(\delta)$ 为覆盖 $T \subset \mathbf{R}^m$ 的这种"球"的最少个数, 进而设 $\sup_{s, t \in T} d(s, t) < \infty$.

一个平稳 Gauss 过程的样本函数为连续的必要与充分条件是

$$\exists q>1: \sum q^{-n}\sqrt{\ln N(q^{-n})}<\infty.$$

如果

$$R(t)=\mathsf{E}X_sX_{t+s}=\int_0^\infty e^{it\lambda}dF(\lambda),\ \mathsf{E}X_t=0,$$

在点0+ 的某邻域内是凹的，那么为了样本函数 X_t 为连续，必要与充分条件是 $\sum S_n^{1/2}<\infty$，其中 $S_n=F(2^{n+1})-F(2^n)$. 如果 R 在 0+ 的邻域内是凹的，且对于 $|t-s|<\delta$ 有

$$\mathsf{E}|X_t-X_s|^2\geqslant \frac{C}{|\ln|t-s||},$$

则 Gauss 随机过程 X_t 的几乎所有样本函数是无界的. 如果

$$\mathsf{E}|X_t-X_s|^2\leqslant \frac{C}{|\ln|t-s||^{1+\varepsilon}},\ \varepsilon>0,$$

则此 Gauss 随机过程(场) X_t 的几乎所有样本函数是连续的. 为了一个 Gauss 随机过程的样本函数为连续，必要与充分条件是

$$\int_0^\infty \omega_R(e^{-x^2})dx<\infty,$$

其中 $R(t,s)=\mathsf{E}X_tX_s$,

$$\omega_R(\delta)=\sup[R(t+h_1,s+h_2)-R(t,s)]^{1/2}.$$

这里，上确界取遍 $|h_i|<\delta$, $|t|\leqslant C$, $|s|\leqslant C$. 样本函数 $X_t(t\in\mathbf{R}^n)$ 称为属于类 $H(C,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，如果对于所有充分小的 h_i,

$$|X_{t+h}-X_t|\leqslant C\sum_{i=1}^n|h_i|^{\alpha_i},$$

$$C>0,\ 0<\alpha_i\leqslant 1,\ h=(h_1,\cdots,h_n)$$

成立. 如果 ξ_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位立方体 V_n^0 上的 Gauss 随机场，使得对充分小的 h 及 $t\in V_n^0$,

$$\mathsf{E}|X_{t+h}-X_t|^2\leqslant C_1\frac{|h|^\gamma}{|\ln|h||},$$

$$C_1>0,\ 0<\gamma\leqslant 2,$$

那么对于任意 $C>0$ 及 $\beta_i\leqslant\gamma/2$，以概率 1，对 $t\in V_n^0$,

$$X_t\in H(C,\beta_1,\cdots,\beta_n).$$

一致地成立.

一个非减连续函数 $\varphi(x)$ $(x\in\mathbf{R}^1)$ 称为**上函数** (upper function)，如果对几乎所有的 ω，存在 $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$，使得

$$|X_t-X_s|\leqslant(\mathsf{E}|X_t-X_s|^2)^{1/2}\varphi\left[\frac{1}{|t-s|}\right]$$

对于 $|t-s|\leqslant\varepsilon$, t, $s\in\mathbf{R}^n$ 成立，其中 $|t|=(\sum_{i=1}^n t_i^2)^{1/2}$. 如果 X_t 是一 Gauss 随机场具有

$$\mathsf{E}X_t=0,\ \mathsf{E}X_tX_s=\frac{1}{2}(|t|^\alpha+|s|^\alpha-|t-s|^\alpha),$$

$$0<\alpha\leqslant 1,$$

那么 $\varphi(x)$ 为一上函数，当且仅当

$$\int_c^\infty t^{n-1}K[\varphi(t)]dt<\infty,$$

其中

$$K[x]=x^{(4n/\alpha)-1}e^{-x^2/2}.$$

为使一 Gauss 随机过程的几乎所有样本函数在一点 t_0 的邻域内解析，必要与充分条件是其协方差函数 $R(t,s)$ 在一邻域 $|t-t_0|<\delta$, $|s-t_0|<\delta$, $\delta>0$ 内按 t 与 s 解析.

参考文献

[1] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.

[2] Cramér, H., Leadbetter, M. R., Stationary and related stochastic processes, Wiley, 1967.

[3] Belyaev, Yu. K., Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes, in Proc. 4-th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Vol. 2, Univ. California Press, 1961, 23 – 33.

[4] Островский, Е. И., 《Докл. АН СССР》, 195 (1970), 1, 40 – 42.

[5] Nisio, M., On the continuity of stationary Gaussian Processes, *Nagoya Math. J.*, 34 (1969), 89 – 104

[6] Dudley, R. M., Gaussian processes on several parameters, *Ann. of Math. Statist.*, 36 (1965), 3, 771 – 788.

[7] Fernique, X., Continuité des processus Gaussiens, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 258 (1964), 6058 – 6060.

[8] Ядренко, М. И., 《Вiсник Київського ун-ту. Сер. матем. та механ.》, 9 (1967), 103 – 112.

[9] Kawada, T., On the upper and lower class for Gaussian processes with several parameters, *Nagoya Math. J.*, 35 (1969), 109 – 132.

[10] Беляев, Ю. К., 《Теория вероят. и ее примен.》, 4 (1959), 4, 437 – 444.

[11] Slutskiĭ, E. E., Qualche proposizione relativa alla teoria delle funzioni aluatorie, *Giorn. Inst. Ital. Attuari*, 8 (1937), 2, 183 – 199.

[12] Fernique, X. M., Regularité de trajectoires des fonctions aleatoires gaussiennes, in J. P. Conze, J. Cani, X. M. Fernique (eds.): Ecole d'Ete de Probabilité de Saint-Flour IV-1974, Springer, 1975, 1 – 96.

Ю. К. Беляев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Alder, R. J., The geometry of random fields, Wiley, 1981.

潘一民 译

样本中位数 [**sample median**; **выборочная медиана**]

经验分布 (empirical distribution) 的中位数 (见**中位数 (统计学中的)** (median (in statistics))).

抽样法 [**sample method**; **выборочный метод**]

研究任何对象总体的一般性质的统计方法. 抽样法是通过研究总体中仅仅一部分对象 (样本 (sample)), 来研究总体的一般性质的. 抽样法的数学理论基于数理统计的两个重要分支. 自有限总体的抽样理论和自无限总体的抽样理论. 这两种抽样理论的根本区别在于: 自有限总体的抽样理论, 通常用于具有确定属性的非随机对象的研究 (例如, 一批给定产品中的不合格品数就不是一个随机变量, 它是一个需要由样本数据来估计的未知常量); 自无限总体的抽样理论, 通常用于研究随机对象的性质 (例如, 用于研究连续型分布随机试验误差的性质, 其中每一试验误差, 理论上可看作是具有无限多种可能结果的集合中一种结果的实现).

自有限总体的抽样及其理论, 是**统计质量控制** (statistical quality control) 中方法的基础, 经常用于社会学的研究. 根据概率论, 样本可以正确反映整个总体的性质, 如果抽样是随机的, 即容量 N 的总体中, 给定容量 n 的一切可能样本被抽到的概率是相同的. (此时, 样本总数为 $N!/[n!(N-n)!]$).

实际应用中, 最常用的是非还原抽样, 这时每个已被抽出的对象在抽取以下各对象之前不再放回总体中 (比如, 抽取奖券、统计质量控制和经常性人口统计调查). 带放回抽样通常仅用于理论研究 (比如, 记录 **Brown 运动** (Browian motion) 中, 在给定一段时间里撞击容器壁的微粒的个数). 当 $n << N$ 时, 两种抽样方式的结果实际上是等价的.

用抽样法研究的总体特性既可以从质量上, 也可以从数量上. 前者, 抽样调查的目的在于估计总体中具有某种属性的对象的总数 M (例如, 在统计控制中, 感兴趣的常是一批 N 件产品中不合格品的件数 M). M 可由比值 mN/n 估计, 其中 m 是样本容量为 n 的样本中具有这种属性的对象的总数. 在研究总体数量特征时, 其目的在于确定总体的均值 $\overline{x}=(x_1+\cdots+x_N)/N$. 总体均值 $\overline{x}$ 可用**样本均值** (sample average)

$$\overline{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$

估计, 其中 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体中的标志值 $x_1,\cdots,x_N$ 中进人样本者. 从数学的角度, 前者可以看作是后者的一个特例, 即 M 个变量 x_i 等于 1, 其余 $N-M$ 个变量等于 0 的情形; 这时 $\overline{x}=M/N$, 而 $\overline{X}=m/n$.

在抽样法的数学理论中, 估计均值是关键, 因为均值是定量描述总体特征变异性的基础. 一般地, 用方差

$$\sigma^2=\frac{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2}{N}$$

描述总体特征的变异性, 它是 x_i 对总体均值 $\overline{x}$ 之离差平方的平均值. 如果研究的是总体的质量特征, 则

$$\sigma^2=\frac{M(N-M)}{N^2}.$$

估计量 m/n 和 $\overline{X}$ 的精度分别由它们各自的方差

$$\sigma^2_{m/n}=\mathrm{E}\left[\frac{m}{n}-\frac{M}{N}\right]^2 \text{ 和 } \sigma^2_{\overline{X}}=\mathrm{E}(\overline{X}-\overline{x})^2$$

确定. 对于有限总体, 设总体方差为 σ^2, 则 m/n 和 $\overline{X}$ 的方差在还原抽样方式下为 σ^2/n; 在非还原抽样方式下为 $\sigma^2(N-n)/[n(N-1)]$. 因为在许多实际感兴趣的问题中, 当 $n\geqslant 30$ 时, 随机变量 m/n 和 $\overline{X}$ 近似服从**正态分布** (normal distribution), 故 m/n 对 M/N 及 $\overline{X}$ 对 $\overline{x}$ 的绝对偏差分别大于 $2\sigma^2_{m/n}$ 和 $2\sigma^2_{\overline{X}}$ 的可能性平均大约为二十分之一.

有关总体数量特征分布更加完全的信息, 可从该特征在样本中的**经验分布** (empirical distribution) 得到.

自无限总体的抽样. 数理统计中, 通常把给定同类 (多半是独立的) 观测结果描述为一个样本 (sample), 甚至在这些结果并不符合自有限总体的还原或非还原样本的概念时也这样描述. 例如, 角的测量结果可视为来自无限总体的一个样本, 其中测量结果含独立且服从连续分布的随机误差. 假设这样的观测原则上可以进行任意多次, 所得观测结果构成了一个来自无限可能结果集合的所谓样本, 这样的集合称为**总体** (general aggregate). 总体的概念并非逻辑上无异议和必不可少的. 在解决实际问题时, 并不需要无限总体本身, 只需要某些与其相对应的特征. 从概率论的角度上讲, 样本元素是服从某一分布的随机变量, 而这些特征是该概率分布的函数特征或数字特征. 基于这样的理解, 能够把**统计估计** (statistical estimation) 的一般理论用于抽样估计. 因此, 例如在概率论中处理观测结果时, 用含未知参数的概率分布的概念替代无限总体的概念; 把观测结果看作是服从该分布的随机变量的实现值. 处理的目的是, 根据观测结果计算未知分布参数 (在一定意义下) 的最优统计估计量.

上面讨论的是自某一总体的抽样. 然而实际中, 抽样法常是对若干同质总体进行的 (例如, 估计若干批成品的不合格品率). 这时, 研究对象不再是一个单一的数 M, 而是若干个数 M_1, M_2, $\cdots$. 例如, 设每批成品均含 N 件产品, M_1, M_2, $\cdots$ 是各批成品

中不合格品数，m_1，m_2是样本容量均为 n 的各个样本中的不合格品数．根据所谓无不合格品验收原则：如果 $m_r=0$，那么第 r 批产品通过质检，送交用户；否则，不予通过．假设产品的检验是破坏性的，那么当 $m_r>0$ 时，用户得到容量 $R_r=0$ 件的一批产品；当 $m_r=0$ 时，用户得到容量 $R_r=N-n$ 件的一批产品，其中 $D_r=M_r$ 件是不合格品，并且 $R_1, R_2, \cdots$ 已知，从而 $R_1+R_2+\cdots$ 也是已知的，但 $D_1+D_2+\cdots$ 的值未知．比值 $(D_1+D_2+\cdots)/(R_1+R_2+\cdots)$ 称为不合格品漏检率（fraction of passed defectives），其数学期望 q 称为**不合格品平均漏检率**（average fraction of passed defectives）．数理统计就是根据用抽样法所得结果 $R_1, R_2, \cdots$ 来估计 q．如果 $M_1, M_2, \cdots$ 是独立同分布随机变量，并且有已知的分布律 $\mathrm{P}\{M_r=r\}=p_r$，那么，根据 **Bayes 公式**（Bayes formula），接收批中漏检不合格品的平均件数可以表示为：

$$\widetilde{D}=\mathrm{E}\{M|m=0\}=\frac{\left[\sum_{r=1}^{N-n} r\,\frac{(C_{n-r}^{n})}{(C_N^n)}\;p_r\right]}{\mathrm{P}\{m=0\}}$$

且

$$\widetilde{D}\leqslant\frac{(N-n)\mathrm{P}\{m=1\}}{n\mathrm{P}\{m=0\}},$$

其中

$$\mathrm{P}\{m=k\}=\sum_{r=0}^{N-n}\frac{(C_r^k)(C_{N-r}^n)}{(C_N^n)}p_r,\ k=0,1,\cdots,n.$$

因此，接收批中不合格品漏检率 q 的估计量

$$\widetilde{q}=\frac{\widetilde{D}}{N-n}$$

满足不等式

$$\widetilde{q}\leqslant\frac{\mathrm{P}\{m=1\}}{n\mathrm{P}\{m=0\}}\approx\frac{s_1}{ns_0},$$

其中 s_0 是被接收的批数，s_1 是因发现一件不合格品而被拒收的批数．

参考文献

[1] Дунин-Барковский, И. В., Смирнов, Н. В., Теория вероятностей и математическая статистики в технике (общая часть), М, 1955, гл. 5.

[2] Беляев, Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975.

[3] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, Distribution theory, Griffin, 1969.

Л. Н. Большев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Juran, J. M. (ed.), Quality control handbook, McGraw-Hill, 1962.

周概容、王健 译

样本矩 [sample moment; выборочный момент]

经验分布（empirical distribution）的矩（moment）．

样本点 [sample point; выборочная точка]

样本空间（sampling space）中的点，每个点描绘单个试验中某种具体的不可分的结局．　周概容 译

样本分位数 [sample quantile; выборочная квантиль]

经验分布（empirical distribution）函数的**分位数**（quantile）．

样本方差 [sample variance 或 sample dispersion; выборочная рассеивание]

样本关于给定点 x 在直线上散布的数字特征之一，其中的点 x 称为方差中心（centre of dispersion）．样本方差数值上等于构成**样本**的随机变量对离散中心 x 之方差的平方和．设 $X_1,\cdots,X_n$ 是同分布实随机变量，点 x 是选定的方差中心（$x\in\mathbf{R}^1$），那么，量

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-x)^2$$

称为关于点 x 的**样本方差**（sample variance）．由于

$$S_n(x)=S_n(\overline{X})+n(\overline{X}-x)^2\geqslant S_n(\overline{X})\equiv S_n,$$

其中 $\overline{X}=(X_1+\cdots+X_n)/n$，可见当 $x=\overline{X}$ 时关于 x 的样本方差取最小值．较小的 S_n 说明样本元素关于 $\overline{X}$ 集中；相反，较大的 S_n 说明样本元素分散．样本方差的概念，可以自然地推广到多维样本的样本协方差矩阵．

参考文献

[1] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

М. С. Никулин 撰

【译注】 俄文文献中的"рссеивание"或"отклонение"中文有时译为"散布"或"离差"，英文为 dispersion 或 deviation．俄文中 дисперсия 中文习惯译为"方差"，英文则用为 variance；dispersion 英文中已很少见．中文文献中，样本方差指 $S(\overline{X})/n$ 或 $S(\overline{X})/(n-1)$．

周概容 译

样本空间 [sampling space 或 sample space; выборочное пространство]

与某一试验相联系的所有**基本事件**（elementary events）的集合，并且试验的每种不可分结局，由样本空间中一个且仅由一个**样本点**（sample point）表示．样本空间是一抽象集合，在其子集的 σ 代数上定义概率测度（见**概率空间**（probability space））．俄语文献中更常使用术语**基本事件空间**（space of elementary events）．　А. В. Прохоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1, Wiley, 1957, Chapt. 1 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用(上册), 第一章, 科学出版社, 1964). 周概容 译

Sard 定理 [Sard theorem; Сарда теорема]

令 $f: M \to N$ 是 m 维流形 M 和 n 维流形 N 间的 C^r 映射; 若 $r > \max(0, m-n)$, 则 f 的临界值(critical value)的集合是一零测度集. 于是正则值成一全测度集而且处处稠密. 这定理是 A. Sard 在 [1] 中证明的.

参考文献

[1] Sard, A., The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), 883 – 890.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在俄文文献中, "全测度集"称为"大集"(massive set). 亦见可微映射的奇点(singularities of differentiable mappings). 齐民友 译

标量 [scalar; скаляр]

一个量(quantity), 其所有的值都能由(实)数表示. 更一般地说, 标量是某个域(field)的元素.

【补注】 一般格局是一个(基)域 F(更一般地是一个环 R)与其上的一个向量空间(函数的、向量的、矩阵的、张量的空间等) V(更一般地是一个模 M). F(或 R)的元素称为标量. 如果 V(或 M)是具有单位元 e 的代数, 则元素 $\lambda e (\lambda \in F$ (或 $\lambda \in R$)) 也称为标量. 例如, 有时说 $n \times n$ 矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda, \cdots, \lambda)$ 为标量矩阵(scalar matrix). 元素 $v \in V$ (对应地, $m \in M$) 的标量倍数(scalar multiple)是元素 λv, $\lambda \in F$ (对应地, λm, $\lambda \in R$).

流形 M 上的标量场(scalar field, 或 field of scalars)是 M 上的一个函数, 即阶为 $(0, 0)$ 的张量场(见张量丛(tensor bundle)). 它们是 M 上函数环上的 M 上张量场的代数中的标量.

复 Banach 空间上的标量算子(scalar operator)是恒等算子的标量倍数.

给定环 R 上的左模 M 以及 R 代数 S, 可构作张量积(tensor product) $S \otimes_R M$. 这是 S 上的一个模. 称模 $S \otimes_R M$ 是从 M 通过标量扩张(extension of scalars)得到的.

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 1, Wiley, 1982, p. 70.
[A2] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969, p. 270, 290.

沈永欢 译

标量曲率 [scalar curvature; скалярная кривизна], 亦称数量曲率, Riemann 流形在一点 p 的 **Ricci 张量**(Ricci tensor)关于度量张量 g 的迹. 标量曲率 $s(p)$ 与 **Ricci 曲率**(Ricci curvature) r 和**截面曲率**(sectional curvature) k 通过公式

$$s(p) = \sum_{i=1}^{n} r(e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} k(e_i, e_j)$$

联系起来, 这里 $e_1, \cdots, e_n$ 是切空间的一个规范正交基. 用等价的 Einstein 记号, 这些方程的形式为

$$s(p) = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{kl} R_{kijl},$$

这里 R_{ij} 和 R_{kijl} 分别是 Ricci 张量和曲率张量的分量, g^{ij} 是度量张量的反变分量.

参考文献

[1] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.
[2] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967 (中译本: П. К. 洛薛夫斯基, 黎曼几何与张量分析, 高等教育出版社, 1955, 上、下册).

【补注】

[A1] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1 – 2, Wiley (interscience), 1963 – 1969.

【译注】

这里曲率张量的分量 R_{kijl} 与文献 [A1] 中的定义相差一符号. 目前大都采用 [A1] 的定义, 因此标量曲率的公式为

$$s(p) = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{kl} R_{kilj}.$$

潘养廉 译 沈一兵 校

标量场 [scalar field; скалярное поле]

某空间中一个区域上点的标量值函数, 例如一个物体内的温度场或密度场.

【补注】 标量场是张量场代数中的标量, 见标量(scalar). 王斯雷 译

尺度参数 [scale parameter; масштабный параметр]

一个所谓的定位参数, 它使一种类型的概率分布族参数化. $\mathbf{R}$ 上的一个分布函数为 F 的分布称为与另一分布函数为 F_0 的确定分布属于同一类型, 如果 $F(x) = F_0((x-b)/a)$. 这里 $a > 0$ 就是尺度参数, 而 b 则是位移参数(或中心化参数). 尺度参数的意义如下: 如果 F_0 与 F 分别是随机变量 X_0 与 X 的分布函数, 那么从 X_0 转移到 $X = aX_0$ (对于 $b = 0$) 表示测量单位的一种改变. А. В. Прохоров 撰

【补注】 族 $F_0((x-b)/a)$ 中的参数 b (可能是多维的)也称为位置参数(location parameter). 这整个分布族有时称为分布的位置 - 尺度族(location-scale

family of distributions).

参考文献

[A1] Breiman, L., Statistics with a view towards applications, Houghton-Mifflin, 1973, 34－40.

潘一民 译

扫描法 [scanning method; сканирования метод]

通过对一个函数在容许集的某个子集的所有点处的函数值进行排序和比较来求出该函数的极大值和极小值的一种方法. 与**蒙特卡罗方法** (Monte-Carlo method) 的排序相反, 扫描法中用的点位于预先确定的轨道上.

"扫描法"这一名称来源于技术: 某些技术问题中观察和检测目标部分等价于求强度函数的极大值或极小值, 而这一点是借助扫描法的模拟或数值变种来解决的. 后来扫描法作为电子计算机上以对话状态进行最优化的方便手段而引起人们关注.

特别地, 扫描轨道可以在自变量的容许集中形成一个处处稠密集.

扫描法的优点是对定义函数的方式和此函数可属的种类没有限制. 后者 (连同排序所需的巨大工作量) 同时也是此法的主要缺点: 数值分析者手中的补充信息没有用来缩减计算工作量. 因此在计算实践中, 极少不同其他最优化方法联结起来单独使用扫描法. 例如, 对于满足 Lipschitz 条件的函数, 用"在不均匀网格上排序"法来搜索全局最大或最小值比用扫描法能更加有效地进行 (见[2], [3]).

参考文献

[1] Растригин, Л. А., Системы экстремального управления, М., 1974.

[2] Евтушенко, Ю. Г., Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации, М., 1982 (英译本: Evtushenko, Yu. G., Numerical optimization techniques, Optim. Software, 1985).

[3] Dixon, L. C. W., Szego, G. P. (eds.), Towards global optimization, 1－2, North-Holland, 1975－1978.

沈永欢 译

散射空间 [scattered space; рассеянное пространство]

【补注】 散射空间起源于 Cantor 对三角级数唯一性的研究. 他的定理 (用现代术语) 说: 如果除开有限的散射高的点集可能例外外, **三角级数** (trigonometric series)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

收敛于零, 则此级数的所有系数必为零.

散射空间及它的散射高定义如下. 对任意空间 X, 首先定义子空间的一个超限序列 $<X^{(\alpha)}>_\alpha$: 设 $X^{(0)}=X$, 对任意序数 α, 设 $X^{(\alpha+1)}$ 是 $X^{(\alpha)}$ 的**导出集** (derived set), 若 λ 是序数的极限, 则令 $X^{(\lambda)}=\bigcap_{\alpha<\lambda}X^{(\alpha)}$.

存在满足 $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$ 的第一个序数 $\alpha=\alpha_X$. 如果这个导出集 $X^{(\alpha)}$ 是空集, 则称 X 为散射空间 (scattered space), 称序数 α_X 为 X 的散射高 (scattered height).

若 X 是紧空间, 则显然 α_X 一定是一个后继序数, 例如 $\alpha_X=\beta+1$. $X^{(\beta)}$ 是有限集. S. Mazurkiewicz 和 J. Sierpiński 的经典结果指出, 可数紧散射空间 X 完全由序数 β 和 $X^{(\beta)}$ 中点的个数 n 确定: X 同胚于小或等于 $\omega^\beta\cdot n$ 的序数的集合.

据 Stone 对偶性, 紧散射空间对应于所谓超原子 Boole 代数 (superatomic Boolean algebra); 这些代数是这样定义的: 它的每个 (非平凡) 同态象都具有一个原子. 由于这个对偶性, 紧散射空间的结构可以说是容易了解的.

一个重要的 (高为 2 的) 散射空间族构造如下: 取无限集 X 和 X 的可数无限子集族 $\mathscr{A}$, 这些子集是几乎不交的, 即若 $A, B\in\mathscr{A}$, 则 $A\cap B$ 是有限集. 并集 $X\cup\mathscr{A}$ 用下列方式拓扑化: 认定 X 是一个开的离散子空间, 赋予 $\mathscr{A}$ 的元素 A 形为 $\{A\}\cup A\setminus F$ 的基本邻域系, 这里, F 是 X 的一个有限子集. 变动族 $\mathscr{A}$, 可以得到多种有趣的拓扑空间的实例, 例如, 用这种方式可以作出一个**伪紧空间** (pseudo-compact space), 它不是可数紧的 (见**可数紧空间** (countably-compact space)).

参考文献

[A1] Cantor, G., Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math. Ann.*, 5(1872), 123－132.

[A2] Mrówka, S., On completely regular spaces, *Fund. Math.*, 41(1954), 105－106.

[A3] Roitman, J., Superatomic Boolean algebras, in J. D. Monk and R. Bonnet (eds.): Handbook of Boolean Algebras, North-Holland, 1989, Chapt. 19; 719－740.

白苏华 胡师度 译

散射矩阵 [scattering matrix; рассеяния матрица], S 矩阵 (S-matrix)

描述量子力学系统在相互作用 (散射) 下从一个态向另一个态转移的过程的一个算子 (一个矩阵).

在散射下, 系统从一个量子态, 初态 (可将其与时间 $t=-\infty$ 相联系), 转移到另一个量子态, 末态 (与 $t=+\infty$ 相联系). 如果对于描述初 (末) 态的量子数集合用 $i(j)$ 来表示, 则散射振幅 (其模的平方定义给定散射的概率) 可写为 S_{ij}. 全部散射振幅的集合形成具有两个输入的表, 称为散射矩阵 (scattering matrix) S.

确定散射矩阵是量子力学和量子场论中的一个基本问题．散射矩阵包含关于系统行为的完全信息，条件是人们不仅知道其矩阵元的数值、而且还知道其矩阵元的解析性质．特别是，其极点确定系统的束缚态(从而其离散能级)．散射矩阵的最重要性质是：它必须是酉正的，这是根据量子理论的基本原理得出的．

БСЭ-3

【补注】 S 矩阵的概念不仅适用于量子力学，而且适用于比它更广泛得多的方面．

S 矩阵是由 W. Heisenberg 于 1942 年引进的([A3])．然而，它的根源还可追溯到 1925 年由 W. Heisenberg, M. Born 和 P. Jordan 建立的矩阵力学(matrix mechanics)([A4])，以及量子力学应(尽可能)以可观察(可测量)量为基础这样的观念．

参考文献

[A1] Eden, R. J., Landshoff, P. V., Olive, D. I. and Polkinghorne, J. C., The analytic S-matrix, Cambridge Univ. Press, 1966.

[A2] Barut, A. O., The theory of the scattering matrix, MacMillan, 1967.

[A3] Heisenberg, W., *Z. Physik*, **120** (1942－1943), 513, 678.

[A4] Messiah, A., Quantum mechanics, I, North-Holland, 1961, Chapt. Ⅱ.

[A5] Iagolnitzer, D., The S matrix, North-Holland, 1978.

[A6] Chow, G. F., the analytic S matrix, Benjamin, 1966.

徐锡申 译

Schauder 法[Schauder method; Шаудера метод]

基于先验估计和连续性方法(亦见**连续性方法**(continuation method)(对参数化族的))解二阶线性一致椭圆型方程边值问题的一种方法．

在点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的 Euclid 空间的有界域 Ω 中，求具有系数 $b(x)\leqslant 0$ 的线性一致椭圆型方程

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)u_{x_ix_j}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}b^{j}(x)u_{x_j}+b(x)u=f(x)\qquad(1)$$

的 **Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)的解的 Schauder 法，可以用下面的方式来描述：

1．引进空间 $C_\alpha(\Omega)$，$C_{1+\alpha}(\Omega)$ 和 $C_{2+\alpha}(\Omega)$，它们分别是函数 $u=u(x)$ 的具有有限范

$$\|u\|_{C_\alpha(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|+\sup_{x,y}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^\alpha},$$
$$0<\alpha<1,$$
$$\|u\|_{C_{1+\alpha}(\Omega)}=\|u\|_{C_\alpha(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{C_\alpha(\Omega)},$$
$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\Omega)}=\|u\|_{C_{1+\alpha}(\Omega)}+\sum_{i,j=1}^{n}\|u_{x_ix_j}\|_{C_\alpha(\Omega)}$$

的集合．

2．假定域 Ω 的边界 σ 是属于 $C_{2+\alpha}$ 类的，即 $(n-1)$ 维曲面 σ 的每一个元 σ_v，利用一个具有正的 Jacobi 的坐标变换 $y=y(x)$，可以映射到平面的一部分上，且 $u\in C_{2+\alpha}(\sigma_v)$．

3．证明：如果(1)的系数属于空间 $C_\alpha(\Omega)$，且函数 $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$，那么有估计

$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\Omega)}\leqslant C[\|Lu\|_{C_\alpha(\Omega)}+\|u\|_{C_{2+\alpha}(\sigma)}+\|u\|_{C_0(\Omega)}],\qquad(2)$$

直到边界都成立，其中常数 C 只依赖于 Ω、椭圆性常数 $m\leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j/|\xi|^2(\xi\neq 0)$ 和算子 L 的系数的范，这里

$$\|u\|_{C_0(\Omega)}=\sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

4．假定已知如何去证明 Laplace 算子 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\partial^2/\partial x_i^2$ 的 Dirichlet 问题

$$u|_\sigma=\varphi|_\sigma,\ \varphi\in C_{2+\alpha}(\Omega)$$

存在一解 $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$．

5．不失一般性可以假定 $\varphi(x)\equiv 0$，然后应用连续性方法，它的本质如下：

5_1．将算子 L 嵌入进单参数算子族

$$L_tu=tLu+(1-t)\Delta u,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ L_0=\Delta.$$

5_2．本质地根据一个先验估计(2)，可以证明：对所有的 $f\in C_\alpha(\Omega)$ 使得 Dirichlet 问题 $L_tu=f(x)$，$u|_\sigma=0$ 有一解 $u\in C_{2+\alpha}(\Omega)$ 的那些值 $t\in[0,1]$ 的集合 T，既是开的又是闭的．因而和单位区间 $[0,1]$ 重合．

6．证明：如果 D 是一有界域，它及其闭包一起包含在 Ω 中，那么对任一函数 $u\in C_{2+\alpha}(D)$ 和任一紧子域 $\omega\subset D$ 成立内先验估计

$$\|u\|_{C_{2+\alpha}(\omega)}\leqslant C[\|Lu\|_{C_\alpha(D)}+\|u\|_{C_0(D)}].\qquad(3)$$

7．用 $C_{2+\alpha}$ 中函数一致地逼近函数 φ 和 f，且应用估计式(3)，证明：对任意连续的边界函数和具有非光滑边界的一大类域(例如，可以表示成具有和 σ 有同样光滑性的边界的域的序列 $\Omega_1\subset\Omega_2\subset\cdots$ 的并的域)，Dirichlet 问题存在一解．

估计式(2)和(3)是由 J. Schauder 首先得到的，因而以他命名．Schauder 的估计和他的方法已被推广到高阶方程和方程组．对应于他们的内先验估计和直到边界的先验估计，有时称之为 Schauder 型估计．先验估计的方法是 Schauder 法的进一步推广．

参考文献

[1] Schauder, J., Ueber lineare elliptische Differentialgleich-

ungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, 38(1934), 2, 257－282.
[2] Schauder, J., Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen. *Studia Math.*, 5(1935), 34－42.
[3] Bers, L., John, F. and Schechter, M., Partial differential equations, Interscience, 1964.
[4] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (译自德文) (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特著, 数学物理方法 II, 科学出版社, 1977).
[5] Бицадзе, А. В., Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.
[6] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965 (英译本: Berezanskiy, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).
[7] Ладыженская, О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973 (中译本: O. A. 拉迪任斯卡娅等著, 线性和拟线性椭圆型方程, 科学出版社, 1978).

А. М. Нахушев 撰

【补注】 对抛物型方程的 Schauder 型估计在 [A1] 中第一次得到 (其详细的描述亦见 [A2]).

参考文献

[A1] Ciliberto, C., Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili, *Ricerche Mat.*, 3(1954), 40－75.
[A2] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本: A. 弗里德曼著, 抛物型偏微分方程, 科学出版社, 1984).
[A3] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1977 (中译本: D. 吉耳巴格, N. S. 塔丁格著, 二阶椭圆型偏微分方程, 上海科学技术出版社, 1981).

孙和生 译 陆柱家 校

Schauder 定理 [Schauder theorem; Шаудера теорема]

不动点 (fixed point) 定理之一: 如果一个完全连续算子 A 把 Banach 空间 X 中有界闭凸集 K 映射到自身中, 则至少存在一个点 $x \in K$ 使得 $Ax = x$. 为 J. Schauder ([1]) 所证明作为 **Brouwer 定理** (Brouwer theorem) 的一个推广.

存在 Schauder 定理的不同的推广: Марков-角谷静夫定理, Тихонов 原理, 等等.

参考文献

[1] Schauder, J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Stud. Math.*, 2 (1930), 171－180.
[2] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (中译本: Л. А. 刘斯铁尔尼克, В. И. 索伯列夫, 泛函分析概念, 第二版, 科学出版社, 1985).
[3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.
[4] Edwards, R. E., Functional analysis, Holt, Rinehart & Winston, 1965.
[5] Nirenberg, L., Topics in nonlinear functional analysis, New York Univ., 1974.

В. И. Соболев 撰

【补注】 Тихонов 不动点定理 (Tikhonov fixed-point theorem) 叙述如下. 设 X 是局部凸拓扑空间, 其拓扑由连续半范数族 $\{p_i\}$ 定义. 设 $C \subset X$ 是紧凸的且 $f: C \to C$ 是连续映射. 则 f 在 C 中有不动点 ([A2]; [A3], p. 175). 角谷静夫不动点定理 (Kakutani fixed-point theorem) 和 Марков 不动点定理 (Markov fixed-point theorem) 两者在 Ryll-Nardzewski 不动点定理 (Rull-Nardzewski fixed-point theorem) 中被推广, 最后的定理叙述如下: 设 X 是 Banach 空间而 Q 是其非空弱紧子集, 设 S 是从 Q 到 Q 的映射半群, 且是非压缩的, 则存在 S 的一个不动点. 这里一个映射族 S 称为有不动点 p, 如果对每个 $f \in S$, $f(p) = p$, ([A4]); 对 Ryll-Nardzewski 不动点定理与角谷静夫定理和 Марков 定理的关系以及其他映射族不动点定理的讨论, 见 [A3], Chapt. 9.

参考文献

[A1] Dugundji, J. and Granas, A., Fixed-point theory, I, PWN, 1982.
[A2] Tychonoff, A. N., Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.*, 111 (1935), 767－776.
[A3] Istrătescu, V. I., Fixed point theory, Reidel, 1981.
[A4] Ryll-Nardzewski, C., On fixed points of semi-groups of endomorphisms of linear spaces, in Proc. 5-th Berkeley Symp. Prabab. Math. Stat., Vol. 2:1, Univ. Calif. Press, 1967, 55－61.

葛显良 译 吴绍平 校

进度安排理论 [scheduling theory; расписаний теория]

应用数学的分支 (**运筹学** (operations research) 的一部分), 它研究使某些运作的时间先后得到满足的最优排序和协调问题的数学陈述和解法. 与进度安排理论有关的是执行运作的有限 (或重复) 集合的最优安排 (Gantt 图表 (Gantt chart), 图) 的设计问题. 进度安排理论中的结果的应用范围包括生产管理, 运输, 计算机系统, 建筑, 等等.

进度安排理论研究的问题通常陈述为在一个带有限资源的系统中处理有限任务过程的最优化问题. 有限任务集使得进度安排理论模型有别于排队论 (queueing theory) 中的类似模型, 后者基本上考虑无限活动流. 在其他方面, 这两种理论的出发点是很接近的. 进度安排理论中, 每个任务到达系统的时间是指定的. 处于系统内的任务应该通过一个或多个依赖于问

题条件的处理阶段．对于每个阶段，资源的可行清单是给定的，利用这些资源清单时的处理任务的时间长度也是给定的．也可以规定在处理个别任务时过程中断的可能性（所谓轮空（pre-emption））．对处理次序的约束照例用传递、反对称二元关系来描述．评估任务的大规模半序集的特征的算法构成称为网络分析（network analysis）（见**网络模型**（network model）；**网络规划**（network planning））的进度安排理论的部分的基本内容．有时在进度安排模型中，当一个任务的处理被另一个任务的处理和某些其他条件取代时，要规定必要的重新调节的延续时间．

应该提到，由于面向实际，进度安排理论不企求统一它的术语；与术语"任务（job）"一起，也使用术语"工作（task）"，"运作（operation）"等等．出于同样原因，任务处理的进度安排在形式上可有多种方式来定义．在一般情形下，一个进度安排可以理解为一个对每个任务在每个瞬间指定某个资源清单的单值映射．作为判据，通常取形为

$$F(s)=\sum_{a\in N}\varphi_a(t_a(s)) \text{ 和 } F(s)\max_{a\in N}\varphi_a(t_a(s))$$

的总最大费用，这里 $t_a(s)$ 是任务 a 根据进度安排 s 的完成时间，N 是所有任务的集合，$\varphi_a(\cdot)$ 是称为费用函数（cost function）的不增函数．在实际陈述中，费用函数通常有具体的经济意义（诸如冻结的周转资金，消费者损失的赔偿费，等等）．也考虑多准则问题．

除了确定性模型外，也研究随机性模型．在这一情形下，通常或者是考虑在一个确定性陈述中使用的判据之一的数学期望的极小化问题，或者考虑某个事件的概率极小化问题．这样的事件例如可能是任务处理中对于给定期限的延迟．

求解确定性进度安排问题的基本方法是枚举型最优化的一般算法模式（分支定界法）．在这种形式下，最符合实际的问题已经成功地解决，对于按时间的任务计划的最优化程序也已发展（日程安排）．这些都已经在自动控制系统中实现．与此同时，对于一系列特殊的确定性问题的快速决策法则已经得到，它们的应用的充要条件已经证明，对于一般离散最优化问题有意义的有效方法已经提出（例如，见[1]－[4]）．特别是，**图论**（graph theory）和**数学规划**（mathematical programming）中的结果通常可应用于发展这种最优化算法．发表在 20 世纪 70 年代初期的有关 $\mathcal{NP}$ 完全性理论的工作激起了许多关于进度安排问题的复杂性研究（见，例如，[5]）．这类研究的结果提高了研究近似算法及其精度估计的兴趣（见，例如，[6]）．对于许多离散最优化问题的求解途径和方法来说，进度安排提出了许多可看作"试金石"的容易陈述而又富有实际意义的例题．

参考文献

[1] Танаев，В．С．，Шкурба，В．В．，Введение в теорию расписаний，М．，1975．

[2] Conway，R．W．，Maxwell，W．L．and Miller，L．W．，Theory of scheduling，Adison-Wesley，1967．

[3] Bruno，J．L．，et al．(eds．)，Computer and job-shop scheduling theory，Wiley，1976．

[4] Gonzalez，M．J．，Deterministic processor scheduling，*Comput．Surveys*，9(1977)，3，173－204．

[5] Lenstra，J．K．and Rinnooy Kan，A．H．G．，Complexity of scheduling under precedence constraints，*Operations Research*，26(1978)，1，22－35．

[6] Garey，M．R．，Graham，R．L．and Johnson，D．S．，Performance guarantees for scheduling algorithms，*Operations Research*，26(1978)，13－21．

Я．Б．Зиндер，В．В．Шкурба 撰

【补注】自从 20 世纪 50 年代中期以来，进度安排问题已经成为系统数学研究的主题；这是由 S．M．Johnson（[A1]），W．E．Smith（[A2]），以及 G．B．Dantzig，D．R．Fulkerson 和 S．M．Johnson（[A3]）的前驱工作作为开始的；这些论文中所致力的三个进度安排问题已经在现代进度安排理论和**运筹学**（operations research）中变成经典．这三个问题是多台机器流水车间的极小完成时间的进度安排问题，单台机器极小总体权重完成时间的进度安排问题和旅行推销员问题．

复杂性．这三个问题如在后 35 年中所研究的许多其他进度安排问题一样，已被指出具有下列计算上难处理（computational intractability）的性质：除了它们的简化方案可有效地（即以多项式计算步数）解决外，这些问题一般没有多项式时间的精确解，后者意味着所有现在已知的它们的（精确）求解方法，在最坏的情形都可能落入问题的规模指数增长．

在进度安排问题中，以至更一般地，在组合最优化理论中，关键问题在于这些问题中的任何一个是否能以多项式时间求解．由 S．A．Cook（[A4]），R．M．Karp（[A5]）和 L．A．Levin（[A6]）所做的基本研究已经为支持这个问题的否定答案提供了强有力的证据．它们的组合问题的计算复杂性理论已经引入 $\mathcal{NP}$ 硬性（$\mathcal{NP}$-hardness）的概念．忽略对应定义的形式细节（可在[A4]－[A7]）中找到），这里要注意到 $\mathcal{NP}$ 硬问题类包含上述三个进度安排问题，也包含数以千计的其他组合问题，且它们具有两条重要性质．首先，所有这些问题都有上述计算上难处理性质．其次，如果任一特殊的 $\mathcal{NP}$ 硬问题有多项式时间的求解算法，那么它们将都有这样的算法．人们深信（但是至今还没有证明）不存在这样的算法．关于进度安排问题的复杂性理论的进一步细节可在[A7]－[A10]中找到；相关的材料在**复杂性理论**（comple-

xity theory) 中讨论．

问题的提出． 为使进度安排问题的大量变种井井有条，已经建议多种对它们的刻画和分类的一般框架(见，例如，[1]－[5]，[A8]－[A11])．这类框架之一([A10]，[A11])将在下面简单介绍．

考虑三个集合：n 件任务(或"工作"，"运作"，"活动"等等)的集合，m 台机器(或"处理器"，"操作器"，"机器人"等等)的集合和 r 种不同于机器的在处理任务时需要的资源的集合．

可以给出一个定向图或一个网络，其中节点对应任务，而弧描述任务之间的优先关系，它意味着某些任务只能在另一些任务开始(结束)后才可以开始(结束)．

对于每件任务 T_i，已知到达时间(T_i 准备处理的时刻)，截止时间(T_i 必须完成的时间)和"优惠时间"(任务在这区间之外开始(结束)，被认为"太早或太晚"，要通过惩罚来阻止)．

对于任务的每个有序对 (T_i, T_j)，也已知在任务 T_i 的开始(结束)和 T_j 的开始(结束)之间的"时间位移"的上界和下界．

与此同时，对于每件任务 T_i 已知执行它的"可行方案"的有限集 $\mathscr{F}(T_i)$；方案 $F \in \mathscr{F}(T_i)$ 的每一个由它所需要的资源清单连同其相对处理时间 $p(T_i, F)$ 来代表．需要同样资源的两种任务不能同时处理．

一个进度安排(schedule)定义为任务集上的函数对 $(F(T_i), S(T_i))$，$F(T_i)$ 是唯一选择的执行任务 T_i 的可行方案，而 $S(T_i)$ 是任务 T_i 的开始时间．

问题是求满足所有到达/截止和资源约束的进度安排，使得所选取的最优化判据最小(或最大)．

上述一般进度安排问题有数以千计的可能变化．

当允许其成分(输入数据、约束和判据)是确定的或随机的时候，可以得到各种确定性的或随机性的进度安排问题；对于确定性问题，见，例如，[1]－[6]，[A8]－[A11]；对于随机性问题，见，例如，[A12]－[A13]．

对上述模型中赋以实际外貌，就可按照机器进度安排，时间表，生产中的项目进度安排(project scheduling)或周期安排，运输或计算机系统等来陈述问题([1]－[4]，[A8]－[A13])．

赋以机器环境，就容易得到对于单台机器，各种类型的并行机器或串行机器：流水车间，任务车间或开放车间的进度安排问题．与此同时，可以选择任务的特征(例如，允许或不允许轮空，给定或不给定优先关系，任意或固定发布截止日期，等等)，也可以规定(标量的或向量的)最优化判据作为任务的开始/结束时间的、以至资源配置的函数(相应地，向量函数)(最大完成时间，总完成时间，对于提早/延误的总惩罚，等等)(关于进一步细节，见，例如，[A8]－[A13])．

作为进度安排问题多样性的一个解释，上述一般模型的三个特殊类将在下面叙述；它们也就是前面引述的三个进度安排问题．

旅行推销员问题．求访遍给定的 n 座城市中的每一座且最终回到出发城市的最短路线．显然，这一问题可以用机器进度安排的形式来重新陈述("城市"变成机器，城市间的"距离"变成处理时间)．

单台机器问题．(Smith 问题(Smith problem).) n 件任务的集合在单台机器上处理．在时间零机器是可采用的．而不允许任务轮空．第 i 件任务是由它的处理时间 p_i 和确定其优先程度的"权重" w_i 来刻画的．在一般情形下，也规定任务之间的优先关系．问题是求任务的次序 $(\pi_1, \cdots, \pi_n)$，使得下列总加权完成时间(total weighted completion time)最小：

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{i} p_{\pi_j}.$$

在任务被规定为没有优先关系的特殊情形(实际上这正是 Smith([A2])所考虑的情形)下，下列 Smith 法则(Smith rule)可解决问题：任何使比例 p_i/w_i 不减的安排任务的序列是最优的([A2])．在任务间加上任意的优先约束，问题就有 $\mathscr{NP}$ 硬性([5]，[A14])，对模型加上任意的到达日期或截止日期的约束，也会发生同样的情况([A15])．

多机器流水车间问题．(Johnson 问题(Johnson problem).)给定 m 台机器的系统来逐次处理 n 件任务 $T_1, \cdots, T_n$；这 m 台机器对于所有任务来说都有同样的次序，例如，$1, \cdots, m$．对于每件任务 T_i，已知它在机器 j 上的处理时间 $p_{ji}(i=1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, m)$．每件任务当它在机器 $j-1$ 上完成处理以前，不可以在机器 j 上处理；每台机器处理一件任务时不中断；在一个时刻每台机器只能处理一件任务，每件任务只能在一台机器上处理；缓冲能力是由工作进程中的仓库来提供的．

需要对每台机器确定任务处理序列，使得所有任务在所有机器上的完成时间最少．

在两台机器的情形下，下列 Johnson 法则(Johnson rule)以 $O(n \log n)$ 步解决问题：对于对两台机器有同样次序的任务来说，任何使先对有 $p_{1i} \leq p_{2i}$ 的任务按 p_{1i} 不减的顺序、再对其余的任务按 p_{2i} 不增的顺序排列的序列，都是最优序列([A1])．

如果机器的台数 ≥ 3，那么 Johnson 问题变为 $\mathscr{NP}$ 硬问题．

进度安排理论的数学方法．正如在离散最优化(见**整数规划**(integer programming))中那样，进度安排理论中的数学方法可以区分为特殊方法(只能解决

很受限制的类或个别问题）和一般方法（即，试图解决一大类离散最优化问题）．

第一组算法中最著名的是：i）"列表"算法，它是离散最优化的局部搜索法的特殊子族，可适当调整为针对进度安排问题的专门方法；ii）"交换"算法，它是列表算法的子类，对梯度型方法进度安排有很好的适应性；iii）唯一的组合算法，它甚至不能推广到求解"很相似"的问题，例如，求解旅行推销员问题的特殊情形的 Gilmore-Gomory 算法（Gilmore-Gomory algorithm）（[A22]）．许多特殊算法在图书和综述[A7]－[A13]中介绍．

第二组算法，即一般算法，本质上是离散最优化的传统算法．它们可区分为确定的和概率的；精确的和近似的．最著名的是分支定界法（branch-and-bound），**动态规划**（dynamic programming），线性规划松弛法（linear programming relaxation），Lagrange 函数松弛法（Lagrangian relaxation），多面体分析法（polyhedral analysis），局部搜索法（local search）（例如，见关于组合最优化的书[A17]－[A18]；有关的材料可在**整数规划**（integer programming）；**运筹学**（operations research）；**项目管理和进度安排的数学理论**（project management and scheduling, mathematical theory of）中找到）．

进度安排领域是离散最优化、决策系统设计和人工智能的新数学观念的试验基础．

参考文献

[A1] Johnson, S. M., Optimal two-and three-stage production schedules with setup times included, *Naval Res. Logist. Quart.*, 1(1954), 61 – 68.

[A2] Smith, W. E., Various optimizers for single-stage production, *Naval Res. Logist. Quart.*, 23 (1976), 481 – 486.

[A3] Dantzig, G. B., Fulkerson, D. R. and Johnson, S. M., Solution of a large-scale traveling-salesman problem, *Oper. Res.*, 2(1954), 393 – 410.

[A4] Cook, S. A., The complexity of theorem-proving procedures, *Proc. 3rd Annual ACM Symp. Theory of Computing*, 3(1971), 151 – 158.

[A5] Karp, R. M., Reducibility among combinatorial problems, in R. E. Miller and J. W. Tatcher (eds.): Complexity of Computer Computations, Plenum, 85 – 103.

[A6] Levin, L. A., Universal sequential search problems, *Problems Inform. Transmission*, 9(1975), 265 – 266.（《Пробл. Передач. Информ.》, 9(1973), 115 – 116.）

[A7] Garey, M. R. and Johnson, D. S., Computers and intractibility: A guide to the theory of NP-completeness, Freeman, 1979.

[A8] French, S., Sequencing and scheduling. An introduction to the mathematics of the job-shop, Horwood, 1982.

[A9] Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. H. G. and Shmoys, D. B., Sequencing and scheduling algorithms and complexity, Report NFI. 11. 89/03, Univ. Technology Eindhoven, 1989.

[A10] Anthonisse, J. M., Hee, K. M. van and Lenstra, J. K., Resource-constrained project scheduling: an international excercise in *DSS* development, *Decision Support Systems*, 3(1988), 249 – 257.

[A11] Belen'kii, A. S. and Levner, E. V., Scheduling models and methods in optimal freight transportation planning, *Automation and Remote Control*, 1(1989), 1 – 56.

[A12] Pindo, M. L. and Schrage, L., Stochastic shop scheduling: a survey, in M. A. H. Dempster, J. K. Lenstra and A. H. G. Rinnooy Kan (eds.): Deterministic and Stochastic Scheduling, Reidel, 1982, 181 – 196.

[A13] Möhring, R. H., Radermacher, F. J. and Weiss, G., Stochastic scheduling problems I. General strategies, *Z. Oper. Res.*, 28(1984), 193 – 260.

[A14] Lawler, E. L., Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints, *Ann. Discr. Math.*, 2(1978), 75 – 90.

[A15] Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. H. G. and Brucker, P., Complexity of machine scheduling problems, *Ann. Discrete Math.*, 1(1977), 343 – 362.

[A16] Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. H. G. and Shmoys, D. B. (eds.), The traveling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization, Wiley, 1985.

[A17] Schrijver, A., Theory of linear and integer programming, Wiley, 1986.

[A18] Nemhauser, G. L. and Wolsey, L. A., Integer and combinatorial optimization, Wiley, 1988.

E. V. Levner 撰　史树中 译

概形[scheme; схема]

局部同构于**仿射概形**（affine scheme）的**赋环空间**（ringed space）．更精确地说，概形是由拓扑空间 X（概形的底空间（underlying space of the scheme））以及 X 上带单位元的交换环层（sheaf）$\mathcal{O}_X$（概形的结构层（structure sheaf of the scheme））所构成．此外，必须存在 X 的一个开覆盖 $(X_i)_{i\in I}$，使得 $(X_i, \mathcal{O}_X|_{X_i})$ 同构于 $\mathcal{O}_X$ 在 X_i 上的截面环对应的仿射概形 $\mathrm{Spec}\,\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$．概形是代数簇（algebraic variety）概念的推广．关于概形概念的历史可见[2]，[3]，[5]．

基本概念和性质．设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个概形．对于每个点 $x\in X$，层在 x 的茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是一个局部环（local

ring)，这个环的剩余域记为 $k(x)$，称为点 x 的剩余域（residue field of the point）. 底空间 X 的性质称为概形的拓扑性质（例如拟紧性、连通性、不可约性）. 如果 P 是仿射概形的一个性质（即环的性质），又若概形的每个点都有一个仿射开邻域具有此性质，则称概形局部地具有性质 P. 局部 Noether 性质是这样的一个例子（见 **Noether 概形**（Noetherian scheme））. 一个概形是正则的（regular），如果它的所有局部环都是正则的（见正则环（regular ring(in commutative algebra)））. 类似地定义的其他概形有正规和约化概形以及 Cohen-Macauley 概形.

概形的态射（morphism of schemes）是概形作为局部戴环空间的态射. 也就是说，概形 X 到概形 Y 里的态射 f 由一个连续映射 $f: X \to Y$ 以及环层的同态 $f^*: \mathscr{O}_Y \to f_* \mathscr{O}_X$ 构成，这里对于每个点 $x \in X$，局部环的同态 $\mathscr{O}_{Y, f(x)} \to \mathscr{O}_{X, x}$ 必须把极大理想映到极大理想. 对于任意的环 A，X 到 Spec A 的态射是与环同态 $A \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ 成一一对应的. 对于任意的点 $x \in X$，它在 X 里的嵌入也能被看成概形的态射 $\operatorname{Spec} k(x) \to X$. 一个重要的性质是概形范畴里直积与纤维积的存在性（见**范畴中对象的纤维积**（fibre product of objects in a category）），它推广了环的张量积的概念. 一般说来两个概形 X 和 Y 的积的底拓扑空间不同于底拓扑空间的积 $X \times Y$.

带有到概形 S 里的态射的概形 X 称为 S 概形（S-scheme）或 S 上的概形（scheme over S）. 态射 $h: X \to Y$ 称为 S 概形 $f: X \to S$ 和 $g: Y \to S$ 的态射（morphism of S-schemes），如果 $f = g \circ h$. 任意概形可被看成 Spec $\mathbf{Z}$ 上的概形. **换基**（base change）态射 $S' \to S$ 提供了从 S 概形 X 到 S'概形 $X_{S'} = X \times_S S'$ 的转移，后者是 X 与 S' 的纤维积. 如果底概形 S 是环 k 的谱，也可称为 k 概形. k 概形 X 称为有限型的 k 概形（k-scheme of finite type），如果存在 X 的有限仿射覆盖 $(X_i)_{i \in I}$ 使得 k 代数 $\Gamma(X_i, \mathscr{O}_X)$ 由有限多个元素生成. 域 k 上的有限型概形通常被称为代数簇（algebraic variety）. 不过有时还要加上分离性和完全性的条件. k 概形的态射 $\operatorname{Spec} k \to X$ 称为 k 概形 X 的有理点（rational point）. 这种点的集合记为 $X(k)$.

对于 S 概形 $f: X \to S$ 以及点 $s \in S$，从 X 通过换基 $\operatorname{Spec} k(s) \to X$ 得到的 $k(s)$ 概形 $f^{-1}(s) = X_s$ 称为态射 f 在 s 上的茎（stalk）（或纤维（fibre））. 如果把域 $k(s)$ 换成它的代数闭包，就可得到几何纤维（geometric fibre）的概念. 所以 S 概形 X 可被看成以概形 S 参量化的一族概形 X_s. 在谈论到族时通常要求态射 f 是**平坦态射**（flat morphism）.

与 S 上概形相联系的概念常被称为相对的以区别于概形的绝对概念. 事实上对使用于概形的每个概念都有一个相对的版本. 例如 S 概形 X 称为分离的（separated），如果对角嵌入 $X \to X \times_S X$ 是闭的. 态射 $f: X \to S$ 称为光滑的（smooth），如果它是平坦的且所有几何纤维都是正则的. 用同样方法定义的其他态射有仿射、射影、真、有限、艾达尔、不分歧、有限型等. 态射的一个性质称为泛的（universal），如果它在任何换基之下保持此性质.

概形的上同调. 对概形以及相关的代数几何对象的研究常可分为局部的与整体的两个问题. 局部问题通常是线性化的而且它们的数据可用某个**凝聚层**（coherent sheaf）或层复形来描述. 例如在研究态射 $X \to S$ 的局部结构时，相对**微分形式**（differential form）的层 $\Omega^r_{X/S}$ 是相当重要的. 整体部分通常和这些层的上同调相联系（例如可见代数簇的形变（deformation））. 这里有用的定理有**有限性定理**（finiteness theorems），上同调空间的消失定理（见**小平定理**（Kodaira theorem）），**对偶性**（duality），**Künneth 公式**（Künneth formula），**Riemann-Roch 定理**（Riemann-Roch theorem）等.

域 $\mathbf{C}$ 上有限型概形也可被看作**复解析空间**（analytic space），利用超越方法可以计算凝聚层的上同调. 更重要的是可以谈论 $X(\mathbf{C})$ 上的复拓扑（亦称强拓扑）、基本群、Betti 数等等. 想对任意概形发现类似事物的愿望以及意义深远的算术假设的提出（见代数几何里的 **ζ 函数**（zeta-function））使得人们在概形范畴里构造各种拓扑，其中最著名的是**艾达尔拓扑**（étale topology）. 这使得人们可以定义概形的基本群、其他同伦不变量、取值在离散层里的上同调空间、Betti 数等等（见 **l 进上同调**（l-adic cohomology），**Weil 上同调**（Weil cohomology），**主题理论**（motives, theory of））.

概形的构造. 在构造具体概形时更经常地使用仿射或射影谱的概念（见**仿射态射**（affine morphism），**射影概形**（projective scheme）），包括用理想层定义子概形. 射影谱的构造使得有可能构作概形的单项变换. 纤维积和粘合也用于构造概形. 不那么初等的构造法依赖于**可表示函子**（representable functor）的概念. 拥有以概形作参量化的对象族的好的概念后，对于每个概形 S 给出以概形 S 为参量化的族的一个集合 $F(S)$，就可得到从概形范畴到集合范畴（可能带有附加的结构）的一个反变函子. 如果函子 F 是可表的，即存在概形 X 使得 $F(S) = \operatorname{Hom}(S, X)$ 对任意的 S，就可得到以 X 作参量化的对象的一个普遍族. **Picard 概形**（Picard scheme）和 **Hilbert 概形**（Hilbert scheme）都是如此被构造的（亦见**代数空间**（algebraic space），（**参**）**模理论**（moduli theory））.

另一个生成新概形的方法是利用概形上的等价关系过渡到商空间．一般说来这个商空间作为代数空间是存在的．这个构造法的一个特殊的例子是群概形 G 作用在概形 X 上的轨道的概形 X/G（见**不变量理论**（invariants, theory of））．

概形概念的推广之一是形式概形，它可被理解成共有同一个底拓扑空间的概形的归纳极限．

参考文献

[1] Grothendieck and A., Dieudonné, J., Eléments de géométrie algébrique, 1, Springer, 1971.

[2] Dieudonné, J., Cours de géométrie algébrique, 1, Presses Univ. France, 1974.

[3] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）.

[4] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

[5] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, 42 – 112.

В. И. Данилов 撰

【补注】 在早期的术语中，例如在奠基性的原著[1]里使用了预概形（pre-scheme）来称呼上面定义的概形，而概形（scheme）则是指分离概形（separated scheme），即使得对角线 $X \to X \times X$ 为闭的概形．

对于所研究的概形间的态射可加上许多条件，特别是有限性条件．以下列举其中的一部分．

概形的态射 $f: X \to Y$ 是紧态射（compact morphism）（亦称拟紧态射（quasi-compact morphism）），如果存在 Y 的仿射开集 V_i 的一个覆盖使得 $f^{-1}(V_i)$ 对所有的 i 为紧的．

概形的态射 $f: X \to Y$ 是拟有限态射（quasi-finite morphism），如果对每个 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是有限集．

态射 $f: X \to Y$ 是拟分离态射（quasi-separated morphism），如果对角线态射 $X \to X \times_Y X$ 是紧的．

态射 $f: X \to Y$ 是局部有限型态射（morphism locally of finite type），如果存在 Y 的开仿射集 $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ 的覆盖使得对每个 i，$f^{-1}(V_i)$ 可被开仿射集 $U_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij})$ 覆盖，且 A_{ij} 是有限生成 B_i 代数．如果对每个 i 只需有限多个 U_{ij}，则 f 是有限型态射（morphism of finite type）．

态射 $f: X \to Y$ 是有限态射（finite morphism），如果存在 Y 的开仿射集 $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ 的覆盖使得每个 $f^{-1}(V_i)$ 是仿射的，即 $f^{-1}(V_i) = \mathrm{Spec}(A_i)$，且 A_i 是 B_i 代数，它作为 B_i 模是有限生成的．

设 B 是环 R 上的代数．代数 B 称为 R 上有限可表现的（finitely presentable），如果它同构于商 $R[T_1, \cdots, T_n]/\mathfrak{a}$，其中 $\mathfrak{a}$ 是 $R[T_1, \cdots, T_n]$ 内有限生成理想．如果 R 是 Noether 的，则 B 为有限可表现的，当且仅当 B 为有限型的（finite type）（即作为 R 上代数有限生成）．

设 $f: X \to Y$ 是（预）概形的态射，$x \in X$，$y = f(x)$，则 f 称为在 x 是有限可表现的（finitely presentable），如果存在开仿射集 $V \ni y$ 以及开仿射集 $U \ni x$，使得 $f(U) \subset V$ 且使环 $A(U)$ 是有限表现的 $A(V)$ 代数．态射 f 称为局部有限可表现的（locally finitely presentable），如果它在每个点 x 是有限可表现的．如果 Y 是局部 Noether 的，则态射 $f: X \to Y$ 是局部有限可表示的，当且仅当它是局部有限型的．如果一个态射 f 是局部有限可表现的、拟紧的和拟分离的，则称 f 为有限可表现的（finitely presentable）．

对于概形和预概形的态射的一些更重要的特殊条件可见**仿射态射**（affine morphism），**光滑态射**（smooth morphism (of schemes)），**拟仿射概形**（quasi-affine scheme），**可分映射**（separable mapping），**艾达尔态射**（étale morphism），**真态射**（proper morphism）．

如果 $X \to Y$ 是某某型的态射，则通常称 X 是 Y 上的某某型概形．

陈志杰 译

Scherk 曲面 [Scherk surface; Шерка поверхность]

H. Scherk 在 1834 年得到的极小曲面（minimal surface）．它由方程 $z = \ln(\cos y / \cos x)$ 定义，是唯一的可以表示成形如 $z = f(x) + g(y)$ 的**平移曲面**（translation surface）的极小曲面．Scherk 曲面及其修改被用于构造一些辅助函数，利用这些辅助函数可找出在非凸域上极小曲面的 Euler-Lagrange 方程的 Dirichlet 问题的不可解性例子．

Scherk 曲面具有许多有趣的性质：它是一个包含可数多条直线的无穷亏格的完全曲面．它的万有覆叠面提供了共形双曲型的完全极小曲面的一个例子；它的球面象恰好不包含 4 个点：$\zeta = \pm 1$ 和 $\zeta = \pm i$．Scherk 曲面的最后这个性质可以从它的 **Weierstrass 公式**（Weierstrass formula）的表示中明显地看出，在这个表示中，$f(w) = 2/(1 - w^4)$，$g(w) = w$，这里 w 在去掉点 ± 1 和 $\pm i$ 的平面中变动．利用与此类似的表示可以构造广义 Scherk 曲面（generalized Scherk surfaces）

$$f(w) = \left[\prod_{m=1}^{k-1} (w - w_m)\right]^{-1}, \quad k \leqslant 4, \quad g(w) = w,$$

它们是法向恰好"略去"k 个（$1 \leqslant k \leqslant 4$）任意指定方向的完全极小曲面．这种曲面的存在性很有意义，因为它与下列猜想有关：不存在法向"略去"多于 4

个方向的完全极小曲面. 对多于 7 个方向的情形, 这个猜想已经被证实.

Scherk 曲面属于所谓的周期极小曲面族; 它的图形和其他有趣的性质可以在[1]中找到.

参考文献

[1] Tuzhilin, A. A. and Fomenko, A. T., Elements of the geometry and topology of minimal surfaces, Moscow, 1991(俄文).

П. Х. Сабитов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Struik, D. J., Differential geometry, Addison-Wesley, 1957.

[A2] Nitsche, J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, 1975.

潘养廉 译

【译注】

文中的猜想已被日本数学家藤本坦孝(H. Fujimoto)在 1988 年所证实, 他证明了: 设 M 是 $\mathbf{R}^3$ 中非平坦的完全极小曲面, 则 M 的法向至多可"略去"4 个([B1]).

参考文献

[B1] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, *J. Math. Soc. Japan*, **40** (1988), 235-247.

潘养廉 译 沈一兵 校

Schläfli 积分 [Schläfli integral; Шлефли интеграл]

1) 对于任意 n 的 **Bessel 函数**(Bessel functions)的积分表示:

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\theta-z\sin\theta)d\theta+ \quad (*)$$

$$-\frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-n\theta-z\sinh\theta}d\theta,$$

当 $\mathrm{Re}\, z>0$ 时, 如果 n 为整数, 则 $(*)$ 化为下列形式:

$$J_n=\frac{z^n}{2^{n+1}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+1)}t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt.$$

公式$(*)$是由 L. Schläfli 首先给出的([1]).

2) **Legendre 多项式**(Legendre polynomials)的积分表示:

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}dt,$$

其中 C 是绕 z 反时针方向旋转一周的围道. 这个表示是由 L. Schläfli 首先给出的([2]).

参考文献

[1] Schläfli, L., Eine Bemerkung zu Herrn Neumanns Untersuchungen über die Besselschen Funktionen, *Math. Ann.*, 3(1871), 1, 134-149.

[2] Schläfli, L., Über die zwei Heine'schen Kugelfunktionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale, H. Koerber, Berlin, 1881.

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[4] Krazer, A. and Franz, W., Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 对于不加限制的 n 值, 可将 Schläfli 积分化为 $J_n(z)$ 的第二积分表示(亦见[A3], 6.2(2)和(4)). Legendre 多项式的积分表示可由 **Rodrigues 公式**(Rodrigues formula)推出, 类似于对 **Jacobi 多项式**(Jacobi polynomials)(见[A2], (4.4.6)和(4.8.1)).

参考文献

[A1] Olver, F. W. J., Asymptotics and special functions, Acad. Press, 1974.

[A2] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[A3] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, Cambrige Univ. Press, 1952.

杜小杨 译

Schoenflies 猜想 [Schoenflies conjecture; Шёнфлиса гипотеза]

猜想指出: 平面上的两个区域的公共边界总是可分解的. 一个空间 X 称作可分解的(decomposable), 如果它是连通的且可以表示为不同于 X 的两个闭连通子集的并. 该猜想是由 A. Schoenflies 在 1908 年提出并由 L. E. J. Brouwer 在 1910 年证明不成立, 他发现了不可分解的连续统(indecomposable continua), 即不能表示成两个闭的真连通子集的并的连通紧致集合. 对每个有限或可数的 $k\geqslant 2$, 已构造出了平面中的 k 个区域, 它们以不可分解的连续统作为公共的边界.

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 2, Acad. Press, 1968.

Б. А. Ефимов 撰 徐森林 译

Schottky 问题 [Schottky problem; Шотки проблем]

【补注】 与亏格 g 的非奇异完全**代数曲线**(algebraic curve) C 相关联的有它的 **Jacobi 簇**(Jacobi variety). 这是 g 维 **Abel 簇**(Abelian variety) $J(C)$ 带有主极化 Θ (见**极化代数簇**(polarized algebraic variety)). B. Riemann 在 1857 年证明亏格 g 的代数曲线依赖于 $3g-3$ 个参数(对 $g>1$). 但是 g 维主极化 Abel 簇依赖于 $g(g+1)/2$ 个参数. 因为当 $g\geqslant 4$ 时 $g(g+1)/2>3g-3$, 就出现了这样的问题: 哪些主

极化 Abel 簇是 Jacobi 簇？这个问题是 Riemann 提出的，但被称为 Schottky 问题．更确切地说，如果 $\mathscr{M}_g$ 是亏格 g 曲线的模空间（即这样的亏格 g 曲线的同构类的参量空间，见（参）**模理论**（moduli theory）），$\mathscr{A}_g$ 是 g 维主极化 Abel 簇的模空间，则有映射 $\mathscr{M}_g \to \mathscr{A}_g$，问题是刻画它的象的闭包 J_g．对 $g \leqslant 3$ 有 $J_g = A_g$.

这里仅考虑复曲线或 Riemann 曲面的情形．如果选取同调 $H_1(C, \mathbf{Z})$ 的一个辛基 $\alpha_1, \cdots \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g$ 以及 C 上全纯 1 形式空间的基 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 使得 $\int_{a_i}\omega_j = \delta_{ij}$（Kronecker δ），则可得周期矩阵 $\tau = (\tau_{ij}) = (\int_{\beta_i}\omega_j)$．这个矩阵位于 Siegel 上半空间（Siegel upper half-space）$\mathscr{H}_g$ 内，即虚部正定的所有复对称（$g \times g$）矩阵的集合．

Jacobi 簇 $J(C)$ 由复环面 $\mathbf{C}^g/\Lambda_\tau$ 给出，这里 $\Lambda_\tau = \mathbf{Z}^g + \tau\mathbf{Z}^g$，$\Theta$ 是 Riemann θ **函数**（theta-function）

$$\theta(\tau, z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} e^{\pi i({}^t m \tau m + 2{}^t m z)}$$

的除子．模空间（moduli space）$\mathscr{A}_g$ 可作为 $\mathscr{H}_g/\mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ 而得到，这里 $\mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ 自然地作用于 $\mathscr{H}_g$ 上．在 $\mathscr{A}_g$（的一个**覆盖**）上的坐标是由"θ 常数（theta constants）"提供的，它们是以下 θ 函数在 $z = 0$ 的值：

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon' \\ \varepsilon''\end{bmatrix}(\tau, z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} e^{\pi i({}^t(m+\varepsilon')\tau(m+\varepsilon') + 2{}^t(m+\varepsilon')(z+\varepsilon''))}$$

对 $\varepsilon', \varepsilon'' \varepsilon (1/2)\mathbf{Z}^g/\mathbf{Z}^g$.

第一个结果属于 W. Schottky，对 $g = 4$．他在 1888 年证明了 θ 常数的某个 16 次多项式在 J_4 上等于 0，但并不在 $\mathscr{A}_4$ 上恒等于 0．在很久以后 J.-I. Igusa 证明它的**零除子**（zero divisor）等于 J_4.

下一步是 Schottky 和 H. W. E. Jung 在 1909 年完成的，他们运用曲线的不分歧二重**覆叠**（现在称为 Prym **簇理论**（theory of Prym varieties））构造了 θ 常数的一个表达式，它在 J_g 上恒等于 0．这些表达式定义了包含 J_g 的某个轨迹 S_g（称为 Schottky 轨迹（Schottky locus））．人们猜测 $S_g = J_g$，这就是限制意义下的 Schottky 问题．B. van Geemen 在 1983 年证明了 J_g 是 S_g 的不可约分支．

由于 Schottky 问题要求得到一个刻画，不同的途径可得出不同的回答．一个途径是利用下列事实：Jacobi 簇的 θ 除子是奇异的（对 $g \geqslant 4$），它的奇异轨迹的维数 $\geqslant g - 4$．所以考虑具有 $\dim(\mathrm{Sing}(\Theta)) \geqslant m$ 的 g 维主极化 Abel 簇（A, Θ）的轨迹 $N_g^m \subset \mathscr{A}_g$ 是很自然的．然后 $J_g \subset N_g^{g-4}$ 且 J_g 确实是不可约分支，如 A. Andreotti 和 A. Mayer 所证明的．不过 N_g^{g-4} 有其他分支，所以这个结果还不够强．

另一个尝试从一般主极化 Abel 簇中区分 Jacobi 簇的途径是使用三重割线．以下只考虑不可分解的，即不是直积的，主极化 Abel 簇．对这样的 Abel 簇（$X = \mathbf{C}^g/\Lambda_\tau, \Theta$）存在到射影空间的映射 $\Phi = \Phi_{2\Theta}$：$X \to \mathbf{P}^N$，$N = 2^g - 1$，由 θ 函数 $\theta[{}^{\varepsilon}_{0}](2\tau, 2z)$ 给出而且它的象是 Kummer 簇 $K(X, \Theta)$（见 **Kummer 曲面**（Kummer surface））．如果 $X = J(C)$，$a, b, c, d \in C$，且若 $r \in X$ 使得 $2r = a + b - c - d$，则 $\mathbf{P}^N$ 内三点 $\Phi(r)$，$\Phi(r - b + c)$，$\Phi(r - b + d)$ 共线，即定义一条三重割线（翻译成 θ 函数的语言，这是 Fay 三重割线等式（Fay trisecant identity））．人们猜测如果（X, Θ）是一个不可分解主极化 Abel 簇，它的 Kummer 簇允许有一条三重割线，则它是 Jacobi 簇．（A. Beauville 和 O. Debarre 证明三重割线的存在性蕴含 $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geqslant g - 4$.）R. C. Gunning 和 G. Welters 证明了此猜测的一个弱化版本．简化后的形式是：如果 Kummer 簇允许有三重割线的一个连续族且 $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) = g - 4$，则此 Abel 簇是 Jacobi 簇．

可以考虑这个猜测的无穷小版本．设 $\theta_2[\sigma](\tau, z) = \theta[{}^{\sigma}_{0}](2\tau, 2z)$，则判别法则为：如果在 X 上存在常向量场 D_1, D_2, D_3 以及 $d \in \mathbf{C}$ 使得

$$\left[\left[D_1^4 - D_1 D_3 + \frac{3}{4} D_2^2 + d\right]\theta_2[\sigma]\right](\tau, 0) = 0,$$

$$\text{对所有 } \sigma, \qquad (*)$$

则 Abel 簇是 Jacobi 簇．这被称为 Новиков 猜想（Novikov conjecture），被 M. Shiota 于 1986 年证明．另一个证明（更几何化）由 E. Arbarello 和 C. De Concini 给出．方程（*）称为 *K-P* 方程（*K-P*-equation）（由 Kadomtsev-Petviashvili 而得名），它推广了 **Korteweg-de Vries 方程**（Korteweg-de Vries equation）．这是整个方程集团中的第一个．

根据 Riemann 恒等式（Riemann identity）

$$\theta(x+y)\theta(x-y) = \sum_\sigma \theta_2[\sigma](x)\theta_2[\sigma](y),$$

这可翻译成 $u = D_1^2 \log\theta$ 满足偏微分方程

$$D_1(D_1^3 u + u D_1 u + D_2 u) - D_3^2 u = 0.$$

另一个途径（属于 van Geemen 和 G. van der Geer）利用模空间的几何且给出了与使用 *K-P*-方程的途径间的联系．θ 函数 $\theta_2[\sigma](\tau, z)$ 把 Abel 簇映到 $\mathbf{P}^N$．它们也定义了从模空间 $\mathscr{A}_g(2, 4)$（$\mathscr{A}_g$ 的一个覆盖）到这个射影空间的映射，这里（X, Θ）的类的象是 X 的原点在 Φ 下的象．人们猜测模空间的象与不可分解 Abel 簇的 Kummer 簇间的交集的维数 $\leqslant 2$，并且恰好当（X, Θ）是 Jacobi 簇时等于 2．对子模空间在（X, Θ）定义的点处的切空间与 Kummer 簇的交集也

有类似结果. 根据 θ 函数的热传导方程, 最后一个猜测等价于与集合 $F_X \subset X$ 有关的一个陈述, 这里的 F_X 是 θ 函数 $\sum_\sigma a_\sigma \theta_2[\sigma](\tau, z)$ (对固定的 τ) 的空间 $\Gamma_{00} \subset \Gamma(X, O(2\Theta))$ 的公共零点集, 这些 θ 函数在 $X = \mathbf{C}^g/\Lambda_\tau$ 的原点等于 0 的重数 $\geqslant 4$. Welters 证明了对一个 Jacobi 簇 $X = J(C)$, 集 F_X 由 $C-C$ 在这个 Jacobi 簇内的象 $\{x-y, x, y \in C\} \subset J(C)$ 所构成. 人们猜测 Jacobi 簇可由 $F_X \neq \{0\}$ 来刻画.

这些猜测被 R. Donagi 在 [A2] 中进一步精细化, 成为一个更强的猜测. 这个猜测描述了 $\mathscr{R}\mathscr{A}_g$ 里的 Schottky 轨迹 $\mathscr{RS}_g$. $\mathscr{R}\mathscr{A}_g$ 是带有 A 上 2 阶非零点 p 的主极化 Abel 簇 (A, Θ, p) 的模空间. 这个猜测是非常强的; 它蕴含了 Новиков 猜测的强化版本和 van Geemen 与 van der Geer 的所有猜测. 后面的猜测是把 $\mathscr{RS}_g$ 与紧化模空间 $\overline{\mathscr{R}\mathscr{A}_g}$ 的边界相交而得到, 而 Новиков 猜测则可由对此无穷小化而得出. Donagi 当 $g \leqslant 5$ 时证明了他的猜测.

参考文献

[A1] Beauville, A., Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov, *Astérisque*, **152 – 153** (1988), 101 – 112, Sém. Bourbaki, Exp. 675.

[A2] Donagi, R., The Schottky problem, in E. Sernesi (ed.): Theory of Moduli, Lecture notes in math., Vol. 1337, Springer, 1988, 84 – 137.

[A3] van der Geer, G., The Schottky problem, in Arbeitstagung 1984, Lecture notes in math. Vol. 1111, Springer, 1985, 385 – 406.

[A4] Mumford, D., Curves and their Jacobians, Univ. of Michigan Press, 1975.

G. van der Geer 撰 陈志杰 译

Schottky 定理 [Schottky theorem; Шоттки теорема]

如果函数

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots \qquad (*)$$

在圆盘 $D = \{z: |z| < R\}$ 内正则解析且在 D 内不取某两个有限值 a_1, a_2, 则在任一圆盘 $|z| \leqslant R_1 (0 < R_1 < R)$ 上模 $|f(z)|$ 为一只依赖于 a_1, a_2, c_0, R_1 的数 $M(a_1, a_2, c_0, R_1)$ 所界定 (见 [1]). 对于任意的 $q \geqslant 2$ 个例外值, 通过结合推广的 Schottky 定理与 Landau 定理, 可得到更加完整的表述. 假定函数 $(*)$ 不取某些有限值 $a_1, \cdots, a_q$, $q \geqslant 2$, 则对 $c_1 \neq 0$, 半径 R 为一只依赖于 $a_1, \cdots, a_q, c_0, c_1$ 的数上方界定 (Landau 定理 (Landau theorem)). 再者, 在圆盘 $|z| \leqslant R_1 (0 < R_1 < R)$ 上, 模 $|f(z)|$ 为一仅依赖于 $a_1, \cdots, a_q, c_0, R_1$ 的数 $M(a_1, \cdots, a_q, c_0, R_1)$ 所界定 (Schottky 定理 (Schottky theorem)).

从几何观点看, Schottky 定理意味着圆盘 $|z| \leqslant R_1$ 的象到点 $a_1, \cdots, a_q$ 的球面距离 (即 **Riemann 球面** (Riemann sphere) 上的距离) 不小于一个只依赖于 $a_1, \cdots, a_q, c_0, R_1$ 的数 $d(a_1, \cdots, a_q, c_0, R_1)$. Schottky 定理是复变函数论**畸变定理** (distortion theorems) 类中的经典结果之一.

参考文献

[1] Schottky, F., Ueber den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **2** (1904), 1244 – 1262.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

[3] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного (译自罗马尼亚文), т. 1 – 2, М., 1962.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Landau 和 Schottky 定理也与 **Picard 定理** (Picard theorem) 有关.

参考文献

[A1] Landau, E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Chelsea, reprint, 1946.

[A2] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1978 (中译本: J. B. 康威, 单复变函数, 上海科学技术出版社, 1985).

沈永欢 译

Schreier 系统 [Schreier system; Шрейера система]

以 s 为生成元集合的**自由群** (free group) F 的一个非空子集, 满足如下条件. 设 Schreier 系统中的元素 $g \neq 1$ 可表为该群的生成元的约化字

$$g = S_1^{n_1} \cdots S_k^{n_k},$$

并设

$$g' = \begin{cases} gS_k, & n_k < 0, \\ gS_k^{-1}, & n_k > 0. \end{cases}$$

要求元素 g' 亦属于这一系统 (元素 g' 可视为通过去掉 g 的最后一个字母得到的约化字). 元素 1 属于所有 Schreier 系统.

由 O. Schreier 于 20 世纪 20 年代引进, 见 [1].

参考文献

[1] Massey, W., Algebraic topology. An introduction, Springer 1977.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 具有特殊意义的 Schreier 系统为由子群陪集的代表元组成的系统. 关于 Schreier 系统的用途, 如证明 Nielsen-Schreier 定理 (Neilsen-Schreier theorem): 自由群的子群为自由群, 见 [A1].

参考文献

[A1] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combi-

natorial group theory. Interscience, 1966.

李贵松 译 潘建中 校

Schrödinger 方程 [**Schrödinger equation**; **Шрёдингера уравнение**]

量子力学中的一个基本方程，它与相应附加条件一起，决定表征量子系统状态的一个波函数 $\psi(t, q)$．对于非相对论性无自旋粒子的系统，它是由 E. Schrödinger 于 1926 年予以表述的．它具有形式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, q) = \hat{H} \psi(t, q),$$

其中 $\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{r})$ 是 **Hamilton 算子** (Hamilton operator)，按以下通则构造：在经典 Hamilton 函数 $H(p, r)$ 中将粒子动量 p 及其坐标 r 用相应算子代替，在坐标表象 ($\mathbf{q} = \mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N$) 中和在动量表象 ($\mathbf{p} = \mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_N$) 中，它们分别具有下列形式

$$\hat{\mathbf{p}}_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}, \hat{\mathbf{r}}_j = \mathbf{r}_j; \hat{\mathbf{p}}_j = \mathbf{p}_j, \mathbf{r}_j = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j};$$

$$j = 1, \cdots, N.$$

对于由矢势 $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ 表征的电磁场中（电量为 e）的带电粒子，量 $\mathbf{p}$ 要由 $\mathbf{p} + e\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ 代替（国际单位制）．在这些表象中，Schrödinger 方程是一偏微分方程，例如，对势场 $U(\mathbf{r})$ 中的粒子，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{r}) =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi(t, \mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(t, \mathbf{r}).$$

采用离散表象也是可能的，其中函数 ψ 是一多分量函数，而算子 $\hat{H}$ 具有矩阵的形式．若波函数定义于占有数空间，则算子 $\hat{H}$ 由产生和湮没算子的某些组合予以表达（二次量子化表象，见**湮没算子** (annihilation operators)；**产生算子** (creation operators)）．

将 Schrödinger 方程推广到具有自旋 1/2 的非相对论性粒子的情况（二分量函数 $\psi(t, \mathbf{r})$）称为 Pauli 方程 (Pauli equation) (1927)；推广到具有自旋 1/2 的相对论性粒子的情况（四分量函数 ψ）称为 **Dirac 方程** (Dirac equation) (1928)；推广到无自旋的相对论性粒子的情况称为 **Klein-Gordon 方程** (Klein-Gordon equation) (1926)；推广到自旋为 1 的相对论性粒子的情况（函数 ψ 是一向量）称为 Proca 方程 (Proca equation) (1936)；等等．

Schrödinger 方程的解定义于对所有 t 满足归一化条件 $(\psi, \psi) = 1$ 的函数类（括号意味着对 q 的所有值求积分或求和）．为了求解必须表述对应于所考虑问题特性的初始条件和边界条件．这些问题中最具特色的是：

1) 定态 Schrödinger 方程和系统能量容许值的确定．假定 $\psi(t, q) = \varphi(q)\exp(-iEt/\hbar)$，并要求符合归一化条件，以及符合无穷远处无流即当 $|\mathbf{r}| \to \infty$ 时波函数及其梯度为零的条件，得到 Hamilton 算子的本征值 E_n 和本征函数 φ_n 的方程：

$$E_n \varphi_n(q) = \hat{H} \varphi_n(q).$$

这个问题的严格解的特征例子是：谐振子，氢原子，等等的本征函数和能级．

2) 量子力学散射问题．Schrödinger 方程在下面这样的边界条件下进行求解：边界条件相当于离散射中心（由势 $U(\mathbf{r})$ 描述）很远处入射来的是平面波而散射出的是球面波．考虑到这个边界条件，Schrödinger 方程可以写成一个积分方程，它的关于含 $U(\mathbf{r})$ 项的一次迭代解相应于所谓 Born 近似．这个方程亦称 Lippman-Schwinger 方程 (Lippman-Schwinger equation)．

3) 系统的 Hamilton 量依赖于时间的情况，$H = H_0(p, r) + U(t, p, r)$，通常在含时微扰论框架中予以考虑．这是量子跃迁理论，它确定系统对外界微扰的响应（动态响应率）和弛豫过程的特性．

为了求解 Schrödinger 方程，通常应用近似方法，正则方法（微扰理论的各种类型），变分法，等等．

参考文献

[1] Messiah, A., Quantum mechanics, 1, North-Holland, 1961.

[2] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974 (中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席茨，量子力学（非相对论理论），人民教育出版社，上册 1980，下册 1981)．

[3] Schiff, L. I., Quantum mechanics, McGraw-Hill, 1955 (中译本：L. I. 席夫，量子力学，人民教育出版社，1982)．

И. А. Квасников 撰

【补注】 [A4] 是关于 Schrödinger 方程的数学的一本综合论著．

参考文献

[A1] Feynman, R. P., Leighton, R. B. and Sands, M., The Feynman lectures on physics, III, Addison-Wesley, 1965.

[A2] Gasiorowicz, S., Quantum physics, Wiley, 1974.

[A3] Lévy-Lehlond, J. M. and Balibar, F., Quantics, rudiments of quantum physics, North-Holland, 1990.

[A4] Berezin, F. A. and Shubin, M. A., The Schrödinger equations, Kluwer, 1991 (译自俄文)．

徐锡申 译

Schrödinger 绘景 [**Schrödinger representation** 或 Schrödinger picture; **Шрёдингера представление**]

量子力学中和量子场论中表示算子 A 和波函数 ψ 对时间 t 的依存关系的主要可能的（与 **Heisenberg 绘**

景(Heisenberg representation)和**相互作用绘景**(interaction, representations)一起)等价绘景中的一种. 在 Schrödinger 绘景中, 对应于物理动力学量的算子 A 并不依赖于 t; 因而 **Schrödinger 方程**(Schrödinger equation)

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}=H\psi(t) \qquad (1)$$

的解可用 **Hamilton 算子**(Hamilton operator), 它不依赖于 t, 形式上表达成下列形式

$$\psi(t)\equiv\psi_S(t)=e^{-itH/\hbar}\psi(0), \qquad (2)$$

其中 $\psi(0)$ 为初值, 并不依赖于时间, 而 Schrödinger 绘景中的波函数依赖于 t 并包含关于系统的态随时间 t 变化的全部信息. Schrödinger 绘景中算子 A_S 的平均值

$$\bar{A}\equiv\bar{A}_S=(\psi_S(t),A_S\psi_S(t))=$$
$$=(\psi(0),e^{+itH/\hbar}A_Se^{-itH/\hbar}\psi(0)). \quad (3)$$

依赖于 t, 这是由于波函数 $\psi_S(t)$ 依赖于 t. $\bar{A}$ 也可认为是含时算子 $A_H(t)$ 对不依赖于 t 的波函数 ψ_H

$$A_H(t)=e^{+itH/\hbar}A_Se^{-itH/\hbar};$$
$$\psi_H=\psi(0)=e^{itH/\hbar}\psi_S(t) \qquad (4)$$

的平均值, 即, 认为是 Heisenberg 绘景中算子的平均值. 平均值(它应该是可观察量并具有物理意义)在(4)类型的酉变换下不变的性质意味着 Schrödinger 绘景, Heisenberg 绘景和相互作用绘景是等价的.

Schrödinger 绘景是以 E. Schrödinger 的姓氏命名的, 他在 1926 年表述量子力学中以后称为 Schrödinger 方程的方程时引进这种绘景.

В. Д. Кукин 撰

【补注】 方程(2)仅对不含时 Hamilton 算子才是正确的(见 **Schrödinger 方程**(Schrödinger equation)).

徐锡申 译

Schubert 簇 [Schubert variety; Шуберта многообразие]

域 k 上 n 维向量空间 V 的具有下述性质的 m 维子空间 W 的集合; W 满足 Schubert 条件(Schubert conditions) $\dim(W\cap V_j)\geqslant j(j=1,\cdots,m)$, 这里 $V_1\subset\cdots\subset V_m$ 是 V 的子空间的一个取定的模. 在 Grassmann 坐标下这些条件可用线性方程给出. Schubert 簇是 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold) $G_{n,m}$ 的一个不可约(一般说来是奇异的)代数子簇. Schubert 簇定义了**周(炜良)环**(Chow ring) $A(G_{n,m})$ 的一个基, 且当 $k=\mathbf{C}$ 时是同调群 $H_\cdot(G_{n,m},\mathbf{Z})$ 的基.

Schubert 条件是 H. Schubert([1]) 在考虑具有给定关联性质的几何对象的计数问题时提出的. Hilbert 第 15 问题涉及到了 Schubert 所发展的计数理论的基础(见[2]).

参考文献

[1] Schubert, H., Lösung des Characteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension, *Mitt. Math. Gesellschaft Hamburg*, 1 (1889), 134 – 155.

[2] Kleiman, S. L., Problem 15. Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus, in F. E. Browder (ed.): Mathematical Development Arising from Hilbert Problems, Proc. Symp. Pure Math., Vol 28, Amer. Math. Soc., 1976, 445 – 482.

[3] Griffiths, P. and Harris, J., Principles of algebraic geometry, 1, Wiley, 1978.

[4] Hodge, W. V. D. and Pedoe, D., Methods of algebraic geometry, 2, Cambridge Univ. Press, 1954.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 Schubert 簇的概念已经被推广到半单线性代数群 G 的任何完全齐性空间. 它是 Bruhat 胞腔的 Zariski 闭包([A1]). Schubert 簇的几何在[A2], [A3]内研究.

参考文献

[A1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[A2] Demazure, M., Désingularisation des variétés de Schubert généralisés, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.*, 7 (1974), 53 – 87.

[A3] Laksnibai, V. and Seshadri, C., Geometry of G/P-V, *J. of Algebra*, **100** (1986), 462 – 557.

陈志杰 译

Schur 指数 [Schur index; Шура индекс]

【补注】 域 K 上中心单代数 A 的 Schur 指数(Schur index of a central simple algebra)见**中心单代数**(central simple algebra))是可除代数 D 的次数, 其中 $A\simeq M_n(D)$ 是 D 上全矩阵代数.

令 G 是**有限群**(finite group), K 是**域**(field)而 $\bar{K}$ 是 K 的**代数闭包**(algebraic closure). 令 V 是具有特征标 ρ 的不可约 $\bar{K}[G]$ 模(见**不可约模**(irreducible module)). 令 $K(\rho)$ 是由 K 添加 $\rho(g)$, $g\in G$, 的值而得的域. 模 V 的 Schur 指数(Schur index of the module), $m_K(V)$, (或特征标 ρ 的 Schur 指数(Schur index of the character))是 $K(\rho)$ 的最小扩张域 S 的次数, 它能使 V 降到 S 上, 即有 $S[G]$ 模 W 使 $V\simeq\bar{K}\otimes_S W$.

有限域 K 上的 Schur 指数永远是 1([A1]).

Schur 指数的基本结果是对每个 $K[G]$ 模 W, V 在 $\bar{K}\otimes_K W$ 中的重数是 $m_K(V)$ 的倍数.

对有限群 G, 域 $S\subset\bar{K}$ 是分裂域(splitting field), 如果每个不可约 $S(G)$ 模是绝对不可约的(absolutely

irreducible)，即如果 $K\otimes_S V$ 是不可约的. 上面提到的关于 Schur 指数的基本结果立刻导致 R. Brauer 结果的一个证明([A1]). 这结果是: 设 d 是有限群 G 的指数(exponent of a finite group)(即 d 是最小的自然数使得 $g^d=1$, 对所有 $g\in G$), 则 $\mathbf{Q}(1^{1/d})$ 是 G 的分裂域.

对某有限群 G, 在群代数 $K(G)$ 中作为分量出现的 K 上中心单代数的类的集合 $S(K)$ 是 K 的 **Brauer 群**(Brauer group) $\mathrm{Br}(K)$ 的子群, 称为 $\mathrm{Br}(K)$ 的 Schur 子群(Schur subgroup).

关于 $S(K)$ 的构造的结果可参见[A4].

参考文献

[A1] Brauer, R., On the representation of a group of order g in the field of g-th roots of unity, *Amer. J. Math.*, 67 (1945), 461 – 471.

[A2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962, § 90, § 41.

[A3] Huppert, B. and Blackburn, N., Finite groups, 2, Springer, 1982, § 1.

[A4] Yamada, T., The Schur subgroup of the Brauer group, Springer, 1974.

石生明 译 王 杰 校

Schur 引理[Schur lemma; Шура лемма]

1) 设 T, S 是某群或代数分别在两个向量空间 X 及 Y 中的代数地不可约的表示, 则表示 T 和 S 的任何**交结算子**(interwining operator)或是零或提供从 X 到 Y 上的一个一一映射(这时 T 和 S 等价). 这个引理是由 I. Schur 对有限维不可约表示建立的([1]). 对两个给定表示的交结算子族的描述是 Schur 引理的类似. 特别地, 下列结论常称为 Schur 引理: 设 T 和 S 是某群的不可约酉表示或某代数的对称不可约表示, 分别作用在两个 Hilbert 空间 X 和 Y上, 则从 X到 Y 中并且交结 X 和 Y 的任何闭线性算子或为零或为酉算子(这时 X 和 Y 酉等价). 对于能用直接积分展开的表示, 其交结算子族的描述称为 Schur 引理的连续类似(continuous analogue of Schur lemma).

А. И. Штерн 撰

2) 下述两个结论是 Schur 引理对作用于无限维空间的算子族的推广.

令 T_x 及 S_x 是对称环 R 的在两个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_T$ 及 $\mathscr{H}_S$ 中的表示. 令 A: $\mathscr{H}_T\to\mathscr{H}_S$ 是具有零核及稠密的定义域和值域的闭线性算子. 若关系 $S_xA\subset AT_x$ 对所有 $x\in R$ 成立, 则表示 T_x 和 S_x 是酉等价的.

令 E 是局部凸空间, R 是 E 中连续线性算子的一个代数, 它含有非零的紧算子且没有非平凡的闭不变子空间. 则与 R 中所有算子都交换的任何算子都是恒等算子的倍数.

参考文献

[1] Schur, I., Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin* (1906), 164 – 184.

[2] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本 Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[3] Наймарк, М. А., Нормированные Кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984).

[4] Наймарк, М. А., Теория представлений групп, М., 1976 (英译本: Naĭmark, M. A. and Shtern, A. I., Theory of group representations, Springer, 1982).

[5] Желобенко, Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970 (英译本: Zhelobenko, D. P., Compact Lie groups and their representations, Amer. Math. Soc., 1973).

[6] Ломоносов, В. И., 《Функц. анализ. и его прил.》, 7 (1973), 3, 53 – 56.

В. И. Ломоносов 撰

【补注】 Schur 引理有很多直接的结论. 重要结论之一为, 设 T 是域 K 上某线性空间上的代数不可约表示, 则 T 的交结算子的集合 $\mathscr{C}(T)$ 是 K 上的除环. 若 $K=\mathbf{C}$, 这就表示 $\mathscr{C}(T)=\mathbf{C}$, 即每个交结算子是恒等算子的倍数. 若 $K=\mathbf{R}$, 这就表示 $\mathscr{C}(T)=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 或 H, 四元数的 $\mathbf{R}$ 代数.

参考文献

[A1] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

[A2] Serre, J. P., Linear representations of finite groups, Springer, 1982 (中译本: J. P. 塞尔, 有限群的线性表示, 科学出版社, 1982).

[A3] Rickart, C. E., General theory of Banach algebras, v. Norstrand, 1960.

[A4] Huppert, B., Endliche Gruppen, I, Springer, 1967 (中译本: 贝・胡佩特, 有限群, I, 上、下册, 福建人民出版社, 1992).

[A5] Bourbaki, N., Algèbre, Eléments de mathématique, Hermann, 1958. Chapt. 8. Modules et anneaux semi-simples.

石生明 译 王 杰 校

Schur 乘子[Schur multiplicator 或 Schur multiplier; Шура мультипликатор], 群 G 的

上同调群(cohomology group) $H^2(G,\mathbf{C}^*)$, 其中 $\mathbf{C}^*$ 是复数的乘法群, 且 G 在 $\mathbf{C}$ 上平凡作用. Schur 乘子是 I. Schur([1]) 在他研究群的有限维复射影表示时引入的(见**射影表示**(projective representation)). 设 ρ: $G\to\mathrm{PGL}(n)$ 是这样的表示, 则 ρ

可解释为映射 $\pi: G \to \mathrm{GL}(n)$ 满足

$$\pi(\sigma)\pi(\tau)=a_{\sigma,\tau}\pi(\sigma\tau),$$

其中 $a_{\sigma,\tau}$ 是 2 上闭链，取值于 $\mathbf{C}^*$. 特别地，射影表示 ρ 是**线性表示**（linear representation）π 的射影化，当且仅当上闭链 $a_{\sigma,\tau}$ 决定群 $H^2(G, \mathbf{C}^*)$ 的平凡元. 若 $H^2(G, \mathbf{C}^*)=0$，则称 G 为在 Schur 意义下的闭群（closed group in the sense of Schur）. 若 G 是有限群，则有自然同构

$$H^2(G, \mathbf{C}^*) \cong H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \cong H^3(G, \mathbf{Z}).$$

令 $M(G)=H^{-3}(G, \mathbf{Z})=\mathrm{Char}(H^3(G, \mathbf{Z}))$. 设给定有限群 G 的中心扩张

$$1 \to A \to F \to G \to 1, \qquad (*)$$

则有自然映射 $\varphi: M(G) \to A$，它的象和 $A \cap [F, F]$ 重合. 由扩张 $(*)$ 确定的具有 $H^3(G, A)$ 中元素的上积诱导出映射 $H^{-3}(G, \mathbf{Z}) \to H^{-1}(G, A)$，而 φ 就与它重合. 反之对任何子群 $C \subset M(G)$，存在扩张 $(*)$ 使得 $\mathrm{Ker}\,\varphi = C$. 若 $G=[G, G]$，则扩张 $(*)$ 由同态 φ 唯一决定. 若 φ 是单同态，则 G 的任何射影表示由 F 的某个线性表示所诱导.

参考文献

[1] Schur, I., Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. Reine Angew. Math.*, **127** (1904), 20 − 50.

[2] MacLane, S., Homology, Springer, 1975.

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gruenberg, G., Cohomological topics in group theory, Lecture notes in math., 143, Springer, 1970.

[A2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Methods of representation theory, 1, Wiley (Interscience), 1981.

石生明 译 王 杰 校

Schur 环 [Schur ring; Шура кольца]

【补注】 群 G 的**群代数**（group algebra）$\mathbf{Z}[G]$ 的某类子环.

令 G 是**有限群**（finite group），$\pi=(D_1, \cdots, D_n)$ 是 G 的分划. 对每个 $D \subset G$，令 $\overline{D}=\sum_{g\in D} g$ 及 $D^{-1}=\{g^{-1}, g\in D\}$. 设对每个 $D \in \pi$ 有 $D^{-1}\in\pi$ 及对所有 $D_i, D_j \in \pi$ 有 $\overline{D}_i\overline{D}_j=\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \overline{D}_k$，$c_{ij}^k \in \mathbf{Z}$. 则 $\overline{D}_1, \cdots, \overline{D}_n$ 形成 $\mathbf{Z}[G]$ 的某子环的基（$\mathbf{Z}$ 上）. 这种子环称为 Schur 环. 单 Schur 环（unitary Schur ring）是含 $\mathbf{Z}[G]$ 的单位元的 Schur 环.

$\mathbf{Z}[G]$ 的一个子环 S 是 G 上 Schur 环，当且仅当对所有 $x\in S$，有 $x^{(-1)}\in S$（其中若 $x=\sum a_g g$，则 $x^{(-1)}=\sum a_g g^{-1}$）且它在 Hadamard 积（Hadamard product）$(\sum a_g g)(\sum b_g g)=\sum a_g b_g g$ 下封闭.

对称 Schur 环（symmetric Schur ring）S 是对所有 $x\in S$ 有 $x^{(-1)}=x$ 的 Schur 环.

历史上，Schur 环是 I. Schur([A1]) 和 H. Wielandt ([A2]) 在进行与置换群有关的研究时首先研究的，H. Wielandt 赋以上述名称；Schur 环对群论的应用可参见 [A3] − [A5]. 近年来发现它们与某些组合结构如结合方案（association schemes）及强正则图（strongly regular graphs）有联系（[A6], [A7]）.

参考文献

[A1] Schur, I., Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissenschaft. Berlin. Phys.-Math. Kl.*, (1933), 598 − 623.

[A2] Wielandt, H., Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen Ⅱ, *Math. Z.*, **52** (1949), 384 − 393.

[A3] Tamaschke, O., Schur-Ringe, B. I. Mannheim, 1970.

[A4] Scott, W., Group theory, Prentice-Hall, 1964.

[A5] Wielandt, H., Finite permutation groups, Acad. Press, 1964（中译本：H. 维兰特，有限置换群，科学出版社，1984）.

[A6] Bannai, E. and Ito, T., Algebraic combinatorics 1: Association schemes, Benjamin/Cummings, 1984.

[A7] Ma, S. L., On association schemes, Schur rings, strongly regular graphs and partial difference sets, *Ars. Comb.*, **27** (1989), 211 − 220.

石生明 译 王 杰 校

Schur 定理 [Schur theorems; Шура теоремы]

由 I. Schur 得到的（[1]）关于求解有界解析函数系数问题（coefficient problem）的定理. 设 B 是 $|z|<1$ 内满足条件 $|f(z)|\leqslant 1$ 的正则函数 $f(z)=c_0+c_1z+\cdots$ 的类. 令 $\mathbf{C}^n (n\geqslant 1)$ 是 n 维复 Euclid 空间，其点为 n 个复数的组 $(c_0, \cdots, c_{n-1})$；并令 $B^{(n)}$ 是使得数 $c_0, \cdots, c_{n-1}$ 为 B 中某个函数的前 n 个系数的点 $(c_0, \cdots, c_{n-1})\in\mathbf{C}^n$ 的集合. 集合 $B^{(n)}$ 在 $\mathbf{C}^n$ 中是闭、有界且凸的. 下述定理成立.

Schur 第一定理（Schur first theorem）：对于 $B^{(n)}$ 边界上的点 $(c_0, \cdots, c_{n-1})$，在 B 中只有形如

$$\frac{\overline{\alpha_{n-1}}+\overline{\alpha_{n-2}}z+\cdots+\overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{n-1}z^{n-1}}$$

的有理函数与之对应.

Schur 第二定理（Schur second theorem）：$(c_0, \cdots, c_{n-1})$ 为 $B^{(n)}$ 的内点的必要充分条件是下列不等式对 $k=1, \cdots, n$ 成立:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 & c_0 & c_1 & \cdot & c_{k-1} \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 & c_0 & \cdot & c_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & 0 & \cdot & c_0 \\ \overline{c}_0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \overline{c}_1 & \overline{c}_0 & \cdot & 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{c}_{k-1} & \overline{c}_{k-2} & \cdot & \overline{c}_0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Schur 第二定理提供了有界函数系数问题在系数域内点情形下完整的解.

参考文献

[1] Schur, I., Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises berchränkt sind, *J. Reine. Angew. Math.*, **147** (1917), 205－232.

[2] Bieberbach, L., Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Teubner, 1931.

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

Ю. Е. Аленицын 撰

【补注】

参考文献

[A1] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

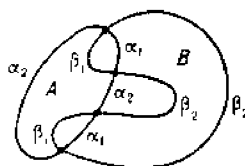
[A2] Garnett, J. B., Bounded analytic functions, Acad. Press, 1981, 40.

沈永欢 译

Schwarz 交替法 [Schwarz alternating method; Шварца альтернирующий метод]

求 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 解的一般方法之一; 它使得能得到在域 D 中椭圆型微分方程 Dirichlet 问题的解, 域 D 可以表示为有限个域 D_j 的并, 在每一个域 D_j 中 Dirichlet 问题的解是已知的. H. A. Schwarz (1869, 见[1]) 的研究和后来一些其他作者的研究致力于这个方法, 是为了求平面域中 **Laplace 方程** (Laplace equation) Dirichlet 问题的解的. 对在两个平面域的并中 Laplace 方程的最简单情形应用的 Schwarz 交替法的主要思想如下:

令 A 和 B 是平面上有非空交集的两个域, 且对 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的解在每个域中是已知的. 例如, 如果 A 和 B 是圆盘, 那么在每个域中 Dirichlet 问题的解由 **Poisson 积分** (Poisson integral) 给出. 然后, 令 D 是 A 和 B 的并, 对它来求 Dirichlet 问题的解 (见图). 令 α 表示 A 的边界, 令 α_1 表示 α 在 B 中的部分 (它们是 D 中的内部), 且令 α_2 是其余部分, 因此, $\alpha=\alpha_1\cup\alpha_2$. 同样, β 是 B 的边界, β_1 是它落入 A 中的部分 (它们也是 D 中的内部), 而 β_2 是其余部分, 即 $\beta=\beta_1\cup\beta_2$. 于是 D 的边界 γ 可以表成 $\gamma=\alpha_2\cup\beta_2$ 的形式.



现在, 在 γ 上已给一连续函数 f, 要在 D 中求一调和函数 ω, 使得它在闭域 $\overline{D}$ 上是连续的, 且在 γ 上取 f 的值. f 在 α_2 上的取值可以连续拓展到整个边界 α, 对这些边界值可以在 A 中求出 Dirichlet 问题的解 u_1. u_1 在 β_1 上的值和 f 在 β_2 上的值一起现在组成 β 上的连续函数, 用它们可以求出 B 中 Dirichlet 问题的解 v_1. 进一步, 再根据 f 在 α_2 上的值和 v_1 在 α_1 上的值在 A 中构造 Dirichlet 问题的解 u_2, 等等, 如此继续下去. 所求解有形式

$$\omega=\lim_{n\to\infty}u_n \quad \text{在 } A \text{ 中}$$

和

$$\omega=\lim_{n\to\infty}v_n \quad \text{在 } B \text{ 中}.$$

使用具有分片连续边界数据的 Dirichlet 问题的有界解, 使得可以选择在边界的其余部分上取值为零, 而不用担心关于 f 的拓展的连续性.

类似于 Schwarz 交替法的一个方法 (见[2]) 可以应用于求 Dirichlet 问题在两个域 A 和 B 的交集中的解, 只要这问题对 A 和对 B 的解是已知的.

Schwarz 交替法还用来解在某些附加条件下一般椭圆型方程 (包括高于二阶的方程) 的更加一般性质的边值问题 ([3]); 在空间的域中亦然.

Schwarz 交替法对在 Riemann 曲面上构造不同的调和函数 (具有预先规定的奇性) 是特别重要的 ([4]).

参考文献

[1] Schwarz, H. A., Gesamm, math. Abhandl., 2, Springer, 1890.

[2] Neumann, C., *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Nat. Kl.*, **22** (1870), 264－321.

[3] Канторович, Л. В., Крылов, В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.-Л., 1962, гл. 7 (英译本: Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., Approximate methods of higher analysis, Noordhoff, 1958).

[4] Nevanlinna, R., Uniformisierung, Springer, 1967.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 最近, 这些思想在数值分析学家中引起了新的兴趣. 他们主要用来在复杂域上解边值问题. 这样的域被分解成更小、更简单的域; 因此这样的方法被称为区域分解法 (domain decomposition methods).

在边值问题的研究中, 对 Schwarz 交替法的更精细的应用见[A1], 200－203.

参考文献

[A1] Helms, L. L., Introduction to potential theory, Wiley-Interscience, 1969.

[A2] Chan, T. F., et al.. Domain decomposition methods for partial differential equations, SIAM, 1990.

孙和生 译 陆柱家 校

Schwarz 微分 [Schwarz differential; Шварца дифференциал]

n 阶 **Schwarz 对称导数** (Schwarz symmetric derivative) 的主部. 更确切地说, 如果对于实变函数 $f(x)$, 有

$$\Delta^n f(x, \Delta x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k f\left[x + \frac{n-2k}{2} \Delta x \right] =$$

$$= A \cdot (\Delta x)^n + o((\Delta x)^n),$$

则表达式 $A \cdot (\Delta x)^n$ 称为 n 阶 Schwarz 微分. 当提到 Schwarz 微分而未指明阶数时, 通常假定 $n = 2$.

Т. П. Лукашенко 撰 杜小杨 译

Schwarz 方程 [Schwrz equation; Шварца уравнение]

三阶非线性常微分方程

$$\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'} \right)^2 = 2I(t). \qquad (1)$$

(1)的左端称为函数 $z(t)$ 的 Schwarz 导数 (Schwarzian derivative), 记为 $\{z, t\}$. H. A. Schwarz 在其研究中 ([1]) 应用了这一方程.

如果 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 是二阶线性微分方程

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \ p \in C^1, \ q \in C \qquad (2)$$

的**基本解组** (fundamental system of solutions), 则在 $x_2(t) \neq 0$ 的任一区间内, 函数

$$z(t) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)} \qquad (3)$$

满足 Schwarz 方程 (1), 其中

$$I(t) = q(t) - \frac{1}{4} p^2(t) - \frac{1}{2} p'(t)$$

是所谓线性方程 (2) 的不变量 (invariant of the linear equation). 反之, Schwarz 方程 (1) 的任一解可表示为 (3) 的形式, 其中 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 是 (2) 的线性无关的解. 复平面上具有有理右端的 Schwarz 方程的解与描述把上半平面共形映射到由有限条直线段或圆弧围成的多边形的问题紧密相联.

参考文献

[1] Schwarz, H. A., Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elemetnts darstellt (nebst zwei Figurtafeln), *J. Reine Angew. Math.*, **75** (1873), 292 - 335

[2] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: В. В. 高鲁别夫, 微分方程解析理论讲义, 高等教育出版社, 1956).

Н. Х. Розов 撰

【补注】 关于 Schwarz 方程同共形映射的关系, 见 [A2] 和 **Christoffel-Schwarz 公式** (Christoffel-Schwarz formula).

参考文献

[A1] Hille, E.. Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1969.

[A2] Nehari, Z.. Conformal mapping, Dover, reprint, 1975. Chapt. 7, §7.

沈永欢 译

Schwarz 公式 [Schwarz formula; Шварца формула]

极小曲面 (minimal surface) 的一个公式, 其表达式是

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathrm{Re}\left\{ \mathbf{r}(t) + i\int [\mathbf{n}, d\mathbf{r}] \right\},$$

其中 $\mathbf{r}(u, v)$ 是极小曲面 F 的位置向量, $\mathrm{Re}\{\mathbf{r}(t)\}$ 是 F 上任意一条非封闭的解析 (关于 t) 曲线 L 的位置向量, $\mathbf{n}(t)$ 是 F 的沿 L 的单位法向量 (解析地依赖于 t). 在积分之后, t 用 $t = u + iv$ 代入. 此公式由 H. A. Schwarz 所建立 (1875); 它给出了 **Björling 问题** (Björling problem) 的显式解.

И. Х. Сабитов 撰 陈维桓 译

Schwarz 函数 [Schwarz function; Шварца функция], Riemann-Schwarz 函数 (Riemann-Schwarz function)

实现圆弧三角形到上半平面 (或单位圆盘) 的**共形映射** (conformal mapping) 的**解析函数** (analytic function), 它在无约束**解析延拓** (analytic continuation) 下保持单值. Schwarz 函数是一个**自守函数** (automorphic function). 相应的群依赖于被映射的三角形的结构形式. 单值性要求仅对于三角形的角度为 π/ν_1, π/ν_2, π/ν_3 的情形才得以满足, 此处 ν_1, ν_2 与 ν_3 是某些特别选定的自然数.

若 $1/\nu_1 + 1/\nu_2 + 1/\nu_3 = 1$, 则得到直边三角形, 仅有的可能性为 $\nu_1 = \nu_2 = 2$, $\nu_3 = \infty$ (半带域); $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 6$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = \nu_3 = 4$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 3$. 对于所有这些情形, Schwarz 函数可用**三角函数** (trigonometric functions) 或 **Weierstrass 椭圆函数** (Weierstrass elliptic functions) 表示, 并且是自守函数: 它们的群是 Euclid 平面的运动群.

若 $1/\nu_1 + 1/\nu_2 + 1/\nu_3 > 1$, 则有如下可能: $\nu_1 = \nu_2 = 2$, ν_3 任意; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = \nu_3 = 3$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 4$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 5$. 在所有这些情形, Schwarz 函数是旋转自守函数; 它们的群是球面的有

限运动群．由于该群与正则多边形之间的关系的一个结果，这样的 Schwarz 函数亦称多面体函数（polyhedral function）．

最后，若 $1/\nu_1+1/\nu_2+1/\nu_3<1$，则可以有无穷多个不同的三角形，因为 ν_1, ν_2, ν_3 可随意地增加．此时，Schwarz 函数是具有连续奇异曲线（圆周或直线）的自守函数．特别，对 $\nu_1=2, \nu_2=3, \nu_3=\infty$ 以及 $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\infty$（角度均为 0 的圆弧三角形）的情形分别引出模函数（modular function）$J(z)$ 与 $\lambda(z)$．H．A．Schwarz（[1]）对 Schwarz 函数作了研究．

参考文献

[1] Schwarz，H．A．，Ueber diejenigen Fälle，in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt（nebst zwei Figurtafeln），*J．Reine Angew．Math*．，75（1873），292 － 335．

[2] Голубев，В．В．，Лебция по аналитической теории дифференциальных уравнений，2 изд．，М．-Л．，1950．

[3] Ford，L．R．，Automorphic functions，Chelsea，reprint，1951．

Е．Д．Соломенцев 撰

【补注】 在直边三角形的情形，该函数亦称为 Schwarz 三角函数（Schwarz triangle functions）（见 [A1]，[A2]）或 Schwarz 的 s 函数（[A3]）．这些函数可以被表示成**双曲几何方程**（hypergeometric equation）的两个独立解的商（方程的系数有用三角形角度表达的显式表示式），见 [A3]，206 页．[A3] 中（第五章第 7 节）还讨论了圆弧多边形到半平面的共形映射．

参考文献

[A1] Ahlfors，L．V．，Complex analysis，McGraw-Hill，1979，p．241．

[A2] Carathéodory，C．，Theory of functions，Chelsea，reprint，1981，Part 7，Chapts．2 － 3．

[A3] Nehari，Z．，Conformal mapping，Dover．reprint，1975．

杨维奇 译

Schwarz 积分｛Schwarz integral；Шварца интеграл｝

一个依赖于参数的积分，基于把单位圆盘 D 内的**解析函数**（analytic function）$f(z)=u(z)+iv(z)$ 通过其实（或虚）部 u（或 v）在边界圆周 C 上的边界值来表示以给出 Schwarz 问题（Schwarz problem）的解（见 [1]）．

设在单位圆周 $C=\{z: z=e^{i\varphi}, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ 上给定了一个连续实值函数 $u(\varphi)$（或 $v(\varphi)$），则 Schwarz 积分公式（Schwarz integral formulas）有如下形式：

$$f(z)=Su(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C u(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+ic= \quad (*)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}u(\varphi)d\varphi+ic,$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_C v(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+c_1=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}v(\varphi)d\varphi+c_1,$$

其中 $z=e^{i\theta}$，$t=e^{i\varphi}$，c 和 c_1 是任意实常数；此积分定义了一个解析函数 $f(z)=u(z)+iv(z)$，其实部的边界值（或虚部的边界值）与 $u(\varphi)$（或 $v(\varphi)$）相同．Schwarz 积分（*）与 **Poisson 积分**（Poisson integral）紧密相联．表示式

$$\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+re^{i\theta}}{e^{i\varphi}-re^{i\theta}}$$

常称为 Schwarz 核（Schwarz kernel），而（*）的第一个公式中的积分算子 S 称为 Schwarz 算子（Schwarz operator）．这些概念可推广到复平面中任意区域的情形（见 [3]）．Schwarz 积分及其推广在**解析函数论的边值问题**（boundary value problems of analytic function theory）（亦见 [3]）和研究**解析函数的边界性质**（boundary properties of analytic functions）（亦见 [4]）时是非常重要的．

在应用积分公式（*）时，出现了一个十分重要但又比较困难的问题，即通过给定的实部边值 $u(\varphi)$ 表示虚部 $v(z)$ 以及完全解析函数 $f(z)$ 的边值（或通过给定的虚部边值 $v(\varphi)$ 表示实部 $u(z)$ 以及完全解析函数 $f(z)$ 的边值）的存在性及表达式问题．如果给定的函数 $u(\varphi)$ 和 $v(\varphi)$ 在 C 上满足 Hölder 条件，则相应的边值 $v(\varphi)$ 和 $u(\varphi)$ 由 Hilbert 公式（Hilbert formulas）

$$v(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\alpha)\cot\frac{\alpha-\varphi}{2}d\alpha+c,$$

$$u(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\alpha)\cot\frac{\alpha-\varphi}{2}d\alpha+c_1$$

表示；其中的积分是奇异积分并在 Cauchy 主值意义下存在（见 [3]，亦见 **Hilbert 奇异积分**（Hilbert singular integral））．

参考文献

[1] Schwarz，H．A．，Ges．Math Abh．，2，Berlin，1890．

[2] Бицадзе，А．В．，Основы теории аналитических функций комплексного переменного，2 изд．М．，1972．

[3] Гахов，Ф．Д．，Краевые задачи，3 изд．，М．，1977（英译本：Gakhov，F．D．，Boundary value pro-

blems. Pergamon, 1966).

[4] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956). Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 Schwarz 问题与下述 **Dirichlet 问题** (Dirichlet problem) 紧密相联: 给定 $f(z)$ 边值的实部, 由此求出**调和函数** (harmonic function) $u(x, y)$ 从而根据 **Cauchy-Riemann 条件** (Cauchy-Riemann conditions) 由 $u(x, y)$ 确定其共轭调和函数 $v(x, y)$; 见[3], 27.2 节.

沈永欢 译

Schwarz 核 [**Schwarz kernel; Шварца ядро**], 圆盘 $|z|<1$ 中的函数

$$T(z;\zeta)=\frac{\zeta+z}{\zeta-z},\ \zeta=e^{i\sigma},\ 0\leqslant\sigma\leqslant 2\pi.$$

设 D 是以 Γ 为边界的有限单连通或多连通区域, $G(z,\zeta)$ 是 D 中关于 **Laplance 算子** (Laplace operator) 的 **Green 函数** (Green function), 实值函数 $H(z;\zeta)$ 是 $G(z;\zeta)$ 的共轭, 则函数 $M(z;\zeta)=G(z;\zeta)+iH(z;\zeta)$ 称为区域 D 的复 Green 函数 (complex Green function). 函数 $M(z;\zeta)$ 是 z 的解析但多值 (当 D 为多连通时) 的函数, 是 ζ 的单值但非解析函数. 函数

$$T(z;\zeta)=\frac{\partial M(z;\zeta)}{\partial\nu}$$

(其中 ν 是 $\zeta\in\Gamma$ 处的内法线方向) 称为 D 的 Schwarz 核 (Schwarz kernel).

设 $F(z)=u(z)+iv(z)$ 是在 D 内没有奇点的解析函数, u 在 $D\cup\Gamma$ 上单值且连续, 则下述公式成立:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}u(\zeta)T(z;\zeta)d\sigma+iv(a),$$

其中 $a\in D$ 是定点, $v(a)$ 是函数 $v(z)$ 的一个分支在 a 处的值.

参考文献

[1] Забрейко, П. П., и т. д., Интегральные уравнения, М., 1968 (英译本: Zabrejko [Zabreĭko], et al., Integral equations, Noordoff, 1975).

[2] Михлин, С. Г., Интегральные уравнения ···, 2 изд., М.-Л., 1949 (英译本: Mikhlin, S. G., Linear integral equations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1960). Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 当然应对 Γ 假定某些正则性条件, 使得能确实定义法向导数 $\partial M/\partial\nu$. 注意 T 的实部是 Poisson 核.

亦见 **Schwarz 积分** (Schwarz integral).

沈永欢 译

Schwarz 引理 [**Schwarz lemma; Шварца лемма**]

设 $f(z)$ 是圆盘 $E=\{|z|<1\}$ 上的全纯函数, 满足 $f(0)=0$ 且在 E 内 $|f(z)|\leqslant 1$; 则

$$|f(z)|\leqslant|z|,\ 且\ |f'(0)|\leqslant 1. \tag{1}$$

若等号对某个 $z\neq 0$ 成立, 则 $f(z)=e^{i\alpha}z$, 其中 α 是实常数 (Schwarz 引理的经典形式 (classical form of the Schwarz lemma)). 这一引理由 H. A. Schwarz 所证明 (见[1]).

已知 Schwarz 引理有若干不同的陈述方式. 例如下面的 Schwarz 引理的不变形式 (invariant form of the Schwarz lemma): 若函数 $f(z)$ 在圆盘 E 内全纯且在 E 内 $|f(z)|\leqslant 1$, 则对于任何点 $z_1, z_2\in E$ 有

$$r_E(f(z_1), f(z_2))\leqslant r_E(z_1, z_2), \tag{2}$$

其中 $r_E(a, b)$ 是 E 内两点 a, b 之间的双曲距离 (见**双曲度量** (hyperbolic metric)); 而且对于 $z\in E$ 有

$$\frac{|df(z)|}{1-|f(z)|^2}\leqslant\frac{|dz|}{1-|z|^2}. \tag{3}$$

(2) 与 (3) 中等号仅当 $f(z)$ 是 E 到自身的双向全纯映射时成立.

不等式 (3) 亦称为 Schwarz 引理的微分形式 (differential form of the Schwarz lemma). 积分该不等式引出 Schwarz 引理的如下陈述方式: 若圆盘 E 经全纯函数 $f(z)$ 变换使得对于 $z\in E$ 有 $|f(z)|<1$, 则 E 中任何弧段的双曲长度减小, 但 $f(z)$ 是 E 到自身的单叶共形映射的情形除外, 在此情形点与点的双曲距离保持不变.

双曲度量原理 (hyperbolic metric principle of the) 是 Schwarz 引理的不变形式到可以定义双曲度量的多连通区域的推广. 已知对于 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 中全纯函数有类似的 Schwarz 引理 (见[4]).

参考文献

[1] Schwarz, H. A., Gesamm. math. Abhandl., 1-2, Springer, 1890.

[2] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[3] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文).

[4] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976. Г. В. Кузьмина 撰

【补注】 Schwarz([1]) 仅就单叶函数阐述了这一结

果. 关于如上所述的一般形式的明确阐述、命名及系统的应用要归功于 C. Carathéodory ([A2]). 关于这一结果的历史, 见[A3], 191 − 192 页.

不等式 (2) 和 (3) 亦称为 Schwarz-Pick 引理 (Schwarz-Pick lemma). 不等式 (2) 可表示成如下等价形式

$$\frac{|f(z)-f(w)|}{|1-f(z)\overline{f(w)}|} \leqslant \frac{|z-w|}{|1-z\overline{w}|} .$$

关于 Schwarz 引理的更宽泛的处理及其许多推广与应用见[A1].

参考文献

[A1] Dineen, S., The Schwarz lemma, Oxford Univ. Press, 1989.

[A2] Carathéodory, C., Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, *Math. Ann.*, **72** (1912), 107 − 144.

[A3] Burchel, R. B., An introduction to classical complex analysis, 1, Birkhäuser, 1979.

[A4] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, 1967(英译本: Markushevich, A. I., Theory of functions of a complex variable, 1, Chelsea, 1977, 381 页, 定理 17.8).

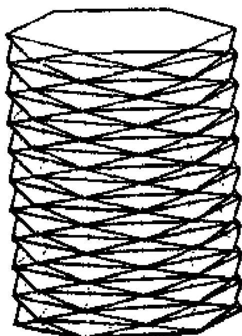
[A5] Ahlfors, L. V., Conformal invariants: topics in geometric function theory, McGraw-Hill, 1973.

[A6] Garnett, J., Bownded analytic functions, Acad. Press, 1981.

[A7] Rudin, W., Function theory in the unit ball of C^n, Springer, 1980.

杨维奇 译

Schwarz 曲面 [Schwarz surface; Шварца поверхность] 内接于一段有限圆柱面内的一个多面体的侧面, 使得在适当选取参数之后, 一列这种曲面的面积能够趋于任意的极限 (包括无穷大在内).



Schwarz 曲面 (见图) 的构作使得当它的各个面的最大直径趋于零时, 它们就其在空间中的位置而言与柱面的切平面完全不接近. 这样, Schwarz 曲面的面就不能以逐渐增大的精确性来近似柱面的面积元.

该曲面由 H. A. Schwarz 在 1880 年引进.

参考文献

[1] Fichtenholz, G. M., Differential und Integralrechnung, 3, Deutsch. Verlag Wissenschaft., 1964.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, I, Springer, 1987, p. 263 (译自法文).

[A2] Berger, M., and Gostiaux, B., Differential Geometry, Springer, 1988, p. 208 (译自法文).

陈维桓 译

Schwarz 对称导数 [Schwarz symmetric derivative; Шварца симметрическая производная], 函数 f 在点 x_0 处的

数值

$$D^2 f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} ;$$

有时称为 **Riemann 导数** (Riemann derivative) 或二阶对称导数 (second symmetric derivative). 由 B. Riemann 于 1854 年首次引入 (见[2]); 并由 H. A. Schwarz 加以研究 ([1]). 更一般的 n 阶对称导数 (symmetric derivative of order n)

$$D^n f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(x+(n-2k)h/2)}{h^n}$$

也称为 Schwarz 对称导数.

参考文献

[1] Schwarz, H. A., Beweis eines für die Theorie der trigonometrischen Reihen in Betracht kommenden Hülfssatzes, in Gesammelte Math. Abh., Chelsea, repint, 1972, 341 − 343.

[2] Riemann, B., Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, in H. Weber (ed.): Gesammelte Math. Werke, Dover, reprint, 1953, 227 − 271.

[3] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974, 279 − 298 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 高等教育出版社, 1955).

[4] Бари, Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, 185 − 201 (英译本: Bary, N. K. [Bari, N. K.], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964).

[5] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 − 2, Cambri-

dge Univ. Press, 1988. Г. П. Лукашенко 撰

【补注】 本条的概念也用一般导数(general derivative)这个名称. 引入这个概念的一条自然途径是从中心差分 $f(x_0+h/2)-f(x_0-h/2)$ 开始, 并定义一阶对称导数(first symmetric derivative)为

$$Df(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h/2)-f(x_0-h/2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h f(x_0)}{h},$$

然后定义 $D^n=D(D^{n-1})$, $n\geqslant 1$, $D^0f=f$.

参考文献

[A1] Rudin, W., Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1974 (中译本: W. 卢丁, 实分析和复分析, 人民教育出版社, 1981). 沈永欢 译

Schwarz 对称定理 [**Schwarz symmetry theorem**; **Шварца теорема симметрии**]

如果一个**极小曲面**(minimal surface)经过一条直线 l, 则 l 是它的一条对称轴. 该定理蕴含着: 如果一个极小曲面的边界含有一段直线 l, 则该曲面能够越过这段直线作关于 l 对称的延拓.

И. Х. Сабитов 撰 陈维桓 译

Schwarz 导数 [**Schwarzian derivative** 或 Schwarz derivative; **Шварца дифференциальный параметр**], Schwarz 微分参数(Schwarzian differential parameter), 复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 的

微分表达式

$$\{f,z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2=$$

$$=\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]'-\frac{1}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]^2;$$

最早出现于把多边形映射到圆盘上的**共形映射**(conformal mapping)的研究中, 特别地出现于 H. A. Schwarz 的研究中([1]).

Schwarz 导数最重要的性质是它在函数 $f(z)$ 的分式线性变换(fractional-linear transformation)或 Möbius 变换(Möbius transformation)下的不变性, 即若

$$g(z)=\frac{af(z)+b}{cf(z)+d}\ (ad-bc\neq 0),$$

则 $\{f,z\}=\{g,z\}$. Schwarz 导数的应用特别与单叶解析函数的问题有关. 例如, 如果 $f(z)$ 是圆盘 $D=\{z:|z|<1\}$ 内的单叶解析函数且 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 则

$$|\{f,z\}|\leqslant\frac{6}{(1-|z|^2)^2},\ |z|<1.$$

反之, 如果 $f(z)$ 在 D 内正则, 且有

$$|\{f,z\}|\leqslant\frac{2}{(1-|z|^2)^2},\ |z|<1,$$

则 $f(z)$ 是 D 内的**单叶函数**(univalent function), 此时不可能增加常数 2 的值.

参考文献

[1] Schwarz, H. A., *Gesamm. math. Abhandl.*, 2, Springer, 1890.

[2] Nevanlinna, R., Analytic functions, Springer, 1970 (译自德文).

[3] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956). Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 上述以 Schwarz 导数表述的单叶性的必要条件和充分条件分别归于 W. Kraus([A1]) 和 Z. Nehari([A2]); 关于进一步的讨论, 见[A3], pp. 258-265. [A4] 中(pp. 50-58)有关于 Schwarz 导数的出色讨论.

参考文献

[A1] Kraus, W., Ueber den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhägenden Bereiches mit der Kreisabbildung, *Mitt. Math. Sem. Giessen*, **21** (1932), 1-28.

[A2] Nehari, Z., The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 545-551.

[A3] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983, p. 258.

[A4] Lehto, O., Univalent functions and Teichmüller spaces, Springer, 1987.

[A5] Nehari, Z., Conformal mapping, Dover, reprint, 1975. 沈永欢 译

Schwarzschild 场 [**Schwarzschild field**; **Шварцшильда поле**]

一个孤立点物体的引力场(见引力(gravitation)), 其时空特性由 **Schwarzschild 度规**(Schwarzschild metric)确定.

Д. Д. Соколов 撰 徐锡申 译

Schwarzschild 度规 [**Schwarzschild metric**; **Шварцшильда метрика**]

真空 Einstein 方程的四维解, 它是静态、球对称的, 在无穷远处趋于 **Minkowski 空间**(Minkowski space), 由 K. Schwarzschild 在 1916 年发现.

【补注】 在半径函数作适当法化之后, 上述条件意味着 Schwarzschild 度规的下列坐标表示:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r}\right]dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + $$
$$+ r^2 d\sigma^2,$$

其中 $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ 是标准单位球面的线元，M 是任意的正常数. 这描述了只含有单颗星球的宇宙的相对论模型. 在 Schwarzschild 宇宙中重力源是该星球自身，它是不属于这个时空的.

参数 r 称为半径函数 (radius function)，假定为落在开区间 $(0, \infty)$ 内，有一个例外值. 值 $r_M = 2M$ 称为该模型的 Schwarzschild 半径 (Schwarzschild radius)，在此处上面给出的线元是退化的. 因此这些点应该从度规的定义域中去掉. $r > r_M$ 的部分称为外 Schwarzschild 时空 (exterior Schwarzschild space-time)，同时对于 $r < r_M$ 得到内 Schwarzschild 时空 (interior Schwarzschild space-time)，或 Schwarzschild 黑洞 (Schwarzschild black hole). 设置重力常数和光速两者均为 1, M 可以和重力源的质量等同. 例如，将这个模型用于地球或太阳，它们的 Schwarzschild 半径可观地小于它们的几何半径.

对于外时空部分，半径函数沿着类空方向增长；对于内时空部分，这是不对的. 在那里 r 曲线的切向量是类时的，而 t 曲线的切向量是类空的. 在这个区域中，对于 r 的半径函数和对于 t 的时间函数等术语造成对这些函数的错觉. 无论如何，两者都满足真空 Einstein 方程. 把外时空和内时空分离开来的超曲面 $r = r_M$ 只是从线元的统一表示所产生的. 它不能被该模型的任何一条世界线所经过.

Schwarzschild 时空的两部分能够等距地重现为所谓的 Kruskal 时空 (Kruskal space-time) 的开区域. 在这里，它们被超曲面 H 所分离，而在 H 上度规仍旧是非退化的. 这个时空定义为卷积 $K = Q \times_r S^2$，其中 S^2 有标准的二维单位球面的度规，Q 是 (u, v) 平面上由 $uv > -2M/e$ 定义的区域，具有不定线元 ds^2 为

$$ds^2 = 2F(r)du\,dv,$$

这里

$$F(r) = \frac{8M^2}{r^2}e^{1-r/2M};$$

坐标 u, v 与 Schwarzschild 坐标 r, t 的联系是

$$u \cdot v = (r - 2M)e^{r/2M-1},$$
$$\ln|v| - \ln|u| = \frac{t}{2M}.$$

在这个图象中，外时空用不等式 $u > 0$, $v > 0$ 来描述，而内时空 (Schwarzschild 黑洞) 由 $u < 0$, $v > 0$ 给出. 分离超曲面 H 由 $u = 0$ 定义，它对应于 $r = 2M$，称为黑洞的视界 (horizon).

从外时空出发的指向未来的世界线 (光子或物质质点) 有两种选择：对于所有未来时间，它保持在黑洞外面，或者在某个时刻与视界横截相遇，然后对于所有未来时间保持在黑洞内部. 没有任何指向未来的世界线能逃离黑洞. 而且，Schwarzschild 度规的 Kruskal 延拓有两个附加部分，它们能够从上面描述的两部分在 (u, v) 平面内作角度为 π 的旋转得到. 这两部分能视作时间反向的 Schwarzschild 时空，把黑洞变成白洞 (white hole).

Kruskal 时空是不可延拓的，即不存在任何更大的时空包含 Kruskal 时空作为它的开区域. 但是，它不是测地完全的. 与 Schwarzschild 时空一样，存在因果测地线，它的自然参数不能延拓到所有的实数. 这意味着存在自由降落的物质质点，它只有有界的真时间，即在有限的真时间之后达到在 $r = 0$ 的奇点.

Schwarzschild 测地线和 Kruskal 测地线能够显式地用与对应的度规相伴随的某些函数来描述. 在类时 (相应地，在类空) 情形下，它们表示物质质点 (相应地，光子) 在单颗星球的重力场下的相对论轨道. 考虑在太阳系情形下这些轨道的形状，相对论影响可以从内部的行星轨道观察到 (近日点进动，光线偏离).

Schwarzschild 度规的推广由 Kerr 度规 (Kerr metric) 给出. 这被用作旋转黑洞的模型. 这些度规的几何的详尽讨论可见 [A7].

参考文献

[A1] Weyl, H., Raum, Zeit, Materie, Springer, 1923.

[A2] Zel'dovich, Ya. B. and Novikov, I. D., Relativistic astrophysics, 1. Stars and relativity, Chicaco, 1971 (译自俄文).

[A3] Rindler, W., Essential relativity, Springer, 1977, pp. 136 – 164.

[A4] Weinberg, S., Gravitation and cosmology, Wiley, 1972.

[A5] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry, Acad. Press, 1983.

[A6] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R., The large scale structure of space-time, Cambridge Univ. Press, 1973.

[A7] Chandrasekhar, S., The mathematical theory of black holes, Oxford Univ. Press, 1983.

[A8] Novikov, I. D. and Frolov, V. P., Physics of black holes, Kluwer, 1989 (译自俄文).

B. Wegner 撰 陈维桓 译

搜索问题 (线性的) [search problem (linear); поиска проблема (линейная)]

【补注】 一种首先由 R. Bellman ([A1]) 陈述的最优性问题. 假设有一个质点位于实直线上，它的未知位

置由一个对称概率分布 F 来刻画．搜索者从原点出发，能够以常速度沿任意方向移动，直到目标被找到．问题是要确定一条路径，使得期望搜索时间最少．

W. Franck ([A2]) 指出，存在具有有限期望搜索时间的路径的充要条件为 $\int |x| dF(x) < \infty$．最优搜索路径存在的充分条件是 A. Beck (在 [A3] 及其在 Israel J. Math. 上的后继论文中) 建立的．最优搜索路径已对 Gauss, Laplace 和 Student 分布构造 ([A4])．有关线性搜索问题 (包括推广以及开问题) 的现代综述可在 [A5] 中找到．

参考文献

[A1] Bellman, R., Research problem No. 63 - 9, *SIAM Review*, **5** (1963), 274.

[A2] Franck, W., An optimal search problem, *SIAM Review*, 7 (1965), 503 - 512.

[A3] Beck, A., On the linear search problem, *Israel J. Math.*, 2 (1964), 221 - 228.

[A4] Rousseeuw, P. J., Optimal search paths for random variables, J. Comput. *Appl. Math.*, 9 (1983), 279 - 286.

[A5] Bruss, F. T. and Robertson, J. B., A survey of the linear search problem, *Math. Scientist*, 13 (1988), 75 - 89.

P. J. Rousseeuw 撰 史树中 译

正割 [secant; секанс]

三角函数 (trigonometric functions) 之一:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x};$$

另一种表示是 sc x．它的定义域是除了点

$$x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad (*)$$

之外的整个实轴．正切是无界偶周期函数 (周期为 2π)．正切的导数是

$$(\sec x)' = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = (\tan x)(\sec x).$$

正切的不定积分是

$$\int \sec x\, dx = \ln\left|\tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right]\right| + C.$$

正切的级数展开是

$$\sec x =$$

$$= \frac{\pi}{(\pi/2)^2 - x^2} - \frac{3\pi}{(3\pi/2)^2 - x^2} + \frac{5\pi}{(5\pi/2)^2 - x^2} - \cdots.$$

Ю. А. Горьков 撰

【补注】 在正割的定义域中，即不是关于点 (*)，级数展开成立．

参考文献

[A1] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer, 1964 (英文节译本: Dover, reprint, 1990).

[A2] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1965.

杜小杨 译

割线法 [secant method; секущих метод]

计算连续函数零点的一种方法．假设某连续函数 $f(x)$ 的一个零点 α 包含在 $[a,b]$ 中; 令 x_0, x_1 为该区间中不同的点，则割线法的迭代公式是

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_{k-1} - x_k)}{f(x_{k-1}) - f(x_k)}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

假如序列 $\{x_k\}$ 收敛，那么它一定收敛到 f 的一个零点．若 f 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，那么割线法对于单根的局部收敛性是超线性的．倘若 f 的光滑性条件有所加强，则可给出 (局部) 收敛的准确阶 ([1])．譬如，对于 $f \in C^2[a,b]$ 且 α 满足 $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) \neq 0$，则

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^p} = A,$$

其中 $p = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618$, $A = |f''(\alpha)/2f'(\alpha)|$.

割线法对光滑函数的超线性收敛性是非常重要的，因为在每一步都不需要计算导数，而只需计算函数的新值．与此相比较，**Newton 法** (Newton method) 的 (局部) 收敛阶是 2，在每一步都必须计算函数值及其导数值; 通常其计算量都不少于计算两个函数值．

由于割线法的收敛性依赖函数的光滑性和初次逼近的选取，在连续函数零点计算的标准计算机程序中，这个方法总是和确保收敛性的一些方法结合使用，例如二等分区间法．在这种组合方法的每一步，在区间端点处函数改变符号 (假定这个条件对初始区间 $[a,b]$ 也成立) 时，便知根 α 位于区间 $[a_k, b_k]$ 之中．经过一次试验，下次逼近或选择 (1) 或选择二等分区间的公式．若 f 光滑，则从某 k_0 起自动选用割线法进行迭代．还可能应用更加复杂的组合方法，例如在 ZEROIN 算法 (见 [2]) 和上面提到的算法中都使用反二次插值法．有时割线法是指下面的迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_0)}{f(x_k) - f(x_0)}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

方法 (2) 的另一个名称是**试位法** (method of false

position 或 regula falsi). 该方法仅线性收敛.

在把割线法推广到方程组的情况时, 对 (1) 可能有两种考虑. 其一可设想 (1) 是对于导数取离散逼近后由 Newton 法的公式得到的. 另一种可能是假设对 $f(x)$ 在点 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ 和 $(x_k, f(x_k))$ 进行线性插值, 而 x_{k+1} 取为线性插值函数的零点. 这两种解释使得割线法对多维问题有许多类似的推广形式; 它们之中的一些 (显然不是全部) 具有相同的 (局部) 收敛阶 $p=(1+\sqrt{5})/2$ (见[3]).

参考文献

[1] Brent, R. P., Algorithms for minimization without derivatives, Prentice-Hall, 1973.

[2] Forsythe, G. E., Malcolm, M. A. and Moler, C. B., Computer methods for mathematical computations. Prentice-Hall, 1977.

[3] Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Acad. Press, 1970 (中译本: J. M. 奥特加、W. C. 莱因博尔特, 多元非线性方程组迭代解法, 科学出版社, 1983).

X. Д. Икрамов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987, Chapt. 10.

[A2] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., Numerical recipes, Cambridge Univ. Press, 1986, § 9.2.

张宝琳 袁国兴 译

秒 [second; секунда]

平面角的一个度量单位, 它等于一度 (degree) 的 1/3600, 或者一分的 1/60; 用符号 ″ 来表示. 一度量秒 (metric second) 是一个直角的 $1/10^6$; 用符号 ‴ 来表示.

杜小杨 译

第二可数公理 [second axiom of countability; вторая аксиома счетности]

集合论的拓扑学中的概念. 拓扑空间满足第二可数公理 (second axiom of countability), 如果它们具有可数基 (base). 满足此公理的空间类是由 F. Hausdorff 给出的. 这个空间类包含了所有可分度量空间 (见可分空间 (separable space)). 满足第二可数公理的所有正则空间 (regular space) 都拓扑地含于 **Hilbert 立方体** (Hilbert cube), 因而是可度量化且可分的 (П. С. Урысон). 于是, 对满足此公理的正则空间的研究导致对更具体的对象—— Hilbert 立方体的子空间的研究. 基于这一事实, Hilbert 立方体具有明显的拓扑重要性. 具有可数基的有限维空间允许更进一步的具体化.

Б. Э. Шапировский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mill, J. van., Infinite-dimensional topology, North-Holland, 1989, p. 40.

[A2] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: Problems and exercises, Reidel, 1984, p. 43, 124 (译自俄文).

白苏华 胡师度 译

第二边值问题 [second boundary value problem; вторая краевая задача]

偏微分方程边值问题 (boundary value problem, partial differential equations) 之一. 例如, 设 Ω 是一有界区域, 其边界 Γ 的每个点处都有法线, 并设在 Ω 中给定了一个二阶椭圆型方程

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}+$$

$$+c(x)u(x)=f(x), \qquad (*)$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $n\geqslant 2$; Ω 中的方程 $(*)$ 的第二边值问题有如下述: 从 $(*)$ 的所有解组成的集合中选出这样的解 $u(x)$, 它在 Ω 的所有边界点处具有关于内法线 N 的导数, 并满足条件

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial N(x)}\right|_{x\in\Gamma}=\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是一给定的函数. 第二边值问题也称 Neumann 问题 (Neumann problem).

参考文献

[1] Бицадзе, А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966 (英译本: Bitsadze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968).

[2] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[3] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970 (译自意大利文).

[4] Петровский, И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 人民教育出版社, 第二版, 1965).

А. К. Гущин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Garabedian, P. R., Partial differential equations, Wiley, 1963.

[A2] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics. Partial differential equations, 2, Interscience, 1965 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, II, 科学出版社, 1977).

沈永欢 译

二次对偶空间 [**second dual space; второе сопряженное пространство**]

对偶于空间 X' 的空间 X''，这里 X' 是 Hausdorff **局部凸空间**（locally convex space）X 的强对偶，即 X' 装备有强拓扑．每一元素 $x \in X$ 按照公式 $F(f) = f(x)$ $(f \in X')$ 生成一个元素 $F \in X''$．如果 $X'' = X$，则空间 X 是半自反的（semi-reflexive）．如果 X 是桶型空间（barrelled space），则由 $\pi(x) = F$ 定义的线性映射 $\pi: X \to X''$ 是空间 X 到空间 X'' 中的一个同构嵌入．嵌入 π 称为典范的（canonical）．对赋范空间 π 是一个等距嵌入．　　М. И. Кадец 撰

【补注】 二次对偶 $X'' = (X')'$ 也称为双对偶（bidual）．

关于（半）自反性亦见**自反空间**（reflexive space）．关于（一次）对偶空间见**伴随空间**（adjoint space）．空间 X 是自反的，如果典范嵌入 $X \to X''$ 是满射且两个拓扑重合，其中 X'' 是赋予由对偶对 (X', X'') 定义的**强拓扑**（strong topology）．对 Banach 空间半自反性与自反性是相同的．

参考文献

[A1] Dulst, D. van, Reflexive and superreflexive spaces, Math. Centre, Amsterdam, 1978.

[A2] Köthe, G., Topological vector space, 1, Springer, 1969, § 23.5.　　葛显良 译　鲁世杰 校

第二基本形式 [**second fundamental form; вторая квадратичная форма**]，曲面的

曲面上关于坐标微分的二次形式，它刻画在正常点的一个邻域中曲面的局部结构．设曲面由方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

给定，这里 u 和 v 是曲面上的内部坐标；设

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

是位置向量 $\mathbf{r}$ 沿选定的从点 M 到点 M'（见图）的位移方向的微分．设

$$\mathbf{n} = \frac{\varepsilon[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|}$$

是曲面在 M 处的单位法向量（这里，若向量组 $\{\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}\}$ 成右手定向，则 $\varepsilon = +1$，若成左手定向，则 $\varepsilon = -1$）．曲面上点 M' 到点 M 处的切平面的偏差 PM' 的线性主部的 2 倍 2δ 是

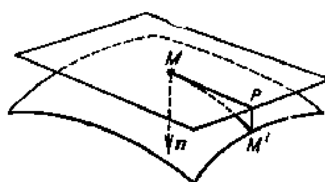
$$\mathrm{II} = 2\delta = (-d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) =$$

$$= (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})du^2 + 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})du\,dv + (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n})dv^2;$$

它称为曲面的第二基本形式（second fundamental form of the surface）．

第二基本形式的系数通常记为

$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}),\ M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}),\ N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}).$$



或，用张量记号，

$$(-d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = b_{11}du^2 + 2b_{12}du\,dv + b_{22}dv^2.$$

张量 b_{ij} 称为曲面的第二基本张量（second fundamental tensor of the surface）．

第二基本形式与其他的曲面形式之间的联系见**曲面的基本形式**（fundamental forms of a surface）．

А. В. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Blaschke, W. and Leichtweiss, K., Elementare Differentialgeometrie, Springer, 1973.　　潘养廉 译

二次曲线 [**second-order curve; линия второго порядка**]

一条平面曲线，其上点的 Descartes 直角坐标满足二次代数方程

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (*)$$

方程（*）未必决定一个实的几何形，但为了保持一般性，在此情形仍称它定义一条虚二次曲线（imaginary second-order curve）．依据方程（*）的系数的值，可以运用坐标系的平移与旋转某角度将方程变换为下列九个典范型之一，每一个对应曲线的一个确定的类，即：

非退化曲线（non-degenerate curves）：

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$，**椭圆**（ellipse）；

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$，**双曲线**（hyperbola）；

$y^2 = 2px$，**抛物线**（parabola）；

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$，虚椭圆；

退化曲线（degenerate curves）：

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$，一对虚相交直线；

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$，一对实相交直线；

$x^2 - a^2 = 0$，一对实平行直线；

$x^2 + a^2 = 0$，一对虚平行直线；

$x^2 = 0$，一对重合实直线．

存在唯一对称中心（二次曲线的中心（centre of the second-order curve））的二次曲线称为有心曲线（central curve）．二次曲线的中心坐标由方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

的解所确定．无对称中心或中心不定的二次曲线称为**无心曲线**（non-central curve）．

研究二次曲线的形式可以不必将一般方程化为典范型．这是由考虑被称为**二次曲线的基本不变量**（fundamental invariants of a second-order curve）的值而完成的．不变量是方程（*）的系数的下列表示式，它们的值在坐标系的平移与旋转下不变（$a_{ij}=a_{ji}$）：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},$$

$$S=a_{11}+a_{22}.$$

半不变量（semi-invariant）

$$A=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

是一个关于坐标系旋转的不变量（见下表）．

二次曲线的许多重要性质能够借助于与方程（*）相应的**特征二次型**（characteristic quadratic form）

$$\Phi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

来研究．特别地，一条非退化二次曲线成为一个椭圆，一个虚椭圆，一条双曲线或一条抛物线，取决于 $\Phi(x,y)$ 是一个正定的，负定的，不定的或半定的二次型．还可以由其**特征方程**（characteristic equation）：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ 或 } \lambda^2-S\lambda+\delta=0$$

的根确定．

三个基本不变量 Δ，δ 和 S 决定一条二次曲线（平行直线的情况除外）到相差 Euclid 平面的一个运动：如果两曲线相应的不变量 Δ，δ 和 S 分别相等，那么能通过一个运动使两曲线重合．换言之，两曲线关于平面的运动群是等价的（度量等价）．

有基于其他变换群观点的二次曲线的一种分类．关于（较运动群）更一般的仿射变换群，由相同的典范方程定义的两条曲线是等价的．例如，两条相似的二次曲线看作是等价的．二次曲线的不同仿射类之间的联系使得从射影几何学（其中无穷远元不具有特殊地位）观点建立分类成为可能．实的非退化二次曲线、椭圆、双曲线与抛物线，组成一个射影类——实卵形线类（见**卵形线**（oval））．一条实卵形线是椭圆、双曲线或抛物线取决于它与无穷远直线的相关位置：椭圆与无穷远直线相交于两个虚点，双曲线与之相交于两个实点而抛物线与之相切；存在将这些曲线中的一条变到另一条的射影变换．二次曲线有五个射影等价类．即，

非退化曲线（non-degenerate curves）（x_1,x_2,x_3 是齐次坐标）：

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$，一条实卵形线；

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$，一条虚卵形线；

退化曲线（degenerate curves）：

$x_1^2-x_2^2=0$，一对实直线；

$x_1^2+x_2^2=0$，一对虚直线；

$x_1^2=0$，一对重合直线．

除了用解析方法定义二次曲线（指定方程）外，还有其他方法．例如，椭圆、双曲线和抛物线可作为用一个平面截一个圆锥的截线而得到（见**圆锥曲线**（conic sections））．

二次曲线形式的研究借助于不变量（$\Delta S \gtrless 0$）．

	非退化曲线 $\Delta\neq 0$		退化曲线 $\Delta=0$
有心曲线（$\delta\neq 0$）	$\delta>0$	$\frac{\Delta}{S}<0$ 实椭圆	一对相交虚直线（一实点）
		$\frac{\Delta}{S}>0$ 虚椭圆	
	$\delta<0$	双曲线	一对相交实直线
无心曲线（$\delta=0$）	$\delta=0$	抛物线	$A>0$ 一对虚平行直线 $A<0$ 一对实平行直线 $A=0$ 一对重合平行直线

参考文献

[1] Александров, П. С., Лекции по аналитической геометрии, М., 1968.

[2] Ефимов, Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 11 изд., М., 1972.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry Ⅱ, Springer, 1989（中译本：M. 贝尔热，几何，第一—五卷，科学出版社，1987－1991）．

[A2] Busemann, H. and Kelly, P., Projective geometry and projective metrics, Acad. Press, 1953.

[A3] Coolidge, J., A history of the conic sections and quadric surfaces, Dover, reprint, 1968.

[A4] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A5] Griffiths, P. and Harris, S., Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[A6] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952（译自德文）（中译本：D. 希尔伯特，S. 康福森，直观几何，上、下册，高等教育出版社，1964）．

林向岩 译 陆珊年 校

二阶变分［second variation；вторая вариация］

泛函的 n 阶变分的一种特殊情形（见**泛函的变分**

(variation of a functional), **Gâteaux 变分**(Gâteaux variation)), 推广了多元函数的二阶导数的概念. 它用于变分法. 按一般定义, 定义在赋范空间 X 上泛函 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶变分是

$$\delta^2 f(x_0, h) = \frac{d^2}{dt^2} f(x_0 + th)|_{t=0}.$$

如果一阶变分是零, 则二阶变分的非负性是 $f(x)$ 在 x_0 有局部极小值的必要条件, 而严格正性

$$\delta^2 f(x_0, h) \geqslant \alpha \| h \|^2, \alpha > 0$$

是充分条件(在一定的假设下).

在经典变分法的最简单(向量)问题中, 在 C^1 类向量函数类上考虑的具有固定边界值 $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ 的泛函

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt ;\ L:[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

的二阶变分有形式

$$\delta^2 J(x_0, h) = \int_{t_0}^{t_1} (\langle A(t)\dot{h}(t), \dot{h}(t)\rangle + \qquad (*)$$

$$+ 2\langle B(t)\dot{h}(t), h(t)\rangle + \langle C(t)h(t), h(t)\rangle) dt,$$

这里 $\langle \cdot , \cdot \rangle$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中标准内积, 而 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 是关于系数

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}}, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x}$$

的矩阵(导数是在曲线 $x_0(t)$ 的点上取值). 不但在空间 C^1 上, 而且在更广的具有平方可积的导数模的绝对连续向量函数空间 W_2^1 上考虑由 $(*)$ 定义的 h 的泛函是合适的. 在这种情形下, 二阶变分的非负性和严格正性用矩阵 $A(t)$ 的非负性和严格正性(**Legendre 条件**(Legendre condition))和没有共轭点(**Jacobi 条件**(Jacobi condition))来表述, 这些是变分法中对弱极小值的必要条件.

对于不一定提供极小值(但是如前面一样满足 Legendre 条件)的极值曲线的二阶变分的一种研究已在**大范围变分法**(variational calculus in the large)中开展([1]). 最重要的结果是二阶变分的 **Morse 指数**(Morse index)与区间 (t_0, t_1) 上与 t_0 共轭的点的数目相同([2]).

参考文献

[1] Morse, M., The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., 1934.

[2] Milnor, J., Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963(中译本: J. 米尔诺, 莫尔斯理论, 科学出版社, 1988).

В. М. Тихомиров 撰 葛显良 译 吴绍平 校

截面[**section; сечение**], 截曲面(section surface), 纤维空间 $p: X \to Y$ 的

一个连续映射 $s: Y \to X$, 满足 $p \circ s = \mathrm{id}_Y$. 如果 (X, p, Y) 是 **Serre 纤维化**(Serre fibration), 则

$$\pi_n(X) = \pi_n(p^{-1}(\mathrm{pt})) \oplus \pi_n(Y).$$

对于**主纤维丛**(principal fibre bundle), 截面的存在性蕴涵它的平凡性. **向量丛**(vector bundle)总具有所谓零截面(zero section). А. Ф. Харшиладзе 撰

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1956, p. 77(中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

【译注】 并非每个纤维空间都存在截面. 对于 Serre 纤维化 (X, p, Y), 截面的存在性是同构 $\pi_n(X) = \pi_n(p^{-1}(\mathrm{pt})) \oplus \pi_n(Y)$ 成立的充分条件.

段海豹 译 沈信耀 校

映射 $p: X \to Y$ 的截口[**section of a mapping; сечение отображения**]

一个映射 $s: Y \to X$, 满足 $p \circ s = \mathrm{id}_Y$. 更广义地, 任一范畴中的任一态射的截口都是右逆态射.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】如果 $U \subset Y$ 是 Y 的子空间, 则 p 在 U 上的截口是一映射 $s: U \to X$, 满足对任意 $u \in U$ 有 $ps(u) = u$。对于向量丛 $E \xrightarrow{p} Y$, 其中 p 是所定义的结构的一部分, 则说向量丛 E 的截口, 而不说 p 的截口. 这也适用于如层和纤维表示. 在这种情况下, 截口集的标准记号为 $\Gamma(E)$, 而 E 在 U 上的截口集的记号为 $\Gamma(U, E)$. 赵希顺 译

截面曲率[**sectional curvature; секционная кривизна**], 亦称截曲率

可微 Riemann 流形 M 在一点 p 沿一个二维平面 α 的方向(沿在 $p \in M$ 确定 α 的二重向量的方向)的 **Riemann 曲率**(Riemannian curvature).

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982(译自德文). 陈维桓 译

扇形[**sector; сектор**]

1) 平面扇形(sector on a plane)是平面图形中界于发自该图形一内点的两条射线以及它们截出的边界曲线弧之间的区域. 圆扇形(circular sector)是圆的两条半径以及它们所截圆弧所围成的图形. 圆扇形的面积 S 由 $S = lr/2$ 给定, 其中 r 是所给圆的半径, l 是所截圆弧的长度.

2) 空间扇形（sector in space）是由一有限曲面所围立体的一个部分，其顶点为所给立体的一个内点，并由从顶点出发的射线从所给立体的边界曲面上截出的某个部分围成．球扇形（spherical sector）是所给球面的大圆的一个扇形绕界定此圆扇形的一条半径旋转所得的立体．球扇形的体积 V 由 $V=2\pi R^2h/3$ 给定，其中 R 是所给球面的半径，h 是张成大圆扇形圆弧的弦在旋转轴上的投影． БСЭ-3

【补注】 在各种领域的数学模型中，例如在经济学和理论物理学的数学模型中，"sector"（部门）一词用来指某些比较清楚或不甚清楚地定义的子模型，其组成部分相互之间的作用强于它们同所说模型中其他部分的作用．例如，在经济模型中可有财政金融部门，农业部门，等等． 沈永欢 译

常微分方程理论中的扇形［**sector in the theory of ordinary differential equations; сектор в теория обыкновенных дифференциальных уравнений**］

1）一个开曲边扇形 S，其顶点 O 是一个二维的常微分方程**自治系统**（autonomous system）

$$\dot{x}=f(x),\quad x\in\mathbf{R}^2 \qquad (*)$$

的孤立奇点，$f\in C(G)$，G 是点 O 的适当小的但保证唯一性的邻域，而且满足以下四个条件：(1) S 的每个侧边均为系统（*）的一个 TO 曲线（TO-curve）（即当 $|t|\to+\infty$ 时趋向 O 且在 O 切于某一方向的半轨）；(2) S 的外边是一简单参数化的弧（即一闭区间的同胚象）；(3) $\bar{S}\setminus\{0\}$ 中不含（*）之奇点．第 4 个条件可以是以下三者之一：(4a) 方程组（*）的所有从 S 中出发的轨道当 t 增加或减少时均离开此扇形；这样的扇形称为双曲扇形（hyperbolic sector）或鞍点扇形（saddle sector）（图 1）；(4b)（*）之所有从 S 中充分接近 O 处出发的轨道当 t 增加时都不离开 S 而是趋近 O，

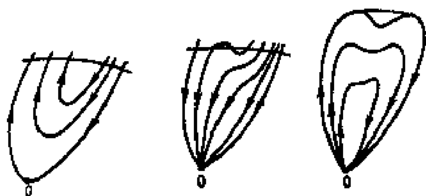


图 1　　图 2　　图 3

但当 t 减少时则离开 S（或反过来也可）；这样的扇形称为抛物扇形（parabolic sector）或开结点扇形（open node sector）（图 2）；(4c)（*）之所有发自 S 中离 O 充分近处的轨道当 t 增加或减少时均在 S 内部而趋向 O，与 O 一起形成一闭曲线（圈（loop）），且任意两个圈中必有一个包含另一个；这样的扇形称为椭圆扇形（elliptic sector）或闭结点扇形（closed node sector）（图 3）．

对任一个具有 TO 曲线的解析系统（*），一个半径充分小的以 O 为心的圆盘 Q 一定可以分成有限多个特定形状的扇形：h 个双曲的，p 个抛物的和 e 个椭圆的（见[1]，[2]），可以用 **Frommer 法**（Frommer method）来展示这些扇形，决定各自的类型，以及建立沿 Q 之边界绕 O 一周时其相继排列的规则（由此说明（*）之轨道在 O 的邻域中的分布的拓扑结构）．可以用范数 $\|f(x)\|$ 当 $x\to0$ 时无穷小的阶数作出 h，p 和 e 的上界的先验估计（见[1]，[4]，[5]）．

有时（例如见[3]），"扇形"这一概念的定义可以自由一些：在双曲和抛物扇形中，也容许有圈存在而复盖一个在扇形后缘上没有极限点的集合，而在椭圆扇形中容许有互不包含的圈存在．上段第一句话对一般形状的方程组（*）也成立，而（*）之**奇点**（singular point）O 之 Poincaré 指标 i 可用以下的 Bendixson 公式（Bendixson formula）来表示：

$$i=1+\frac{e-h}{2}.$$

参考文献

[1] Bendixson, I., Sur des courbes définiés par des équations différentielles, *Acta. Math.*, 24 (1901), 1－88.

[2] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973).

[3] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[4] Берлинский, А. Н., 《Докл. АН СССР》, 187 (1969), 3, 502－505.

[5] Сагалович, М. Е., 《Дифф., уравнения》, 15 (1979), 2, 360－362.

【补注】 扇形的侧边有时称为基解（base solutions）．

2) Frommer 扇形（Frommer sector）或称 Frommer 正常区域（Frommer normal domain）是一个圆扇形

$$N=\{(r,\varphi):0<r\leqslant\delta,\ |\varphi-\varphi_0|\leqslant\varepsilon\},$$

其顶点 $O(x=x_0)$ 是方程组（*）（见 1））的孤立奇点，侧边 OA，OB 分别是 $\varphi_A=\varphi_0-\varepsilon$，$\varphi_B=\varphi_0+\varepsilon$，后边界 AB 弧则满足以下的条件（r，φ 是 x 平面上极点在 O 的极坐标，δ，ε，$\varphi_0\in\mathbf{R}$）：

A) $\varphi=\varphi_0$ 是方程组（*）（在 O 点）的例外方向（exceptional direction of the system (*)），即存在一序列 $x_k=x_0+(r_k\cos\varphi_k,r_k\sin\varphi_k)$ $(k=1,\cdots)$ 而当 $k\to\infty$ 时 $r\to0$，$\varphi\to\varphi$，使得（若记 $\alpha(x)$ 是

向量 $f(x)$ 和 $x-x_0$ 之夹角）当 $k\to+\infty$ 时，$\tan\alpha(x_k)\to 0$，且这个方向在 N 中是唯一的；

B）对任意 $x\in OA\cup OB$，$\tan\alpha(x)\neq 0$；

C）对任意 $x\in N$，$\alpha(x)\neq\frac{\pi}{2}$.

设角 $\alpha(x)$ 是从向量 $x-x_0$ 计算的，且其符号同于极角方向．若对 $x\in OA$，$\tan\alpha(x)<0$ 而对 $x\in OB$，$\tan\alpha(x)>0$，则称扇形 N 是第一类 Frommer 正规区域（Frommer normal domain of the first type）（记作 N_1）；若在 OA 上 $\tan\alpha(x)>0$ 而在 OB 上 $\tan\alpha(x)<0$，则称为第二类 Frommer 正规区域（Frommer normal domain of the second type）（记作 N_2）；第三类 Frommer 正规区域（Frommer normal domain of the third type）（N_3）则是在 OA 与 OB 上 $\tan\alpha(x)$ 符号相同．这些区域是 M．Frommer 引入的（[1]）.

在 Frommer 正规区域中系统（*）的轨道性态如下．区域 N_1 由方程组的 O 曲线覆盖（图4）．它们构成一个开束（见层（sheaf）之 2)），即一族某种类型的，连续依赖于一开区间上变化的参数的 O 曲线．在区域 N_2 中，或者 a）有唯一的 O 曲线（图5），或者 b）有无穷多的 O 曲线（闭束；见图6）．在区域 N_3 中，或者 a）有无穷多 O 曲线（半开束；图7）；或者 b）没有 O 曲线（图 8）．在任一类正规区域中，当 $t\to+\infty$（或 $t\to-\infty$）时，O 曲线都沿方向 $\varphi=\varphi_0$ 趋向 O，而当 t 减少（或增加）时则离开区域 N；所有其他轨道则当 t 增加与减少时都离开 N．如何对区域 N_2 和 N_3 区别 a)，b）两种情况的问题，分别称为 Frommer 第一与第二判定问题（the first and second distinction problems of Frommer）.

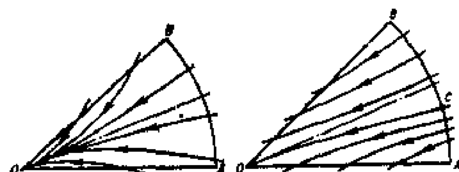


图 4



图 5

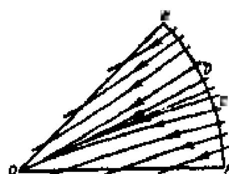


图 6

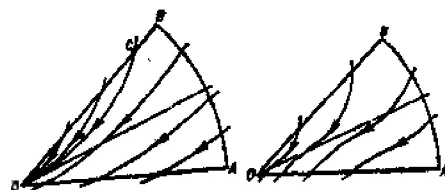


图 7

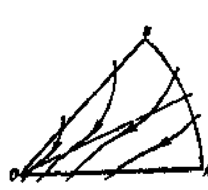


图 8

如果系统（*）在 O 点有有限多个（个数 >0）例外方向，其每一个均含于一个正规区域 N 中，若对所有的 N_2 和 N_3 区域，Frommer 的判定问题都能解决，则此系统的轨道在 O 的邻域中的分布的拓扑构造就得到完全的说明，因为以 O 为顶点而且位于正规区域之间的扇形，在充分接近于 0 处，是完全被系统的轨道所切割的（如图 8 中那样）．例如下面的例子就是这样的情况：

$$f(x)=P(x)+p(x),\quad P=(P_1,P_2),$$

P_1，P_2 是向量 x 的分量 x_1，x_2 的次数 $n\geqslant 1$ 的形式，

$$p(x)=o(\|x\|^n)，当\ \|x\|\to 0\ 时，$$

而且以下条件满足：形式 $x_1P_2(x)-x_2P_1(x)$ 有实线性因子；形式 P_1 和 P_2 没有公共的实线性因子；且 $p\in C^{n+1}$．这里每个 N_2，N_3 区域都是情况 a).

对于维数 $\geqslant 3$ 的形如（*）的方程组，也引人了 Frommer 正规区域的类似物.

参考文献

[1] Frommer，M．，Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimtheitsstellen，*Math．Ann．*，99（1928），222－272.

[2] Немыцкий，В．В．，Степанов，В．В．，Качественная теория дифференциальных уравнений，2 изд．，М.-Л．，1949（中译本：B．B．涅梅茨基，B．B．斯捷巴诺夫，微分方程定性理论，上、下，科学出版社，1956，1959）.

[3] Андреев，А．Ф．，《Докл．АН СССР》，142（1962），4，754－757.

[4] Андреев，А．Ф．，《Докл．АН СССР》，146（1962），1，9－10.

А．Ф．Андреев 撰　齐民友 译

截形［segment；сегмент］

1）平面截形（segment on a plane）是包含于一平面曲线及其一条弦之间的平面图形．圆截形或圆弓形（circular segment）的面积为 $S=r^2(\theta-\sin\theta)/2$，

其中 r 是所给圆的半径，$r\theta$ 是弓形的弧的长度.

2) 空间截形（segment in space）是界于一平面及一曲面上由此平面截出的部分之间的立体. 球截形或球冠（spherical segment）的体积由 $V=\pi h^2(3R-h)/3$ 给定，其中 R 是所给球的半径，h 是截形的高. 球截形的球面部分的面积 S 由 $S=2\pi Rh$ 给定.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 直线截形或线段（line segment）当然是此直线上两个点之间的部分，或（在实射影几何学中）两个点分解通过此两点的直线的两个部分之一，见[A1]，176 − 177.

关于空间截形，亦见[A2]，p. 245.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1989.

[A2] Lamb, H., Infinitesimal calculus, Cambridge, 1924.

沈永欢 译

Segre 嵌入 [Segre imbedding; Сегре вложение]

射影空间的积 $P^n\times P^m$ 到射影空间 $P^N(N=nm+n+m)$ 里的嵌入 φ: $P^n\times P^m\to P^N$. 如果 $x=(u_0:\cdots:u_n)\in P^n$, $y=(v_0:\cdots:v_m)\in P^m$，且 $w_{i,j}$ $(i=0,\cdots,n; j=0,\cdots,m)$ 是 P^N 里的齐次坐标，则映射由以下公式定义:

$$\varphi(x,y)=(w_{i,j})\in P^N.$$

这里 $w_{i,j}=u_iv_j$. 映射 φ 是正确定义的而且是闭嵌入. Segre 嵌入的象 $\varphi(P^n\times P^m)$ 称为 Segre 簇（Segre variety）. 当 $n=m=1$ 时有一个简单的几何意义: $\varphi(P^1\times P^1)$ 是 P^3 里的非奇异二次曲面，具有方程 $w_{11}w_{00}=w_{01}w_{10}$. 象 $\varphi(x\times P^1)$ 和 $\varphi(P^1\times y)$ 给出了二次曲面的两族生成直线.

此术语是为了纪念 B. Segre.

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

Вал. Е. Куликов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

Seidel 法 [Seidel method; Зейделя метод]

求解线性代数方程组 $Ax=b$ 的一种迭代法. 解 x^* 是作为下列序列的极限而求得

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}),$$

其中各项根据下面的公式计算

$$x_i^{(k)}=-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k-1)}+\frac{b_i}{a_{ii}},\qquad (*)$$

$$i=1,\cdots,n,$$

这里 a_{ij} 为矩阵 A 的元素，b_i 为向量 b 的分量，设 A 的对角线上元素均不为零. (*) 的应用只有一点与简单迭代法（simple iteration method）不同，即在第 k 步，第 i 个分量的计算利用了前 $i-1$ 个分量的第 k 步计算得出的近似值.

Seidel 法可表示为如下矩阵形式. 若 $A=B+C$，其中

$$B=\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{Vmatrix},$$

$$C=\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{Vmatrix},$$

于是公式 (*) 以矩阵形式表示为 $x^{(k)}=-B^{-1}Cx^{(k-1)}+B^{-1}b$. Seidel 法等价于将简单迭代用于方程组 $x=-B^{-1}Cx+B^{-1}b$，而此方程组与初始方程组等价. 方法收敛的充要条件是矩阵 $B^{-1}C$ 的一切本征值的绝对值小于 1，或者等价地，方程 $\det(C+B\lambda)=0$ 的所有根的绝对值均小于 1.

在实际应用中，收敛性的下述充分条件更便于使用. 1) 假设 $\sum_{i\neq j}|a_{ij}|\leqslant q|a_{ii}|$, $q<1$，对于所有 i, $1\leqslant i<n$；则 Seidel 方法收敛，并有如下收敛速度的估计

$$\|x^{(k)}-x^*\|_1\leqslant q\|x^{(k-1)}-x^*\|_1,$$

$$\|x\|_1=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|.$$

2) 如果 A 是正定 Hermite 矩阵，则 Seidel 法收敛.

该方法可转变成松弛法（relaxation method）的类型，其中使用最广泛的是超松弛法（hyperrelaxation method）.

在 Seidel 法的各种变形中都是把原方程组经过初等变换化为等价方程组 $x=Mx+f$ 的（见[4]）.

该方法是由 L. Seidel 在[1]中提出的.

参考文献

[1] Seidel, L., *Abh. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur-wiss. Kl.*, 11 (1874), 3, 81 − 108.

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir,

1977)

[3] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1. М., 1966 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[4] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.-Л., 1963 (中译本: Д. К. 法捷耶夫, В. Н. 法捷耶娃, 线代数计算方法, 上海科学技术出版社, 1965).

Г. Д. Ким 撰

【补注】 在西方国家, 该方法一般称为 Gauss-Seidel 法 (Gauss-Seidel method) ([A1]-[A4]).

参考文献

[A1] Fröberg, C.-E., Introduction to numerical analysis, Addison-Wesley, 1965, § 4.5.

[A2] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A and Vetterling, W. T., Numerical recipes, Cambridge Univ. Press, 1986, § 17.5

[A3] Young, D. M. and Gregory, R. T., A survey of numerical mathematics, II. Dover, reprint, 1988, § 16.5.

[A4] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987, § 10.5.

张宝琳 袁国兴 译

Seifert 纤维化 [Seifert fibration; Зейферта расслоение]

三维流形通过圆的纤维化的类, 是由 H. Seifert 定义的 ([1]). Seifert 纤维化的每个纤维在具有通过圆的标准纤维化的流形 M^3 中有一个邻域, 它由圆盘和闭区间的乘积 $D^2\times[0,1]$ 产生. 每个点 $(x,0)$ 与点 $(g(x),1)$ 相叠合, 其中 g 是 D^2 的转过角 $2\mu\nu/\mu$ 的旋转 (μ 和 ν 是互素的整数, $0\leqslant\nu<\mu$). 区间 $x\times[0,1]$ 在生成实心环 P 中的象构成了纤维: 如果 $\nu\neq 0$, 则除了中心的一个外, 每个纤维由 μ 个区间组成; 如果 $\nu>0$, 则中心纤维就称为奇异的 (singular). 不变量 (μ,ν) 通常由 Seifert 不变量 (Seifert invariant) (α,β) 来替代, 其中 $\alpha=\mu$, β 由条件

$$0<\beta<\alpha,\ \beta\nu\equiv 1 \bmod \alpha$$

所确定. 不变量 α 和 β 允许一个几何解释: 在 P 的边界上诱导的纤维化中, 考虑子午线 m (在 P 中可缩但不在 ∂P 中可缩的曲线) 和平行线 l (恰好一次横截地切割 m), 以及还有纤维 f 和割线 g (所有四条曲线都是简单且闭的); 则服从适当的定向, 有

$$m=\alpha g+\beta f,\ l=-\nu g-\mu f.$$

更进一步, 有 $\beta\nu-\alpha\mu=1$.

涉及 Seifert 纤维化的第一个问题是将它们分类, 直到差一个纤维状同胚, 结果是 [1], 如果 M^3 允许一个 Seifert 纤维化, 则存在一个映射 $\pi: M^3\to B^2$, 其中 B^2 是二维流形, 纤维是 $\pi^{-1}(x)$, $x\in B^2$. 存在六类 Seifert 纤维化: 类 O_1 和 O_2, 在其中, B^2 是可定向的, M^3 在 O_1 情形中是可定向的, 但在 O_2 情形中是不可定向的, 且在该情形中, B^2 的亏格至少是 1; 类 n_i, $i=1,2,3,4$, 在其中, B^2 是不可定向的. 在情形 n_1 中, 纤维沿 B^2 中一条道路的迁移不改变纤维的定向; 在情形 n_2 中, 存在一个生成元系统且沿每一条的迁移反转了定向; 在情形 n_3 中, 只有一个生成元不反转定向; 而在情形 n_4 中, 只有二个生成元不反转定向; B^2 的亏格在 n_3 至少是 2, 在 n_4 至少是 3. 流形 M^3 仅对 n_4 是可定向的. 每一个 Seifert 纤维化与不变量组

$$\{b;(\varepsilon,p);(\alpha_1,\beta_1);\cdots;(\alpha_r,\beta_r)\},$$

相关联, 以致于直到差一个纤维同胚, 确实存在一个具有给定的这个组的 Seifert 纤维化. 这里 $\varepsilon=O_i$ 或者 n_i, p 是 B^2 的亏格, (α_i,β_i) 是奇异纤维的 Seifert 不变量, r 是奇异纤维的数目, 在 $\varepsilon=O_2,n_1,n_3,n_4$ 的情形中, $\beta_i\leqslant\alpha/2$; 最后, 在其他情形中, 如果 $\varepsilon=O_1$ 或 n_2 和模 2 剩余, 则 b 是一个整数, 如果对至少一个纤维 $\alpha_i=2$, 则 $b=0$. b 的几何意义如下: 在每个奇异纤维的邻域的边界上取一段, 并将所有这些段的集合扩张到相对于奇异纤维的整个补集中的一段. 这可做到直至一个非奇异纤维; 该扩张的段的边界逼近绕其扭转度 b 的那个纤维. 在情形 O_1 和 n_2 中, 当 M^3 的定向反转时, 数 b 由 $-b-r$ 代替, β_i 由 $\alpha_i-\beta_i$ 代替.

Seifert 纤维化理论中有趣的第二点是证明一个闭流形 M^3 至多允许一个相差纤维状同胚的 Seifert 纤维化. 这对那些称为大 Seifert 纤维化 (large Seifert fibrations) 已经证明了, 这是型 $K(\pi,1)$ 的空间, 即它们的同伦型是由基本群所确定的. 配备有 Seifert 纤维化的流形的基本群 (fundamental group) $\pi_1(M^3)$ 用生成元的特殊系统方便地描述出来: 在奇异纤维的邻域的边界上的段 g_j, 元素 a_i,b_i (或当 B^2 不可定向时, V_i), 它们在 $\pi_1(B^2)$ 中的象是典型生成元和非奇异的纤维 h. 生成元所确定的关系, 在情形 O_1 和 O_2 时是

$$a_iha_i^{-1}=h^{\varepsilon_i},\ b_ihb_i^{-1}=h^{\varepsilon_i},\ g_jhg_j^{-1}=h,\ g_j^{\alpha_j}h^{\beta_j}=1,$$

$$g_1\cdots g_r[a_1,b_1]\cdots[a_p,b_p]=h^b.$$

在情形 n_i 是

$$v_ihv_i^{-1}=h^{\varepsilon_i},\ g_jhg_j^{-1}=h,\ g_j^{\alpha_j}h^{\beta_j}=1,$$

$$g_1\cdots g_rv_1^2\cdots v_p^2=h^b,$$

其中 $\varepsilon_i=\pm1$, 依赖于在沿 $\pi_1(B^2)$ 的相应的生成元转变下定向是否反转. 在具有小 Seifert 纤维化 (small Seifert fibrations) 的流形中是下面的: 对类型 O_1, 所

向的纤维化有

$$p=0,\ r\leqslant 2;$$

$$p=0,\ r=3,\ \frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}>1;$$

$$p=1,\ r=0;$$

$$\{-2;(O_1,0);(2,1);(2,1);(2,1),(2,1)\};$$

对类型 O_2——只有 $p=1$, $r=0$ 的纤维化; 对类型 n_1 和 n_2, 纤维化有 $p=1$, $r\leqslant 1$; $p=2$, $r=0$; 对类型 n_3, 纤维化有 $p=2$, $r=0$. 类型 n_4 的所有 Seifert 纤维化是大的. 所有小 Seifert 纤维化已列成表: 有 10 种类型(见[3]).

三维球面上的有限群的自由作用与群 SO(2) 在球面上的自然作用交换. 因此, 结果是这些作用的轨道空间具有有限基本群的 Seifert 纤维化. 到目前为止, 仅知 M^3 的例子具有有限的 $\pi_1(M^3)$. 某些 Seifert 纤维化作为在代数曲面上孤立奇点的球面邻域的边界出现, 它在复数乘法群的作用下是不变的. 即这些是 $\{b;(O_1,p);(\alpha_1,\beta_1);\cdots;(\alpha_r,\beta_r)\}$ 型的 Seifert 纤维化 $(b+r>0)$. 这些流形的识别使得构造具有取自考虑的 $\mathbf{C}^*$ 的作用的奇异性的明显分解成为可能(也引进允许 $\mathbf{C}^*$ 作用的 $\mathbf{C}^3$ 中的曲面上孤立奇异性的完全的描写). 也存在通过运动的离散群的自由作用的 Euclid 空间的因子分解得到的局部平坦 Riemann 流形上的 Seifert 纤维化(存在 6 个定向和 4 个不可定向的流形, 除一个外, 所有的在圆上有不同的纤维化, 纤维是环或 Klein 曲面).

Seifert 纤维化在三维流形的拓扑学(见**流形的拓扑学**(topology of manifolds); **三维流形**(three-dimensional manifold)) 中是重要的, 例如, 为了识别基本群中有中心的流形([4]). 也存在具有奇异纤维的纤维化的其他类的概念的推广.

参考文献

[1] Seifert, H., Topologie driedimensionaler gefaserter Räume, *Acta Math.*, 60(1933), 147-238.

[2] Holmann, H., Seifertsche Faserraume, *Math. Ann.*, 157(1964), 138-166.

[3] Orlik, P., Seifert Manifolds, Springer, 1972.

[4] Hempel, J., 3-Manifolds, Princeton Univ. Press, 1976.

А. В. Чернавский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jaco, W. H., Lectures on three manifold topology, Amer. Math. Soc., 1980, Chapt. VI.

薛春华 译

Seifert 流形 [**Seifert manifold**; **Зейферта многообразие**]

具有 **Seifert 纤维化**(Seifert fibration)的流形.

Seifert 矩阵 [**Seifert matrix**; **Зейферта матрица**]

与纽结和连接相关的一个矩阵, 是为了用代数方法来研究这些纽结和连接的拓扑性质的(见**纽结理论**(knot theory)), 是在 H. Seifert([1]) 之后命名的, 他应用结构得到了 S^3 中的一维纽结的代数不变量. 设 $L=(S^{n+2},l^n)$ 是一个 n 维 m 支**连接**(link). 即由一个定向球面 S^{n+2} 和这个同胚于球面 S^n 的 m 片不连通之并的球面的可微或分片线性定向子流形 l^n 所组成的对. 存在 S^{n+2} 的紧 $(n+1)$ 维可定向子流形 V 使得 $\partial V=l$; 这是熟知的连接 L 的 Seifert 流形(Seifert manifold). 该 Seifert 流形 V 的定向由它的边界 $\partial V=l$ 的定向所确定; 因为 S^{n+2} 的定向是固定的, 所以 V 在 S^{n+2} 中的法丛产生了定向, 以致于可以说是 V 的正法向的场. 设 $i_+:V\to Y$ 是沿该场的一个小的位移, 其中 Y 是 S^{n+2} 中的开管状邻域的余集. 如果 $n=2q-1$ 是奇数, 可定义对

$$\theta:\ H_qV\otimes H_qV\to\mathbf{Z},$$

它将元素 $z_1\otimes z_2$ 联系到类 $z_1\in H_qV$ 和 $i_+^*z_2\in H_qY$ 的环绕系数(linking coefficient). 这个 θ 称为连接 L 的 Seifert 配对(Seifert pairing). 如果 z_1 和 z_2 是有限阶的, 则 $\theta(z_1\otimes z_2)=0$. 下面的公式有效:

$$\theta(z_1\otimes z_2)+(-1)^q\theta(z_2\otimes z_1)=z_1\cdot z_2,$$

其中右边是 V 上的类 z_1 和 z_2 **相交指数(同调中的)**(intersection index (in homology)).

设 $e_1,\cdots,e_k$ 是群 H_qV 的自由部分的一个基, 整数的 $k\times k$ 矩阵 $A=\|\theta(e_i\otimes e_j)\|$ 称为 L 的 Seifert 矩阵(Seifert matrix). 任何 $(2q-1)$ 维纽结的 Seifert 矩阵有下列性质: 矩阵 $A=(-1)^qA^t$ 是幺模的(见**幺模矩阵**(unimodular matrix)), 且对 $q=2$, 矩阵 $A+A'$ 的**符号差**(signature)可被 16 除尽(A' 是 A 的转置). 任何一个整数方阵 A 是某个 $(2q-1)$(若 $q\neq 2$) 维的 Seifert 矩阵, 且矩阵 $A+(-1)^qA'$ 是幺模的.

Seifert 矩阵本身不是连接 L 的不变量, 理由是 Seifert 流形 V 的结构和基 $e_1,\cdots,e_k$ 的选取不是唯一的. 形如

$$\left\|\begin{matrix}A & & 0\\ \alpha & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\right\|,\quad \left\|\begin{matrix}A & \beta & 0\\ 0 & 0 & 1\\ & 0 & 0\end{matrix}\right\|$$

的矩阵就是皆知的 A 的初等展开(elementary expansions), 其中 α 是行向量, β 是列向量, 而 A 自身称作它的初等展开的初等约化(elementary reduction). 两个方阵称为 S 等价的, 如果其中一个可从另一个通过初等约化, 初等展开和幺模同余(即变换 $A\to P'AP$, 其中 P 是一个幺模矩阵)诱导出. 对高维纽结

$(m=1)$ 和一维连接 $(n=1)$, Seifert 矩阵的 S 等价类是连接 L 的型的不变量. 在 L 是纽结的情形中, Seifert 矩阵 A 唯一地决定了一个 $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$ 模 $H_q\widetilde{X}$, 其中 $\widetilde{X}$ 是纽结的余集的无限循环覆叠. 多项式矩阵 $tA+(-1)^q A'$ 是模 $H_q\widetilde{X}$ 的 Alexander 矩阵 (见 **Alexander 不变量** (Alexander invariants)). Seifert 矩阵还决定了使得在连接上分叉的球面 S^{2q+1} 的循环覆叠中的 q 维同调和连接系数.

参考文献

[1] Seifert, H., Ueber das Geschlecht von Knoten, *Math Ann.*, **110** (1934), 571 – 592.

[2] Crowell, R. H. and Fox, R. H., Introduction to knot theory, Ginn., 1963.

[3] Levine, J., Polynomial invariants of knots of codimension two, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 537 – 554.

[4] Levine, J., An algebraic classification of some knots of codimension two, *Comment. Math. Helv.*, **45** (1970), 185 – 198.

М. Ш. Фарбер 撰

【补注】 对 $n=1$ 时的 Seifert 流形 (Seifert manifold), 即连接的 Seifert 曲面的描述, 见**纽结和连接图** (knot and link diagrams).

薛春华 译

Selberg 筛法 [**Selberg sieve; Сельберга решето**], Selberg 法 (Selberg method; Сельберга метод)

由 A. Selberg 创立的 (见 [1]) 一种特殊的、同时又有广泛用途的筛法 (sieve method). Selberg 筛法可以得到筛函数 $S(A;P,z)$ 的良好的上界, 这里 $S(A;P,z)$ 表示整数集合 A 中不能被属于某素数集合 P 中素数 $p<z$ 整除的元素个数.

设 $P(z)=\prod_{p<z;\,p\in P}p$. Selberg 方法基于显然的不等式

$$S(A;P,z)\leqslant\sum_{a\in A}\Big(\sum_{d\mid a,\ d\mid P(z)}\lambda_d\Big)^2, \qquad (*)$$

此式对 $\lambda_1=1$ 及任意实数 $\lambda_d(d\geqslant 2)$ 皆成立. Selberg 的思想如下: 对 $d\geqslant z$ 取 $\lambda_d=0$, 并对其余的数 λ_d $(2\leqslant d<z)$ 选取合适的值以使 $(*)$ 式右边取最小值.

与其他筛法相结合, Selberg 筛法可以得到下界, 它们与权函数一道使用, 是特别强有力的.

参考文献

[1] Selberg, A., On an elementary method in the theory of primes, *Norsk. Vid. Selsk. Forh.*, **19** (1947), 18, 64 – 67.

[2] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[3] Halberstam, H. and Richert, H., Sieve methods, Acad. Press, 1974.

Б. М. Бредихин 撰

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞、潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 1990, 第三十二章.

张明尧 译 戚鸣皋 校

选择定理 [**selection theorems; выбора теоремы**]

组合论中关于从一个集合中选择元素的一组定理, 使得所选择的元素按某种方式对应于该集合的一个子集族. 选择定理通常在解决各种组合问题时用作存在性定理. 下面列出一些最重要的选择定理, 并且给出它们的应用的一些例子.

1) 设 $S=\{S_1,\cdots,S_n\}$ 是一个给定集合 $T=\{t_1,\cdots,t_m\}$ 的一个子集族. 集合 T 的不同元素的一个样本 $R=\{t_{i_1},\cdots,t_{i_n}\}$, 若对 $j=1,\cdots,n$ 有 $t_{i_j}\in S_j$, 则称 R 是族 S 的一个**相异代表系** (system of different representatives): 元素 t_{i_j} 是集合 S_j 的一个代表. 例如, 若 $T=\{1,2,3,4,5\}$ 且 S 是由 $S_1=\{2,4,5\}$, $S_2=\{2,5\}$, $S_3=\{3,4\}$ 和 $S_4=\{1,3,4\}$ 组成, 则 $R=\{5,2,3,4\}$ 是 S 的一个相异代表系, 其中元素 5 代表集合 S_1, 元素 2 代替集合 S_2, 等等. 另一方面, 如果 S 是由集合 $S_1=\{2,4,5\}$, $S_2=\{2,5\}$, $S_3=\{4,5\}$, $S_4=\{2,4\}$ 组成, 则因为 S_1, S_2, S_3 和 S_4 总共只含 3 个元素, 那么 S 没有相异代表系.

相异代表系定理 (theorem on a system of distinct representatives): 一个族 $S=\{S_1',\cdots,S_n\}$ 有一个相异代表系, 当且仅当 S 的任意 k 个子集的并至少含有 k 个不同的元素, 其中 $k=1,\cdots,n$.

这个定理是 Ph. Hall 证明的 (亦见[1], [2]). 它可以用于证明共同代表系定理, 后者也是一个选择定理. 设

$$T=A_1\cup\cdots\cup A_l \qquad (1)$$

$$T=B_1\cup\cdots\cup B_l \qquad (2)$$

是集合 T 的两个划分, 即每一分量都非空, 并且对 $i\neq j$ 有 $A_i\cap A_j=B_i\cap B_j=\phi$. 如果集合 $R=\{t_{i_1},\cdots,t_{i_l}\}$ 既是族 $A=\{A_1,\cdots,A_l\}$ 也是族 $B=\{B_1,\cdots,B_l\}$ 的相异代表系, 则称 R 是划分 (1) 和 (2) 的**共同代表系** (system of common representatives). 例如, 若 $T=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, 并且

$$T=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4,\ T=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4$$

是 T 的两个划分, 其中 $A_1=\{0,1,2,3\}$, $A_2=\{4,5,6\}$, $A_3=\{7\}$, $A_4=\{8,9\}$, $B_1=\{4,7,8\}$, $B_2=\{0,5\}$, $B_3=\{2,3,6\}$, $B_4=\{1,9\}$, 则 $R=\{0,6,7,9\}$ 是族 $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 和 $B=\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ 的共同代表系, 这是因为它既是 A 也是 B 的不同代表系; 这里元素 0 代表集合 A_1 和 B_2, 元素 6 代表 A_2 和 B_3, 元素 7 代表集合 A_3 和 B_1, 而元素 9 代表集合 A_4 和 B_4.

共同代表系定理 (theorem on a system of common representatives): 划分 (1) 和 (2) 有一个共同代表系, 当且仅当 A 的任意 k 个集合的并至多包含簇 B 的 k 个集合, $k=1, \cdots, l$ ([1], [2]).

2) 给定一个长方矩阵. 术语线 (line) 表示矩阵的一行或一列.

König 定理 (König theorem): 如果长方矩阵的元素都是 0 和 1, 那么包含所有 1 的线的最小条数, 等于任何两个不在同一条线上的 1 的最大个数.

这个定理是 D. König 提出并证明的 ([4], 亦见 [1], [2]). 它等价于 Ph. Hall 定理. 例如, 它被应用于证明某些矩阵是置换矩阵的线性组合 (一个置换矩阵是一个 $m \times n$ 维的长方矩阵 P, 它是由元素 0 和 1 组成, 使得 $PP'=I$, 其中 P' 是 P 的转置矩阵, 而 I 是 m 阶的单位矩阵; 例如, 一个 m 阶的置换方阵由 m 个 1 组成, 使得任何两个 1 不在同一条线上). 换一句话说, 如果给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A, $m \leqslant n$, A 的元素是非负实数, 并且 A 的每一行的元素之和等于 m', 而每一列的元素之和等于 n', 那么

$$A = c_1 P_1 + \cdots + c_t P_t,$$

其中每个 P_i 都是置换矩阵, 而系数 c_i 都是非负实数 ([1], [2]). 特别是, 如果 A 是由 0 和 1 组成的 n 阶方阵, 使得每一行和每一列的和都等于一个正整数 k, 则

$$A = P_1 + \cdots + P_k,$$

其中所有的 P_i 都是 n 阶置换方阵.

设 T 是一个有限集, 而 $P_r(T)$ 是 T 的所有含 r 个元素的子集的集合. 设

$$P_r(T) = A_1 \cup \cdots \cup A_l, \tag{3}$$

为 $P_r(T)$ 的任一分为 l 部分 $A_1, \cdots, A_l$ 的有序划分. 令 $q_1, \cdots, q_l$ 是整数且满足

$$1 \leqslant r \leqslant q_1, \cdots, q_l. \tag{4}$$

如果存在一个含有集合 T 的 q_i 个元素的子集, 使得它的一切 r 个元素的子集均包含在 A_i 中, 则称它为集合 T 的 (q_i, A_i) 子集.

Ramsey 定理 (Ramsey theorem): 设 $q_1, \cdots, q_l$ 和 r 是满足 (4) 的整数. 那么存在一个自然数 $N(q_1, \cdots, q_l, r)$, 使得对任意整数 $n \geqslant N(q_1, \cdots, q_l, r)$ 下述断言成立: 给定 n 个元素的集合 T 及集合 $P_r(T)$ 的任一分为 l 个部分 $A_1, \cdots, A_l$ 的有序划分 (3), 那么对某个 $i=1, \cdots, l$, T 含有一个 (q_i, A_i) 子集.

这个定理是 Ramsey 证明的 ([5]); 亦见 [1], [2]. 这个定理的应用的一个例子是下述结果 ([6], [1], [2]): 对任意给定整数 $m \geqslant 3$, 存在一个整数 N_m, 使得平面上任何三点都不在一条直线上的 $n \geqslant N_m$ 个点中一定有 m 个点构成一个凸 m 边形.

参考文献

[1] Hall, M., Combinatorial theory, Blaisdell, 1967
[2] Ryser, H. J., Combinatorial mathematics, Carus Math. Monogr., 14, Math. Assoc. Amer., 1963 (中译本: H. J. 赖瑟, 组合数学, 科学出版社, 1983).
[3] Hall, Ph., on representatives of subsets, J. London Math. Soc., 1 (1935), 26 – 30.
[4] König, D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Chelsea, reprint, 1950.
[5] Ramsey, F. P., On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. (2), 30 (1930), 264 – 286.
[6] Erdös, P. and Szekeres, G., A Combinatorial problem in geometry, Compositio Math., 2 (1935), 463 – 470.

М. П. Минеев

【补注】 Ph. Hall 定理的通俗名称是婚配定理 (marriage theorem) 或者 Ph. Hall 婚配定理 (Ph. Hall marriage theorem).

$P_r(T)$ 的一个有序划分 (如 (3) 式) 可以视为 $P_r(T)$ (用 l 种颜色) 的一种染色 (colouring).

一个重要的选择定理是 Rado 选择原理, (Rado selection principle), 见 [A1] – [A3].

选择问题和选择定理不仅在组合数学中, 而且在数学的许多部分都出现. 一般描述是一个集值映射 F: $T \to 2^X$ (其中 2^X 是 X 的所有子集的集合), 而问题是寻求一个选择 f: $T \to X$, 使得对所有 t 都有 $f(t) \in F(t)$. 这样一个函数 f 有时称为选择子 (selector).

注意, 选择公理 (axiom of choice) 是对于选择存在性的一个断言.

此外, 选择问题还出现在拓扑、博奕论、概率论、测度论、分析等等学科. 接下来的一个是:

Kuratowski-Ryll-Nardzweski 选择定理 (Kuratowski-Ryll-Nardzweski selection theorem) ([A1]), 叙述如下: 设 X 是子集类 S 的 σ 代数的空间 (见集代数 (algebra of sets)), 而 Y 是完全可分的度量空间. 设 F 是 X 到 Y 中非空闭子集的可测集值函数, 这里可测的含义是: 对每个开集 $U \subset Y$, $\{x: F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ 属于 S, 那么存在可测选择子 f: $X \to Y$ (即对每个开集 $U \subset Y$, 满足 $f^{-1}(U) \in S$).

von Neumann 可测选择定理 (von Neumann measurable choice theorem) ([A2]), 在本质上可叙述为: 设 Y 是完全可分的度量空间, 而 F: $[0, 1] \to Y$ 是一个解析的集值函数, 那么存在一个 Lebesgue 可

测选择子 $f: [0, 1] \to Y$. 这里 $[0, 1]$ 上的集值函数 F 称为解析的(analytic), 如果其图象 $\{(t, u) \in [0, 1] \times Y: u \in F(t)\}$ 是 $[0, 1] \times Y$ 的解析子集(见**解析集**(analytic set)).

例如, 在拓扑学里有 Michael 连续选择定理(Michael continuous selection theorem)([A3]), 它刻画了仿紧性: 一个 T_1 空间 X 是仿紧的, 当且仅当 X 上每一个下半连续映射 F 的值在 Banach 空间 Y 的非空闭凸子集中, 就具有一个连续选择子.

关于更多的选择定理、更详细内容和应用见[A4]和[A5]. 有关其他一些选择定理及其变形, 亦见**多值映射**(Multi-valued mapping). 选择定理这一词也应用于诸如有关收敛子序列的各种结果, 例如见 **Helly 定理**(Helly theorem); **Blaschke 选择定理**(Blaschke selection theorem); **Bolzano-Weierstrass 选择原理**(Bolzano-Weierstrass selection principle).

参考文献

[A1] Kuratowski, K. and Ryll-Nardzweski, C.: A general theorem on selectors, *Bull Acad. Pol. Sci., Ser. Math. Astron Phys.*, 13 (1965), 397 - 403.

[A2] Neumann, J. von., On rings of operators, Reduction theory, *Ann. of Math.*, 50 (1949), 448 - 451.

[A3] Michael, E., Continuous selections I, *Ann. of Math.*, 63 (1956), 361 - 382.

[A4] Parthasarathy, T., Selection theorems and their applications, Lecture notes in math, 263, Springer, 1972.

[A5] Fleischman, W. M. (ed.), Set valued mappings, selections and topological properties of 2^x, Lecture notes in Math., 171, Springer, 1970.

[A6] Mirsky, L., Transversal theory, Acad. Press, 1971.

[A7] Lüneburg, H., Tools and fundamental constructions of combinatorial mathematics, B. I, Wissenschaftsverlag, 1989.

[A8] Graham, R. L., Rothschild, B. L. and Spencer, J. H., Ramsey theory, Wiley (interscience), 1980.

刘振宏 译 李 乔 校

自伴微分方程 [**self-adjoint differential equation**; **самосопряженное дифференциальное уравнение**]

与其伴随微分方程(adjoint differential equation) $l^*(y) = 0$ 相同的线性常微分方程 $l(y) = 0$. 这里

$$l(y) \equiv a_0(t)y^{(n)} + \cdots + a_n(t)y,$$

$$l^*(y) \equiv (-1)^n(\overline{a}_0(t)y)^{(n)} + \cdots + (-1)^0\overline{a}_n(t)y,$$

而

$$y^{(\nu)} = \frac{d^\nu y}{dt^\nu},\ y(\cdot) \in C^n(I),\ a_k(\cdot) \in C^{n-k}(I),$$

$$a_0(t) \neq 0,\quad t \in I.$$

$C^m(I)$ 是在区间 $I = (\alpha, \beta)$ 上 m 次连续可微的复值函数空间, 一横表示复共轭.

每个自伴微分方程 $l(y) = 0$ 的左方都是以下形式的表达式之和

$$l_{2m}(y) = (p_m y^{(m)})^{(m)},$$

$$l_{2m-1}(y) = \frac{1}{2}[(iq_m y^{(m-1)})^{(m)} + (iq_m y^{(m)})^{(m-1)}],$$

$p_m(t)$, $q_m(t)$ 是充分光滑的实值函数, $i^2 = -1$. 实系数的自伴微分方程必定是偶数阶的, 且形如

$$(p_0 y^{(m)})^{(m)} + (p_1 y^{(m-1)})^{(m-1)} + \cdots + p_m y = 0.$$

(见[1]-[3]).

线性微分方程组

$$L(x) = 0,\ L(x) \equiv \dot{x} + A(t)x,\ t \in I,$$

其中 $A(t)$ 是连续的复值 $(n \times n)$ 方阵, 若 $A(t) = -A^*(t)$, 则称为自伴的(self-adjoint), 这里 $A^*(t)$ 是 $A(t)$ 的 Hermite 共轭方阵(见[1], [4]及 **Hermite 算子**(Hermitian operator)). 这个定义与自伴微分方程的定义不相容. 例如, 与自伴微分方程

$$\ddot{y} + p(t)y = 0$$

等价的方程组

$$\dot{x}_1 - x_2 = 0,\ \dot{x}_2 + p(t)x_1 = 0,$$

当且仅当 $p(t) \equiv 1$ 时是自伴的线性方程组.

一个边值问题

$$l(y) = 0,\ t \in \Delta = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$U_k(y) = 0,\ k = 1, \cdots, n. \tag{2}$$

若与其伴随边值问题相同, 就称为自伴的(self-adjoint)边值问题, 就是说, 要求(1)是自伴微分方程而对一切 $y(\cdot) \in C^n(\Delta)$ 及一切 $k = 1, \cdots, n$ 均有 $U_k(y) = U_k^*(y)$, 这里 $U_k: C^n(\Delta) \to \mathbf{R}^1$ 是描述边值条件的线性无关的线性泛函(见[1]-[3], [5]). 若(1), (2)是一自伴边值问题, 则对任意一对适合边值条件(2)的 $y(\cdot)$ 和 $\xi(\cdot) \in C^n(\Delta)$ 以下等式(见 **Green 公式**(Green formulas))成立

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{\xi}\, l(y)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \overline{l(\xi)}\, y\,dt.$$

自伴问题

$$l(y) = \lambda y,\ U_k(y) = 0,\ k = 1, \cdots, n$$

的所有本征值均为实的, 而相应于不同本征值 λ_1, λ_2 的本征函数 φ_1, φ_2 为正交的:

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{\varphi}_1(t)\varphi_2(t)\,dt = 0.$$

一个方程组的线性边值问题

$$L(x) \equiv \dot{x} + A(t)x = 0,\ U(x) = 0,\ t \in \Delta \quad (3)$$

(其中 $A(t)$ 是连续复值 $(n \times n)$ 方阵, U 是连续可微复值向量函数 $x: \Delta \to \mathbf{R}^n$ 的空间 $C_n^1(\Delta)$ 上的 n 向量泛函)若与它的伴随边值问题

$$L^*(x) = 0,\ U^*(x) = 0,\ t \in \Delta$$

相同, 即对所有 $x(\cdot) \in C_n^1(\Delta)$

$$L(x) = -L^*(x),\ U(x) = U^*(x),$$

则称为自伴的(self-adjoint). 方程组的自伴边值问题(3)与一个方程的自伴边值问题(1),(2)有相类似的性质(见[4]).

自伴微分方程和自伴边值问题的概念与**自伴算子**(self-adjoint operator)([6])的概念密切相关(亦见**微分算子的谱理论**(spectral theory of differential operators)). 对线性偏微分方程也定义了自伴性和自伴边值问题(见[5],[7])

参考文献

[1] Kamke, E., Differentialgleichungen: Losungsmethoden und Lösungen, 1, Chelsea, reprint, 1971.

[2] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969 (英译本: Naĭmark, M. A., Linear differential operators, Harrap, 1968).

[3] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[4] Владимиров, В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981 (英译本: Vladimirov, V. S., Equations of mathematical physics, Mir, 1984).

[5] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[6] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators, spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[7] Михайлов, В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976 (英译本: Mikhaĭlov, V. P., Partial differential equations, Mir, 1978).

Е. Л. Тонков 撰

【补注】 本征函数系一般是完全的.

参考文献

[A1] Agmon, S., Lectures on elliptic boundary value problems, v. Nostrand, 1965.

齐民友 译

自伴线性变换 [self-adjoint linear transformation; самосопряженное линейное преобразование]

Euclid 空间或酉空间的一个与其**伴随线性变换**(adjoint linear transformation)相等的**线性变换**(linear transformation). Euclid 空间的自伴线性变换也称为对称线性变换(symmetric linear transformation), 在酉空间里也称为 Hermite 线性变换(Hermitian linear transformation). 有限维空间内一个线性变换是自伴的必要且充分的条件是它在任意规范正交基内的矩阵 A 与它的伴随矩阵 A^* 重合, 即在 Euclid 空间的情形是一个**对称矩阵**(symmetric matrix), 在酉空间的情形是一个 **Hermite 矩阵**(Hermitian matrix). 自伴线性变换的本征值都是实数(即使在酉空间的情形也是如此), 并且对应于不同的本征值的本征向量彼此正交. 有限维空间 L 的一个线性变换是自伴的, 当且仅当 L 有一个由本征向量所组成的规范正交基, 在这个基内这个线性变换可以表示为实对角形矩阵.

一个自伴线性变换 A 是非负的(non-negative)(或正半定的(positive semi-definite)), 如果对于任意向量 x 来说, $(Ax, x) \geq 0$; 是正定的(positive definite), 如果对于任意 $x \neq 0$ 来说, $(Ax, x) > 0$. 在有限维空间内一个自伴线性变换是非负的(或正定的), 必要且只要它的所有本征值都是非负的(相应地, 都是正的), 或者对应的矩阵是正半定的(相应地, 是正定的). 在这一情形存在唯一的非负自伴线性变换 B, 满足条件 $B^2 = A$, 即 B 是自伴线性变换 A 的平方根(square root). А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Halmos, P. R., Finite-dimensional vector spaces, v. Nostrand, 1958.

郝钢新 译

自伴算子 [self-adjoint operator; самосопряженный оператор], Hermite 算子(Hermitian operator)

定义在 Hilbert 空间 H 中处处稠密线性集 $D(A)$ 上且与其**伴随算子**(adjoint operator) A^* 一致的一个**线性算子**(linear operator) A, 即 $D(A) = D(A^*)$ 且对每个 $x, y \in D(A)$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle. \quad (*)$$

每一自伴算子是闭的且不能扩张到比 $D(A)$ 更广的线性流形而仍保持(*); 由于这点一个自伴算子也称为超极大的(hypermaximal). 因此, 如果 A 是有界自伴算子, 则它是定义在整个 H 上的.

每个自伴算子唯一地决定一个**单位分解**(resolution of the identity) E_λ, $-\infty < \lambda < \infty$; 以下的积分表示成立:

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda x,$$

其中积分理解为积分和的强极限, 对每个 $x \in D(A)$, 且

$$D(A) = \left\{ x: \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\langle E_\lambda x, x \rangle < \infty \right\}.$$

自伴算子的谱是非空的且位于实直线上．由自伴算子 A 生成的二次型 $K(A)=\langle Ax, x\rangle$ 是实的，且由此使得可以引进**正算子**（positive operator）的概念．

许多数学物理的边值问题可借助于自伴算子来描述．

参考文献

[1] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965（中译本：Л. А. 刘斯铁尔尼克，В. И. 索伯列夫，泛函分析概要，第二版．科学出版社，1985）．

[2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1966（英译本：Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, I-2, Pitman, 1981）．

[3] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Functional analysis, F., Ungar, 1955（译自法文）（中译本：F. 黎茨，B. 塞克佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，科学出版社，第一卷，1963，第二卷，1980）．

В. И. Соболев 撰

【补注】 亦见 **Hermite 算子**（Hermitian operator）；**对称算子**（symmetric operator）；**自伴线性变换**（self-adjoint linear transformation）． 葛显良 译 吴绍平 校

自内射环 [**self-injective ring; самоинъективное кольцо**]，左的（left）

一个环作为自身的左模是内射的，称为左内射环（见**内射模**（injective module））．对称地定义右内射环（right self-injective ring）．经典的半单环及整数的所有剩余环 $\mathbf{Z}/(n)$ 是自内射环．如果 R 是具有 **Jacobson 根**（Jacobson radical）J 的自内射环，则商环 R/J 是**正则环（在 von Neumann 意义下）**（regular ring (in the sense of von Neumann)）．正则自内射环是连续的．每个可数自内射环是**拟 Frobenius 环**（quasi-Frobenius ring）．左自内射环不一定是右自内射环．自内射环上的矩阵环和域上向量空间的全线性变换环是自内射的．所有自由左 R 模的自同态环都是自内射环，当且仅当 R 是拟 Frobenius 的．如果 M 是左 R 模范畴的余生成子，则 $\mathrm{End}_R M$ 是自内射环．如果环 R 的奇异理想为零，则它的内射包可以通过一自然的方式成为自内射环．群环 RG 是左自内射的，当且仅当 R 是自内射环且 G 是有限群．自内射环的直积是自内射的．环 R 同构于体上的全线性变换环的直积，当且仅当 R 是左自内射环且没有幂零理想，它的每个非零左理想包含有极小左理想．

参考文献

[1] Скорняков, Л. А., Итоги науки и техники. Алгебра, Топология, Геометрия, т. 14, М., 1976, 57-190.

[2] Faith, C., Algebra, I-2, Springer, 1973-1976.

[3] Lawrence, J., A countable self-injective ring is quasi-Frobenius, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 65 (1977), 2, 217-220.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 环 R 的本质右理想（essential right ideal）是一个理想 E，对 R 的所有非零右理想 I 有 $E\cap I\neq 0$．在右 Ore 整环（见下文）中每个非零右理想是本质的．令 $\mathscr{E}(R)$ 为 R 的本质右理想集合，

$$\zeta(R)=\{a\in R: 存在\ E\in\mathscr{E}(R),\ 使\ aE=0\}$$

是一个理想，称为 R 的右奇异理想（right singular ideal）．

令 S 为 R 的正则元（regular elements）的乘法封闭子集（即 R 的非零因子）．如果 S 满足右 Ore 条件（right Ore condition）（见**结合环和结合代数**（associative rings and algebras）），R 称为右 Ore 环（right Ore ring）．当右 Ore 环为**整环**（integral domain）时，称为右 Ore 整环（right Ore domain）．

参考文献

[A1] McConnell, J. C. and Robson, J. C., Noncommutative noetherian rings, Wiley, 1987, Part I, Chapt. 2.

裴定一 译 赵春来 校

自交点 [**self-intersection, point of; самопересечения точка**]

曲线或曲面的一类**奇点**（singular point）．例如，见**二重点**（double point）．

自周长 [**self-perimeter; самопериметр**]

平面上一条中心对称闭凸曲线 S 在 Minkowski 度量下（对此 S 起到单位圆周的作用）所量得的长度 $2\pi_S$．总是有 $3\leqslant\pi_S\leqslant 4$（见[1]）．推广到非对称情形，自周长是一条有向曲线 S 的长度，依赖于在 S 内原点的选取（参见[2]，[3]）．星形 S 的情形已被考虑过（参见[4]）．对于维数大于 2 的赋范空间内单位球面 S 有自周长的各种推广（参见[5]，[6]）．

参考文献

[1] Решетняк, Ю. Г., 《Успехи матем. наук》, **8** (1953), 6, 125-126.

[2] Сорокин, В. А., 《Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та》, 1965, 243, 160-185.

[3] Chakerian, G. D. and Talley, W. K., Some properties of the self-circumference of convex sets, *Arch. Math.*, **20** (1969), 4, 431-443.

[4] Golab, S., Sur la longuer d'indicatrice dans la géometrie plane de Minkowski, *Colloq. Math.*, **15** (1966), 1, 141-144.

[5] Schäffer, J. J., Spheres with maximum inner diameter, *Math. Ann.* 190 (1971), 3, 242 – 247.
[6] Petty, C. M., Geominimal surface area, *Geom. Dedic.*, 3 (1974), 1, 77 – 97.

В. А. Залгаллер 撰 陈维桓 译

自切点 [**self-tangency, point of; самоприкосновения точка**]

曲线或曲面的一类奇点(singular point). 例如,见二重点(double point).

语义学 [**semantics; семантика**], 亦称语义, 数理逻辑中的

研究**逻辑演算**(logical calculus)(一种形式公理理论)的解释、形式语言理论结构的意义,以及理解形式语言中逻辑联接词和公式的方法的学科. 语义研究,至少在形式语言中,要严格地描述和定义这样一些概念: 例如"真"、"可定义性"、"外延"等. 在较狭义的情况下,形式语言的语义常指一种定约的系统,它决定这种语言的公式的理解,定义这些公式取真值的条件.

在古典的和直觉主义的逻辑中,逻辑联接词的语义有外在性质(extensional nature): 即复杂命题的真值只由构成这个命题的表达式的特征决定. 在另一些经典逻辑中——例如,在相关逻辑中——概念的有意义的内容也可以被考虑(这种逻辑称为内涵的(intensional)). 在这一类逻辑中取值为真的表达式不一定互相等价.

为相当复杂的形式语言,例如**公理集合论**(axiomatic set theory)的语言,构造一种严格的语义是很困难的. 它实质上与数学中的抽象过程有关,这种抽象非常复杂、多层次、深奥而又不直观,例如,**实无穷的抽象**(abstraction of actual infinity),**潜在可实现性的抽象**(abstraction of potential realizability)结果,数学所研究的对象的罗列,处理这些对象的方法,证明与之有关的结论的手段,就像是一堆乱七八糟的东西,变得十分不确定. 在某一理论范围内所采用的证明方法稍一不慎就会出现**悖论**(antinomy): 例如,集合论中有罗素悖论. 这种情况使人们必须抛弃对一种语言的直觉的,穷举式的语义而代之以严格规定的公式化的语义. 在形式化一种理论的时候,我们必须尽力使演算的推导规则相对于语义规定是可靠的; 即这些规则应用于取值为真的公式所得到的公式应该也是真的. 在一定的**元理论**(meta-theory)框架中,这样的形式系统就具有清晰的语义.

通常某一个语言的语义概念只能在含义更丰富的另一种语言的框架中精确地用公式来定义,后者就是前者的**元语言**(meta-language). 例如,用集合论,可以为一个代数系统中给定的语言公式为真下一个严格的数学定义. 这一概念就是**模型论**(model theory)的基点. 另一方面,如同 Tarski(1936) 所证明,一个有丰富含义的理论的真值不可能在这个理论本身所用的语言中得到证明.

非古典理论的语义——例如,在**直觉主义**(intuitionism)框架内建立的数学理论,已经被广泛地研究. 这种研究之中,模型所起的作用由代数结构所替代,代数结构用来说明逻辑联结词的非古典的含义. 例如,**Kripke 模型**(Kripke models),Kleene **可实现性**(realizability),以及 Марков 的**逐步语义系统**(stepwise semantic system).

参考文献

[1] Carnap, R., Meaning and necessity, Univ. Chicago Press, 1947.
[2] Church, A., Introduction to mathematical logic, 1. Princeton Univ. Press, 1956.
[3] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951(中译本: S. C. 克林著,元数学导论,科学出版社,上册 1984,下册 1985).
[4] Драгалин, А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979(英译本: Dragalin, A. G., Mathematical intuitionism. Introduction to proof theory, Amer. Math. Soc., 1988).
[5] Feys, R., Modal logics, Gauthier-Villars, 1965.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】 一阶语言的普通语义学(即模型论(model theory)见[A1]. 集合论模型见[A2],[A3]. 直觉主义逻辑语义学见[A4].

参考文献

[A1] Chang, C. C. and Keisler, H. J., Model Theory, North-Holland, 1973.
[A2] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978.
[A3] Kunen, K., Set theory, North-Holland, 1980.
[A4] Troelstra, A. S. and Dalen, D. van, Constructivity in mathematics, 1 – 2, North-Holland, 1988.

沈复兴 译 罗里波 校

半代数集 [**semi-algebraic set; полуалгебраическое множество**], 半解析集(semi-analytic set)

【补注】 $\mathbf{R}^n$(或 k^n, k 是实闭域)内半代数集(semi-algebraic set)是由有限多个多项式等式或不等式给出的集合. 更精确地说,对 $g\in\mathbf{R}[X_1, \cdots, X_n]$,设 $U(g)=\{x\in\mathbf{R}^n: g(x)>0\}$,则 E 是半代数的,如果它属于包含所有的 $U(g)$ 的 $\mathbf{R}^n$ 的子集的最小 Boole 环.

作为定义,半解析集(semi-analytic set)是实解析流形的一个集合,它局部地能用有限多个解析等式

和不等式来描述.

Tarski-Seidenberg 定理 (Tarski-Seidenburg theorem) 断言一个判定过程 (decision procedure) (亦见**可判定集** (decidable set)) 的存在性以判定由有限多个多项式不等式 $g_i(x_1, \cdots, x_n) > 0$, 联结词 "与"、"或" 和 "非" 以及量词 $\exists X_j$, $\forall x_k$ 所构成的初等语句的真伪. 两个精确的表述是: 1) 设 $E \subset \mathbf{R}^n$ 是半代数集, $\pi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$ 是到最后 $n-1$ 个坐标上的投影, 则 $\pi(E)$ 是半代数的. 2) 设 $S(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_m)$ 是由不等式 $p_i(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_m) > 0$ 以及联结词 "与"、"或" 和 "非" 构成的有限语句 (这样的语句称为一个多项式关系 (polynomial relation)). 设 $Q_1, \cdots, Q_n$ 是一系列形如 $\exists x_j$ 或 $\forall x_k$ 的量词, 则存在一个算法以发现多项式关系 $T(t_1, \cdots, t_m)$, 使得

$$T(t_1, \cdots, t_m) \Longleftrightarrow Q_1 \cdots Q_n S(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_m).$$

从 Tarski-Seidenberg 定理可以得出, 半代数集在多项式映射 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 下的象是半代数的. 事实上这是一个等价.

半解析集在解析映射下的象不必是半解析的. 实解析流形上的**次解析集** (subanalytic set) 定义为一个集合, 它局部是半解析集在解析映射下的象. 次解析集的不是半解析的点构成一个次解析集, 见 [A2].

半代数 (相应地, 半解析或次解析) 集的闭包仍是半代数 (相应地, 半解析或次解析) 的.

半代数 (相应地, 次解析) 集在代数 (相应地, 解析) 映射下的象是半代数 (相应地, 次解析) 集.

最后, 一个光滑代数 (相应地, 解析或解析) 簇的半代数 (相应地, 半解析或次解析) 子集容许有一个光滑的**分层** (stratification), 它的层是半代数 (相应地, 半解析或次解析) 的 (并且光滑).

参考文献

[A1] Hironaka, H., Stratification and flatness, in P. Holm (ed.): Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Sijthoff & Noordhoff, 1977, 199 – 266.

[A2] Pawtucki, W., Points de Nash des ensembles sous-analytiques, Amer. Math. Soc., 1990.

[A3] Brumfiel, G. W., Partially ordered rings and semi-algebraic geometry, Cambridge Univ. Press, 1979.

陈志杰 译

半有界算子 [semi-bounded operator; полуограниченный оператор]

Hilbert 空间 H 上的一个**对称算子** (symmetric operator) S, 对它存在一个数 c 使得对 S 的定义域中的所有向量 x,

$$(Sx, x) \geqslant c(x, x).$$

一个半有界算子 S 总有一个具有同样下界 c 的半有界自伴扩张 A (Friedrichs 定理 (Friedrichs theorem)). 特别地, S 和它的扩张有同样的亏指数 (见**亏值** (defective value)).

参考文献

[1] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, Functional analysis, F. Ungar, 1955 (译自法文) (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980).

В. И. Ломоносов 撰　葛显良 译　吴绍平 校

半链模 [semi-chain module; полуцепной модуль]

一个**模** (module), 它可分解成链子模的直和 (见**链模** (chain module)). 当且仅当 R 是广义**单列环** (uniserial ring) 时, 所有左 R 模是半链模.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 链模也称为单列模 (uniserial module), 相应地, 半链模也可以称为半单列模. 在 [A1] 中术语 Σ 单列的 (Σ-uniserial) 和 σ 单列的 (σ-uniserial) 用于单列模的直和 (相应地, 单列模的有限直和).

参考文献

[A1] Faith, C., Algebra, II. Ring theory, Springer, 1976, Chapt. 25.

蔡传仁 译

半链环 [semi-chain ring; полуцепное кольцо], 左 (右) (left (right))

环, 是其自身上的左 (右) **半链模** (semi-chain module).

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 这样的环也称为右列环 (right serial ring) (相应地, 左列环 (left serial ring)). 列环 (serial ring) 是同时为左和右列的环. 列环的一个例子是域上的单变量的形式幂级数环.

参考文献

[A1] Faith, C., Algebra, II. Ring theory, Springer, 1976, Chapt. 25.

蔡传仁 译

半经典近似 [semi-classical approximation; квазиклассическое приближение], 亦称拟经典近似 (quasi-classical approximation)

一个渐近表示, 即量子力学方程当 $\hbar \to 0$ (其中 $\hbar$ 是 Planck 常数) 时的渐近解. **Schrödinger 方程** (Schrödinger equation)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi + V(x)\psi,\ x \in \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

描述量子力学粒子在势场 $V(x)$ 中的运动. 经典粒子的运动由 Hamilton-Jacobi 方程 (见 **Hamilton-Jacobi 理论** (Hamilton-Jacobi theory))

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla S)^2 + V(x) = 0 \quad (2)$$

描述，或由 **Hamilton 方程**（Hamilton equations）

$$\frac{dx}{dt}=p,\ \frac{dp}{dt}=-\nabla V(x) \tag{3}$$

描述. Schrödinger 方程的 **Cauchy 问题**（Cauchy problem），

$$\psi|_{t=0}=\varphi(x)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_0(x)\right], \tag{4}$$

可与方程组（3）的 Cauchy 问题

$$x|_{t=0}=y,\ p|_{t=0}=\nabla S_0(y),\ y\in\mathbf{R}^n \tag{5}$$

比较（这里 φ, S_0, V 是光滑函数，S_0, V 是实值的、而 φ 是具紧支撑的）. 渐近解 $\psi(t,x)$ 当 $\hbar\to 0$, $0\leqslant t\leqslant T$ 和对小 $T>0$ 具有形式:

$$\psi(t,x)\sim\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(t,x)\right]\sum_{j=0}^{\infty}(-i\hbar)^j\varphi_j(t,x). \tag{6}$$

这里 $S(t,x)$ 是具有 Cauchy 数据 $S|_{t=0}=S_0(x)$ 的方程（2）的解（经典作用量），而

$$\varphi_0(t,x)=\varphi(0,y)\sqrt{\frac{J(0,y)}{J(t,y)}},$$

$$J(t,y)=\det\frac{\partial x(t,y)}{\partial y},$$

其中 $x=x(t,y)$, $p=p(t,y)$ 是（3），（5）的解. 函数 φ_j 对 $j\geqslant 1$ 由递归输运方程组予以定义（这些是沿方程组（3）的轨道的常微分方程），所以，渐近解的所有项都是用经典力学的术语予以表达. Bohr 对应原理断言：如果 $\hbar$ 趋于零，则量子定律必然过渡到经典定律. 寻求（6）形式的渐近解的方法是 P. Debye 提出的，曾经被广泛应用于量子力学.

问题（1），（4）的渐近解，一般地（即，对任何有限时间）是通过 В. П. Маслов 的典范算子予以构造的（[3]）. Cauchy 数据（5）在相空间 $\mathbf{R}^{2n}_{x,p}$ 中填出一个 n 维 Lagrange 流形 Λ^n. 它沿方程组（3）的轨道的平移 $\Lambda^n_t=g^t\Lambda^n$ 也是 Lagrange 流形；它们的并 $\Lambda^{n+1}=\bigcup_{-\infty<t<\infty}\Lambda^n_t$ 是具有坐标 (t,x,p_0,p) 的相空间 $\mathbf{R}^{2n+2}$ 中的 $(n+1)$ 维 Lagrange 流形. 关于对应于 Λ^{n+1} 的典范算子 $K=K^{n+1}_{\Lambda}$，下列对易关系成立:

$$\hat{L}K\varphi=-i\hbar K\dot{\varphi}+O(\hbar^2), \tag{7}$$

其中 $\dot{\varphi}$ 是沿方程组（3）的导数，而 $\hat{L}$ 是 Schrödinger 算子. 渐近解 ψ 一般地由公式

$$\psi(t,x)\sim K\left[\sum_{j=0}^{\infty}(-i\hbar)^j\chi_j(t,x)\right] \tag{8}$$

给出，其中函数 χ_j 通过输运方程由 Cauchy 数据（4）予以定义，并可用经典力学的术语予以表达. 在非焦点 (t_0, x^0)，渐近解具有形式

$$\psi(t_0,x^0)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\varphi_j}{\sqrt{|J_j|}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_j-\frac{i\pi}{2}l_j\right],$$

其中求和对所有到达此点的射线进行，S_j 和 J_j 是第 j 条射线的作用量和 Jacobi 行列式，l_j 是其 Morse 指数. 对于定态 Schrödinger 方程，曾在半经典近似下研究过散射问题以及点源的场的问题，并曾获得本征值的（Balmer 型）经典级数.

广义下的半经典近似（semi-classical approximation in the wide sense）（同义词：高频渐近解，短波近似，几何光学近似，WKB 方法，程函方法，广义下的准经典近似）是下列一些方程的渐近解：具有实特征线，形式为

$$L(x,\lambda^{-1}D_x;(i\lambda)^{-1})u(x)=0,\ x\in\mathbf{R}^n \tag{9}$$

的偏微分方程，以及微分方程和伪微分方程. 这里 $\lambda\to\infty$ 是大参数，而符号 $L(x,p;\varepsilon)$ 弱依赖于 ε，对应于（9）的是经典力学的方程，即 Hamilton-Jacobi 方程

$$L^0(x,\nabla S(x))=0$$

和 Hamilton 方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial L^0}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial L^0}{\partial x}, \tag{10}$$

其中 $L^0=L(x,p;0)$. 半经典近似通过对应于 Lagrange 流形（该流形关于动力系统（10）是不变式）的典范算子予以构造，它具有类似于（8）的形式.

半经典近似广泛应用于近代物理学的下列问题：声波，弹性波和电磁波的传播问题，非相对论性和相对论性量子力学以及其他问题.

参考文献

[1] Brillouin, L., La théorie des quanta et l'atome de Bohr, Blanchard, 1922.

[2] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974（中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席茨，量子力学（非相对论理论），人民教育出版社，上册，1980，下册，1981）.

[3] Маслов, В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965.

[4] Маслов, В. П., Федорюк, М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики М., 1976（英译本：Maslov, V. P. and Fedoryuk, M. V., Semi-classical approximation in quantum mechanics, Reidel, 1981）.

[5] Фок, В. А., Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970.

[6] Бабич, В. М., Булдырев, В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972.

[7] Маслов, В. П., Операторные методы, М., 1973 (英译本: Maslov, V. P., Operational methods, Mir. 1976).
М. В. Федорюк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Simon, B., Functional integration and quantum mechanics, Acad. Press, 1979.
徐锡申 译

半连续分解 [semi-continuous decomposition; полунепрерывное разбиение], 上(下)半连续分解 (upper (lower) semi-continuous decomposition)

一个**分解** (decomposition) D, 即拓扑空间 X 的不相交闭覆盖, 使得**商映射** (quotient mapping) $p: X \to D$ 是闭(开)的 (见**开映射** (open mapping); **闭映射** (closed mapping)).

М. И. Войцеховский 撰 白苏华, 胡师度 译

半连续函数 [semi-continuous function; полунепрерывная функция]

定义在完全度量空间 X 上的扩充实值函数 f, 称为在点 $x_0 \in X$ 是下(上)半连续的 (lower (upper) semi-continuous), 如果

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0) \quad [\varlimsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)].$$

函数 f 称为在 X 上是下(上)半连续的, 如果它在 X 的每个点都是下(上)半连续的. 单调增加(减少)的函数列, 其中每个函数都在点 x_0 是下(上)半连续的, 那么它们的极限函数在 x_0 仍是下(上)半连续的. 若 u 和 v 分别为 X 上的下半连续和上半连续函数, 且对所有的 $x \in X$, $v(x) \leqslant u(x)$, $v(x) > -\infty$, $u(x) < +\infty$, 那么存在 X 上连续函数 f, 使得对一切 $x \in X$, 满足条件 $v(x) \leqslant f(x) \leqslant u(x)$. 设 μ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负正则 Borel 测度, 则对任何 μ 可测函数 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 存在两个单调函数序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$, 满足如下条件: 1) u_n 和 v_n 分别是下半连续和上半连续的; 2) 每个 u_n 是有下界的, 而每个 v_n 是有上界的; 3) $\{u_n\}$ 是减少的序列而 $\{v_n\}$ 是增加序列; 4) 对一切 x,

$$u_n(x) \geqslant f(x) \geqslant v_n(x);$$

5)

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x) = f(x)$$

μ 几乎处处成立; 6) 若 f 在 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上为 μ 可和, 且 $f \in L_1(E, \mu)$, 则 $u_n, v_n \in L_1(E, \mu)$ 且

$$\lim_{n \to \infty} \int_E u_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E v_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

(Vitali-Carathéodory 定理 (Vitali-Carathéodory theorem)).

参考文献

[1] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 上、下册, 高等教育出版社, 1958).
[2] Saks, S., Theory of the integral, Hafner, 1937.
И. А. Виноградова 撰

【补注】 下半连续与上半连续常缩写为 l.s.c. 与 u.s.c.. l.s.c 与 u.s.c. 函数的概念也可以在拓扑空间 X 上定义. 任何一个连续函数族的上(相应地, 下)包络是 l.s.c.(u.s.c.) 的, 且当 X 为完全正则时, 其逆亦真; 若 X 可度量化, 上述结果对连续函数的可数族也成立. 所以, 度量空间 X 上的半连续函数必属于第一 **Baire 类** (Baire classes). 其逆不真.

设 $X = \mathbf{R}$, 又设

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ 1, & \text{当 } x > 0, \end{cases}$$

于是 f 属于第一 Baire 类, 但它既不是上半连续的也不是下半连续的. 此外, $|f|$ 是下半连续的, 但

$$\lim_{x \to 0} |f|(x) = 1 \neq 0 = |f|(0).$$

注意 $|f|(x) = \lim_{n \to \infty} (nx^2)/(nx^2 + 1)$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 成立, 所以 $|f|$ 是连续函数的增加序列的逐点极限.

有关半连续函数的一个很有用的事实是 Dini-Cartan 引理 (Dini-Cartan lemma). 设 X 为紧空间, $(u_i)_{i \in I}$ 为一族 l.s.c. 函数, 它具有如下的性质: 对于 I 的任意有限子集 J, 存在 $i \in I$ 使得 $\sup_{j \in J} u_j \leqslant u_i$. 若 v 为 u.s.c. 函数使得 $v < \sup_{i \in I} u_i$, 则必存在 $i \in I$ 使得 $v < u_i$; 特别, 有 $\inf_{x \in E} \sup_{i \in I} u_i = \sup_{i \in I} \inf_{x \in E} u_i$.

参考文献

[A1] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.
王斯雷 译

半连续映射 [semi-continuous mapping; полунепрерывное отображение], 上(下) (upper (lower)) 半连续映射

拓扑空间 (topological space) X 到偏序集 P 的映射 f, 使得

$$\lim x_n = x$$

蕴含

$$\varlimsup f(x_n) \leqslant f(x) [\varliminf f(x_n) \geqslant f(x)],$$

这里, $\varlimsup (\varliminf)$ 表示上(下)极限.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 在偏序集 P 上，由 P 和所有集合 $U_x=\{y\in P: y<x\}$ 组成的集合是 P 上拓扑的一个基，记为 τ_-，而 P 和所有集合 $V_x=\{y\in P: y\geq x\}$ 定义了拓扑 τ_+. 映射 $f: X\to P$ 上半连续 ($u.s.c$)(相应地，下半连续 ($l.s.c$)) 的充要条件是：$f: X\to(P,\tau_+)$ (相应地，$f: X\to(P,\tau_-)$) 是连续的 .

实际上，上半连续性和下半连续性通常只对于到实直线 $\mathbf{R}$ 上的映射定义．用开集的术语可知，$f: X\to\mathbf{R}$ 上（下）半连续的充要条件是：$f^{-1}[(-\infty,a)]$ ($f^{-1}[(a,\infty)]$) 对每个 a 是开集 .

对于集值映射（set-valued mapping）也定义了半连续性．映射 $F: X\to 2^Y$ 是上（下）半连续的，如果对 Y 的每个开子集 U，集合 $\{x: F(x)\subseteq U\}$ (集合 $\{x: F(x)\cap U\neq\varnothing\}$) 是开集 .

注意，若视映射 $f: X\to Y$ 为集值映射 $F: X\to 2^Y$，$F(x)=\{f(x)\}$，则 F 下半连续的充要条件是：f 是下半连续的；F 上半连续的充要条件是：f 是上半连续的 .

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

白苏华 胡师度 译

半连续求和法 [**semi-continuous summation method**; **полунепрерывный метод суммирования**]

对于借助函数序列所定义的级数与序列的一种求和法（summation methods）．设 $\{a_k(\omega)\}$ ($k=0, 1, \cdots$) 是定义在参数 ω 的某变分集 E 上的函数序列，ω_0 是 E 的一个（有限或无穷）聚点（accumulation point）．函数 $a_k(\omega)$ 用来将给定序列 $\{s_n\}$ 变为函数 $\sigma(\omega)$:

$$\sigma(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\omega)s_k. \tag{1}$$

如果（1）中级数对所有充分靠近 ω_0 的 ω 收敛，且

$$\lim_{\omega\to\infty}\sigma(\omega)=s.$$

那就说序列 $\{s_n\}$ 依由序列 $\{a_k(\omega)\}$ 所定义的半连续求和法（semi-continuous summation method）可和于 s．如果 $\{s_n\}$ 是级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k \tag{2}$$

的部分和序列，就说级数（2）依半连续方法可和于 s. $\omega_0=\infty$ 时的半连续求和法与由矩阵 $\|a_{nk}\|$ 所定义的**矩阵求和法**（matrix summation method）类似，这里的整值参数 n 用连续参数 ω 代替．函数序列 $a_k(\omega)$ 就是前面所讲的半连续矩阵（semi-continuous matrix）.

半连续求和法可以通过使用给定的函数序列，如 $\{g_k(\omega)\}$ 直接将级数变成函数来定义：

$$\gamma(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(\omega)u_k. \tag{3}$$

这时，如果

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\gamma(\omega)=s.$$

ω_0 是 ω 的变分集 E 的一个聚点，并且假定级数（3）对所有充分靠近 ω_0 的 ω 收敛，就说级数（2）可和于 s.

有时半连续求和法比基于常规矩阵的求和法更方便，因为它可以利用函数论这个工具．半连续求和法的例子有：**Abel 求和法**（Abel summation method），**Borel 求和法**（Borel summation method），**Lindelöf 求和法**（Lindelöf summation method）及 **Mittag-Leffler 求和法**（Mittag-Leffler summation method）．半连续方法类还包括具有如下半连续矩阵

$$a_k(\omega)=\frac{p_k\omega^k}{\sum_{l=0}^{\infty}p_l\omega^l}$$

的方法，上式的分母是不能简化成多项式的整函数．

半连续求和法正则性的条件与矩阵求和法正则性条件类似．例如，由将 $\{s_k\}$ 变成函数的变换（1）所定义的半连续求和法，其正则（见**正则性准则**（regularity criteria））的充要条件是：

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k(\omega)|\leqslant M \text{（对所有充分靠近 } \omega_0 \text{ 的 } \omega\text{）}$$

$$\lim_{\omega\to\omega_0}a_k(\omega)=0,\ k=0,1,\cdots,$$

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\omega)=1.$$

参考文献

[1] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.
[2] Beekmann, W. and Zeller, K., Theorie der Limitierungsverfahren, Springer, 1970.

И. И. Волков 撰 罗嵩龄 译

半三次抛物线 [**semi-cubic parabola**; **полукубическая парабола**]

一种三次平面代数曲线，在 Descartes 直角坐标系中的方程是

$$y=ax^{3/2}.$$

坐标原点是一个尖点（cusp）（见图）．从原点算起的弧长等于

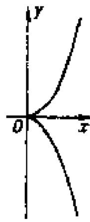
$$l=\frac{1}{27a^2}[(4+9a^2x)^{2/3}-8];$$

曲率等于

$$k=\frac{6a}{\sqrt{x}\,(4+9a^2x)^{3/2}}.$$

半三次抛物线有时称为 Neil 抛物线（Neil para-

bola).



参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

[2] Смогоржевский, А. С., Столова, З. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961. Д. Д. Соколов 撰

【补注】

[A1] Lawrence, J. D. H., A catalog of special plane curves. Dover, reprint, 1972.

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, *Chelsea*, reprint, 1971. 杜小杨 译

半 Dedekind 格 [semi-Dedekind lattice; полудедекиндова решетка]

见**半模格**(semi-modular lattice).

半定型 [semi-definite form; полуопределенная форма]

一个有序域上的**二次型**(quadratic form) q, 它表现为只是非负的域元素或只是非正的域元素. 在前一情形, 这个型称为非负定的(non-negative definite) ($q(x) \geqslant 0$ 对一切 x), 在后一情形称为非正定的(non-positive difinite quadratic) ($q(x) \leqslant 0$ 对一切 x). 更常见的是考虑实数域 **R** 上的半定型. 对于域 **C** 来说, 可以类似地定义(非负和非正)半定 Hermite 二次型的概念(见 **Hermite 型**(Hermitian form)).

如果 b 是一个对称**双线性型**(bilinear form)或 Hermite 型使得 $q(x)=b(x, x)$ 是一个半定型, 则 b 有时也称为(非负或非正)半定型. 如果 q 是向量空间 V 内一个二次或 Hermite 半定型, 则 $N=\{x\in V: q(x)=0\}$ 是一个子空间, 它与 b 的核相等, 而所给的型自然地在 V/N 上诱导一个正定或负定型.

О. А. Иванова 撰

【补注】"非负定"也称为正半定(positive semi-definite), "非正定"也称为负半定(negative semi-definite). 郝钢新 译

半直积 [semi-direct product; полупрямое произведение], 群 A 乘以群 B 的

群 $G=AB$, 是它的子群 A 及 B 的积, 其中 B 是 G 的正规子群且 $A\cap B=\{1\}$. 若 A 也在 G 中正规, 则半直积成为**直积**(direct product). 两个群 A B 的半直积不是唯一决定的. 为构造半直积还应知道 A 的元素在 B 上的共轭作用诱导出 B 的哪些自同构. 精确地说, 设 $G=AB$ 是半直积, 则对每个元素 $a\in A$, 对应到自同构 $\alpha_a\in \mathrm{Aut}\, B$, 它是由元素 a 作共轭:

$$\alpha_a(b)=aba^{-1},\ b\in B.$$

这里, 对应 $a\to\alpha_a$ 是 $A\to \mathrm{Aut}\, B$ 的同态. 反之, 设 A 及 B 是任意群, 则对任何同态 $\varphi: A\to \mathrm{Aut}\, B$ 有群 A 乘以群 B 的唯一半直积, 满足 $\alpha_a=\varphi(a)$, 对任意 $a\in A$. 半直积是群 B 被群 A 所扩张的特殊情况(见**群的扩张**(extension of a group)); 这样的扩张称为分裂的(split).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本: А. Г. 库洛什, 群论, 高等教育出版社, 上册, 1987, 下册, 1982). А. Л. Шмелькин 撰

【补注】 A 乘以 B 的半直积通常记作 $B\rtimes A$ 或 $B:A$. 石生明 译 王杰 校

半椭圆空间 [semi-elliptic space; полуэллиптическое пространство]

n 维射影空间, 其中的度量是由一个给定的绝对形定义的, 后者是指下列对象的总体: 有 $(n-m_0-1)$ 维平坦顶端 T_0 的 2 次虚锥 Q_0, 在 $(n-m_0-1)$ 维平面 T_0 内有 $(n-m_1-1)$ 维平坦顶端 T_1 的 $(n-m_0-2)$ 维虚锥 Q_1, 等等, 一直到有 $(n-m_{r-1}-1)$ 维平坦顶端 T_{r-1} 的 $(n-m_{r-2}-2)$ 维虚锥 Q_{r-1} 以及在 $(n-m_{r-1}-1)$ 维平面 T_{r-1} 内非退化的 $(n-m_{r-1}-2)$ 维 2 次虚锥 Q_r, $0\leqslant m_0<m_1<\cdots<m_{r-1}<n$. 锥 $Q_k(k=0, \cdots, r-1)$ 的指标是 $l_a=m_0-m_{a-1}$, $0<a<r$; $l_r=n-m_{r-1}$. 半椭圆空间记作 $S_n^{m_0 m_1 \cdots m_{r-1}}$.

当锥 Q_0 是一对相交的平面, 且两者与平面 T_0 $(m_0=0)$ 一致时, 则有非正常平面 T_0 的空间称为**半 Euclid 空间**(semi-Euclidean space) $R_n^{m_1 \cdots m_{r-1}}$.

两点 X, Y 之间的距离按照直线 XY 关于平面 $T_0, \cdots, T_{r-1}$ 的位置来定义. 特别是, 如果 XY 不与平面 T_0 相交, 则两点 X, Y 之间的距离用数量积来定义, 类似于**拟椭圆空间**(quasi-elliptic space)中的距离. 但是, 如果直线 XY 与平面 T_0 相交而不与平面 T_1 相交, 或者与平面 T_{a-1} 相交而不与平面 T_a 相交, 则两点之间的距离用点 X, Y 的对应向量的差与自身的数量积平方来定义.

半椭圆空间中按照关于绝对形的平面的位置, 将直线区分为四种类型.

在半椭圆空间中, 平面之间的角的定义类似于拟椭圆空间中平面之间的角, 即利用对偶空间中的距

离.

在半椭圆空间中的射影度量是具有非常一般的类型的度量. 例如, 在半椭圆空间中一种特殊情形的度量是拟椭圆空间的度量. 特别是, 2维平面 S_2^0 与 Euclid 空间一致; S_2^1 与上 Euclid 空间一致; 3维空间 S_3^1 与拟椭圆空间一致; S_3^0 与 Euclid 3 维空间一致; 3维空间 S_3^{01} 是 Galileo 空间; S_3^{012} 是旗空间, 等等. 3维空间 S_3^{12} 通过对偶原理对应于 Galileo 3维空间 Γ_3, 称为上 Galileo 空间 (上 Galileo 空间的绝对形由一对虚平面 (锥 Q_0) 和这对平面的交线 T_0 上的一点 T_1 所组成).

半椭圆空间的运动是把绝对形变为它自身的直射变换. 在 $m_a = n - m_{r-a-1} - 1$, $l_a = l_{r-a}$ 的情形下, 半椭圆空间与它自身是对偶的, 它有上运动, 其定义类似于拟椭圆空间中的上运动.

运动, 以及运动和上运动, 分别构成 Lie 群. 运动 (以及余运动) 是用正交算子来描述的.

半椭圆空间是一个半 **Riemann** 空间 (semi-Riemannian space).

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文). 陈维桓 译

半 Euclid 空间 [semi-Euclidean space; полуевклидово пространство]

配备着向量的标量积的一个实仿射 n 空间, 使得对一个适当选取的基, 任何向量与自身的标量积 $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 有形式

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{l}(x^i)^2 + \sum_{j=l+1}^{n-d}(x^j)^2.$$

在这些条件下, 半 Euclid 空间称为有指标 l 与亏格 d, 且记为 ${}^{l+(d)}R_n$. 如果 $l = 0$, 则一向量与自身的标量积的表示是一个半定二次型并且空间称为亏格 d 的 n 空间, 用 ${}^{(d)}R_n$ 表示.

在射影分类里, 一个半 Euclid 空间可定义为带有一个非正常绝对平面的**半椭圆空间** (semi-elliptic space) 或**半双曲空间** (semi-hyperbolic space); 这些是具有最一般形式的射影度量的空间.

定义一个半非 Euclid 空间 (semi-non-Euclidean space) 为一个在指标 l 亏格 d 的半 Euclid 空间中粘合对径点的超球面的度量 n 空间. 这样, 半椭圆空间或半双曲空间可以理解为适当指标和亏格的半 Euclid 空间中以上形式的超球面 (即作为半非 Euclid 空间).

Galileo-Newton 力学的几何解释导致半 Euclid 空间 ${}^{(1)}R_n$ (见[2]).

一个半 Euclid 空间是一个曲率为零的半 **Riemann** 空间 (semi-Riemann space).

参考文献

[1] Sommerville, D. M. Y., Classification of geometries with projective metric, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **28** (1910), 25 – 41.

[2] Котельников, А. П., Принцип относительности и геометрия Лобачевского, в кн.: In memoriam N. I. Lobačevski, т. 2, Казань, 1926.

[3] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A. [B. A. Rozenfel'D], A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文). 林向岩 译 陆珊年 校

半测地坐标 [semi-geodesic coordinates; полугеодезические координаты]

测地法坐标 (geodesic normal coordinates) —— n 维 Riemann 空间中由下列特征性质所确定的坐标 $x^1, \cdots, x^n$, 其中 x^1 方向的坐标曲线是测地线, 以 x^1 为弧长参数, 并且坐标曲面 $x^1 =$ 常数. 与这些测地线正交. 用半测地坐标表示, 线元的平方是

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}\,dx^i dx^j.$$

在任意一个 Riemann 流形的任意一点的充分小邻域内都能引进半测地坐标. 在许多种类型的 2 维 Riemann 空间 (例如有严格负曲率的正则曲面) 中, 能在大范围引进半测地坐标.

在 2 维情形下, 线元的平方通常写成

$$ds^2 = du^2 + B(u, v)\,dv^2.$$

全曲率 (Gauss 曲率) 由公式

$$K = -\frac{1}{B}\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}$$

决定. 在曲率有固定符号的 2 维 Riemann 流形的理论中, 担当重要角色的一类特殊的半测地坐标是测地极坐标 (geodesic polar coordinates) (r, φ). 在这种情形下, 所有的测地坐标曲线 $\varphi =$ 常数相交于一点 (极点 (pole)), φ 是坐标曲线 $\varphi = 0$ 和 $\varphi =$ 常数之间的夹角. 任意一条曲线 $r =$ 常数称为测地圆 (geodesic circle). 在极点的邻域内线元的平方用测地极坐标可表成

$$ds^2 = dr^2 + r^2\left\{1 - \frac{K_0}{3}r^2 + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6}(K_1\cos\varphi + K_2\sin\varphi)r^3 + o(r^3)\right\}d\varphi^2,$$

其中 K_0 是在点 P 的全曲率(Gauss 曲率), K_1 是 K 沿着测地线 $\varphi=0$ 的方向关于 r 在 P 的导数, K_2 是 K 沿测地线 $\varphi=\pi/2$ 的方向类似定义的导数.

在伪 Riemann 空间中定义测地坐标时,通常规定对应于 x^1 的测地线应该不是迷向的. 此时,线元的平方被表成

$$ds^2=\pm(dx^1)^2+\sum_{i,j=2}^{n}g_{ij}dx^i dx^j.$$

(正、负号取决于 x^1 曲线的切向量平方的符号).

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 与 2 维情形类似的结果对于任意维数成立([A2]). 在 Riemann 空间中(在任意一点的一个充分小的邻域内)引进半测地坐标参见[A1]. (做法如下: 在一点取一块超曲面,然后取该超曲面的充分短的法向测地线作为 x^1 曲线.)

参考文献

[A1] Klingenberg, W., A course in differential geometry, Springer, 1983 (译自德文).

[A2] Klingenberg, W., Riemannian geometry, de Gruyter, 1982 (译自德文).

[A3] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry (with applications to relativity), Acad. Press, 1983.

[A4] Kobayashi, S. and Nomizu, K., Foundations of differential geometry, 1, 2, Wiley, 1963, 1969.

陈维桓 译

半群 [semi-group; полугруппа]

一个集合连同定义在其上的一个满足结合律(见**结合性**(associativity))的二元运算所形成的代数系统. 半群是群(group)的推广: 群公理中仅保留一条公理——结合性; 这是术语"半群"的来历. 半群称为幺半群(monoid),如果它还有一个恒等元.

半群理论是代数学的相对年轻的分支之一. 半群最早的研究与 А. К. Сушкевич 的名字有关,可追溯到 20 世纪 20 年代. 他确定了有限半群的核(最小理想),特别地,无真理想的有限半群的结构. 这一结果后来被 D. Rees 推广到任意完全单半群(completely-simple semi-group),且通过引入群上矩阵(见 **Rees 矩阵型半群**(Rees semi-group of matrix type))的概念被完善. Rees 定理通常被认为类似于关于单代数的 Wedderburn 定理,是半群理论的一个基本事实. 关于半群的另外的早期研究归于 A. Clifford; 他的最早的有意义的工作之一是作为群并的半群的引进和研究; 这类半群现被称为完全正则半群或 **Clifford 半群**(Clifford semi-group). 到 20 世纪 50 年代末,半群理论已成为现代代数学的一个独具特色的分支,它有大量的问题、丰富的方法以及与许多数学领域的紧密联系,这些领域既有纯代数学的(首要的是群论和环论),也有其他的,例如,泛函分析(Banach 空间上的算子半群)、微分几何学(部分变换半群)和自动机的代数理论(自动机半群).

半群的例子非常之多. 其中有各种各样的关于加法或乘法封闭的数集; 关于乘法的矩阵半群; 由 $(f*g)(x)=f(x)g(x)$ 所定义的"逐点"乘法 $*$ 的函数半群; 关于交或并的集合半群, 等等. 下面的一个例子无论在一般理论中还是在某些应用中都是重要的. 设 X 是任意集合. 在 X 的元素的所有有限序列的集合 F_X 上由以下公式定义运算:

$$(x_1,\cdots,x_n)*(y_1,\cdots,y_m)=$$

$$=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m).$$

则 F_X 关于 $*$ 是一个半群,称为 X 上的**自由半群**(free semi-group). 半群总是某个自由半群的同态象.

任意集合 M 到自身中的若干映射在映射的合成(composition)运算(即"连续作用",也称复合(superposition)运算)下封闭的集合关于这个运算是一个半群; 特别地,集合 M 上的所有自映射的集合关于这个运算是一个半群,称为 M 上的**对称半群**(symmetric semi-group). 变换的许多重要的集合通常构成半群,但不是群. 另一方面,任意半群同构于某个变换半群. 因此,半群概念是最适合于在最一般意义上研究变换的,并且通过变换的研究在很大程度上实现了半群理论与其他数学领域的联系. 在这框架下,半群常常作为空间、代数、图等各种被研究系统的**自同态半群**(endomorphism semi-group)出现. 半群也在部分变换及二元关系关于乘法的理论中出现.

像其他代数理论一样,半群理论的主要问题之一是半群的分类和其结构的描述. 这可以通过在所研究的半群上附加各种各样的限制,从而给出半群的各种类型来实现. 这些限制可以是不同类型的. 一个半群可以满足一个给定的恒等式系统(典型的例子是交换半群和幂等元半群)或其他条件,这些条件可以通过一阶谓词演算公式来表示(例子是可消半群和正则半群). 消去律和正则性是那种限制的例子,这些限制在某种意义上构成了若干弱的群性质; 这些条件的引入在半群理论发展的早期是特别流行的(其中,被定义起来的接近群的类型的半群是**右群**(right group)). 但是,在很多情形里,由这种方法得到的半群类包含了在性质上完全不同于群的半群(典型的例子是幂等元半群).

正则半群(regular semi-group)的概念作为类似于**正则环**(**von Neumann 意义下的**)(regular ring in the sense of von Neuman)的概念而出现. 在半群理论中正则半群的研究最为广泛. 正则半群类包含下面的若

干重要半群类：正则环的乘法半群（特别地，除环上的给定阶数的所有矩阵的半群），对称半群，集合上的所有部分变换的半群，逆半群，Clifford 半群，特别地，幂等元半群和完全单半群，完全 0 单半群，等等.

另外一种类型的常见限制是在所有子半群或某些子半群（特别地，理想）上的限制，以及在半群上的某些关系（特别地，同余）上的限制．这样，便产生了诸如各种类型的**单半群**（simple semi-group）和各种有限性条件（见**具有有限性条件的半群**（semi-group with a finiteness condition）；**周期半群**（periodic semi-group）；**局部有限半群**（locally finite semi-group）；**剩余有限半群**（residually-finite semi-group）；**极小理想**（minimal ideal）），具有不同类型的理想序列和理想系统的半群（见**理想序列**（ideal series）；**诣零半群**（nil semi-group）），等等．在半群理论的许多问题的研究中，**Green 等价关系**（Green equivalence relations）起了根本性的作用.

这些限制可以涉及到生成集、或者按照生成元的特性（例如，幂等元；任意半群可嵌入到幂等元生成半群中）和数目（有限生成半群在许多研究中起了一个根本性作用），或者按照生成元的相互关系——由定义关系所给出的半群，特别地，有限表示半群（见**算法问题**（algorithmic problem）；**具有有限性条件的半群**（semi-group with a finiteness condition）），或者按照上面两个方面（例如，见**双循环半群**（bicyclic semi-group））来确定生成集的各种类型.

在考察半群的结构时，各种各样的构作起了重要作用，这些构作将所研究的半群的刻画归结为"较好"的半群的刻画．经常地，后者是群，并且刻画"模群"的原理在半群理论研究中具有普遍性；事实上，它已出现在前面提及的经典的 Rees 定理中，据此，任意完全 0 单（完全单）半群同构于带零群（群）上的正则 Rees 矩阵半群．群出现在刻画逆半群以及具有消去律且无幂等元的交换 **Archimedes 半群**（Archimedean semi-group）的构作中．具有某些有限性条件的半群的刻画归结为具有相应条件的群的刻画.

在刻画半群的构作中，既有一般代数的构作，诸如，直积和子直积，又有特殊的半群理论的构作．后者除了包含前面提及的 Rees 半群外，还包含各种其他构作，诸如，带的构作——使得相应的等价关系是同余的子半群的分划．特别重要的带是交换带（或半格）和矩阵带（矩形带）（见**半群的带**（band of semi-group））．许多类型的半群可以用带的术语来刻画．于是，关于完全正则半群的 Clifford 定理本质上意指这些半群是完全单半群的半格；完全单半群恰是群的矩形带；田村-木村定理（Tamura-Kimura theorem）表明，任意交换半群允许有一个作为 Archimedes 半群的带的唯一分解（见[3]）.

像代数学中通常所见到的，同态的概念在半群理论中也起着本质的作用，因此，同余的概念也是如此．半群是一种泛代数，其同余不能像群和环那样被其任何典范陪集（"核"）所唯一确定．这一更复杂的情形引导了半群理论的一个相当广泛的专门致力于从各个角度研究半群同余的课题的发展．该课题所包含的问题主要有以下两类：1）研究任意半群上的某些特殊类型的同余；2）刻画某些重要类型的特殊半群的所有同余．第一类特别地包括主同余的研究（见[3]），和相应于半群的双边理想的理想同余（ideal congruences）或 Rees 同余（Rees congruences）的研究（若 I 为半群 S 的理想，则对应的 Rees 同余类是 I 自身和单元集 $\{x\}$，$x\in S\setminus I$）．Rees 同余经常被应用于各种问题的研究中，这表明研究理想的重要性；模 Rees 同余的商半群称为模相应理想的 Rees 商半群（Rees quotient semi-group）．在已解决的第二类问题里，应提到对称半群和完全 0 单半群上的同余的刻画和逆半群上的同余的深远的研究；受环的根论的影响，半群的根论（见**一类半群中的根**（radical in a class of groups））已得到发展．鉴于半群到具有特殊"好"性质的半群的同态的研究，形成一个论述逼近（见**可分半群**（separable semi-group））；**剩余有限半群**（residually-finite semi-group））的理论分支已是可能的.

与子半群理论相联系，涉及半群的格性质（半群的性质与其子半群格（见**格**（lattice））的性质之间的关系）的研究的一个独立的理论分支被发现.

半群理论的另一个大的分支涉及半群的各种嵌入．这一分支的历史可追溯到**半群（到群中）的嵌入**（imbedding of semi-groups）的经典问题．关于这一理论分支中的某些问题与结果，见**半群的扩张**（extension of a semi-group）.

半群簇理论已得到广泛关注；关于这一领域的研究见**半群簇**（variety of semi-groups）、半群拟簇（见**代数系统拟簇**（algebraic systems, quasi-variety of））和某些其他的在某种意义上类似于簇的半群类的理论的研究已迈出了第一步.

半群的一般理论在许多方面与一些特殊半群相联系．在这些问题中，一些重要的具体半群（诸如，变换半群；特别地，有一些对称半群的特征）的抽象特征被得到，它们的一些抽象性质已被刻画．关于变换半群的某些基本结果，见**变换半群**（transformation semi-group）．抽象半群到各种特殊半群的同构和同态已被研究，这些特殊半群首先是变换半群和矩阵半群（见**半群的表示**（representation of a semi-group））.

半群到某些数半群中，主要是到复数的乘法半群中的同态的研究形成了半群的特征标理论（见**半群的特征标**（character of a semi-group））课题.

半群理论的特殊领域之一是具有与乘法运算相容的附加结构的半群的研究．在此领域中，尤其要提到拓扑空间（见**拓扑半群**（topological semi-group））的结构和偏序或全序（见**序半群**（ordered semi-group））的结构.

某些类型的广义半群理论也已被发展．首先是具有一个满足广义结合律的 n 元运算（称为 n 结合运算（n-associative operations）或 n 半群运算（n-semi-group operations））的代数．其次是具有一个部分结合二元运算（这一类型的自然情形之一来自范畴论）的代数.

参考文献

[1] Сушкевич, А. К., Теория обобщенных групп, Хар.-К., 1937.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960（英译本：Lyapin, E. S.. Semigroups, Amer. Math Soc., 1974）.

[3] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1–2, Amer. Math. Soc., 1961–1967.

[4] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, М., 1975（译自英文）.

[5] Fuchs, L., Partially ordered algebraic systems, Pergamon, 1963.

[6] Итоги Науки. Алгебра, Топология, 1962, М., 1963, 33–58.

[7] Итоги Науки. Алгебра, 1964, М., 1966, 161–202.

[8] Итоги Науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968, 9–56.

[9] Folley, K. W. (ed.), Semigroups, Acad. Press, 1969.

[10] Howie, J., An introduction to semigroup theory, Acad. Press, 1976.

[11] Petrich, M., Introduction to semigroups, C. Merrill, 1973.

[12] Petrich, M., Lectures in semigroups, Wiley, 1977.

[13] Redei, L., The theory of finitely generated commutative semigroups, Pergamon, 1965（译自德文）.

[14] Hofmann, K. H. and Mostert, P. S., Elements of compact semigroups, C. Merrill, 1966.

[15] Lallement, G., Semi-groups and combinatorial applications, Wiley, 1979.

[16] Ellenberg, S., Automata, languages and machines, A–B. Acad. Press, 1974–1976.

Л. Н. Шеврин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bergmund, J. F., Jungheun, H. D. and Milnes, P., Analysis on semigroups, Wiley, 1989.

[A2] Hilgert, J., Hofmann, K. H. and Lawson, J. D., Lie groups convex cones and semigroups, Clarendon, 1989

[A3] Hofmann, K. H., Lawson, J. D. and Pym, J. S. (eds.), The analytical and topological theory of semigroups, Springer, 1990.

[A4] Ruppert, W., Compact semitopological semigroups, Springer, 1984.

【译注】 此处的术语"Clifford 半群"不同于现行的"Clifford 半群"．通常，一个半群 S 称为 Clifford 的，如果 S 为正则的，且每个幂等元是中心的.

参考文献

[B1] Higgins, P. M., Techniques of semigroups, Oxford Univ Press, New York, 1992.

郑恒武 田振际 译 郭聿琦 校

半群代数 [semi-group algebra; полугрупповая алгебра]

以乘法半群 S 为基的域 Φ 上的**代数**（algebra）$\Phi(S)$．特别地，若 S 为群，则得**群代数**（group algebra）．若半群 S 包含零元，则这个零元通常等同于代数 $\Phi(S)$ 的零元．刻画代数 $\Phi(S)$ 的所有表示的问题等价于刻画基半群 S 在域 Φ 上的所有线性表示（见**线性表示**（linear representation）；**半群表示**（representation of a semi-group））的问题．在半群理论中，半群代数的重要性在于利用代数理论的较丰富的方法来研究半群的线性表示成为可能．此类结果的一个例子是：有限半群 S 的半群代数 $\Phi(S)$ 是半单的，当且仅当域 Φ 上的半群 S 的所有线性表示是可约的.

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1, Amer. Math. Soc., 1961.

Л. М. Глускин 撰

【补注】 更准确地，令 S 为半群，Φ 为域．考察所有形式有限和的向量空间 $V=\{\sum_s a_s s\}$，即具有基 S 的 Φ 上的向量空间．半群乘法 $(s, t)\mapsto st$ 可通过线性延拓定义 V 上的一个代数结构．这就是半群代数 $\Phi[S]$.

若 S 是带零元 z 的半群，则子空间 Φz 是 $\Phi[S]$ 的理想，且收缩半群代数（contracted semi-group algebra）$\Phi_0[S]$ 是商代数 $\Phi_0[S]=\Phi[S]/\Phi z$.

关于**逆半群**（inversion semi-group），有如下的类似于 Maschke 定理（(Maschke theorem)（见**群代数**（group algebra）））的结果．有限逆半群 S 的半群代数 $\Phi[S]$ 是半单的，当且仅当 Φ 的特征为 0 或为不能整除 S 的任意子半群的阶的素数.

郑恒武 田振际 译 郭聿琦 校

非线性算子半群 [semi-group of non-linear operators; полугруппа нелинейных операторов]

定义并作用在 Banach 空间(Banach space) X 的闭子集 C 上的单参数算子族 $S(t), 0 \leqslant t < \infty$, 且具有下列性质:

1) $S(t+\tau)x = S(t)(S(\tau)x), x \in C, t, \tau > 0$;

2) $S(0)x = x, x \in C$;

3) 对任何 $x \in C$, 函数 $S(t)x$(在 X 中取值)在 $[0, \infty)$ 上是 t 的连续函数.

半群 $S(t)$ 是 ω 型的, 若

$$\| s(t)x - s(t)y \| \leqslant e^{\omega t} \| x - y \|, \; x, y \in C, t > 0.$$

0 型的半群称为压缩半群(contraction semi-group).

和线性算子半群(见算子半群(semi-group of operators))的情形一样, 可引进半群 $S(t)$ 的生成算子(generating operator)(或无穷小生成元(infinitesimal generator)) A_0 的概念:

$$A_0 x = \lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h}$$

仅对那些使极限存在的元素 $x \in C$ 来定义. 若 $S(t)$ 是压缩半群, A_0 就是耗散算子. 可以想到, Banach 空间 X 中的算子 A 是耗散的(dissipative), 若对 $x, y \in \overline{D(A)}$, $\lambda > 0$, 有 $\| x - y - \lambda(Ax - Ay) \| \geqslant \| x - y \|$. 耗散算子可以是多值的, 这时定义中的 Ax 代表它在 x 处的任何值. 一个耗散算子称为 m 耗散的(m-dissipative), 若 $\mathrm{Range}(I - \lambda A) = X$, 对 $\lambda > 0$. 若 $S(t)$ 是 ω 型的, 则 $A - \omega I$ 是耗散的.

半群生成的基本定理(fundamental theorem on the generation of semi-groups): 设 $A - \omega I$ 是耗散算子, 且对充分小的 $\lambda > 0$, $\mathrm{Range}(I - \lambda A)$ 包含 $D(A)$, 则存在 $\overline{D(A)}$ 上 ω 型半群 $S_A(t)$, 使得

$$S_A(t)x = \lim_{n \to \infty} \left[I - \frac{t}{n} A \right]^{-n} x,$$

这里 $x \in \overline{D(A)}$, 且在任何有限 t 区间上一致收敛. (若用较弱的条件

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} d(\mathrm{Range}\,(I - \lambda A), x) = 0$$

(其中 d 是集合间的距离)来代替 $\mathrm{Range}(I - \lambda A)$, $S_A(t)$ 的存在性也能被证明).

对任何算子 A, 存在相应的 Cauchy 问题(Cauchy problem)

$$\frac{du}{dt}(t) \in Au(t), \; t > 0, \; u(0) = x. \qquad (*)$$

若问题(*)有强解(strong solution), 即有在 $[0, \infty)$ 上连续, 在 $(0, \infty)$ 的任何紧子集上绝对连续, 对几乎所有 $t > 0$ 取值于 $D(A)$ 且有强导数的函数 $u(t)$, 它满足关系(*), 则 $u(t) = S_A(t)x$. 任何函数 $S_A(t)x$ 是问题(*)的唯一的积分解(integral solution).

在基本定理的假设下, 若 X 是**自反空间**(reflexive space), A 是**闭算子**(closed operator), 则函数 $u(t) = S_A(t)x$, 对于 $x \in D(A)$, 产生 Cauchy 问题(*)的强解, 且几乎处处有 $(du/dt)(t) \in A^0 u(t)$, 其中 $A^0 z$ 是 Az 中有极小范数的元素的集合. 这时半群 $S_A(t)$ 的生成算子 A_0 被稠密地确定: $\overline{D(A_0)} = \overline{D(A)}$. 进而, 若 X 和 X' 是均匀凸的, 则算子 A^0 是单值的, 且对所有 $t \geqslant 0$ 存在右导数 $d^+u/dt = A^0 u(t)$; 该函数在 $[0, \infty)$ 上从右面连续且可能除去可数个点外在全部点上连续; 这时 $D(A_0) = D(A)$, $A_0 = A^0$.

若 X 是自反的(或 $X = Y'$, Y 是可分的)及 A 是单值算子且有下述性质: 在 X 中 $x_n \to x$ 及在弱拓扑(weak topology) $\sigma(X, X')$(或分别地在 $\sigma(X, Y)$)下 $Ax_n \to y$ 蕴涵 $y = Ax$, 则 $u(t) \in D(A)$, $t \geqslant 0$ 且 $u(t)$ 是问题(*)的弱(弱 *)连续可微的解. 在非自反情形有一些例子表明基本定理的假设成立, $\overline{D(A)} = X$, 但函数 $u(t) = s_A(t)x \; (t \geqslant 0)$ 在 X 上甚至对任何 $x \in X$ 都没有弱导数.

令 A 是在全部 X 上定义的连续算子且 $A - \omega I$ 是耗散算子, 则对 $\lambda > 0$, $\lambda\omega < 1$, $\mathrm{Range}(I - \lambda A) = X$, 且对任何 $x \in X$, 问题(*)在 $[0, \infty)$ 上有唯一的连续地可微的解, 由 $u(t) = S_A(t)x$ 给出. 设 A 在它的闭定义域 $D(A)$ 上是连续的, 则它在 $D(A)$ 上是 ω 型半群的生成算子, 当且仅当 $A - \omega I$ 是耗散的, 且对 $x \in D(A)$ 有 $\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} d(x + \lambda Ax, D(A)) = 0$.

在 **Hilbert 空间**(Hilbert space) H 中, 集合 C 上的压缩半群可延拓到 H 的某闭凸子集 $\widetilde{C}$ 上的压缩半群. 进而, 延拓的半群的生成算子 A_0 在 $\widetilde{C}$ 中的一个稠密子集上被确定. 存在唯一的 m 耗散算子满足 $\overline{D(A)} = C$ 及 $A_0 = A^0$. 若 A 是 m 耗散的, 则 $\overline{D(A)}$ 是凸的, 且存在 $\overline{D(A)}$ 上唯一的压缩半群 $S(t) = S_A(t)$ 满足 $A_0 = A^0$.

令 φ 是在实 Hilbert 空间 H 上定义的凸的半连续泛函, 又令 $\partial\varphi$ 是它的**次微分**(subdifferential), 则算子 $Ax = -\partial\varphi(x)$ (对所有使得 $\partial\varphi(x)$ 非空的 x)是耗散的. 半群 $S_A(t)$ 与线性解析半群有着相似的性质. 特别地, $S_A(t)x \in D(A) \; (t > 0)$ 对任何 $x \in \overline{D(A)}$ 及 $u(t) = S_A(t)x$ 是 Cauchy 问题(*)的强解, 且对所有 $t > 0$, $v \in D(A)$ 有

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \left\| A^0 u(t) \right\| \leqslant \frac{2}{t} \| x - v \| - 2 \| A^0 v \|.$$

若 φ 达到它的极小值, 则当 $t \to \infty$ 时 $u(t)$ 弱收敛到某极小值点.

有关半群逼近的定理在 Cauchy 问题的近似解中起本质的作用．令 X, $X_n(n=1, 2, \cdots)$ 是 Banach 空间；令 A、A_n 是分别在 X, X_n 上定义并且单值的算子，满足对同一 ω 型的基本定理的假设；令 p_n: $X \to X_n$ 是线性算子，$\|p_n\|_{X \to X_n} \leqslant$ 常数．这时，对 $x \in \overline{D(A)}$ 预解式（resolvent）（$\lambda>0$, $\lambda\omega<1$）的收敛性

$$\|(I-\lambda A_n)^{-1}p_n x - p_n(I-\lambda A)^{-1}x\|_{X_n} \to 0$$

蕴涵了半群在任何有限闭区间上的一致收敛性

$$\|S_{A_n}(t)p_n x - p_n S_A(t)x\|_{X_n} \to 0, \ x\in\overline{D(A)}.$$

S. Lie 在有限维线性情形所建立的乘法公式能推广到非线性情形．设 A, B 及 $A+B$ 是 Hilbert 空间上的单值 m 耗散算子，闭凸集 $C \subset \overline{D(A)} \cap \overline{D(B)}$ 在 $(I-\lambda A)^{-1}$ 和 $(I-\lambda B)^{-1}$ 下不变，则对任何 $x\in C\cap\overline{D(A)}\cap\overline{D(B)}$,

$$S_{A+B}(t)x = \lim_{n\to\infty}\left[S_A\left(\frac{t}{n}\right)S_B\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x. \tag{**}$$

在任意 Banach 空间 X 中，如果 A 是稠密地定义的 m 耗散线性算子，B 是在 X 的全部元上定义的连续耗散算子，则对任何 $x\in X$，上述公式也成立．在两种情形下

$$S_{A+B}(t)x =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left[I-\frac{t}{n}B\right]^{-1}\left[I-\frac{t}{n}A\right]^{-1}\right]^n x,$$

$$x\in\overline{D(A)}\cap\overline{D(B)}.$$

满足关于半群生成的基本定理的条件的非线性微分算子的例子在下面给出．每种情形中仅指出空间 X 和边条件，而未描述 $D(A)$．在所有的例子中，Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界域，带有光滑边界 Γ；β, γ 是多值极大单调映射 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\beta(0)\ni 0$, $\gamma(0)\ni 0$；且 ψ: $R\to R$ 是连续的严格递增的函数，$\psi(0)=0$.

例 1. $X=L_p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $Au=\Delta u-\beta(u)$. 在 Γ 上 $-\partial u/\partial n\in\gamma(u)$.

例 2. $X=L_1(\Omega)$, $Au=\Delta\psi(u)$, 在 Γ 上 $-\partial u/\partial n\in\gamma(u)$.

例 3. $X=W_2^{-1}(\Omega)$, $Au=\Delta\psi(u)$, 在 Γ 上 $u=0$.

例 4. $X=C(\overline{\Omega})$ 或 $X=L_\infty(\Omega)$, $Au=\psi(\Delta u)$, 在 Γ 上 $u=0$.

例 5. $X=L_1(\mathbf{R}^n)$, $Au=\mathrm{div} f(u)$, 其中 $f\in C^1(\mathbf{R})$, 在 R^n 中取值，$f(0)=0$.

例 6. $X=L_\infty(\mathbf{R})$, $Au=f(u_x)$, 其中 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的．

参考文献

[1] Barbu, V., Non-linear semi-groups and differential equations in Banach spaces, Ed. Academici, 1976(译自罗马尼亚文).

[2] Brézis, H., Opérateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland, 1973.

[3] Brézis, H. and Pazy, A., Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **9** (1972), 1, 63–74.

[4] Crandall, M. G. and Liggett, T. M., Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 2, 265–298.

[5] Kobayashi, Y., Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, *J. Math. Soc. Japan*, **27** (1975), 4, 640–665.

[6] Konishi, Y., On the uniform convergence of a finite difference scheme for a nonlinear heat equation, *Proc. Japan. Acad.*, **48** (1972), 2, 62–66.

[7] Martin, R. H., Differential equations on closed subsets of a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **179** (1973), 399–414.

[8] Webb, G. F., Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **10** (1972), 2, 191–203.

[9] Хазан, М. И., 《Докл. АН СССР》, **212** (1973), 6, 1309–1312.

[10] Хазан, М. И., 《Докл. АН СССР》, **228** (1976), 4, 805–808.

С. Г. Крейн, М. И. Хазан 撰

【补注】 亦见**算子半群**(semi-group of operators)；**单参数半群**(one-parameter semi-group).

上面的公式(**)，特别地成为形状

$$e^{it(A+B)} = s-\lim_{n\to\infty}(e^{itA/n}e^{itB/n})^n$$

时称为 Trotter 积公式（Trotter product formula）([A5], [A4]). 例如当 A, B 是可分 Hilbert 空间上的自伴算子并且在 $D(A)\cap D(B)$ 上定义的 $A+B$ 是自伴算子时，它是成立的．

参考文献

[A1] Clément, Ph., Heijmans, H. J. A. M., Angenent, S., Duijn, C. J., and Pagter, B. de., One-parameter semigroups, CWI Monographs, 5, North-Holland, 1987.

[A2] Pazy, A., Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Springer, 1983.

[A3] Martin, R. H., Nonlinear operators and differential

equations in Banach spaces, Wiley, 1976.
[A4] Simon, B., Functional integration and quantum physics, Acad. Press, 1979, 4－6.
[A5] Trotter, H., On the product of semigroups of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 545－551.

石生明 译

算子半群 [**semi-group of operators**; **полугруппа операторов**]

Banach 空间（Banach space）或**拓扑向量空间**（topological vector space）上一族算子 $\{T\}$ 具有性质：该族中任何两个算子的合成仍是该族中的一个成员．如果算子用某个抽象半群（semi-group）$\mathfrak{A}$ 的元素来加以标号且后者的二元运算与算子的合成是相容的，则 $\{T\}$ 称为半群 $\mathfrak{A}$ 的表示（representation of the semi-group）．最详细的研究是给予 Banach 空间 X 上有界线性算子的**单参数半群**（one-parameter semi-group），它给出所有正实数的加法半群的一个表示，即族 $T(t)$ 具有性质

$$T(t+\tau)x=T(t)T(\tau)x,\ t,\ \tau>0,\ x\in X.$$

如果 $T(t)$, $t>0$, 是强可测的，则 $T(t)$ 是**强连续半群**（strongly-continuous semi-group）；以后总作此假设．

极限

$$\omega=\lim_{t\to\infty}t^{-1}\ln\|T(t)\|$$

存在；此极限值称为半群的型（type of the semi-group）．函数 $T(t)x$ 最多指数地增长．

一个重要的特征是半群的无穷小算子（infinitesimal operator）（无穷小生成元（infinitesimal generator））

$$A_0x=\lim_{t\to 0}t^{-1}[T(t)x-x],$$

它定义在使得该极限存在的所有元素的线性集 $D(A_0)$ 上；这个算子的闭包 A（如果它存在）称为该半群的生成算子或生成元（generating operator (generator)）．设 X_0 是由所有 $T(t)x$ 的值之并的闭包所定义的子空间；则 $D(A_0)$ 在 X_0 中稠密．如果不存在 X_0 中非零元素 x 使得 $T(t)x\equiv 0$，则生成算子 A 存在．以后将假定 $X_0=X$ 且假设 $T(t)x\equiv 0$ 蕴涵 $x=0$．

最简单的半群类，表示成 C_0，是由以下条件定义的：对任何 $x\in X$，当 $t\to 0$ 时 $T(t)x\to x$．这等价于条件：函数 $\|T(t)\|$ 在任何区间 $(0,a]$ 上有界．在这种情况下 $T(t)$ 有生成算子 $A=A_0$，其**预解式**（resolvent）$R(\lambda,A)=(A-\lambda I)^{-1}$ 满足不等式组

$$\|R^n(\lambda,A)\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-n},\quad n=1,2,\cdots;\ \lambda>\omega,\tag{1}$$

其中 ω 是半群的型．反之，如果 A 是具有 X 中稠密的定义域的一个**闭算子**（closed operator）且具有满足 (1) 的预解式，则它是使得 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的某个 C_0 类半群 $T(t)$ 的生成算子．如果

$$\|R(\lambda,A)\|\leqslant(\lambda-\omega)^{-1}$$

（Hill-吉田条件（Hill-Yosida condition）），则条件 (1) 满足．此外，如果 $\omega=0$，则 $T(t)$ 是一个**压缩半群**（contraction semi-group）：$\|T(t)\|\leqslant 1$．

可和半群（summable semi-group）是对所有 $x\in X$ 在任何有限区间上函数 $\|T(t)x\|$ 可和的一个半群 $T(t)$．可和半群有生成算子 $A=\bar{A}_0$．算子 A_0 是闭的，当且仅当对每个 $x\in X$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds=x.$$

对 $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ 可定义可和半群的 Laplace 变换（Laplace transform），

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt=-R(\lambda)x,\tag{2}$$

给出了一个有界线性算子 $R(\lambda)$，具有预解算子的许多性质．

一个具有 X 中稠定义域的闭算子 A 是可和半群 $T(t)$ 的生成算子，当且仅当对某个 ω 预解式 $R(\lambda,A)$ 对 $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ 存在且以下条件成立：a) $\|R(\lambda,A)\|\leqslant M$, $\operatorname{Re}\lambda>\omega$；b) 存在非负函数 $\varphi(t,x)$, $t>0$, $x\in X$，对其所有变量联合地连续，且有非负函数 $\varphi(t)$，在任何区间 $[a,b]\subset(0,\infty)$ 上有界，使得对 $\omega_1>\omega$,

$$\int_0^\infty e^{-\omega_1 t}\varphi(t,x)\,dt<\infty,$$

$$\varlimsup_{t\to\infty}t^{-1}\ln\varphi(t)<\infty,\ \varphi(t,x)\leqslant\varphi(t)\|x\|,$$

$$\|R^n(\lambda,A)x\|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\varphi(t,x)\,dt.$$

在这些条件下

$$\|T(t)x\|\leqslant\varphi(t,x),\ \|T(t)\|\leqslant\varphi(t).$$

如果此外还要求函数 $\|T(t)\|$ 在有限区间上可和，一个必要充分条件是存在一个连续函数 $\varphi(t)$，使得对 $\omega_1>\omega$,

$$\int_0^\infty\varphi(t)e^{-\omega_1 t}\,dt<\infty,\tag{3}$$

$$\|R^n(\lambda,A)\|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\varphi(t)\,dt,\tag{4}$$

$$\lambda>\omega,\ n=1,2,\cdots.$$

在这些条件下，$\|T(t)\| \leqslant \varphi(t)$. 由选取满足 (3) 的不同函数，可以定义可和半群的不同子类. 如果 $\varphi(t)=Me^{\omega t}$，所得结果是 C_0 类且 (1) 由 (4) 推出. 如果 $\varphi(t)=Me^{-\alpha}e^{\omega t}$, $0\leqslant\alpha<1$，条件 (4) 蕴涵条件

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M\Gamma(n-\alpha)}{(n-1)!(\lambda-\omega)^{n-\alpha}},$$

$$\lambda>\omega,\ n=1, 2, \cdots.$$

带幂奇性的半群. 如果在上面的例子中 $\alpha\geqslant 1$，则 (4) 中积分对 $n\leqslant\alpha-1$ 发散. 因此对相应半群的生成算子可能对任一 λ 没有预解式，即它可能有等于整个复平面的谱. 然而，对充分大的 n，可以对这样的算子定义函数 $S_n(\lambda, A)$ 与前面情况下的 $R^{n+1}(\lambda, A)$ 一致. 算子函数 $S_n(\lambda, A)$ 称为 n 阶预解式 (resolvent of order n)，如果它在某区域 $G\subset\mathbf{C}$ 内解析且当 $\lambda\in G$ 时，

$$S_n(\lambda, A)Ax = AS_n(\lambda, A)x,\ x\in D(A),$$

$$S_n(\lambda, A)(A-\lambda)^{n+1}x = x,\ x\in D(A^{n+1}),$$

且对所有 $\lambda\in G$, $S_n(\lambda, A)x=0$ 蕴涵 $x=0$. 如果 $\overline{D}(A^{n+1})=X$，则该算子可有唯一的 n 阶预解式，对于它有一个极大解析域，称为 n 阶预解集 (resolvent set of order n).

设 $T(t)$ 是一个强连续半群使得对 $\alpha\geqslant 1$，不等式

$$\|T(t)\| \leqslant Mt^{-\alpha}e^{\omega t}$$

成立. 则其生成算子 B 对 $n>\alpha-1$ 有 n 阶预解式，且此外还有

$$S_n(\lambda, B)x = \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt,\ \mathrm{Re}\,\lambda>\omega,$$

$$\left\|\frac{d^k S_n(\lambda, B)}{d\lambda^k}x\right\| \leqslant \frac{M\Gamma(k+n+1-\alpha)}{n!(\mathrm{Re}\,\lambda-\omega)^{k+n+1-\alpha}}, \tag{5}$$

$$\mathrm{Re}\,\lambda>\omega,\ k=0, 1, \cdots.$$

反之，设对 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$，算子 B 有满足 (5) 的具有 $n>\alpha-1$ 的一个 n 阶预解式 $S_n(\lambda, B)$. 则存在唯一的半群 $T(t)$，使得

$$\|T(t)\| \leqslant Mt^{-\alpha}e^{\omega t},$$

且这半群的生成算子 A 满足 $S_n(\lambda, A)=S_n(\lambda, B)$.

光滑半群. 如果 $x\in D(A_0)$，则函数 $T(t)x$ 连续可微且

$$\frac{dT(t)}{dt} = A_0T(t)x = T(t)A_0x.$$

存在 C_0 类半群，使得 $x\notin D(A_0)=D(A)$ 时，函数 $T(t)x$ 对所有 t 不可微. 然而，存在重要的半群类，对于它们而言光滑程度随着 t 的增加而增加. 如果函数 $T(t)x$, $t>t_0$，对任何 $x\in X$ 是可微的，则由半群性质推出 $T(t)x$ 当 $t>2t_0$ 时是二次可微的，当 $t>3t_0$ 时是三次可微的，等等. 所以，如果这些函数对 $x\in X$ 在任一 $t>0$ 处是可微的，则 $T(t)x$ 是无穷次可微的.

给定了一个 C_0 类半群，为了函数 $T(t)x$ 对所有 $x\in X$ 和 $t>t_0$ (其中 $t_0\geqslant 0$) 是可微的，一个必要充分条件是存在数 $a, b, c>0$，使得预解式 $R(\lambda, A)$ 定义在区域

$$\mathrm{Re}\,\lambda > a-b\ln|\mathrm{Im}\,\lambda|$$

中，同时在这区域内

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant c|\mathrm{Im}\,\lambda|.$$

为了 $T(t)x$ 对所有 $x\in X$ 和 $t>0$ 是无穷次可微的，一个必要充分条件是对每个 $b>0$，存在 a_b, c_b 使得预解式 $R(\lambda, A)$ 定义在区域

$$\mathrm{Re}\,\lambda > a_b-b\ln|\mathrm{Im}\,\lambda|$$

中，且使得

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant c_b|\mathrm{Im}\,\lambda|.$$

充分条件是：如果存在一个 $\mu>\omega$ 使得

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\ \ln|\tau|\,\|R(\mu+i\tau, A)\| = t_0 < \infty,$$

则 $T(t)x$ 对 $t>t_0$ 和 $x\in X$ 是可微的；如果 $t_0=0$，则 $T(t)x$ 对所有 $t>0$ 和 $x\in X$ 是无穷次可微的.

一个半群的光滑性程度有时可从它在零点的性态推断出；例如，设对每个 $c>0$ 存在一个 δ_c 使得对 $0<t<\delta_c$，

$$\|I-T(t)\| \leqslant 2-ct\ln t^{-1},$$

则 $T(t)x$ 对所有 $t>0$, $x\in X$ 是无穷次可微的.

对可和半群和有多项式增长性的半群有一些光滑性条件. 如果一个半群有 α 次多项式增长性且对 $t>0$ 是无穷次可微的，则函数

$$\frac{dT(t)}{dt}x = AT(t)x$$

也有多项式增长性：

$$\|AT(t)\| \leqslant M_1t^{-\beta}e^{\omega t}.$$

在一般情形下在数 α 和 β 之间没有严格的关系，且 β 可用于无穷可微的多项式增长的半群的更详细的分类.

解析半群．半群的一个重要类，与抛物型偏微分方程有关，由可以解析延拓到包含正实轴的复平面的某扇形上的那些半群 $T(t)$ 组成．一个 C_0 类的半群有此性质，当且仅当其预解式在某个右半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ 中满足以下不等式：

$$\| R(\lambda, A) \| \leq M |\lambda - \omega|^{-1}.$$

另一个必要充分条件是：该半群是强可微的且其导数满足估计式

$$\left\| \frac{dT}{dt}(t) \right\| \leq M t^{-1} e^{\omega t}.$$

最后，不等式

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \| I - T(t) \| < 2$$

也是 $T(t)$ 为解析的一个充分条件．

如果一个半群 $T(t)$ 有解析延拓 $T(z)$ 延拓到一个扇形 $|\arg z| < \varphi \leq \pi/2$ 且在零处有多项式增长性，$\| T(z) \| \leq c|z|^{\alpha}$，$\alpha > 0$，则其生成算子 A 的 $n(n > \alpha - 1)$ 阶预解式 $S_n(\lambda, A)$ 有到扇形 $|\arg \lambda| \leq \pi/2 + \varphi$ 的一个解析延拓，且在任一扇形 $|\arg \lambda| \leq \pi/2 + \psi$，$\psi < \varphi$ 中有以下估计：

$$\| S_n(\lambda, A) \| \leq |\lambda|^{\alpha - n - 1} M(\psi).$$

反之，设一个算子 B 的预解式定义在扇形 $|\arg \lambda| \leq \pi/2 + \psi$ 中且

$$\| S_n(\lambda, B) \| \leq |\lambda|^{\alpha - n - 1} M.$$

则存在增长阶为 α 的半群 $T(z)$，在扇形 $|\arg z| < \psi$ 中解析，且其生成算子 A 满足 $S_n(\lambda, A) = S_n(\lambda, B)$.

分布半群．按照分布论（见广义函数（generalized function））的一般概念，可以去掉算子值函数 $T(t)$ 对每个 $t > 0$ 有定义的要求，而仅要求对具有紧支集的无穷可微函数空间 $D(\mathbf{R})$ 中的所有 φ，可赋予积分值 $\int_{-\infty}^{\infty} T(t)\varphi(t)dt$．由此有以下定义：Banach 空间 X 上一个分布半群是 $D(\mathbf{R})$ 到 X 上所有有界线性算子的空间 $L(X)$ 中的一个连续线性映射 $T(\varphi)$，具有以下性质：a）如果 $\mathrm{supp}\,\varphi \subset (-\infty, 0)$，则 $T(\varphi) = 0$；b）如果 φ, ψ 是 $D(\mathbf{R})$ 中具有支集在 $(0, \infty)$ 内的所有函数的子空间 $D^+(\mathbf{R})$ 中函数，则 $T(\varphi * \psi) = T(\varphi)T(\psi)$，其中 $*$ 表示卷积：

$$\varphi * \psi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-s)\psi(s)ds$$

（半群性质）；c）如果对所有的 $\varphi \in D^+(\mathbf{R})$，$T(\varphi)x = 0$，则 $x = 0$；d）对一切 $\varphi \in D^+(\mathbf{R})$，$x \in X$，所有 $T(\varphi)x$ 的值的集合的线性包在 X 中稠密；e）对任一 $y = T(\psi)x$，$\psi \in D^+(\mathbf{R})$，存在取值在 X 中的在 $(0, \infty)$ 上连续的 $u(t)$，使得 $u(0) = y$ 且对所有 $\varphi \in D(\mathbf{R})$，

$$T(\varphi)y = \int_0^{\infty} \varphi(t)u(t)dt.$$

分布半群的无穷小算子（infinitesimal operator）A_0 定义如下．如果存在一个 δ 序列 $\{\rho_n\} \subset D^+(\mathbf{R})$ 使得 $T(\rho_n)x \to x$ 且 $T(-\rho_n')x \to y$ 当 $n \to \infty$，则 $x \in D(A_0)$ 且 $y = A_0 x$．该无穷小算子有闭包 $A = \overline{A}_0$，称为该分布半群的无穷小生成元（infinitesimal generator）．集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A_0^n)$ 在 X 中稠密且包含 $T(\varphi)X$，对任何 $\varphi \in D^+(\mathbf{R})$．

具有 X 中稠密定义域的闭线性算子 A 是一个分布半群的无穷小生成元，当且仅当存在数 $a, b \geq 0$，$c > 0$ 和自然数 m 使得预解式 $R(\lambda, A)$ 对 $\mathrm{Re}\,\lambda \geq a\ln(1 + |\lambda|) + b$ 存在且满足不等式

$$\| R(\lambda, A) \| \leq c(1 + |\lambda|)^m. \tag{6}$$

如果 A 是 X 上闭线性算子，则集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ 由引入范数系统

$$\| x \|_n = \sum_{k=0}^{n} \| A^k x \|$$

可构成一个 **Fréchet 空间**（Fréchet space）X_∞．在 A 到 X_∞ 上的限制 A_∞ 映射下，X_∞ 保持不变．如果 A 是一个半群的无穷小生成元，则 A_∞ 是 X_∞ 上 C_0 类半群（对 $t \geq 0$ 连续，$T(0) = I$）的无穷小生成元．反之，如果 X_∞ 在 X 中稠密，算子 A 有非空的预解集且 A 是 X_∞ 上一个 C_0 类半群的无穷小生成元，则 A 是 X 上分布半群的无穷小生成元．

一个分布半群有最多为 $q(1 \leq q < \infty)$ 的指数增长阶数，如果存在 $\omega > 0$ 使得 $\exp(-\omega t^q)T(\varphi)$ 按 D^+ 上由速减函数空间 $S(\mathbf{R})$ 诱导的拓扑是连续映射．一个闭线性算子是具有以上性质的分布半群的无穷小生成元，当且仅当它有在区域

$$\{\lambda: \mathrm{Re}\,\lambda \geq [\alpha\ln(1 + |\mathrm{Im}\,\lambda| + \beta)]^{1-1/q}, \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\}$$

中满足（6）的预解式 $R(\lambda, A)$，其中 $\alpha, \beta > 0$．特别地，如果 $q = 1$，该半群称为指数的（exponential）且不等式（6）在某个半平面成立．存在借助于算子 A_∞ 来表述的上述类型半群的一个特征．对分布半群，光滑性和解析性问题已经有了研究．

（Hausdorff）局部凸空间 X 中的算子半群．X 上连续算子的强连续半群 $T(t)$ 的定义如同对 Banach 空间的情形一样仍然保持．类似地，C_0 类由对任何 $x \in X$ 当 $t \to 0$ 时 $T(t)x \to x$ 这个性质定义．一个半群称为局部等度连续的（locally equicontinuous）（属于 IC_0 类），如果算子族 $T(t)$ 当 t 跑遍 $(0, \infty)$ 中任何有限区间时是等度连续的．在桶型空间（barrelled space）中，C_0 类半群总是局部等度连续的（见等度

连续性(equicontinuity)).

一个半群称为等度连续的(equicontinuous)(属于 uC_0 类),如果族 $T(t)$, $0\leq t<\infty$ 是等度连续的.

无穷小算子和无穷小生成元如同 Banach 空间情形一样定义.

从现在起假设空间 X 是序列完全的. 一个 lC_0 类半群的无穷小生成元 A 恒等于无穷小算子;其定义域 $D(A)$ 在 X 中稠密,且此外,集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ 在 X 中稠密. 半群 $T(t)$ 作用下 $D(A)$ 不变且

$$\frac{dT}{dt}(t)x=AT(t)x=T(t)Ax,\ 0\leq t<\infty,$$

$$x\in D(A).$$

如果 A 是 uC_0 类半群的无穷小生成元,则预解式 $R(\lambda, A)$ 对 $\operatorname{Re}\lambda>0$ 定义且是该半群的 Laplace 变换.

一个线性算子 A 是一个 uC_0 类半群的无穷小生成元,当且仅当它是闭的,有 X 中稠密的定义域,且存在正数序列 $\lambda_k\to\infty$,使得对任一 λ_k,预解式 $R(\lambda_k, A)$ 有定义且算子族 $[\lambda_k R(\lambda_k, A)]^n$, $k, n=1, 2, \cdots$ 是等度连续的. 在这情形下该半群可由公式

$$T(t)x=\lim_{k\to\infty}\{\exp[-\lambda_k-\lambda_k^2R(\lambda_k, A)]t\}x,$$

$$t\geq 0,\ x\in X$$

构造.

在非赋范的局部凸空间中,一个 lC_0 类半群的无穷小生成元可以在任何点没有预解式. 一个例子是:在 $\mathbf{R}$ 上 s 的无穷次可微函数空间 C^{∞} 中 $A=d/ds$. 代替预解式,可取一个连续算子,它与 $A-\lambda I$ 的积,从右和左两边,与单位算子相差一个"小量".

对 λ 在集合 $\Lambda\subset\mathbf{C}$ 中的 λ 定义的一个连续算子 $R(\lambda)$,称为线性算子 A 的**渐近预解式**(asymptotic resolvent),如果 $AR(\lambda)$ 在 X 上连续,算子 $R(\lambda)A$ 可从 $D(A)$ 延拓成 X 上连续算子 $B(\lambda)$,且存在集合 Λ 的极限点 λ_0 使得对任一 $x\in X$ 当 $\lambda\to\lambda_0$ 时 $H^+(\lambda)x\to 0$, $H^-(\lambda)x\to 0$,其中

$$H^+(\lambda)=(A-\lambda I)R(\lambda)-I,$$

$$H^-(\lambda)=B(\lambda)-\lambda R(\lambda)-I.$$

渐近预解式具有类似于普通预解式的各种性质.

具有 X 中稠密定义域的一个闭线性算子 A 是一个 lC_0 类半群的无穷小生成元,当且仅当存在数 ω 和 $\alpha>0$ 使得对 $\lambda>\omega$,存在 A 的渐近预解式 $R(\lambda)$ 具有性质:函数 $R(\lambda)$, $H^+(\lambda)$, $H^-(\lambda)$ 对 $\lambda>\omega$ 是强无穷次可微的,且算子族

$$e^{\alpha\lambda}\frac{d^nH^{\pm}(\lambda)}{d\lambda^n},\quad \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\frac{d^nR(\lambda)}{d\lambda^n},\ \lambda>\omega,$$

$$n=0,1,\cdots$$

是等度连续的.

对局部凸空间上另外一些算子半群类也已经证明了一些生成定理.

伴随半群. 如果 $T(t)$ 是 Banach 空间 X 上一个 C_0 类半群,则其伴随算子构成伴随空间 X' 上有界算子的一个半群. 然而对任一 $f\in X'$ 当 $t\to 0$ 时 $T'(t)f\to f$ 的结论仅在弱 * 拓扑 $\sigma(X', X)$ 的意义下成立. 如果 A 是生成算子,则其伴随 A' 在以下意义下是对 $T'(t)$ 的弱无穷小生成元,即 $D(A')$ 是当 $t\to 0$, $t^{-1}[T'(t)-I]f$ 的极限在弱 * 收敛意义下存在且此极限等于 $A'f$ 的所有 f 的集合. 定义域 $D(A')$ 在 X' 中稠密也是在弱 * 拓扑意义下,且算子 A' 在弱 * 拓扑意义下是闭的.

设 X^+ 是 X' 中使得在强意义下当 $t\to 0$ 时 $T'(f)\to f$ 的所有元素 f 的集合,则 X^+ 是 X' 的闭子空间且在所有的 $T'(t)$ 作用下不变. 在 X^+ 上算子 $T'(t)$ 构成一个 C_0 类半群. 空间 X^+ 也是集合 $D(A')$ 在 X' 中的强闭包. 如果原空间是自反的,则 $X^+=X'$. 对局部凸空间中 C_0 类半群,类似的命题成立. lC_0 类和 uC_0 类的半群生成 X^+ 中同样类的半群.

(Hausdorff) 局部凸空间中分布半群. 在序列完全的局部凸空间中分布半群 T 正如同在 Banach 空间中一样地定义. 一个半群 T 称为**局部等度连续的**(属于类 lD'),如果对任一紧子集 $K\subset D(\mathbf{R})$,算子族 $\{T(\varphi)\}$, $\varphi\in K$,是等度连续的. 在桶型空间 X 中,任何分布半群类似于 Banach 空间的情形来定义. 对 lD' 类半群,无穷小算子是闭的 ($A_0=A$), $\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A^n)$ 在 X 中稠密,且对任何 $x\in X$ 和 $\varphi\in D(\mathbf{R})$,

$$\left.\begin{array}{l}T(\varphi)x\in D(A),\ T'(\varphi)x=AT(\varphi)x+\varphi(0)x,\\ T'(\varphi)x=T(\varphi)Ax+\varphi(0)x,\ x\in D(A).\end{array}\right\}\quad(7)$$

支集在 $[0,\infty)$ 中,有性质 (7) 的一个广义函数 T 自然地称为**算子 $(d/dt)-A$ 的基本函数**(fundamental function of the operator $(d/dt)-A$). 这样,如果 A 是一个 lD' 类半群 T 的无穷小算子,则 T 是算子 $(d/dt)-A$ 的基本函数. 在关于基本函数 T (或更精确地,函数 $f(T(\varphi)x)$,其中 $f\in X'$) 的奇性阶数的某些附加假设之下,其逆命题为真.

刻画局部凸空间中半群特征的一个有用概念是**广义预解式**(generalized resolvent). 设 $\hat{\varphi}$ 表示函数 $\varphi\in D(\mathbf{R})$ 的 Laplace 变换,且设 $\hat{D}(\mathbf{R})$ 是所有这样的变换式的空间. 从 $D(\mathbf{R})$ 的拓扑通过 Laplace 变换,在这空间中诱导出一个拓扑. 一个 X 值广义函数

F 的 Laplace 变换由 $\hat{F}(\hat{\varphi})=F(\varphi)$ 定义. 在这些条件下, $\hat{F}$ 是 $\hat{D}(\mathbf{R})$ 到 X 上连续线性算子的空间 $L(X)$ 中的一个连续映射. 设 $\hat{D}'_+$ 是从具有 $(0,\infty)$ 中支集的函数 F 得到的所有 $\hat{F}$ 的空间, 赋予自然的拓扑. 如果 A 是 X 上一个线性算子, 它可以通过等式

$$(\widetilde{A}\hat{F})=A(\hat{F}(\hat{\varphi}))=AF(\varphi)$$

被"提升"到 $\hat{D}'_+$ 上的一个算子 $\widetilde{A}$. 这样, 它是对所有 $\hat{F}\in\hat{D}'_+$ 定义的使得等式右边对任何 $\varphi\in D(\mathbf{R})$ 被定义且它扩张成 $\hat{D}'_+$ 中的一个广义函数. $\hat{D}'_+$ 上连续算子 $\widetilde{\lambda}$ 由

$$(\widetilde{\lambda}\hat{F})\ (\hat{\varphi})=\lambda\hat{F}(\hat{\varphi})=F'(\varphi)=-F(\varphi')$$

定义. 如果算子 $\widetilde{A}-\widetilde{\lambda}$ 在 $\hat{D}'_+$ 上有一个连续逆 $\widetilde{R}$, 则 $\widetilde{R}$ 称为 A 的广义预解式.

一个算子 A 有广义预解式, 当且仅当算子 $(d/dt)-A$ 有局部等度连续的基本函数 T, 由公式

$$T(\varphi)x=(\widetilde{R}(1\otimes x))\ (\hat{\varphi}),\ \varphi\in D(\mathbf{R}),\ x\in X,$$

构造, 其中 $(1\otimes x)\ (\hat{\varphi})=(\delta\otimes x)\ (\varphi)=\varphi(0)x$.

在一定的附加假设下, T 是一个分布半群. 对 $1C_0$ 类半群的一个扩张定理已经借助于广义预解式而得以证明.

亦见**非线性算子半群** (semi-group of non-linear operators).

参考文献

[1] Hille, E. and Phillips, R., Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: 希尔, 菲列浦斯, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社, 1964).

[2] Вувуникян, Ю. М., в кн., Теория операторов в фунциональных пространствах, Новосиб, 1977, 99 – 120.

[3] Забрейко, П. П., Зафиевский, А. В., 《Докл. АН СССР》, **189** (1969), 5, 934 – 937.

[4] Зафиевский, А. В., 《Тр. Матем. ф-та Воронеж. ун-та》, 1970, 1, 206 – 210.

[5] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980 (中译本: 吉田耕作, 泛函分析, 人民教育出版社, 1980).

[6] Крейн, С. Г., Линейные дифференциальные уравниния в банаховом пространстве, М., 1967 (英译本: Kreĭn, S. G., Linear differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1971).

[7] Сильченко, Ю. Т., 《Дифференц. уравниния》, **15** (1979), 2, 363 – 366.

[8] Chazarain, J., Problèmes de Cauchy abstracts et applications à quelques problèmes mixtes, *J. Funct. Anal.*, 7 (1971), 3, 386 – 446.

[9] Ciorânescu, I., La caracterisation spectrale d'opérateur générateurs des semi-groupes distributions d'ordre fini de croissance, *J. Math. Anal. Appl.*, **34** (1971), 34 – 41.

[10] Ciorânescu, I., A characterization of distribution semigroups of finite growth order, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, **22** (1977), 8, 1053 – 1068.

[11] Kato, T., A Characterization of holomorphic semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **25** (1970), 3, 495 – 498.

[12] Lions, J., Les semigroupes distributions, *Portugal Math.*, **19** (1960), 141 – 164.

[13] Pazy, A., On the differentiability and compactness of semi-groups of linear operators, *J. Math. Mech.*, **17** (1968), 12, 1131 – 1141.

[14] Pazy, A., Approximations of the identity operator by semi-groups of linear operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **30** (1971), 1, 147 – 150.

[15] Ushijima, T., On the abstract Cauchy problems and semi-groups of linear operators in locally convex spaces, *Sci. Papers College Gen. Educ. Univ. Tokyo*, **21** (1971), 93 – 122.

[16] Ushijima, T., On the generation and smoothness of semi-groups of linear operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A*, **19** (1972), 1, 65 – 127.

[17] Wild, C., Semi-groupes de croissance $\alpha<1$ holomorphes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, **285** (1977), 437 – 440. English abstract.

[18] Gol'dsteĭn, J. A., Semigroups of linear operators and application, Oxford Univ. Press, 1985 (译自俄文).

[19] Pazy, A., Semigroups of linear operators and application to partial differential equations, Springer, 1983.

[20] Clément, Ph. and Heijmans, H. J. A. M., et al., One-parameter semigroups, CWI Monographs, 5, North-Holland, 1987.

Ю. М. Вувуникян, С. Г. Крейн 撰

【补注】

参考文献

[A1] Butzer, P. L. and Berens, H., Semigroups of operators and approximation, Springer, 1967.

[A2] Kellermann, H. and Hieber, M., Integrated semigroups, *J. Funct. Anal.*, **84** (1989), 160 – 180.

[A3] Miyadera, I. and Tanaka, N., Exponentially bounded c-semigroups and integrated semigroups, *Tokyo. J. Math.*, **12** (1989), 99 – 115.

葛显良 译 吴绍平 校

具有有限性条件的半群 [semi-group with a finiteness condition; полугруппа с условием конечности]

具有被任意有限半群都满足的性质 θ 的半群 (semi-group) (这类性质 θ 称为**有限性条件** (finiteness condition)). 性质 θ 可以借助于半群的元素, 子半群等术语给出.

有限性条件的例子有：周期性（见**周期半群**（periodic semi-group）），局部有限性（见**局部有限半群**（locally finite semi-group）），剩余有限性（见**剩余有限半群**（residually finite semi-group）），有限生成性，有限表现性．有限表现半群的研究在很大程度上属于算法问题的领域．在最著名的条件——交换性条件下，有限生成半群也是有限表现半群（Redei 定理（Redei theorem））．任意可数半群可嵌入到具两个生成元的半群中，也可嵌入到具有三个幂等生成元的半群中（[8]）．

一系列的有限性条件可借助于子半群格的术语给出(例如，关于子半群的极小条件)．半群 S 满足关于子半群的极小条件，当且仅当 S 是周期的，且仅有有限个挠类，每个挠类 K_e 中的极大子群 G_e 满足关于子群的极小条件，而差 $K_e\setminus G_e$ 是有限的（[2]）．有限秩半群具有相似的结构（有限秩（finite rank)意指：S 的每个有限生成子半群的生成元的最小个数不超过某个固定数）；有限宽半群（semi-groups of finite breadth）也有相似的结构（有限宽意指：S 的任意有限子集 M 总包含一个元素个数不超过一个固定数的子集，使得该子集与 M 生成相同的子半群）；关于子半群满足极大条件的周期半群也是如此，等等（见[3]，[4]）．

逆半群满足关于逆子半群的极小条件，当且仅当存在一个主序列（见半群的**理想序列**（ideal series）），它的每个因子是含有有限多个幂等元的 **Brandt 半群**（Brandt semi-group），且它的每个极大子群满足关于子群的极小条件．关于极大条件、秩的有限性条件等也已得到类似的描述（见[5]）．

利用半群的理想的偏序集可给出一些有限性条件．最著名的有限性条件分别是关于主左、主右、主双边理想的极小条件 M_L，M_R，M_J（这些条件通常利用 $\mathscr{L}$，$\mathscr{R}$，$\mathscr{J}$ 类来定义；见 **Green 等价关系**（Green equivalence relations））．关于 $\mathscr{H}$ 类的条件 M_H 可类似定义．条件 M_L 和 M_R 的合取等价于条件 M_J 和 M_H 的合取，而除此之外，这些条件是独立的；特别地，满足条件 M_L 和 M_J 的半群未必满足条件 M_R 和 M_H．同时，满足条件 M_L 或 M_R 的半单半群（见半群的**主因子**（principal factor））满足条件 M_J．关于正则半群，上述四个条件是等价的；满足条件 M_H 的半群是拟周期的．满足条件 M_L 或 M_R，且其所有子群是有限的有限生成半群自身是有限的（[6]）．

满足关于右同余的极小条件的半群是周期的，且满足条件 M_L 及关于主左理想的对偶极大条件；如果在上述条件下，其所有子群又都是有限的，那么此半群本身是有限的（[6]）．如下条件已被研究：在逆半群中，关于左同余的极小条件；在只含有有限多个幂等元的逆半群中，关于单边同余的极小条件．交换半群满足关于同余的极小（大）性条件，当且仅当它有一个主序列，且满足关于子群的极小条件（[7]）（从而是有限生成的）．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1－2, Amer. Math. Soc. 1961－1967.

[2] Шеврин, Л. Н.,《Изв. АН СССР Сер. матем.》, **29** (1956), 3, 553－566.

[3] Шеврин, Л. Н.《Матем. заметки》, **15** (1974), 6, 925－935.

[4] Шеврин, Л. Н.《Изв. ВУЗов. Матем.》, 1974, 5, 205－215.

[5] Ершова, Т. И.,《Изв. ВУЗов. Матем.》, 1977, 11, 7－14.

[6] Hortzel, E., On finiteness conditions in semigroups, *J. of Algebra*, **60** (1979), 2, 352－370.

[7] Kozhukhov, I. B., On semigroups with minimal or maximal condition on left cogruences, *Semigroup Forum*, **21** (1980), 4, 337－350.

[8] Pastijn, F., Embedding semigroups in semibands, *Semigroup Forum*, **14** (1977), 3, 247－264.

Л. Н. Шеврин 撰 田振际 郑恒武 译 郭聿琦 校

半遗传环 [**semi-hereditary ring; палунаследственное кольцо**]，左的

一个环（ring)，它的每个有限生成左理想是投射的（亦见**投射模**（projective module))．例如，整数环、域上单变元多项式环，**von Neumann 正则环**（regular ring (in the sense of von Neumann))，遗传环，以及有限生成自由理想组成的环（半 FI 环）都是左半遗传环．右半遗传环可类似定义．一个左半遗传环不一定是右半遗传环，但一个局部左半遗传环必是整环和右半遗传环．半遗传环上矩阵环必是半遗传环．如果 R 是半遗传环，并且存在 $e\in R$ 使得 $e^2=e$，则 eRe 是半遗传环．半遗传环上的投射模的有限生成子模同构于基环的某一族有限生成左理想的直和，因而它是投射的．每个这样的有限生成子模还可表示为与基环的有限生成右理想对偶的模的直和．

对交换环 R 而言，下列性质是等价的：1) R 是半遗传的；2) 任给 R 的理想 $A,B,C,(A\cap B)C=AC\cap BC$；3) R 的全分式环在 von Neumann 意义下是正则的，并且对 R 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，分式环 $R_{\mathfrak{m}}$ 是一个正规环；以及 4) R 的所有二元生成理想是投射的．交换环 R 上的单变元多项式环是半遗传的，当且仅当 R 在 von Neumann 意义下是正则的．

参考文献

[1] Cartan, H., and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] Скорняков, Л. А., Итоги науки и техники. Алге-

бра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, 57 – 190, т. 19, М., 1981, 31 – 134.

【补注】

参考文献

[A1] Goodearl, K. R., von Neumann regular rings. Pitman, 1979.

裴定一 译 赵春来 校

半双曲空间 [semi-hyperbolic space; полугиперболическое пространство]

n 维射影空间，其中度量是由一个给定的绝对形定义的，后者是指下列对象的总体：有 $(n-m_0-1)$ 维平坦顶端 T_0 的指标为 l_0 的 2 次实锥 Q_0；在 $(n-m_0-1)$维平面 T_0 中有一个 $(n-m_1-1)$维平坦顶端 T_1 的指标为 l_1 的 $(n-m_0-2)$维实锥 Q_1；…；有 $(n-m_{r-1}-1)$维平坦顶端 T_{r-1} 的指标为 l_{r-1} 的 $(n-m_{r-2}-2)$维实锥 Q_{r-1}；在平面 T_{r-1} 中指标为 l_r 的非退化 $(n-m_{r-1}-2)$维实锥 Q_r；$0 \leqslant m_0 < m_1 < \cdots < m_{r-1} < n$. 这是指标为 $l_0, \cdots, l_r$ 的半双曲空间的定义，记为 ${}^{l_0 \cdots l_r}S_n^{m_0 \cdots m_{r-1}}$.

若锥 Q_0 是一对相交的平面，且两者都等同于 T_0 $(m_0=0)$ 时，以 T_0 为非正常平面的半双曲空间称为**半 Euclid 空间**(semi-Euclidean space)：

$$ {}^{l_1 \cdots l_r}R^{m_1 \cdots m_{r-1}} $$

两点 X, Y 之间的距离定义为直线 XY 相对于平面 $T_0, \cdots, T_{r-1}$ 的位置的函数. 特别是，若 XY 不与 T_0 相交，则 X 与 Y 的距离用数量积来定义，类似于**拟双曲空间**(quasi-hyperbolic space)中相应的定义. 如果 XY 与 T_0 相交，但是与 T_1 不相交，或者它与 T_{a-1} 相交，但是与 T_a 不相交时，这两点之间的距离定义为点 X, Y 的向量之差与其自身的数量积.

基于绝对形的相对于 $T_0, \cdots, T_a, \cdots$ 的位置，可区分出 4 种具有不同阶的直线：椭圆的、双曲的、迷向的和抛物的直线.

在半双曲空间中平面之间的角的定义类似于拟双曲空间中平面之间的角，即利用在其对偶的空间中的距离.

在半双曲空间中的射影度量是最一般形式的度量. 这种度量的一种特殊情形是拟双曲空间的度量. 特别是，2维平面 ${}^{01}S_2^0$ 与拟 Euclid 空间 ${}^1R_2$ 一致，平面 ${}^{11}S_2^1$ 与上拟 Euclid 空间 ${}^1R_2^*$ 一致；3维空间 ${}^{11}S_3^1$ 和 ${}^{11}S_3^1$ 与拟双曲空间一致，3维空间 ${}^{10}S_3^2$ 与上拟 Euclid 空间 ${}^1R_3^*$ 一致，等等. 3维空间 ${}^{100}S_3^{12}$ 对偶于拟 Galileo 空间 ${}^1\Gamma_3$，称为上拟 Galileo 空间(co-pseudo-Galilean space)；它的绝对形由一对实平面(锥 Q_0)，以及它们的交线 T_0 上的一点 T_1 组成.

半双曲空间的运动定义为空间的把绝对形变为它自身的直射变换. 若 $m_a = n - m_{r-a-1} - 1$, $l_a = l_{r-a}$, 半双曲空间与它自身对偶. 于是定义上运动(co-motion)是可能的，其定义类似于自对偶拟双曲空间中的上运动. 运动的群，以及运动和上运动的群都是 Lie 群. 半双曲空间的运动(和上运动)用拟正交算子来描述，其指标由空间的指标来确定.

半双曲空间是一个半 Riemann 空间(semi-Riemannian space).

参考文献

[1] Sommerville, D. M. Y., Proc. Edinburgh Math. Soc., 28 (1910), 25 – 41.
[2] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文).

陈维桓 译

半不变量 [semi-invariant; полуинвариант]

一个向量空间或模的一族自同态的一个公共本征向量. 如果 G 是域 K 上向量空间 V 的线性映射的一个集合，G 的一个半不变量是这样的一个向量 $v \in V (v \neq 0)$，使得

$$ gv = \chi(g)v, \quad g \in G, $$

这里 $\chi: G \to K$ 是一个函数，称为半不变量 v 的权(weight of the semi-invariant). 权是 1 的半不变量也称为不变量(invariant). 更常见的情形是一个线性群(linear group) $G \subset \mathrm{GL}(V)$，在这一情形下 $\chi: G \to K^*$ 是 G 的一个特征标并且可以开拓为 $\mathrm{End}\, V$ 上一个多项式函数. 如果 $\varphi: G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个群 G 在 V 内一个线性表示(linear representation)，那么群 $\varphi(G)$ 的半不变量也称表示 φ 的半不变量(semi-invariant of the representation)(亦见**线性表示的不变量**(linear representation, invariant of a)). 令 G 是一个**线性代数群**(linear algebraic group)，H 是 G 的一个闭子群，而 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 是这些群的 Lie 代数，那么存在一个忠实有理线性表示 $\varphi: G \to \mathrm{GL}(E)$ 和 $\varphi(H)$ 的一个半不变量 $v \in E$，使得 H 和 $\mathfrak{h}$ 是 G 和 $\mathfrak{g}$ 中在 $\mathrm{End}\, V$ 内的象以 v 为半不变量的极大子集. 由此推出映射 $aH \mapsto K\varphi(a)v (a \in G)$，定义了代数齐性空间 G/H 到射影空间 $P(E)$ 内直线 Kv 的轨道上的一个同构.

一个集合 $G \subset \mathrm{End}\, V$ 的半不变量这个术语常常应用到 $\mathrm{End}\, V$ 上一个多项式函数上，它是空间 $K[\mathrm{End}\, V]$ 的线性映射 $\eta(G)$ 的集合的一个半不变量，这里

$$ (\eta(g)f)(X) = f(Xg), $$

$$ g \in G, \ f \in K[\mathrm{End}\, V], \ X \in \mathrm{End}\, V. $$

如果 $G \subset \mathrm{GL}(V)$ 是一个线性代数群而 $\mathfrak{g}$ 是它的 Lie 代数，则 G 有具同一权的半不变量

$$f_1, \cdots, f_n \in K[\mathrm{End}\, V],$$

使得 G 和 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 和 End V 的以 $f_1, \cdots, f_n$ 为半不变量的极大子集（Chevalley 定理（Chevalley theorem））.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, second enlarged ed., Springer, 1991.

[2] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

[3] Chevalley, C., Théorie des groupes de Lie, 2, Hermann, 1951.

А. Л Онищик 撰 郝钢新 译

半不变量 [semi-invariant; семиинвариант]

随机变量的数值特征之一，与高阶矩（moment）的概念有关．如果 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_k)$ 是一个随机向量，$\varphi_\xi(t) = \mathrm{E}e^{i(t,\xi)}$ 是它的特征函数，$t = (t_1, \cdots, t_k)$，$t_i \in \mathbf{R}$，

$$(t, \xi) = \sum_{i=1}^{k} t_i \xi_i,$$

又设对某个 $n \geqslant 1$，矩 $\mathrm{E}|\xi_i|^n < \infty$，$i = 1, \cdots, k$，那么对于所有使 $\nu_1 + \cdots + \nu_k \leqslant n$ 的非负整数 $\nu_1, \cdots, \nu_k$，（混合）矩

$$m_\xi^{(\nu_1, \cdots, \nu_k)} = \mathrm{E}\xi_1^{\nu_1} \cdots \xi_k^{\nu_k}$$

一定存在．在这些条件下，

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_k \leqslant n} \frac{i^{\nu_1 + \cdots + \nu_k}}{\nu_1! \cdots \nu_k!} m_\xi^{(\nu_1, \cdots, \nu_k)} t_1^{\nu_1} \cdots t_k^{\nu_k} + o(|t|^n),$$

其中 $|t| = |t_1| + \cdots + |t_k|$，且对充分小的 $|t|$，$\ln \varphi_\xi(t)$ 的主值可以由 Taylor 公式表示为

$$\ln \varphi_\xi(t) = \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_k \leqslant n} \frac{i^{\nu_1 + \cdots + \nu_k}}{\nu_1! \cdots \nu_k!} s_\xi^{(\nu_1, \cdots, \nu_k)} t_1^{\nu_1} \cdots t_k^{\nu_k} + o(|t|^n),$$

其中系数 $s_\xi^{(\nu_1, \cdots, \nu_k)}$ 即称为随机向量 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_k)$ 的阶为 $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_k)$ 的（混合）半不变量（(mixed) semi-invariant）或累积量（cumulant）．对于独立的随机向量 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_k)$ 和 $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_k)$ 有

$$s_{\xi+\eta}^{(\nu_1, \cdots, \nu_k)} = s_\xi^{(\nu_1, \cdots, \nu_k)} + s_\eta^{(\nu_1, \cdots, \nu_k)},$$

即独立随机向量之和的半不变量等于它们的半不变量之和．这就是"半不变量"这一术语的来由．它反映了独立随机变量的可加性（但此性质对相依变量一般并不成立）．

下面的公式把矩和半不变量联系起来：

$$m_\xi^{(\nu)} = \sum{}^{*} \frac{1}{q!} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \cdots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} s_\xi^{(\lambda^{(p)})},$$

$$s_\xi^{(\nu)} = \sum{}^{*} \frac{(-1)^{q-1}}{q} \frac{\nu!}{\lambda^{(1)}! \cdots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^{q} m_\xi^{(\lambda^{(p)})},$$

其中 $\sum^*$ 表示对非负整数向量 $\lambda^{(p)}$，$|\lambda^{(p)}| > 0$，且其和为 ν 的所有有序集求和．（这里，$\nu!$ 定义为 $\nu! = \nu_1! \cdots \nu_k!$，对 $\lambda^{(p)}!$ 也作类似定义．）特别地，如果 ξ 是一随机变量（$k = 1$），$m_n = m_\xi^{(n)} = \mathrm{E}\xi^n$，而 $s_n = s_\xi^{(n)}$，则有

$$m_1 = s_1,$$

$$m_2 = s_2 + s_1^2,$$

$$m_3 = s_3 + 3s_1 s_2 + s_1^3,$$

$$m_4 = s_4 + 3s_2^2 + 4s_1 s_3 + 6s_1^2 s_2 + s_1^4,$$

和

$$s_1 = m_1 (= \mathrm{E}\xi),$$

$$s_2 = m_2 - m_1^2 (= \mathrm{D}\xi),$$

$$s_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3,$$

$$s_4 = m_4 - 3m_2^2 - 4m_1 m_3 + 12m_1^2 m_2 - 6m_1^4.$$

参考文献

[1] Леонов, В. П., Ширяев, А. Н., 《Теория Вероятн. и её примен.》, 4 (1959), 3, 342 – 355.

[2] Shiryaev, A. N., Probability, Springer, 1984 (译自俄文).

А. Н. Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Stuart, A., Ord, J. K., Kendall's advanced theory of statistics, Griffin, 1987.

[A2] Schmetterer, L., Introduction to mathematical statistics, 1974, Chapt. 1, § 42.

[A3] Rényi, A., Probability theory, North-Holland, 1970, Chapt. 3, § 15.

潘一民 译

半格 [semi-lattice; полурешетка]

一个可换幂等半群（semi-group），也就是满足等式 $x + y = y + x$ 和 $x + x = x$ 的半群．每一个半格 $p = \langle p, + \rangle$ 可以视为一个偏序集（partially ordered set）（偏序 $\leqslant$ 由关系 $a \leqslant b$ 当且仅当 $a + b = b$ 定义），其中任一元素对存在一个最小上界 $\sup\{a, b\} = a + b$．反之，每一元素对有最小上界的偏序集关于运算 $a + b = \sup\{a, b\}$ 构成一个半格．在这种情况下，称偏序集为上半格（upper semi-lattice）（或并半

格(join semi-lattice),或∨半格(∨-semi-lattice)).一个下半格(lower semi-lattice)也称交半格(meet semi-lattice),或∧半格(∧-semi-lattice),对偶地定义为任意两个元素有最大下界的偏序集.

Т. С. Фофанова 撰

【补注】 带(band)是每个元素为幂等的半群(亦见半群的带(band of semi-group))(它是把半群分解为形成带的子半群).于是由一个上(下)半格可定义一个交换带(commutative band),反之亦真.

参考文献

[A1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, I, Amer. Math. Soc., 1961, § 1.8.

卢景波 译

半线性映射 [semi-linear mapping; полулинейное отображение]

由同一个环 A 上的(左)模(module) M 到(左)模 N 内的映射 α,满足条件

$$\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y),$$

$$\alpha(cx)=c^{\sigma}\alpha(x),$$

其中 $x, y\in M$, $c\in A$ 及 $c\to c^{\sigma}$ 是 A 的某个自同构,称 α 是关于自同构 σ 半线性的(semi-linear relative to the automorphism).域 $\mathbf{C}$ 上的向量空间关于复数共轭 $c^{\sigma}=\bar{c}$ 的半线性映射也称为反线性映射(anti-linear mapping).一个 A 模 M 到它自身内的半线性映射称为半线性变换(semi-linear transformation).

例.一个 A 模 M 的位似(homothety of an A-module M),即映射 $x\to ax$ ($x\in M$)(其中 a 是 A 的一个固定的可逆元)是关于自同构 $c^{\sigma}=aca^{-1}$ 的一个半线性映射.

线性映射和模同态的许多性质对于半线性映射仍然成立.特别地,一个半线性映射的核与象都是子模;具有有限基的自由模的半线性映射由它们的矩阵完全确定;可以定义向量空间的一个半线性映射的秩,它等于它的矩阵的秩;等等.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algebra, Elements of mathematics, Hermann, 1973, Chapts. Ⅰ-Ⅲ(译自法文).

А. Л. Онищик 撰

【补注】 一个半线性变换,即一个模到它自身内的半线性映射,亦称为一个半线性自同态(semi-linear endomorphism).

蒋滋梅 译

半 Марков 过程 [semi-Markov process; полумарковский процесс]

一种具有有限或可数状态集 $N=\{1,2,\cdots\}$ 的随机过程(stochastic process) $X(t)$,它具有以 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots$ 为跳跃时阶梯形的轨道,且使得在其跳跃处的值 $X(\tau_n)$ 形成一个具有转移概率

$$p_{ij}=\mathsf{P}\{X(\tau_n)=j\mid X(\tau_{n-1})=i\}$$

的 Марков 链(Markov chain).跳跃时 τ_n 的分布用分布函数 $F_{ij}(x)$ 描述如下:

$$\mathsf{P}\{\tau_n-\tau_{n-1}\leqslant x,\ X(\tau_n)=j\mid X(\tau_{n-1})=i\}=$$
$$=p_{ij}F_{ij}(x)$$

(此外,它们与过程在较早时刻的状态无关).如果

$$F_{ij}'(x)=e^{-\lambda_i x},\ x\geqslant 0,$$

对任意 $i, j\in N$ 都成立,则半 Марков 过程 $X(t)$ 是连续时间 Марков 链.如果所有的分布退化为一个点,结果就是离散时间 Марков 链.

半 Марков 过程对排队论(queueing theory)和可靠性理论(reliability theory)中的许多过程提供了模型.同半 Марков 过程相联系的是 Марков 更新过程(见更新理论(renewal theory)),它描述过程 $X(t)$ 在 $[0,t]$ 中处于状态 $i\in N$ 的次数.

在分析术语中,半 Марков 过程和 Марков 更新过程的研究归结为一积分方程组——更新方程.

参考文献

[1] Королюк, В. С., Турбин, А. Ф., Полумарковские процессы и их приложения, К., 1976.

Б. А. Севастьянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cinlar, E., Introduction to stochastic processes, Prentice-Hall, 1975, Chapt. 10.

刘秀芳 译 陈培德 校

半鞅 [semi-martingale; семимартингал]

一个可以表示为一局部鞅(martingale)与一局部有界变差过程之和的随机过程(stochastic process).为了严格定义半鞅,可从一个随机基 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{F}, \mathsf{P})$ 出发,其中 $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$(见鞅(martingale)).一个随机过程 $X=(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称为半鞅(semi-martingale),如果它的轨道右连续且有左极限,而且它可以表成 $X_t=M_t+V_t$ 的形式,其中 $M=(M_t, \mathscr{F}_t)$ 是一个局部鞅,而 $V=(V_t, \mathscr{F}_t)$ 是一个局部有界变差过程,即

$$\int_0^t|dV_s(\omega)|<\infty,\ t>0,\ \omega\in\Omega.$$

一般这个表示是非唯一的.但限于 V 为可料过程时该表示是唯一的(在随机等价意义下).下面这些过程

都属于半鞅族（当然还有局部鞅和局部有界变差过程本身）：局部上鞅和下鞅，独立增量过程 X 使对任何 $\lambda \in \mathbf{R}$ 函数 $f(t)=\mathrm{E}e^{i\lambda X_t}$ 是局部有界变差函数（从而含所有平稳独立增量过程），伊藤过程，扩散型过程等等．半鞅族在等价测度的改变下是不变的．如果 X 是一个半鞅，f 二次连续可微，则 $f(X)=(f(X_t),\mathscr{F}_t)$ 也是半鞅，且伊藤公式（Itô formula）：

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})dX_s+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})d[X,X]_s^c+$$

$$+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s]$$

成立，或等价地

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_{s-})dX_s+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})d[X,X]_s+$$

$$+\sum_{0<s\leqslant t}[f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s-$$

$$-\frac{1}{2}f''(X_{s-})(\Delta X_s)^2]$$

成立，其中 $[X,X]=([X,X]_t,\mathscr{F}_t)$ 是半鞅 X 的二次变差，即

$$[X,X]_t=X_0^2+2\int_0^t X_{s-}dX_s,$$

$$[X,X]_t^c=[X,X]_t-\sum_{0<s\leqslant t}(\Delta X_s)^2$$

是二次变差 $[X,X]$ 的连续部分，$\Delta X_s=X_s-X_{s-}$，而积分则理解为对半鞅的随机积分（见**随机积分**（stochastic integral））．

如果 X 是一半鞅，令

$$X_t^{(\leqslant 1)}=X_t-\sum_{0<s\leqslant t}\Delta X_s I(|\Delta X_s|>1),$$

则过程 $X^{(\leqslant 1)}=(X_t^{(\leqslant 1)},\mathscr{F}_t)$ 有有界的跳跃，$|\Delta X_t^{(\leqslant 1)}|\leqslant 1$，从而可唯一地表示为

$$X_t^{(\leqslant 1)}=X_0+B_t+M_t,$$

其中 $B=(B_t,\mathscr{F}_t)$ 是局部有界变差的**可料随机过程**（predictable random process），而 $M=(M_t,\mathscr{F}_t)$ 是一局部鞅．这个鞅可以唯一地表示成 $M=M^c+M^d$，其中 $M^c=(M_t^c,\mathscr{F}_t)$ 是一连续局部鞅（构成半鞅 X 的连续鞅部分），$M^d=(M_t^d,\mathscr{F}_t)$ 是一纯断局部鞅，它可以表成如下形式：

$$M_t^d=\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1}x\,d(\mu-\nu),$$

其中 $d\mu=\mu(\omega,dt,dx)$ 是 X 的随机跳测度，即

$$\mu(\omega,(0,t],\Gamma)=\sum_{0<s\leqslant t}I(\Delta X_s\in\Gamma),$$

$$\Gamma\in\mathscr{B}(\mathbf{R}\setminus\{0\}),$$

而 $d\nu=\nu(\omega,dt,dx)$ 是它的补偿元．由于

$$\sum_{0<s\leqslant t}\Delta X_s I(|\Delta X_s|>1)=\int_0^t\int_{|x|>1}x\,d\mu,$$

每个半鞅 X 都有一个表示

$$X_t=X_0+B_t+M_t^c+\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1}x\,d(\mu-\nu)+$$

$$+\int_0^t\int_{|x|>1}x\,d\mu,$$

称为典范表示（canonical representation（分解（decomposition））．

若 $\langle M^c\rangle$ 为 M^c 的二次特征，即是使 $(M^c)^2-\langle M^c\rangle$ 成为局部鞅的可料增过程，则（可料）特征组 $(B,\langle M^c\rangle,\nu)$ 称为 X 的局部（可料）特征三元组（triplet）．

参考文献

[1] Jacod, J., Calcul stochastique et problèmes de martingales, Springer, 1979.

[2] Liptser, R. Sh., Shiryaev, A. N, Theory of martingales, Kluwer, 1989（译自俄文）.

А. Н. Ширяев 撰

【补注】 亦见**伊藤公式**（Itô formula）与**随机积分**（stochastic integral）．半鞅是可能以合理方式对之定义可料过程积分的最广的随机过程类．

参考文献

[A1] Bichteler, K., The stochastic integral as a vector measure, in Measure Theory Oberwolfach, 1979, Lecture notes in math., vol. 794, Springer, 1980, 348–360.

[A2] Dellacherie, C., Un survol de la théorie de l'intégrale stochastique, in Measure Theory Oberwolfach, 1979, Lecture notes in math., vol. 794, Springer, 1980, 365–395.

[A3] Dellacherie, C., Meyer, P. A., Probabilités et potentiels, 2, Hermann, 1980, Chapts. V–VIII: Théorie des martingales.

[A4] Metivier, M., Semimartingales, de Gruyter, 1982.

[A5] Schwartz, L., Les semi-martingales formelles, in Sém. Probab. XV, Lecture notes in math., Vol. 850, Springer, 1981, 413–489.

[A6] Jacod, J., Shiryaev, A. N., Limit theorems for

stochastic processes, Springer, 1987

【译注】

参考文献

[B1] 何声武, 汪嘉冈, 严加安, 半鞅与随机分析, 科学出版社, 1995.

潘一民 译

半模格 [**semi-modular lattice**; **полудедекиндова решетка**], 半 Dedekind 格 (semi-Dedekind lattice)

模关系是对称的格, 即对任意的格元素 a, b, aMb 蕴涵 bMa. 此处的模关系 (modularity relation) 如下定义: 两个元素 a 和 b 称为构成一个模对 (modular pair), 如果对任意 $c \leqslant a$, $a(b+c)=ab+c$, 用符号 aMb 表示. 每一个元素对都是模对的格称为**模格** (modular lattice) 或 Dedekind 格 (Dedekind lattice).

一个长度有限的格是半模格, 当且仅当它满足覆盖条件 (covering condition): 如果 x 和 y 覆盖 xy, 那么 $x+y$ 覆盖 x 和 y (见**覆盖元** (covering element)). 在任意有限长的半模格中, Jordan-Dedekind 链条件 (Jordan-Dedekind chain condition) 成立 (两个固定元素之间的所有极大链长度相同), 这就为在此种格中研究维数理论提供了可能. 一个有限长的半模格是相对补格, 当且仅当它的每一个元素是原子的并. 这种格被命名为几何格 (geometric lattice). 一类重要的半模格是"拟几何"矩阵胚格 (见 [2]). 每一个有限格同构于有限半模格的一个子格. 半模格类在同态象下不封闭.

半模格也称为上半模格 (upper semi-modular lattice), 此外也还可考虑下半模格 (lower semi-modular lattice), 它们是用对偶的方式定义的. 除了模格以外, 半模格的例子有有限集的所有分割组成的格和仿射空间线性簇的格.

参考文献

[1] Birkhoff, G., Lattice theory, Amer. Math. Soc., 1967.

[2] Maeda, F. and Maeda, S., Theory of symmetric lattices, Springer, 1970.

Т. С. Фофанова 撰 卢景波 译

半范数 [**semi-norm**; **полунорма**]

(实或复数域上) **向量空间** (vector space) E 上满足以下条件的有限非负函数 p:

$$p(\lambda x)=|\lambda|p(x),\ p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$$

对所有 x, $y \in E$ 和所有标量 λ. 半范数的一个例子是**范数** (norm); 其差别在于半范数可以有 $p(x)=0$ 而同时 $x \neq 0$. 如果一个半范数 p 定义在一向量空间上又设 f 是一子空间上的**线性泛函** (linear functional) 满足条件 $|f(x)| \leqslant p(x)$, 则这泛函可延拓到整个空间上使得此延拓满足同样条件 (Hahn-Banach 定理 (Hahn-Banach theorem)). 在数学分析中, 经常遇到其中存在其元素为凸集的 o 邻域基的 Hausdorff 拓扑向量空间 (topological vector space). 这种空间称为局部凸的 (locally convex). 一个局部凸空间中开凸 o 邻域具有形式 $\{x: p(x)<1\}$, 其中 p 是一连续半范数. 然而, 在数学分析中也会遇到其中不存在非平凡半范数的拓扑向量空间 (包括带有可度量化拓扑的空间). 这种空间的最简单的例子是 $L_q(0,1)$, $0<q<1$.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Topological vector spaces, Springer, 1987 (译自法文).

[2] Rudin, W., Functional analysis, McGraw-Hill, 1979 (中译本: W. Rudin, 泛函分析, 湖北教育出版社, 1989).

Е. А. Горин 撰 葛显良 译 鲁世杰 校

半序空间 [**semi-ordered space**; **полуупорядоченное пространство**]

下述向量空间的一个常用名称: 其上定义有一个二元**偏序** (partial order) 关系, 该关系与**向量空间** (vector space) 的结构在某种方式上是相容的. 函数空间内序的引进, 使得在泛函分析的框架内, 研究本质上是与函数之间不等式相联系的问题成为可能. 然而, 对照全序的实数集, 函数空间的自然顺序仅仅是部分的. 例如, 在空间 $C[a,b]$ 中, 如果对所有 $t \in [a,b]$, $f(t) \geqslant g(t)$, 很自然地称函数 f 大于函数 g. 然而在这个序的定义下, 很多函数彼此不能比较.

有序向量空间. 定义在实数域上的一个向量空间 X 称作有序的 (ordered), 如果有一个在它上面定义的二元序关系 $\geqslant$, 其中 $x \geqslant y$ 蕴涵对任意 $z \in X$, $x+z \geqslant y+z$, 并且对任意数 $\lambda \geqslant 0$, $\lambda x \geqslant \lambda y$. 带有自然顺序的 $C[a,b]$ 是其一个例子. 如果 $\geqslant$ 是一个序, 那么集合 $X_+=\{x \in X: x \geqslant 0\}$ 是一个锥, 称其为正锥 (positive cone). 反之, 如果在某一个空间 X 内, 给定一个顶点在原点的锥 K, 那么可以给 X 一个顺序使得 $X_+=K$: 如 $x-y \in K$, 则认为 $x \geqslant y$. 也可考虑更一般的有序向量空间, 在其中仅仅定义了一个拟序结构. 在这种情况下, X_+ 是一个楔, 并且每一个顶点在原点的楔生成 X 中一拟序 (亦见**楔 (向量空间中的)** (wedge (in a vector space))).

假定向量空间 X 已经有一个序. 如果 $X_+-X_+=X$, 锥 X_+ 就称为生成的 (generating). X_+ 的这个性质, 对于 X 的任意有限子集 (上和下) 有界是必要且充分的. 若有序向量空间中每一上有界集合有最小上界 (上确界), 从而每一下有界集合也有最大下界 (下确界), 就称为序完全的 (order complete) 或

(o) 完全的 ((o)-complete). 对有序向量空间完全性的一个较弱的定义如下: 一个有序向量空间称为 Dedekind 完全的 (Dedekind complete), 如果每一个上有界并且向上定向的子集有最小上界 (一个集合 $E \subset X$ 是向上定向的, 如果对任意 $x_1, x_2 \in E$, 存在一个 $x_3 \in E$, 使得 $x_3 \geqslant x_1, x_2$. 亦见**有向集** (directed set)). 如果任意有界递增序列满足这个要求, 那么就称有序向量空间为 Dedekind (o) 完全的 (Dedekind (o)-complete). Dedekind 完全性比 (o) 完全性弱. 例如, 如果 X 是任一无限维 Banach 空间, $u \in X$, $0 < r \leqslant \|u\|$, 并且如果锥 K 是由闭球 $S(u; r)$ 和元素 O 张成, 并且 X 的序由 K 给出, 那么 X 是 Dedekind 完全的, 但不是 (o) 完全的. 一个有序向量空间称为 Archimedes 的 (Archimedean), 如果 **Archimedes 公理** (Archimedean axiom) 在其中成立. 特别地, 每一个 Dedekind (o) 完全的有序向量空间是 Archimedes 的.

在有序向量空间中引进序收敛 (order convergence) 概念: 一个序列 $\{x_n\}$ (o) 收敛 ((o)-converge) 到一个元素 x ($x_n \xrightarrow{(o)} x$), 如果存在递增序列 $\{y_n\}$ 和递减序列 $\{z_n\}$, 使得 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$, 并且 $\sup y_n = x = \inf z_n$. (o) 极限 ((o)-limit) 有很多实数集中极限所具有的性质, 虽然这些性质中的某些仅仅在 Archimedes 有序向量空间中成立.

映射有序向量空间 X 到有序向量空间 Y 的一个线性算子 A (特别地, 一个实值线性泛函) 称为正的 (positive), 如果 $AX_+ \subset Y_+$. 对于正泛函有下述的扩张定理 (theorem on extension). 设 E 是 X 的优于锥 X_+ 的线性子集 (这就是说, 对任意 $x \in X_+$, 存在 $y \in E$, 使得 $y \geqslant x$). 那么每一个在 E 上给定的并且关于锥 $E \cap X_+$ 是正的线性泛函, 在整个 X 上容许一个线性正扩张.

向量格. 一个向量格是一个有序向量空间, 而且其序关系定义一个格结构. 这里对于向量格的定义, 要求界中的一个存在就够了: 对空间中的任意两个元素 x, y, 存在上界 $x \vee y$ 或下界 $x \wedge y$. 例如, 如果 $x \vee y$ 存在, 那么 $x \wedge y = x + y - x \vee y$. 如果 X 是一个向量格, 那么锥 X_+ 称为极小多面体 (minihedral). 在一个向量格中, 对于任意元素 x, 它的正部分和负部分存在: $x_+ = x \vee 0$ 并且 $x_- = (-x) \vee 0$. 这里 $x = x_+ - x_-$, 并且这个公式给出了 x 作为正元素差的一个"极小"表示, 也就是说, 如果 $x = y - z$, 其中 $y, z \geqslant 0$, 那么 $x_+ \leqslant y$, $x_- \leqslant z$. 一极小多面体锥是生成的. 元素 $|x| = x_+ + x_-$ 称为元素 x 的模. 在具有自然顺序的空间 $C[a, b]$ 中, 正锥是极小多面体, 任一函数 $x \in C$ 的正部分是由把它的负值用 0 代替而得, 而模是函数 $|x|$. 在一个向量格中, 每一个有限元素集都有上界和下界. 向量格元素的模具有很多实数绝对值的性质.

一个向量格的格是分配的 (distributive). 事实上, 它满足更强的条件: 对于 $\sup x_\alpha$ 存在的任意元素集 $\{x_\alpha\}$, 以及任意 $y \in X$, 下面的公式成立: $y \wedge \sup x_\alpha = \sup\{y \wedge x_\alpha\}$. 而且对偶公式 $y \vee \inf x_\alpha = \inf\{y \vee x_\alpha\}$ 也成立 (亦见**分配格** (distributive lattice)).

正元素的二重分划定理 (theorem on the double partition) 如下: 如果 $x = y + z$, 其中 $y, z \geqslant 0$, 同时 $x = x_1 + \cdots + x_n$, 其中所有 $x_i \geqslant 0$, 那么每一 x_i 可以表为 $x_i = y_i + z_i$, 使得 $y_i, z_i \geqslant 0$, 并且

$$y = y_1 + \cdots + y_n, \quad z = z_1 + \cdots + z_n.$$

在一个向量格中, 两个元素 x 与 y 称为不相交的 (disjoint) (记作 xdy), 如果 $|x| \wedge |y| = 0$. 两个集合 A, B 称为不相交的 (disjoint), 如果对任意 $a \in A$, $b \in B$, adb. 在空间 $C[a, b]$ 中, 不相交性 xdy 意味着 $x(t)y(t) \equiv 0$. 一个正元素 e 称为弱单位 (weak unit) (Freudenthal 意义下的单位 (unit in the sense of Freudenthal)), 如果 0 是唯一的与 e 不相交的元素. 在 $C[a, b]$ 中, 在一个处处稠密的集上大于 0 的任意函数是一个弱单位. 然而, 如果一个元素 e, 使得对任意 x, 存在一个 λ 满足 $|x| \leqslant \lambda e$, 则称 e 是一个强单位 (strong unit), 具有一个强单位的 X 称为元素有界的向量格 (vector lattice of bounded elements). 在 $C[a, b]$ 中, 任意一个满足 $\min x(t) > 0$ 的函数 x 是强单位. 如果在一个具有强单位 e 的 Archimedes 向量格 X 中, 令 $\|x\| = \min\{\lambda: |x| \leqslant \lambda e\}$, 那么 X 便成为一个赋范格 (normed lattice).

在平面中, 任意一个不同于一维锥 (即一条射线) 的锥是极小多面体. 然而, 在高维空间中存在很多非极小多面体闭锥, 例如 $\mathbf{R}^3$ 中的所有"圆"锥. 在 n 维 Archimedes 有序向量空间中, 一个 (顶点在 o 的) 锥是极小多面体的充分必要条件, 是它由具有线性无关顶点的 $(n-1)$ 维单形张成. 每一个 Archimedes n 维向量格同构于具有坐标顺序的空间 $\mathbf{R}^n$.

K 空间. 亦称 Канторович 空间 (Kantorovich space). 这些空间就是 (o) 序完全向量格. 这是半序空间的主要类, 它们总是 Archimedes 的. K 空间中的 (o) 收敛概念用上极限和下极限刻画, 即对一有界序列 $\{x_n\}$,

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \sup_{m \geqslant n} x_m, \quad \underline{\lim}\, x_n = \sup_n \inf_{m \geqslant n} x_m,$$

并且 $x_n \xrightarrow{(o)} x$ 意味着 $x = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$. 设 X 是一个 K 空间. 对任意集合 $E \subset X$, 集合 $E^d =$

$\{x\in X: xdE\}$ 称为它的不相交补．一个集合若是另一个集合的不相交补，就称作一个带（band）．对任意一个集合 E，存在一个包含 E 的最小带，即 E^{dd}，称它为由集合 E 生成的带．如果 E 本身是一个带，那么 $E^{dd}=E$．由一个单元素集生成的带称为主的（principal）．带的概念也在任意向量格中采用．然而，在 K 空间中它起着特殊作用，因为有下面的关于射影到带上的定理（theorem on projecting onto a band）：如果 E 是 X 中的一条带，那么对任意 $x\in X$，存在一个唯一分解 $x=y+z$，其中 $y\in E$，$z\in E^d$．这里定义的线性算子 $y=\mathrm{Pr}_E x$，称为到带 E 上的射影（projection onto the band）．如果给定一族两两不相交的带 E_α，并且 0 是 X 中仅有的与所有 E_α 不相交的元素，那么任意 $x\in X_+$ 可以写成 $x=\sup x_\alpha$，其中 $x_\alpha=\mathrm{Pr}_{E_\alpha}x$．每一个格理想（即 l 理想）$Y\subset X$ 也是一个 K 空间．然而，如果 $x_n\in Y$ 并且在 X 中 $x_n\xrightarrow{(o)}x$，那么只有当 $\{x_n\}$ 在 Y 中有界时，这个关系在 Y 中也成立．

K 空间的一个例子是 $[0,1]$ 上所有几乎处处有限且可测的实值函数（把等价函数视为同一函数）所成的空间 S．一个函数 $x\in S$ 被认为是正的，如果几乎处处 $x(t)\geqslant 0$．如果 $A=\{x_n\}$ 是 S 的一个可数的上有界（上有界意味着存在一个 $y\in S$，使得对任意的 n，几乎处处 $x_n(t)\leqslant y(t)$）子集，那么函数 $x(t)=\sup x_n(t)$ 是集合 A 的最小上界，即 $\sup A$ 可以逐点计算．然而，对于不可数集，用这个方法计算界已经不可能，对于不可数集合证明在 S 中存在最小上界就已很困难．在 S 中，(o) 收敛意味着几乎处处收敛．所有空间 $L_p=[0,1]$，$p>0$，是 S 中的格理想，因此也是 K 空间．

Riesz-Канторович 定理起着重要作用，它阐明从一个向量格到一个具有自然顺序的 K 空间内的所有有序有界算子（order-bounded operator）（也就是把有序有界集映到有序有界集的线性算子）本身（$A\leqslant B$ 意味着对所有 $x\geqslant 0$，$Ax\leqslant Bx$）是一个 K 空间．K 空间理论在凸分析和极值问题的理论中找到了应用．这里的很多结果是基于关于值在 K 空间内的线性算子扩张的 Hahn-Banach-Канторович 定理．

一个 K 空间称为伸展的（extended）（或侧完全的（laterally complete）），如果每一个其元素两两不相交的集合在空间中有界．一个伸展 K 空间总有一个弱单位．对于任意 K 空间 X，存在（从同构的观点看）唯一的一个伸展 K 空间 Y，使得 X 作为一个 l 理想嵌入其中，并且由 X 在 Y 中生成的带与 Y 相同．这样的 Y 称为 K 空间 X 的极大扩张（maximal extension）．空间 $S[0,1]$ 是所有空间 $L_p[0,1]$ 的极大扩张．伸展 K 空间概念在半序空间理论中起着重要作用，特别在用函数表示 K 空间的理论中．

与向量格和 K 空间有密切联系的是格赋范空间概念——每一个元素对应它的一个广义范数的向量空间，范数是一固定向量格中的元素并且满足通常的范数公理，范数公理中的不等号按给定向量格的序的意义理解．这样的空间用于函数方程理论（存在定理，近似解方法，Newton-Канторович 方法，逐次逼近的单调方法，等等）．

拓扑半序空间．在泛函分析中也使用有序向量空间，在这个空间上定义了与序相容的拓扑．这种空间的最简单也是最重要的例子是 **Banach 格**（Banach lattice）．Banach 格概念的一种推广是局部凸格（locally convex lattice）．

Banach 空间的一个重要类由 Канторович-Banach 空间（Kantorovich-Banach spaces），（或称 KB 空间（KB-spaces））构成．这是满足两个附加条件的 Banach K 空间：1）$x_n\downarrow 0$ 蕴涵 $\|x_n\|\to 0$（范数的有序连续性）；2）如果序列 $\{x_n\}$ 是递增的，并且不是序有界的，那么 $\|x_n\|\to+\infty$．在 KB 空间中，其意义仅仅依赖于序的很多事实，可以用范数刻画．例如，$x_n\xrightarrow{(o)}0$ 意味 $\||x_n|\vee\cdots\vee|x_{n+m}|\|\to 0(n\to\infty)$ 关于 m 是一致的．KB 空间的一个集 E 为序有界的充分必要条件是所有形如 $\||x_1|\vee\cdots\vee|x_n|\|$ $(x_i\in E)$ 的数的集合有界．KB 空间是正则 K 空间．

KB 空间的一个例子：$L_p[0,1]$，$1\leqslant p<+\infty$．

设 X 是一个具有序向量空间结构和一个所谓正规锥 X_+ 的局部凸空间；此处 X_+ 的正规性等价于假定 X 有一个由绝对凸的，并且序饱和的零的邻域 U 构成的基（其含意是，如果 $x,y\in U$，并且 $x\leqslant y$，那么整个区间 $[x,y]\in U$）．局部凸有序向量空间上每一连续线性泛函可以表示为正连续线性泛函的差的充分必要条件为锥 X_+ 在弱拓扑中是正规的．对于赋范空间，锥的正规性在弱拓扑和强拓扑中是等价的．

参考文献

[1] Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961（英译本：Valikh, B. Z., Introduction to the theory of partially ordered spaces, Wolters-Noordhoff, 1967）.

[2] Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.-Л., 1950.

[3] Schaefer, H. H., Topological vector spaces, Springer, 1971.

[4] Красносельский, М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962（英译本：Krasnosel'skii, M. A., Positive solutions of operator equations, Wolters-Noordhoff, 1964）.

[5] Антоновский, М. Я., Болтянский, В. Г., Сары-

мсаков, Т. А., Топологические алгебры буля. таш., 1963.

[6] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25. Amer. Math. Soc., 1973.

[7] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (英译本: Kantorovich, L. V., Akilov, G. P., Functional analysis in normed spaces, Pergamon, 1964).

[8] Функциональный анализ, М., 1972 (Справоч. матем. б-ка).

[9] Вулих, Б. З., Введение в теорию конусов в нормированных пространствах, Калинин, 1977.

[10] Крейн, М. Г., Рутман, М. А., 《Успехи Матем. наук》, 3 (1948), 1, 3-95.

[11] Бухвалов, А. В., Векслер, А. И., Лозановский, Г. Я., 《Успехи матем. наук》, 34 (1979), 2, 137-183.

[12] Акилов, Г. П., Кутателадзе, С. С., Упорядоченные векторные пространства, Новосибирск, 1978.

Б. З. Вулих 撰

【补注】 亦见 **Riesz 空间** (Riesz space).

参考文献

[A1] Freudenthal, H., Teilweise geordnete Moduln, Proc. Royal Acad. Sci. Amsterdam, 39 (1936), 641-651.

[A2] Schaefer, H. H., Banach lattices and positive operators, Springer, 1974.

[A3] Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C., Riesz spaces, Ⅰ, North-Holland, 1971.

[A4] Zaanen, A. C., Riesz spaces, Ⅱ, North-Holland, 1982.

卢景波 译 王世强 校

半完满环 [semi-perfect ring; полусовершенное кольцо]

一个环，它的每个有限生成左模(或每个有限生成右模)都有投射覆盖. **Jacobson 根** (Jacobson radical) 为 J 的环 R 是半完满环，当且仅当 R 是半局部的，并且商环 R/J 的每个幂等元在 R 中有幂等的原象. 第一个条件可由商环的经典半单性要求来代替(见**经典半单环** (classical semi-simple ring))，第二个条件代之以 R/J 的模直和分解可以"提升"到 R 上. 半完满环也可刻画为每个模容许一个直和分解，其极大直和项是有补的. 半完满环上的矩阵环是半完满环.

亦见**完满环** (perfect ring) 及其参考文献.

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 亦见**投射覆盖** (projective covering).

参考文献

[A1] Rowen, L., Ring theory, 1, Acad. Press, 1988, 217.

蔡传仁 译

半伪 Euclid 空间 [semi-pseudo-Euclidean space; полупсевдоевклидово пространство]

具有退化的不定度量的向量空间. 半伪 Euclid 空间 ${}^{l_1 \cdots l_r}R_n^{m_1 \cdots m_{r-1}}$ 定义为一个 n 维空间，在其中给定了 r 个数量积

$$(x, y)_a = \sum \varepsilon_{i_a} x^{i_a} y^{i_a},$$

这里 $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_r = n$; $a = 1, \cdots, r$; $i_a = m_{a-1}+1, \cdots, m_a$; $\varepsilon_{i_a} = \pm 1$，而且 -1 在 ε_{i_a} 中出现 l_a 次. 积 $(x, y)_a$ 对于所有的坐标 $x^i (i \leqslant m_{a-1})$ 为零的向量有定义. 关于这样的向量，等式 $(x, y)_{a-1} = 0$ 成立. 半伪 Euclid 空间的任意一个向量 x 的第一个数量平方是向量坐标的退化的二次型:

$$(x, x) = -(x_1)^2 - \cdots - (x_{l_1})^2 + (x_{l_1+1})^2 + \\ + \cdots + (x_{n-d})^2,$$

其中 l_1 是指标，$d = n - m_1$ 是空间的亏指数. 如果 $l_1 = \cdots = l_r = 0$，该半伪 Euclid 空间就是一个**半 Euclid 空间** (semi-Euclidean space). 在半伪 Euclid 空间中，直线，m 维平面 ($m < n$)，平行性及向量等定义的方式与伪 Euclid 空间相同. 在半伪 Euclid 空间 ${}^{l+(d)}R_n$ 中能取正交基底，它由 l 个虚长度向量，$n - l - d$ 个实长度向量及 d 个迷向向量组成. 在亏指数为 d 的半伪 Euclid 空间中经过每一个点有一个 d 维迷向平面，它的所有向量与空间的所有向量都正交. 亦见 **Galileo 空间** (Galilean space).

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文).

陈维桓 译

半伪 Riemann 空间 [semi-pseudo-Riemannian space; полупсевдориманово пространство]

有一个退化的不定度量的流形. 半伪 Riemann 流形 ${}^{l_1 \cdots l_r}V_n^{m_1 \cdots m_{r-1}}$ 定义为一个 n 维流形，在坐标 x^i 下给定了 r 个线元

$$ds_a^2 = \sum_{i,j=1}^{m_a - m_{a-1}} g_{(a)ij} dx^{i+m_{a-1}} dx^{j+m_{a-1}},$$

其中 $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_r = n$; $a = 1, \cdots, r$，且二次型 $g_{(a)ij}$ 的指标为 l_a. 线元 ds_a^2 只对于所有的坐标 $dx^i (i \leqslant m_{a-1})$ 为零的向量有定义(对这样的向量，等式 $ds_{a-1}^2 = 0$ 成立). 若 $l_1 = l_2 = \cdots = 0$，半伪 Riemann 空间就是一个**半 Riemann 空间** (semi-Riemannian space). 空间 V_n^m 和 ${}^{kl}V_n^m$ 为拟 Riemann 空间 (quasi-Riemannian space). 在半伪 Riemann 空间中微

分几何的基本概念(例如曲率)的定义类似于 Riemann 空间(见[1]).

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969 　　　Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文). 　　　陈维桓 译

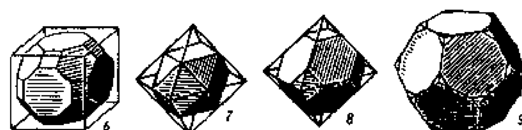
半正多面体 [**semi-regular polyhedra**; **полуправильные многогранники**], 均匀多面体 (uniform polyhedra), Archimedes 立体 (Archimedean solids)

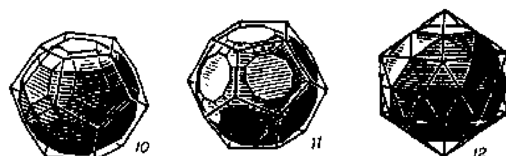
一个凸多面体,其中所有的面都是**正多边形** (regular polygons),所有的多面角都是全等的或对称的. 凸半正多面体包括五种 **Plato 立体** (Platonic solids) 以及表中列出的十五种立体. 表中 V 是顶点数, E 是棱数, F 是面数, F_k 是 n_k 边形面数, s 是相交于每个顶点上的面数, 即 s_1 是其中 n_1 边形面数, s_2 是其中 n_2 边形面数, 等等.

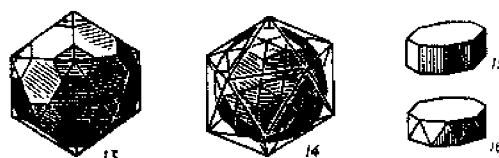
表中的前 13 个多面体归属于 Archimedes (图 1, 2, 3, 5 − 14).

除了 13 个 Archimedes 立体以及凸棱柱 (图 15) 和反棱柱 (图 16) 以外, 还有非凸棱柱和反棱柱——它们的底都是星形多边形, 以及其他 53 种非凸均匀多面体.









参考文献

[1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 − Геометрия, М.-Л., 1963.

[2] Люстерник, Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956.

[3] Brückner, M., Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte, Teubner, 1900.

[4] Wenninger, M., Polyhedron models, Cambrige Univ. Press, 1971.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 "Archimedes 立体" 的各个名称是由 J. Kepler 制定的 ([A6], pp. 10 − 11), 他引证了 "十四种

名　称	图号	V	E	F	n_1	n_2	n_3	F_1	F_2	F_3	s_1	s_2	s_3	s
截四面体	1	12	18	8	6	3	-	4	4	-	2	1	-	3
截立方体	2	24	36	14	8	3	-	6	8	-	2	1	-	3
菱立方八面体	3, 4	24	48	26	4	3	-	18	8	-	3	1	-	4
平头立方体	5	24	60	38	3	4	-	32	6	-	4	1	-	5
截立方八面体	6	48	72	26	4	6	8	12	8	6	1	1	1	3
立方八面体	7	12	24	14	3	4	-	8	6	-	2	2	-	4
截八面体	8	24	36	14	6	4	-	8	6	-	2	1	-	3
截十二面体	9	60	90	32	10	3	-	12	20	-	2	1	-	3
菱二十 - 十二面体	10	60	120	62	4	3	5	30	20	12	2	1	1	4
截二十 - 十二面体	11	120	180	62	4	6	10	30	20	12	1	1	1	3
二十 - 十二面体	12	30	60	32	3	5	-	20	12	-	2	2	-	4
截二十面体	13	60	90	32	6	5	-	20	12	-	2	1	-	3
平头十二面体	14	60	150	92	3	5	-	80	12	-	4	1	-	5
正　棱　柱	15	$2n$	$3n$	$n+2$	4	n	-	n	2	-	2	1	-	3
反　棱　柱	16	$2n$	$4n$	$2n+2$	3	n	-	$2n$	2	-	3	1	-	4

Archimedes 立体”(Archimedeis quattuordecim). 额外的一种多面体(图 4)是伪菱立方八面体(pseudo-rhombcubocahedron); 它不是严格“均匀的”, 因为虽然它的所有多面角都是全等的, 但是从对称的观点看来, 它们具有两种不同的类型.

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes, Ⅰ, *Math. Z.*, **46** (1940), 380 – 407.

[A2] Coxeter, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes Ⅱ, *Math. Z.*, **188** (1985), 559 – 591.

[A3] Coxeter, H. S. M., Regular and semi-regular polytopes Ⅲ, *Math. Z.*, **200** (1988), 3 – 45.

[A4] Robertson, S. A., Polytopes and symmetry, Cambridge Univ. Press, 1984.

[A5] Fejes Toth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, Springer, 1972.

[A6] Kepler, J., Strena: The six-cornered snowflake. Oxford Univ. Press, 1966

[A7] Senechal, M. and Fleck, G., Shaping space, Birkhäuser, 1988.

[A8] Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M., Mathematical recreations and essays, Dover, 1987, Chapt. 5.

杜小杨 张鸿林 译

半 Riemann 空间 [semi-Riemannian space; полуриманово пространство]

有半 Riemann 度量(退化的度量张量)的空间. 半 Riemann 空间是 **Riemann 空间** (Riemannian space)的概念的推广. 半 Riemann 空间的定义能够用 Riemann 空间的定义中所用的概念来表述. 在 Riemann 空间 V_n 的定义中切空间是有 Euclid 度量的空间 $\mathbf{R}^n$, 且假定它在 V_n 的平行移动下是不变的(空间 V_n 的度量张量 a_{ij} 是绝对常数). 若在 V_n 的每一点的切空间中装有**半 Euclid 空间** (semi-Euclidean space) $R_n^{m_1\cdots m_{r-1}}$ 的结构, 则空间 V_n 的度量是退化的, 其度量张量也是绝对常数, 但现在它是退化的, 它的矩阵的秩是 m_1, 且有一个非奇异子矩阵. 在张量 a_{ij} 的零化 $(n-m_1)$ 维平面 $(a_{ij}x^j=0)$ 中定义第二个退化的度量张量; 它的矩阵也具有一个非奇异子矩阵, 以此类推. 最后在第 $r-1$ 个张量的零化 $(n-m_{r-1})$ 平面中定义了第 r 个度量张量, 它是有非奇异矩阵的非退化度量. 这样的一个空间称为半 Riemann 空间, 记为 $V_n^{m_1\cdots m_{r-1}}$. 类似地可以定义形如 $^{l_1\cdots l_r}V_n^{m_1\cdots m_{r-1}}$ 的半 Riemann 空间, 即其切空间有一个半伪 Euclid 空间 $^{l_1\cdots l_r}\mathbf{R}_n^{m_1\cdots m_{r-1}}$ 的结构. 空间 V_n^m 和 $^{kl}V_n^m$ 称为拟 Riemann 空间(quasi-Riemannian space).

如同在 Riemann 空间情形一样, 能引进沿二维方向的曲率的概念. 半双曲空间和半椭圆空间是非零常曲率的半 Riemann 空间, 而半 Euclid 空间是零常曲率的半 Riemann 空间.

同样, 半 Riemann 空间能定义为(无挠的)仿射联络空间, 它在每一点的切空间是半 Euclid 的(或者半伪 Euclid 的), 并且其中的半 Riemann 空间度量张量是绝对常数.

在半 Riemann 空间中, 曲线和曲面的微分几何的做法与 V_n 中的曲线和曲面的微分几何类似, 只要考虑到半 Riemann 空间的以上所指出的特点. 半双曲空间和半椭圆空间的曲面本身是半 Riemann 空间. 特别是在半双曲空间 $^{m+1}S_n$ 中的 m 维极限球面等距于半 Riemann 空间 $V_{n-1}^{m,\,n-m-1}$, 其度量能化为半椭圆空间 S_{n-m-1}^m 的度量; 这个事实是 Лобачевский 空间中的极限球面与 Euclid 空间等距的推广.

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文).

[A2] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry, Acad. Press, 1983.

陈维桓 译

半环 [semi-ring; полукольцо]

一个非空集合, 带两个结合的二元运算 + 和 ·, 满足分配律

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

和

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

在大多数情况下也假定加法是交换的, 并且存在一个零元 0, 使得对每个 a, $a+0=a$. 半环的最重要的例子是**环**(ring)和**分配格**(distributive lattice)). 如果存在乘法单位元 1, 则这两类例子由条件

$$\forall x\,\exists y\,(x+y=1)$$

统一. 非负整数在通常的运算下, 提供了一个不满足此条件的半环的例子.

Л. А. Скорняков 撰 蔡传仁 译

半单代数 [semi-simple algebra; полупростая алгебра], 关于根 r 的

一个代数, 它是 r 半单环 (semi-simple ring). 在某些代数类中适当选取根 r 可以刻画半单代数的结构(见**经典半单环**(classical semi-simple ring); **交错环和交错代数**(alternative rings and algebras); **Jordan 代数**(Jordan algebra); **半单 Lie 代数**(Lie algebra, semi-simple)).

所谓半单代数，通常理解为域上的这样的有限维代数，它是单代数的直和． Л. А. Скорняков 撰

【补注】 根据 Wedderburn 定理（Wedderburn theorem）（见 **Wedderburn-Artin 定理**（Wedderburn-Artin theorem）），**Jacobson 根**（Jacobson radical）为零的 Artin 代数是单代数的有限直和．

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Algebra, 2, Wiley, 1989, Chapt 5.

蔡传仁 译

半单代数群 [semi-simple algebraic group; полупростая алгебраическая группа]

正维数的连通**线性代数群**（linear algebraic group），它只包含平凡的可解（或等价地，Abel）连通闭正规子群．连通不可解的线性群模它的根的商群是半单的．

一个正维数的连通线性代数群 G 称为单的（simple）（或拟单的（quasi-simple）），如果它不包含真的连通闭正规子群．单群 G 的中心 $Z(G)$ 是有限的，且 $G/Z(G)$ 作为抽象群是单的．代数群 G 是半单的，当且仅当 G 是单的连通闭正规子群的积．

如果基域是复数域 $\mathbf{C}$，那么半单代数群就是 $\mathbf{C}$ 上的**半单 Lie 群**（Lie group, semi-simple）．因此，任意代数闭域 K 上的半单代数群的分类问题类似于 $K=\mathbf{C}$ 的情形，即除了相差一个同构外，半单代数群由它的根系及权格中包含全部根的某个子格所确定．更确切地说，设 T 是半单代数群 G 的一个**极大环面**（maximal torus），$X(T)$ 是 T 的特征标群，它是空间 $E=X(T)\otimes\mathbf{R}$ 内的一个格．对 G 的有理**线性表示**（linear representation）ρ，群 $\rho(T)$ 可对角化．它的本征值是 $X(T)$ 的元素，并称为表示 ρ 的**权**（weight of a representation）．伴随表示 Ad 的非零权称为 G 的根（root）．于是 G 的所有根的集合 $\Sigma\subset X(T)$ 是空间 E 的**根系**（root system），Σ 的不可约分支是 G 的单的闭正规子群的根系．而且，$Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$，其中 $Q(\Sigma)$ 是由所有的根张成的格，$P(\Sigma)=\{\lambda\in E:\alpha^*(\lambda)\in\mathbf{Z}$ 对所有的 $\alpha\in\Sigma\}$ 是根系 Σ 的权格（weight lattice）．在 $K=\mathbf{C}$ 时，空间 E 可以自然地等同于实子空间 $\mathfrak{t}_{\mathbf{R}}^*\subset\mathfrak{t}^*$，其中 $\mathfrak{t}$ 是环面 T 的 Lie 代数，它由所有特征标的微分张成，且 $\mathfrak{t}$ 中对偶于 $Q(\Sigma)\subseteq X(T)\subseteq P(\Sigma)$ 的格（除了相差一个因子 $2\pi i$ 外）与 $\Gamma_1\supseteq\Gamma(G)\supseteq\Gamma_0$ 一致，见**半单 Lie 群**（Lie group, semi-simple）．

主要的分类定理陈述，如果 G' 是另一个半单代数群，T' 是它的极大环面，$\Sigma'\subset E'$ 是 G' 的根系，又如果存在一个线性映射 $E\to E'$，它给出根系 Σ 与 Σ' 之间的同构并把 $X(T)$ 映到 $X(T')$ 上，那么 $G\cong G'$．而且，对任意的约化根系 Σ 和满足条件 $Q(\Sigma)\subseteq\Lambda\subseteq P(\Sigma)$ 的任意格 Λ，存在半单代数群 G，使得 Σ 是关于极大环面 T 的根系且 $\Lambda=X(T)$．

半单代数群的同源（特别是所有自同构，见**同源**（isogeny））也已经被分类．

参考文献

[1] Steinberg, R. G., Lectures on Chevalley groups, Yale Univ. Press, 1968.

[2] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975（修正第二次印刷 Springer, 1981）.

А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Springer, T. A., Linear algebraic groups, Birkhauser, 1981.

叶家琛 译

半单元 [semi-simple element; полупростой элемент]，线性代数群 G 的

元素 $g\in G\subset\mathrm{GL}(V)$，它是空间 V 的**半单自同态**（semi-simple endomorphism），即它是可对角化的，其中 V 是代数闭域 K 上有限维向量空间．G 的半单元的概念是固有的，即它只是由 G 的代数群结构决定，而与 G 作为一般线性群的代数闭子群的忠实表示 $G\subset\mathrm{GL}(V)$ 的取法无关．元素 $g\in G$ 是半单的，当且仅当 $K[G]$ 上的右平移算子 ρ_g 可对角化．对任意的有理**线性表示**（linear representation）$\varphi: G\to\mathrm{GL}(W)$，群 G 的半单元集映到群 $\varphi(G)$ 的半单元集上．

类似地定义 G 的代数 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的半单元（semi-simple element of the algebraic Lie algebra），表示 φ 的微分 $d\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(W)$ 把代数 $\mathfrak{g}$ 的半单元映集到它的象的半单元集上．

由定义，抽象 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的半单元（semi-simple element of an abstract Lie algebra）是元素 $X\in\mathfrak{g}$，相应的伴随线性变换 ad X 是向量空间 $\mathfrak{g}$ 上的半单自同态．如果 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ 是约化线性代数群的 Lie 代数，那么 X 是代数 $\mathfrak{g}$ 的半单元，当且仅当 X 是 V 的半单自同态．

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969（第二版 Springer, 1991）.

[2] Мерзляков, Ю. И., Рациональные группы, М., 1980.

[3] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer, 1975（修正第二次印刷 Springer, 1981）.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 于是，代数 Lie 代数（algebraic Lie algebra）（线性代数群的 Lie 代数）的半单元的概念与抽象 Lie 代数的半单元的概念未必是一致的．但对约化线性代数群的 Lie 代数（及半单 Lie 代数）来说，

它们确实是一致的．为了避免这种混淆，抽象 Lie 代数 L 的使 ad X 是 L 的半单自同态的元素 X 有时称为 ad 半单的（ad-semi-simple）．亦见 **Jordan 分解**（Jordan decomposition）、2）．

参考文献

[A1] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer, 1972, §5.4（中译本：J. E. 汉弗莱斯，李代数及其表示理论导引，上海科学技术出版社，1981）.

[A2] Serre, J.-P., Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965, LA6.14.

叶家琛 译

半单自同态［**semi-simple endomorphism**；**полупростой эндоморфизм**］，半单线性变换（semi-simple linear transformation），域 K 上向量空间 V 的

具有下列性质的 V 的自同态 α：对于 V 的任意 α 不变子空间 W，存在 α 不变子空间 W'，使得 V 是 W 与 W' 的直和．换言之，V 是环 $K[X]$ 上**半单模**（semi-simple module），X 的作用如同 α．例如，有限维 Euclid 空间的任何正交的、对称或斜对称的线性变换，同样有限维向量空间的任何可对角化的（diagonalizable）（即对于某个基被一个对角矩阵所表示）线性变换，是半单自同态．自同态的半单性被其不变子空间 $W \subset V$ 与商空间 V/W 所保持．

设 $\dim V < \infty$，自同态 $\alpha: V \to V$ 是半单的，当且仅当它的极小多项式（minimum polynomial）（见**矩阵**（matrix））没有重因子．设 L 是域 K 的一个扩张，令 $\alpha_{(L)} = \alpha \otimes 1$ 是自同态 α 到空间 $V_{(L)} = V \otimes_K L$ 的扩张．如果 $\alpha_{(L)}$ 是半单的，那么 α 也是半单的，并且，如果 L 在 K 上是可分的，那么其逆成立．一个自同态 α 称为绝对半单的（absolutely semi-simple），如果对于任意扩张 $L \supseteq K$，$\alpha_{(L)}$ 是半单的；由此其充分必要条件是它的极小多项式在 K 的代数闭包 $\bar{K}$ 中没有重根，即自同态 $\alpha_{(\bar{K})}$ 是可对角化的．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algèbre, Eléments de mathématiques, Hermann, 1970, Chapts. Ⅰ－Ⅲ（英译本：Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra Ⅰ, Springer, 1989, Chapts 1－3）.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 代数闭域上有限维向量空间的任意自同态 α 可以分解为一个半单自同态 s 与一个幂零自同态 n 的和 $\alpha = s + n$，使得 $sn = ns$；见 **Jordan 分解**（Jordan decomposition），2）．

蒋滋梅 译

半单群［**semi-simple group**；**полупростая группа**］，在某个根的意义下的

一个群，它的根（radical）是单位子群．因此，半单群的概念完全取决于群的一个根类的选择．在有限群论和 Lie 群论中，对于根常理解为一个极大（连通）可解正规子群．在这些情形下，半单群的描述本质上归结为单群的描述．

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967（中译本：А. Г. 库洛什，群论，高等教育出版社，上册，1987，下册，1982）

[2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973（中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群（上，下册），科学出版社，1978）.

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann & Masson, 1960－1982, Chapts. Ⅰ－Ⅸ.

[A2] Hochschild, G., The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

郝鈵新 译

半单矩阵［**semi-simple matrix**；**полупростая матрица**］

域 F 上一个相似于形式 $\mathrm{diag}[d_1, \cdots, d_k]$ 的方阵，这里 d_j 是域 F 上一个矩阵，它的特征多项式在 $F[x]$ 内是不可约的，$j = 1, \cdots, k$（见**不可约多项式**（irreducible polynomial））．对于域 F 上一个矩阵 A 来说，以下三个论断是等价的：1）A 是半单的；2）A 的极小多项式在 $F[x]$ 内没有重因子；3）代数 $F[A]$ 是半单的（见**半单代数**（semi-simple algebra））．

如果 F 是一个**完满域**（perfect field），则 F 上一个半单矩阵相似于 F 的某一扩域上一个对角形矩阵．对于完满域上任意方阵 A 来说，存在唯一的形如 $A = A_S + A_N$ 的表示，这里 A_S 是半单矩阵，A_N 是幂零矩阵，且 $A_S A_N = A_N A_S$；矩阵 A_S 和 A_N 属于代数 $F[A]$．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algèbre, Eléments de mathématique. 2, Hermann, 1959.

Д. А. Супруненко 撰 郝鈵新 译

半单模［**semi-simple module**；**полупростой модуль**］

同**完全可约模**（completely-reducible module）．

半单表示［**semi simple representation**；**полупростое представление**］

同完全可约表示（见**完全可约集**（completely-reducible set））．

半单环［**semi-simple ring**；**полупростое кольцо**］

根为零的环 R．更确切地说，如果 r 是某种根（见**环与代数的根**（radical of rings and algebras）），环 R 称为 r 半单的（r-semi-simple），是指 $r(R) = 0$．

通常人们将结合半单环理解为**经典半单环** (classical semi-simple ring).　　Л. А. Скорняков 撰　冯绪宁 译

半单纯复形 [semi-simplicial complex; полусимплициальный комплекс]

单纯集 (simplicial set) 之旧称. 它在这种类型的对象刚出现时使用.

М. И. Войцеховский 撰　沈信耀 译

半辛空间 [semi-symplectic space; полусимплектическое пространство]

$2n+1$ 维射影空间, 在其中指定了一个 $(2n-2m_0-1)$ 维平面 T_0, 在 T_0 中指定了一个 $(2n-2m_1-1)$ 维平面 T_1, 等等, 直到指定一个 $(2n-2m_{r-1}-1)$ 维平面 T_{r-1}, 并且在空间中指定了一个零化系统, 把空间中所有的点变为通过平面 T_0 的平面; 在平面 T_0 中指定一个绝对的零化系统, 把所有它的点变为落在它的内部、通过 $(2n-2m_1-1)$ 维平面 T_1 的 $(2n-2m_0-2)$ 维平面, 等等, 直到在 $(2n-2m_{r-1}-1)$维平面 T_{r-1} 中指定一个绝对的零化系统, 把所有它的点变为落在它内部的 $(2n-2m_{r-1}-2)$维平面. $0 \leq m_0 < m_1 < \cdots < m_{r-1} < n$. 这个半辛空间记为 $\mathrm{Sp}_{2n+1}^{2m_0+1, \cdots, 2m_{r-1}+1}$.

半辛空间借助于从椭圆空间、双曲空间过渡到半椭圆空间、半双曲空间的类似方法而得到, 它比拟辛空间更一般.

半辛空间的、把平面 T_i 映为它自身、且与零化系统可交换的直射变换称为该半辛空间的**半辛变换** (semi-symplectic transformation).

半辛变换有不变量, 它与辛空间的辛不变量类似. 半辛变换构成一个 Lie 群.

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.　　Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988 (译自俄文).　　陈维桓 译

集合的可分性 [separability of sets; отделимость множеств]

描述集合论 (descriptive set theory) 中的一个基本概念 (由 Н. Н. Лузин ([1]) 引入). 它是研究集合描述性质的重要工具. 称二集合 A 与 A' 可被具有某性质 P 的集合分离, 若存在具有性质 P 的二集合 B 与 B', 使得 $A \subset B$, $A' \subset B'$ 且 $B \cap B' = \emptyset$.

关于可分性的首批结果由 Лузин 和 П. С. Новиков 得到. 之后出现了可分性定理的许多变形, 原来的可分性概念也得到了推广并有了新形式. 其推广之一由 Новиков 定理 (Novikov theorem) ([2]) 概括: 设 $\{A_n\}$ 为某完全可分距离空间中的一列 $\mathscr{A}$ 集满足 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, 则存在一列 **Borel 集** (Borel set) $\{B_n\}$ 使得 $A_n \subset B_n (n \geq 1)$ 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. 该定理及其变形和推广称为多重 (multiple) (或广义 (generalized)) 可分性 (separability) 定理.

经典的结果是关于完全可分度量空间中的集合的. 在 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space) X 中: 1) 两个不交的解析集可被由该空间的开集 G 系统生成的 Borel 集分离 ([3]) (如果 X 是 **Урысон 空间** (Urysohn space), 则可把"开集 G"换为"闭集 F"; 一般地讲, 在 Hausdorff 空间中不能这样做 ([4])); 2) 设 $\mathscr{A}$ 是由系统 F 生成的 $\mathscr{A}$ 集系统; 如果 A 是由系统 $\mathscr{A}$ 生成的 $\mathscr{A}$ 集且 B 是解析集, $A \cap B = \emptyset$, 则存在由 $\mathscr{A}$ 生成的 Borel 集 C, 使得 $A \subset C$, $C \cap B = \emptyset$ (见 [5]).

与第一分离原理 (first separation principle) 的这些及其他变形相反, 第二分离原理 (second separation principle) 的许多表述形式并不依赖于集合所在空间的拓扑. 一种表述如下: 设 $\mathscr{A}$ 为一给定集合的子集系统, 它包含 $\emptyset$ 且关于补运算封闭; 设 $\{A_n\}$ 为一列由 $\mathscr{A}$ 生成的 $C\mathscr{A}$ **集** ($C\mathscr{A}$-set); 则存在一列由 $\mathscr{A}$ 生成的两两不交的 $C\mathscr{A}$ 集 $\{C_n\}$, 使得 $C_n \subset A_n (n \geq 1)$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (更确切地说, 这是归约原理 (reduction principle) 的表述之一, 见 [7]).

参考文献

[1] Лузин, Н. Н., Собр. соч., 2, М., 1958.

[2] Новиков, П. С., 《Докл. АН СССР》, 3-4 (1934), 3, 145-148.

[3] Frolik, Z., A survey of separable descriptive theory of sets and spaces, *Czechoslovak. Math. J.*, 20 (1970), 406-467.

[4] Ostaszewski, A. J., On Luzin's separation principles in Hausdorff spaces, *Proc. London Math. Soc.*, 27 (1973), 4, 649-666.

[5] Rogers, C. A., Luzin's first separation axiom, *J. London Math. Soc.*, 3 (1971), 1, 103-108.

[6] Rogers, C. A., Luzin's second separation theorem, *J. London Math. Soc.*, 6 (1973), 3, 491-503.

[7] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966 (译自法文).　　А. Г. Елькин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jech, T., Set theory, Acad. Press, 1978, p. 523ff　　赵希顺 译

可分代数 [separable algebra; сепарабельная алгебра]

域 k 上的有限维半单结合代数 A，在域 k 的任意扩张 K 下保持半单性（即对任意域 $K \supseteq k$，代数 $A \otimes_k K$ 是半单的，见**半单代数**（semi-simple algebra））．代数 A 是可分的，当且仅当这个代数的单分量的中心（见**结合环与结合代数**（associative rings and algebras））是域 k 的可分扩张（见**可分扩张**（separable extension））．

参考文献

[1] Waerden, B. L. van der, Algebra, 1－2, Springer, 1967－1971（译自德文）.

[2] Curtis, C. W. and Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962.

Л. А. Бокуть 撰

【补注】 交换环 C 上的代数 A 是可分的，如果 A 作为左（$A \otimes_C A = A^e$）模是投射的（见**投射模**（projective module））．

在其中心上可分的代数称为东屋代数（Azumaya algebra）．这些代数在交换环的 **Brauer 群**（Brauer group）理论或概形理论中是重要的．

参考文献

[A1] Auslander, M. and Goldman, O., The Brauer group of a commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97 (1960), 367－409.

[A2] Meyer, F. de and Ingraham, E., Separable algebras over commutative rings, Lecture notes in math., 181, Springer, 1971.

[A3] Knus, M.-A. and Ojangouren, M., Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya, Lecture notes in math., 389, Springer, 1974.

[A4] Caenepeel, S. and Oystaeyen, F. van, Brauer groups and the cohomology of graded rings, M. Dekker, 1988.

蔡传仁 译

环的可分完全化 [**separable completion of a ring**; **отделимое пополнение кольца**]

拓扑环（topological ring）$A/\bar{o}$ 的完全化，这里 A 是一拓扑环，$\bar{o}$ 是零理想 o 在 A 中的闭包．环的可分完全化也是一拓扑环，通常记作 $\hat{A}$．每个 A 到完全可分环 B 中的连续同态都可唯一扩充为 $\hat{A} \to B$ 的连续同态．

最重要的情形是环 A 的拓扑是线性的，且被理想基本系 $(\mathfrak{a}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 所定义．这时可分完全化 $\hat{A}$ 典范地等于离散环 $A/\mathfrak{a}_\lambda$ 的**投射极限**（projective limit）$\lim_{\lambda \in \Lambda}(A/\mathfrak{a}_\lambda)$．用同样方法也可得到模的可分完全化．

В. И. Данилов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Algèbre Commutative, Eléments de mathématique, Hermann, 1961, Chapt. 3. Graduations, filtrations, et topologies.

冯绪宁 译

可分扩张 [**separable extension**; **сепарабельное расширение**]，域 k 的

一个扩张 K/k，使得对某个自然数 n，域 K 与 $k^{p^{-n}}$ 在 k 上是线性无缘的（见**线性无缘扩张**（linearly-disjoint extensions））．不是可分扩张的扩张称作*不可分扩张*（inseparable extension）．此处 p 是 k 的*特征*．在特征 0 的情形，所有扩张都是可分的．

以下仅考虑代数扩张（关于超越可分扩张见**超越扩张**（transcendental extension））．一个扩张是可分的，当且仅当**迹**（trace）映射 $\mathrm{Tr}: K \to k$ 是非零函数．一个代数扩张是可分的，如果它的任一有限子扩张是可分的．

可分扩张构成扩张的特异类（distinguished class of extensions）．即，在*域塔*（tower of fields）$L \supset K \supset k$ 中，扩张 L/k 是可分的当且仅当 L/K 和 K/k 都是可分的；如果 K_1/k 和 K_2/k 是可分扩张，则 K_1K_2/k 也是；对任一可分扩张 K/k 和任意扩张 L/k，扩张 KL/L 还是可分的．一个扩张 K/k 是可分的，当且仅当容许有一个到 **Galois 扩张**（Galois extension）的嵌入．此时，对于有限扩张 K/k，K 到 L 中的不同的 k 同构的个数与扩张次数 $[K:k]$ 相同．任一有限可分扩张是单扩张．

一个多项式 $f \in k[x]$ 称作在 k 上是*可分的*（separable），如果它的任一不可约因子在 k 的*代数闭包*中没有重根．一个代数元 α 称作（在 k 上）*可分的*（separable），如果它是 k 上的一个可分多项式的根．否则称 α 为*不可分的*（inseparable）．一个元素 α 称作在 k 上是*纯不可分的*（purely inseparable），如果对于某个 n 有 $\alpha^{p^n} \in k$．一个不可约多项式 $f(x)$ 是不可分的，当且仅当它的导数 $f'(x)$ 恒等于零（这仅在 k 的特征为 p 且 $f(x) = f_1(x^p)$ 时才可能）．任一不可约多项式 $f(x)$ 可唯一地表成 $f(x) = g(x^{p^e})$ 的形状，其中 $g(x)$ 是可分多项式；$g(x)$ 的次数和数 e 分别称作 $f(x)$ 的*约化次数*（reduced degree）和*指数*（index）．

设 L/k 是任一代数扩张．L 中在 k 上可分元素的全体组成一个域 K，它是含于 L 中的 k 的极大的可分扩张 K．此域 K 称作 k 在 L 中的*可分闭包*（separable closure），次数 $[K:k]$ 称作 L/k 的*可分次数*（separable degree），同时次数 $[L:K]$ 称作*不可分次数*（inseparable degree）或*不可分性的次数*（degree of inseparability）．不可分次数等于 $p = \mathrm{char}\, k$ 的某个方幂．如果 $K = k$，则称 k 在 L 中是*可分封闭的*（separably closed）．在这种情形下，扩张 L/k 称作*纯不可分的*（purely inseparable）．一个扩张 K/k 是纯不可分的，当且仅当

$$K \subset k^{p^{-\infty}} = \bigcup_n k^{p^{-n}},$$

即 K 中的任一元素在 k 上都是纯不可分的．域 k 上的纯不可分扩张构成扩张的特异类．如果一个扩张 K/k 同时是可分的和纯不可分的，则 $K=k$．参考文献参见域扩张（extension of a field）.

Л．В．Кузьмин 撰　赵春来 译

可分映射 [separable mapping; сепарабельное отображение]

不可约代数簇 X 和 Y 间的支配态射 $f: X \to Y$，其中域 $K(X)$ 是子域 $f^*K(Y)$（由于支配性而同构于 $K(Y)$）的**可分扩张**（separable extension）．仅当基域的特征数 p 大于 0 时才能存在不可分映射．如果 f 是有限支配态射且它的次数不能被 p 除尽，则它是可分的．对于可分映射存在非空开集 $U \subset X$ 使得对所有的 $x \in U$，f 的**微分** $(df)_x$ 把切空间 $T_{X,x}$ 满射地映到 $T_{Y,f(x)}$ 内．反之，如果点 x 和 $f(x)$ 是非奇异的，$(df)_x$ 是满的，则 f 是可分映射．

概形 X 和 Y 的态射 $f: X \to Y$ 称为分离的（separated），如果 $X \times_Y X$ 的对角线是闭的．分离态射的复合是分离的．$f: X \to Y$ 是分离的，当且仅当对任意的点 $y \in Y$ 存在邻域 $V \ni y$ 使得态射 $f: f^{-1}(V) \to V$ 是分离的．仿射概形的态射总是分离的．存在 Noether 概形的分离性判则．　　A．Н．Рудаков 撰

【补注】 代数簇或概形的态射称为支配的，如果 $f(X)$ 在 Y 内稠密．

在俄语文献中的术语"сепарабельное отображение"按字面直译是"可分映射"，可是有时它的意思是"分离映射"．

设 A^1 是仿射平面，令 $U = A^1 \setminus \{(0,0)\}$．设 X 是通过把两个 A^1 沿着 U 通过恒等映射面粘合的概形，则 X 是非分离的概形．

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

可分过程 [separable process; сепарабельный процесс]

一种**随机过程**（stochastic process），它的轨道性态本质上决定于在一个可数集上的性态．定义在完全概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ 上的随机过程 $\{X_t: t \in T\}$（其中 T 是实直线 $\mathbf{R}$ 的子集）称为相对于 $\mathbf{R}$ 的子集类 $\mathscr{A}$ 是可分的，如果存在一个可数子集 $T_1 \subset T$（分离集（separant））和一个集合 $N \in \mathscr{A}$，$\mathsf{P}(N)=0$，使得对任意 $A \in \mathscr{A}$ 和任意开区间 $I \subset \mathbf{R}$，都有

$$\bigcap_{t \in IT_1} \{X_t \in A\} \setminus \bigcap_{t \in IT} \{X_t \in A\} \subset N,$$

此处 IT 表示交 $I \cap T$.

相对于闭集类和相对于闭区间类的可分性概念是最重要的（后者简称过程是可分的（separable））．如果过程 $\{X_t: t \in T\}$ 是可分的，则对任意 $\omega \notin N$ 和任意开集 $I \subset \mathbf{R}$，

$$\inf_{t \in IT_1} X_t(\omega) = \inf_{t \in IT} X_t(\omega),$$

$$\sup_{t \in IT_1} X_t(\omega) = \sup_{t \in IT} X_t(\omega) \qquad (1)$$

$$\inf_{u \in IT_1} X_u(\omega) \leqslant X_t(\omega) \leqslant \sup_{u \in IT_1} X_u(\omega),\ t \in IT, \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{u \to t} \inf_{u \in T_1} X_u(\omega) &= \lim_{u \to t} \inf_{u \in T} X_u(\omega), \\ \lim_{u \to t} \sup_{u \in T_1} X_u(\omega) &= \lim_{u \to t} \sup_{u \in T} X_u(\omega),\ t \in \overline{T}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\lim_{u \to t} \inf_{u \in T_1} X_u(\omega) \leqslant X_t(\omega) \leqslant \lim_{u \to t} \sup_{u \in T_1} X_u(\omega),$$
$$t \in T. \qquad (4)$$

性质 (1)－(4) 的每一个与可分性是等价的．如果 t 是 T 中点的左极限，则存在 T 中点的序列 $t_n \downarrow t$，使得

$$\lim_n \inf X_{t_n} = \lim_{u \downarrow t} \inf X_u,\ \lim_n \sup X_{t_n} = \lim_{u \downarrow t} \sup X_u$$

以概率 1 成立（对右极限点有类似结果）．如果 X_t 是依概率连续的可分随机过程，则 T 的每一可数处处稠密子集 $T_1 \subset T$ 都是分离集；此外，对任意开区间 I，$I \cap T \neq \varnothing$，和任意 IT 的有限子集序列 $s_n = \{s_{nk}: k \leqslant k_n\}$，满足 $\sup_{t \in IT} \inf_k |t - s_{nk}| \to 0$，有

$$\inf_k X_{s_{nk}} \xrightarrow{\mathsf{P}} \inf_{t \in IT} X_t,\quad \sup_k X_{s_{nk}} \xrightarrow{\mathsf{P}} \sup_{t \in IT} X_t. \qquad (5)$$

特别，如果 X_t 是以概率 1 连续的，则 (5) 中的收敛可用以概率 1 收敛代之．

对任意随机过程 X_t，$t \in T$，在同一概率空间上存在一个对闭集类可分的，在扩展的实直线上取值的随机过程 $\widetilde{X}_t$，$t \in T$，使得 $\mathsf{P}\{\widetilde{X}_t = X_t\} = 1$，$t \in T$．可分性概念及其性质可以推广到 T 和值域是不同的一般拓扑空间上的随机过程．转移到可分过程使得能够断言许多重要的与过程相联系的泛函和集合的可测性．另一种方法是扩张定义过程的 σ 代数（例如，在 Hausdorff 紧空间乘积的情形，一个测度可以从由柱集生成的通常 σ 代数唯一地扩张到非常丰富的 Borel 集的 σ 代数上），而不是改变组成过程的随机变量．

参考文献

[1] Doob, J. L., Stochastic processes, Chapman and Hall, 1953.

[2] Loève, M., Probability theory, Princeton Univ. Press, 1963（中译本：M．洛易甫，概率论，上册，科学出版社，1965）.

[3] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971（中译本：随机

过程论，科学出版社，1986）

[4] Doob, J. L., Probability in function space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), 1, 15 – 30.

[5] Nelson, E., Regular probability measures on function space, *Ann. of Math.*, 69 (1959), 3, 630 – 643.

В. В. Сазонов 撰 刘秀芳 译 陈培德 校

可分半群 [separable semi-group; сепаративная полугруппа]

满足对任意元素 x，y，$x^2 = xy = y^2$ 蕴涵 $x = y$ 的半群．如果半群 S 有一个分成子半群的分划，使得每个子半群满足消去律，那么 S 是可分的．对交换半群其逆命题也成立；此外，任何交换可分半群可分解为具有消去律的**半群的带** (band of semi-groups)（自然也是半格）．交换半群是可分的，当且仅当它可嵌入到一个 Clifford 半群 (Clifford semi-group) 中．周期半群是可分的，当且仅当它是 Clifford 半群．交换半群 S 是可分的，当且仅当它的特征标分离 S 的元素．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1 – 2, Amer. Math. Soc., 1961 – 1967.

Л. Н. Шеврин 撰 田振际 郑恒武 译 郭聿琦 校

可分空间 [separable space; сепарабельное пространство]

包含一个可数的处处稠密集合的拓扑空间．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 于是，空间 X 为可分的充要条件是它的密度 $d(X) \leqslant \aleph_0$；见**基数特征** (cardinal characteristic).

度量空间为可分的充要条件是它满足**第二可数公理** (second axiom of countability).

参考文献

[A1] Arkhangel'skii, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundamentals of general topology: Problems and exercises, Reidel, 1984, p. 43 ff（译自俄文）.

白苏华 胡师度 译

分离公理 [separation axiom; отделимости аксиома]

加给**拓扑空间** (topological space) 的一个条件，表示这样的要求：某些不相交的（即没有公共点的）集合可以用特殊的方式拓扑地相互分离．这些公理中最简单的（即是最弱的）仅用于单个点的集合，即用于空间的点．有所谓 T_0 公理 (Колмогоров 分离公理 (Kolmogorov separation axiom)，亦见 **Колмогоров 空间** (Kolmogorov space)；**Колмогоров 公理** (Kolmogorov axiom)) 和 T_1 公理．以下依次是 T_2 (Hausdorff 分离公理 (Hausdorff separation axiom)), T_3 (正则公理 (regularity axiom))，和 T_4 (正规公理 (normality axiom))．它们分别要求任意两个不同点（T_2 公理），任一点和任一不含此点的闭集（T_3 公理），任意两个不相交的闭集可以被邻域分离，即含于指定空间的两个互不相交的开集中．

满足 T_i 公理 ($i = 2,3,4$) 的拓扑空间称为 T_i 空间 (T_i-space)；T_2 空间也称为 **Hausdorff 空间** (Hausdorff space)，T_3 空间称为**正则空间** (regular space)；Hausdorff T_4 空间总是正则的，称为**正规空间** (normal space).

函数分离 (functional separation) 是特别有意义的．给定拓扑空间 X 中两个集合 A 和 B 是 X 中函数分离的 (functionally separated in X)，如果存在定义于此空间的有界连续实值函数 f，在集合 A 的所有点取同一值 a，而在集合 B 的所有点取不同于 a 的值 b．总可以假定 $a = 0$，$b = 1$，且在所有点 $x \in X$ 有 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

两个可函数分离的集合总可以用邻域分离，但其逆未必成立．不过，Урысон 引理 (Urysohn lemma) 成立：在正规空间中，任意两个不相交的闭集是可函数分离的．一个空间，如果它的任一点与不含该点的任一闭集都是可函数分离的，则称为完全正则的 (completely regular)（见**完全正则空间** (completely regular space)）．完全正则 T_2 空间称为 **Тихонов 空间** (Tikhonov space).

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

В. И. Зайцев 撰

【补注】 需要提醒读者：这里实际上并没有统一的协定．有的作者认为 T_3 和正则性等同，T_4 和正规性等同，并且把二者都当作 T_1 性质，例如 [A1].

在 [A2] 中找到的约定是："$T_3 =$ 正则 $+ T_1$"，"$T_4 =$ 正规 $+ T_1$"；在 [A3] 中采用的是"正则 $= T_3 + T_1$"，"正规 $= T_4 + T_1$"．

[A1] 的观点似被更广泛地接受．

形容词"完全正则的"通常用记号 $T_{3\frac{1}{2}}$．

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

[A2] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975（中译本：J. L. 凯莱，一般拓扑学，科学出版社，1982）.

[A3] Querenburg, B. von., Mengentheoretische Topologie, Springer, 1973.

白苏华 胡师度 译

分离变量法 [separation of variables, method of; разделения переменных метод]

同 **Fourier 法** (Fourier method).

分界线 [**separatrix**; **сепаратриса**]

微分方程定性理论中使用的一个名词.

1) 分界线这一词就其本义而言，在平面情况下，是指平面上的一个流（连续时间动力系统）(flow (continuous-time dynamical system)) $\{S_t\}$ 的一个（当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时）趋向某平衡位置 (equilibrium position) p_0 的一个轨道 $\{S_t p\}$，它有以下性质：在任意接近这个轨道处都可以找到其他的轨道，它们先是接近 p_0 好象是沿着轨道 $\{S_t p\}$ 似的，然后又偏离一有限的距离. 正式地说，这就指存在平衡位置 p_0 的一个邻域 U，一列点 $p_n\to p_0$ 以及两个数列 s_n, t_n，使当 $s_n\to\infty$（或 $s_n\to-\infty$）时，

$$S_{s_n}p_n\to p_0,\ S_{t_n}p_n\notin U,\ t_n>s_n\ (\text{或}\ t_n<s_n).$$

非退化的（或简单的）鞍点 (saddle) 是分界线的基本的例子. 对于它，分界线可以理解为一稳定的（或不稳定的）流形，即为包含鞍点和连接它两条轨道的一条曲线，且当 $t\to+\infty$（或 $t\to-\infty$）时这两轨道趋向此鞍点.

"分界线"一词与以下事实有关，即分界线和闭轨一起可将相平面分成几个区域，而在每个区域内，轨道的性态相同. 这个事实可以严格地陈述（见 [1], [3]）. 在轨道的极限集 (limit set of a trajectory) 的形成中可能出现分界线. 这样，轨道可以缠绕在一"分界圈"上，后者是由一轨道形成的闭曲线，而此轨道当 $t\to-\infty$ 和 $t\to+\infty$ 时都趋向同一鞍点，也可以缠绕在一"分界围道（环）"上，后者则是连结不同鞍点的几个分界线所成的闭曲线. 一个分界圈在小扰动下可以变成一极限环 (limit cycle).（这是平面上的流的分岐 (bifurcation) 的基本类型之一；见 [2], [3]）.

2) 在多维情况下分界线（或称分界流形 (separatrix manifold)）通常是指一双曲平衡位置或周期轨道的稳定或不稳定流形（见双曲点 (hyperbolic point)；双曲集 (hyperbolic set)）.

也曾试图用"分界流形"一词来指出现在一些集合中的轨道，这些集合在某种意义上把具有不同性态的轨道"分离"开来. 平面情况的直接推广用途有限，因为在多维情况下，相空间一般地不可能分成几个区域，其中各充满具有相同极限集的轨道（而在平面情况，这却是"典型的"状况）. 已经给出的一些提法都很复杂（见 [4]），不能希望会对不同类型的分界流形及它们所成的集合给出一个完全的描述.

参考文献

[1] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Qualitative theory of second-order dynamic systems, Wiley, 1973).

[2] Андронов, А. А., Леонтович, Е. А., Гордон, И. И., Майер, А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967 (英译本: Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane, Israel Progr. Sci. Transl., 1971).

[3] Баутин, Н. Н., Леонтович, Е. А., Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976.

[4] Hartzman, C. S., Separatrices and singular points, *Aequationes Math.*, 20 (1980), 1, 59 – 72.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 亦见常微分方程理论中的扇形 (sector in the theory of ordinary differential equations). 齐民友 译

序列 [**sequence**; **последовательность**]，给定集合元素的

定义在正整数集合上的函数，其值域包含在所研究的集合中.

序列 $f:\mathbf{N}\to X$（其中 $\mathbf{N}$ 为正整数集，X 为给定集合）的元素 (element) 或项 (term)，是一个有序对 (n, x)，$x=f(n)$, $n\in\mathbf{N}$, $x\in X$，记作 x_n. 正整数 n 称为 x_n 的项数或指标 (number (or index) of the term x_n)，元素 $x\in X$ 称为它的值 (value). 序列 f: $\mathbf{N}\to X$ 常记作 $\{x_n\}$ 或 $x_n (n=1, 2, \cdots)$.

序列元素的集合总是可数的；然而，一序列不同的两项至少它们的指标不同. 序列元素的值集有限；例如，任何平稳序列，也就是所有元素有一个值或相同值 $x_n=a (n=1, 2, \cdots)$ 的序列 $\{x_n\}$，其值集就由一个元素组成.

若 $n_1<n_2$，则序列 $\{x_n\}$ 的项 x_{n_1} 称为元素 x_{n_2} 的前趋 (predecessor)，项 x_{n_2} 称为 x_{n_1} 的后继 (successor). 因此，序列元素的集合有序.

在许多数学分支中遇到过序列的很多类型，它们有助于描述所研究对象的一些性质. 例如，若 X 是拓扑空间 (topological space)，则收敛序列 (convergent sequences)，也就是在这个空间中有极限 (limit) 的序列，在它的点的序列中扮演了一个重要角色. 收敛序列在描述诸如紧性，映射极限的存在性，映射的连续性等性质时很方便（至少对可数基能用到）. 如果某种对象（点、集合、映射等）的序列的所有元素有确定的性质，那么常常不难发现这种性质在该序列的极限点被保持. 例如，在极限转移之下对于函数收敛的不同类型（点态收敛，几乎处处收敛，一致收敛，依测度收敛，平均收敛等），研究诸如可测性、连续性、可微性、可积性等性质的行为.

从有限正整数集 $\overline{1, n}=\{1, \cdots, n\}$ 到集合 X 中的映射 f: $\overline{1, n}\to X$，有时称之为有限序列 (finite se-

quence)，并记作 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，其中 $x_k = f(k)$ $(k = 1, \cdots, n)$．序列可以用其通项公式给出（例如算术序列），也可以用递推公式给出（例如 Bernoulli 数的序列）或者用恰如其分的语言简单地描述（例如按递增次序的所有正素数的序列）．亦见**二重序列**(double sequence)；**多重序列**(multiple sequence)．序列概念的推广就是**广义序列**(generalized sequence)．

Л. Д. Кудрявцев 撰 罗 昕 罗嵩龄 译

序列范畴 [**sequence category**, category of sequences; **последовательностей категория**]

函子范畴或图范畴结构的一个特例．令 **Z** 是有通常序关系的整数集，则 **Z** 可被看作一个小范畴(small category)，以整数为对象，以所有可能的对 (i, j)，$i, j \in \mathbf{Z}$ 且 $i \leqslant j$，为态射．对 (i,j) 是从对象 i 到 j 的唯一态射．态射的合成定义为：$(j,k)(i,j) = (i,k)$．

任取范畴 $\mathfrak{K}$，从 **Z** 到 $\mathfrak{K}$ 的函子范畴叫作 $\mathfrak{K}$ 中的序列范畴(category of sequences)．为了定义函子 $F: \mathbf{Z} \to \mathfrak{K}$，只要在 $\mathfrak{K}$ 中指定一个以整数为指标的对象族，并对每个整数 i，选择一个态射 $\alpha_{i,i+1}: A_i \to A_{i+1}$，则 $F(i) = A_i$，$F(i, i+1) = \alpha_{i,i+1}$ 可唯一地扩张为函子 $F: \mathbf{Z} \to \mathfrak{K}$．从函子 $F: \mathbf{Z} \to \mathfrak{K}$ 到函子 $G: \mathbf{Z} \to \mathfrak{K}$ 的自然变换 φ，即序列范畴中的态射由态射族 $\varphi_i: F(i) \to G(i)$ 定义，且对任意 $i \in \mathbf{Z}$，$\varphi_i \cdot G(i, i+1) = F(i, i+1) \cdot \varphi_{i+1}$．

如果 $\mathfrak{K}$ 是一个有零态射的范畴，则在 $\mathfrak{K}$ 的序列范畴中，可以分离出复形(complexes)的**满子范畴**(full subcategory)，复形即函子 $F: \mathbf{Z} \to \mathfrak{K}$，使得任取 $i \in \mathbf{Z}$，$F(i+1, i+2)F(i, i+1) = 0$．对于任意 Abel 范畴 $\mathfrak{A}$，序列范畴和复形子范畴均为 Abel 范畴．

可以用非负或非正整数集的子范畴代替范畴 **Z**．对应的图范畴亦称为序列范畴．

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】

参考文献

[A1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963, Chapt, Ⅸ, § 3.

张英伯 译

级数序列 [**sequence of series**; **серий схема**]，**级数概形**(series scheme)，**序列概形**(serial scheme)，**三角阵列**(triangular array)

随机变量的二重序列 ξ_{nk}，$1 \leqslant k \leqslant k_n$，$k_n \to \infty$，$n \geqslant 1$，其中对任意 n，$\xi_{n1}, \cdots, \xi_{nk_n}$（形成第 n 个级数）是相互独立的．最简单的级数序列相应于 $k_n = n$ 的情形．在概率论的极限定理中，基本问题是决定随机变量

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk} \qquad (1)$$

的分布当 $n \to \infty$ 时的极限性态．

在适当条件下这种序列的极限分布类与无穷可分分布类相同（见**无穷可分分布**(infinitely-divisible distribution))．假定级数序列 ξ_{nk} 满足一致渐近可忽略条件，即当 $n \to \infty$ 时，

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0. \qquad (2)$$

则称 ξ_{nk} 形成一个零级数序列(null sequence of series)．随机变量(1)的极限分布（在弱收敛意义下）的集合与无穷可分分布的集合相同，这里 ξ_{nk} 是满足一致渐近可忽略条件的零级数序列．

对给定的无穷可分分布，存在 η_n 的分布收敛到它的条件（见[1]）．特别，对收敛到**正态分布**(normal distribution)的条件有下述形式：

设 ξ_{nk} 是级数序列，F_{nk} 是 ξ_{nk} 的分布函数．对满足(2)的 ξ_{nk}，和式(1)的分布弱收敛到具有参数 a 和 b 的正态分布的必要和充分条件是对任意固定的 $\varepsilon > 0$ 以下条件成立：

1) $\sum_{k=1}^{k_n} \mathsf{P}\{|\xi_{nk}| \geqslant \varepsilon\} \to 0$;

2) $\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left[\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \right]^2 \right\} \to b^2$;

3) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \to a$.

对独立随机变量序列的规格化部分和的极限分布的研究是级数序列研究的特殊情形．

关于级数序列亦见：**无穷可分分布**(infinitely-divisible distribution)；**大数律**(law of large numbers)以及**极限定理**(limit theorem)．例如，在中心极限定理和大数律的古典形式中，考虑由随机变量

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k}},$$

$$\xi_{nk} = \frac{\xi_k - \mathsf{E}\xi_k}{n}, \quad k = 1, \cdots, n,$$

构成的特殊形式的级数序列，其中 ξ_k 是独立随机变量．

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.-Л., 1949 (中译本：Б. В. 格涅坚科，А. Н. 柯尔莫格若夫，相互独立随机变量之和的极限分布，科学出版社，1955).

[2] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А, Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本：Prokhorov, Yu. V. and Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[3] Петров, В. В., Суммы независимых случайных

величин, М., 1972 (英译本: Petrov, V. V., Sums of independent random variables, Springer, 1975).

[4] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第一卷, 上、下册, 科学出版社, 1964, 1979).

Н. Г. Ушаков 撰

【补注】

参考文献

[A1] Loève, M., Probability theory, I, Springer, 1977 (中译本: M. 洛易甫, 概率论, 上册, 科学出版社, 1965).

刘秀芳 译 陈培德 校

矢列式演算 [sequent calculus; секвенций исчисление]

谓词演算 (predicate calculus) 的表述形式之一. 由于便于表示推导, 矢列式演算在**证明论** (proof theory), 数学基础以及推理的自动搜索等方面有着广泛的应用. 矢列式演算是由 G. Gentzen 于 1934 年引进的 (见 [1]). 下面以矢列式演算的形式给出一种经典谓词演算.

公式集 (collection of formulas) 是某一逻辑 - 数学语言 Ω 的有限公式集 Γ, 其中允许公式重复. Γ 中公式的次序不是本质的, 但对每个公式, 需要给出它在 Γ 中的重复数目. 公式集可以是空集. 集合 $\varphi\Gamma$ 是集合 Γ 加上公式 φ 的一个重复. 对两个公式集 Γ 和 Δ, 形式 $\Gamma\to\Delta$ 称为一个矢列式 (sequent); Γ 称为矢列式的前项 (antecedent), Δ 为后项 (successor).

矢列式演算公理的形式为 $\varphi\Gamma\to\Delta\varphi$, 其中 Γ,Δ 是任意公式集, φ 是任何原子的 (基本的) 公式. 演算的推导法则具有很对称的结构; 由下列模式引入逻辑连接词:

$$(\wedge\to)\ \frac{\varphi\psi\Gamma\to\Delta}{(\varphi\wedge\psi)\Gamma\to\Delta};$$

$$(\to\wedge)\ \frac{\Gamma\to\Delta\varphi;\ \Gamma\to\Delta\psi}{\Gamma\to\Delta(\varphi\wedge\psi)};$$

$$(\vee\to)\ \frac{\varphi\Gamma\to\Delta,\ \psi\Gamma\to\Delta}{(\varphi\vee\psi)\Gamma\to\Delta};$$

$$(\to\vee)\ \frac{\Gamma\to\Delta\varphi\psi}{\Gamma\to\Delta(\varphi\vee\psi)};$$

$$(\supset\to)\ \frac{\Gamma\to\Delta\varphi;\ \psi\Gamma\to\Delta}{(\varphi\supset\psi)\Gamma\to\Delta};$$

$$(\to\supset)\ \frac{\varphi\Gamma\to\Delta\varphi}{\Gamma\to\Delta(\varphi\supset\psi)};$$

$$(\neg\to)\ \frac{\Gamma\to\Delta\varphi}{\neg\varphi\Gamma\to\Delta};\ (\to\neg)\ \frac{\varphi\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta\neg\varphi};$$

$$(\forall\to)\ \frac{\forall x\varphi\varphi(x|t)\Gamma\to\Delta}{\forall x\varphi\Gamma\to\Delta};$$

$$(\to\forall)\ \frac{\Gamma\to\Delta\varphi}{\Gamma\to\Delta\forall x\varphi(y|x)};$$

$$(\exists\to)\ \frac{\varphi\Gamma\to\Delta}{\exists x\varphi(y|x)\Gamma\to\Delta};$$

$$(\to\exists)\ \frac{\Gamma\to\Delta\varphi(x|t)\exists x\varphi}{\Gamma\to\Delta\exists x\varphi}.$$

在法则 $(\to\forall)$ 和 $(\exists\to)$ 中, 假定变元 y 在 Γ 或 Δ 中不是自由的, x 在 φ 中不是自由的.

矢列式演算等价于通常形式的谓词演算, 这是指一个公式 φ 在谓词演算中可推导, 当且仅当矢列式 $\to\varphi$ 在矢列式演算中可推导. Gentzen 基本定理 (Gentzen fundamental theorem) (或正规化定理 (normalization theorem)) 对于证明这一点是基本的; 这个定理可以陈述如下: 如果矢列式 $\Gamma\to\Delta\varphi$ 和 $\varphi\Gamma\to\Delta$ 在矢列式演算中都可推导, 则 $\Gamma\to\Delta$ 也可推导. 推导法则

$$\frac{\Gamma\to\Delta\varphi;\ \varphi\Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta}$$

称为截法则 (cut rule). 正规化定理是说: 在矢列式演算中允许截法则, 或者加上截法则不改变可推导矢列式的集合. 因此, Gentzen 定理也称为截消定理 (cut-elimination theorem).

矢列式演算的对称结构对于其性质的研究提供了很大的方便. 因此, 在证明论中占有重要位置的是寻找应用演算的矢列式形式: 算术, 分析, 类型论以及在演算中证明某种形式的截消除定理 (见 [2], [3]). 许多基于非经典逻辑的演算中也有矢列式形式: 直觉主义逻辑、模态逻辑、相关逻辑, 以及其他逻辑 (见 [3], [4]).

参考文献

[1] Gentzen, G., Untersuchungen über das logische Schliessen, *Math. Z.*, 39 (1935), 176 – 210; 405 – 431.

[2] Takeuti, G., Proof theory, North-Holland, 1975.

[3] Драгалин, А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979 (英译本: Dragalin, A. G., Mathematical intuitionism. Introduction to proof theory, Amer. Math. Soc., 1988).

[4] Feys, R., Modal logics, Gauthier-Villars, 1965.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】 直观地, 矢列式 $\Gamma\to\Delta$ 表示: 如果 Γ 中所有公式成立, 则 Δ 中至少必有一个公式也成立.

参考文献

[A1] Szabo, M. E., Algebra of proofs, North-Holland, 1978.

眭跃飞 译

矢列式 (逻辑中的) [sequent (in logic); секвенция]

形如

$$A_1, \cdots, A_n \to B_1, \cdots, B_m$$

的表示式，其中 $A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_m$ 是公式．它可解释为：在假定 $A_1, \cdots, A_n$ 之下，$B_1, \cdots, B_m$ 中至少有一成立．矢列式箭矢左边的部分称为它的前项（antecedent），而右边部分称为它的后项（succedent 或 consequent）．公式 $(A_1 \& \cdots \& A_n) \supset (B_1 \vee \cdots \vee B_m)$（注意空合取表示真，而空析取表示假）称为所给矢列式的公式象（formula image of the sequent）．　Г．Е．Минц 撰

【补注】 某些学者（特别是其工作领域与构造逻辑有关的学者）把"矢列式"一词限于形如

$$A_1, \cdots, A_n \to B$$

的表示式，即限于上述定义中 $m=1$ 的特殊情形．

关于 Gentzen 对矢列式演算（sequent calculus）的讨论，见 **Gentzen 形式系统**（Gentzen formal system）；**矢列式演算**（sequent calculus）以及例如[A2]．

参考文献

[A1] Hodges, W., Elementary predicate logic, 载于 D. Gabbay, F. Guenther (eds.), Handbook of philosophical logic, Vol. 1, Reidel, 1983, pp. 1 – 131.

[A2] Sundholm, G., Systems of deduction, 载于 D. Gabbay, F. Guenther (eds.), Handbook of philosophical logic, Vol. 1, Reidel, 1983, pp. 133 – 188, § 3.

沈永欢 译

序贯分析 [sequential analysis; последовательный анализ]

数理统计的分支．其典型的特点是，所进行观测的次数（停止观测的时刻）事先不固定，而是在观测过程中根据观测结果确定．序贯方法在统计实践中的蓬勃发展和应用归功于 A. Wald 的工作．在根据独立观测结果区分两个简单假设的问题中，Wald 证明，就平均观测次数而言，与（Neyman-Pearson 引理所确立的）样本容量固定且具有同一错误概率的最大功效检验相比较，所谓序贯概率比检验具有明显的改进．

序贯分析的基本原理如下．设 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立同分布随机变量列，其分布函数 $F_\theta(x) = \mathrm{P}_\theta\{\xi_1 \leqslant x\}$ 依赖于未知参数 θ，而 θ 属于某参数集 Θ．问题要求根据观测结果作出关于未知参数　的真值的某种决定．

任何统计决策问题的基础，是（关于参数 θ 值的）最后决定 d 的空间 D 和决定停止观测时刻 τ 的规则，恰好在时刻 τ 作出最终决定．对于传统观测方法，停止观测的时刻是非随机量并且是事先选定的；对于序贯方法，τ 是不依赖"将来"的随机变量（Марков 时，停时（stopping time））．设 $\mathscr{F}_n = \sigma(w: \xi_1, \cdots, \xi_n)$ 是随机变量 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 生成的 σ 代数．取 $0, 1, \cdots, +\infty$ 为值的随机变量 $\tau = \tau(\omega)$ 称为 Марков 时（Markovian time），如果对于任意 $n \geqslant 0$，事件 $\{\tau \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n$，其中 $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$．设 $\mathscr{F}_\tau$ 是满足如下条件的一切可测集 A 的族：对于任意 $n \geqslant 0$，$A \cap \{\tau \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n$（亦见 **Марков 时**（Markov moment））．如果 $\mathscr{F}_n$ 可以解释为在随机时刻 n 之前（包括时刻 n）观测到的事件的全体，则 $\mathscr{F}_\tau$ 可以解释为在随机时刻 τ 之前（包括时刻 τ）观测到的事件的全体．最后决定 $d = d(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测函数，取值于空间 D．这样的函数偶 $\delta = (\tau, d)$ 称为（序贯）决策法则（(sequential) decision rule）．

为在决策规则中选出"最优的"，给出风险函数 $W(\tau, \theta, d)$ 并考虑其数学期望 $\mathrm{E}_\theta W(\tau, \theta, d)$．存在不同的定义最优决策规则 $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ 的方法．Bayes 方法是其中之一．它基于"参数 θ 是具有先验分布 $\pi = \pi(d\theta)$ 的随机变量"这一假设．这时可以称

$$R^\delta(\pi) = \int_\Theta \mathrm{E}_\theta W(\tau, \theta, d) \pi(d\theta)$$

为 π 风险，而称规则 $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ 为最优 Bayes 解（optimal Bayesian solution）或 π 最优解（π-optimal solution），如果对于任何其他（容许）规则 δ，有 $R^{\delta^*}(\pi) \leqslant R^\delta(\pi)$．最广泛使用的风险函数 $W(\tau, \theta, d)$ 形如 $c\tau + W_1(\theta, d)$，其中常数 $c \geqslant 0$ 解释为单个观测值的成本，$W_1(\theta, d)$ 是最终决定的损失函数．

通常，在 Bayes 问题中，求最优的最终决定 d^* 并不困难，主要注意力在于寻求最优停止时刻 τ^*．在这种情形下，序贯分析的多数问题归结为如下"最优停止规则"概形．

设 $X = (x_n, \mathscr{F}_n, \mathrm{P}_x)(n \geqslant 0, x \in E)$ 是相空间 $(E, \mathscr{B})$ 中的 Марков 链，其中 x_n 是它在 n 时的状态，σ 代数 $\mathscr{F}_n$ 视为在时刻 n 之前（包括 n）观测到的事件的全体，P_x 是对应于初始状态 $x \in E$ 的概率分布．假设若在时刻 n 停止观测，则赢得 $g(x_n)$．那么，在时刻 τ 停止的平均收益为 $\mathrm{E}_x g(x_\tau)$，其中 x 是初始状态．函数 $s(x) = \sup \mathrm{E}_x g(x_\tau)$ 称为成本（cost），其中 sup 对一切（有限）停止时刻来求；而对于一切 $x \in E$ 满足 $s(x) \leqslant \mathrm{E}_x g(x_{\tau_\varepsilon}) + \varepsilon$ 的 τ_ε 称为 ε 最优停时（ε-optimal stopping time）．0 最优停时称为最优的（optimal）．"最优停止规则"的基本问题是：成本 $s(x)$ 的结构如何，如何求它？假如 ε 最优停时和最优停时存在，它们的结构如何？下面给出涉及所提问题的最典型结果之一．

假设函数 $g(x)$ 有界：$|g(x)| \leqslant c < \infty$．那么，成本 $s(x)$ 是函数 $g(x)$ 的最小峰度控制函数，即满足如下两条性质的函数 $f(x)$ 中的最小者：

$$g(x) \leqslant f(x), \ Tf(x) \leqslant f(x),$$

其中 $Tf(x)=\mathrm{E}_x g(x_1)$. 在这种情形下，对于任何 $\varepsilon>0$,

$$\tau_\varepsilon=\inf\{n\geqslant 0:\ s(x_n)\leqslant g(x_n)+\varepsilon\}$$

是 ε 最优停时，成本 $s(x)$ 满足 Wald-Bellman 方程

$$s(x)=\max\{g(x),\ Ts(x)\}$$

可由下式得到:

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}Q^n g(x),$$

其中

$$Q\,g(x)=\max\{g(x),Tg(x)\}.$$

在集合 E 有限的情形下，时刻

$$\tau_0=\inf\{n\geqslant 0:\ s(x_n)=g(x_n)\}$$

是最优的. 在一般情形下，如果 $\mathrm{P}_X\{\tau_0<\infty\}=1,(x\in E)$, 则时刻 τ_0 是最优的.

设

$$C=\{X:\ s(x)>g(x)\},\ \Gamma=\{x:\ s(x)=g(x)\}.$$

根据定义

$$\tau_0=\inf\{n\geqslant 0:\ x_n\in\Gamma\}.$$

换句话说，在首次落入 Γ 时应停止观测. 因此，集合 C 称为继续观测集，Γ 称为停止观测集.

区分两个简单假设的问题可以说明上述结果. 正是在这一问题上 Wald 说明了序贯方法比传统方法的优越性. 假设参数 θ 以先验概率 π 和 $1-\pi$ 相应取 1 和 0 为值，且最终决定的集合 D 也由两个点构成: $d=1$(接受假设 $H_1:\theta=1$) 和 $d=0$(接受假设 $H_0:\theta=0$). 假如将函数 $W_1(\theta,d)$ 选为

$$W_1(\theta,d)=\begin{cases}a,\ 若\ \theta=1,\ d=0,\\ b,\ 若\ \theta=0,\ d=1,\\ 0,\ 其他;\end{cases}$$

设

$$W(\tau,\theta,d)=c\tau+W_1(\theta,d),$$

则得 $R^\delta(\pi)$ 的表达式

$$R^\delta(\pi)=c\mathrm{E}_\pi\tau+a\alpha_\pi(\delta)+b\beta_\pi(\delta),$$

其中

$$\alpha_\pi(\delta)=\mathrm{P}_\pi\{d=0|\theta=1\},\ \beta_\pi(\delta)=\mathrm{P}_\pi\{d=1|\theta=0\}$$

是第一类和第二类错误概率，而 P_π 是观测空间中对应于先验分布 π 的概率分布. 如果 $\pi_n=\mathrm{P}\{\theta=1|\mathscr{F}_n\}$ 是假设 $H_1:\theta=1$ 关于 σ 代数 $\mathscr{F}_n=\sigma\{\omega:\xi_1,\cdots,\xi_n\}$ 的后验概率，则

$$R^\delta(\pi)=\mathrm{E}_\pi[c\tau+g(\pi_\tau)],$$

其中

$$g(\pi)=\min\{a\pi,\ b(1-\pi)\}.$$

将最优停止理论的一般理论用于 $x_n=(n,\pi_n)$, 可见函数 $\rho(\pi)=\inf_\tau R^\delta(\pi)$ 满足方程

$$\rho(\pi)=\min\{g(\pi),\ c+T\rho(\pi)\}.$$

因此，由函数 $\rho(\pi)$, $g(\pi)$, $T\rho(\pi)$ 的凸性，可见: 可以找到两个数 $0\leqslant A<B\leqslant 1$, 使继续观测域 $C=\{\pi:A<\pi<B\}$, 而停止观测域 $\Gamma=[0,1]\setminus(A,B)$. 这时，停止时刻

$$\tau_0=\inf\{n\geqslant 0:\pi_n\in\Gamma\}$$

是最优的 ($\pi_0=\pi$).

设 $p_0(x)$ 和 $p_1(x)$ 是分布 $F_0(x)$ 和 $F_1(x)$ (关于 $d\mu=[dF_0+dF_1]/2$) 的密度，而

$$\varphi=\frac{p_1(\xi_1)\cdots p_1(\xi_n)}{p_0(\xi_1)\cdots p_0(\xi_n)}$$

是似然比，继续观测域 (见图 1) 可以表示为

$$C\left\{\varphi:\ \frac{A}{1-A}\ \ \frac{1-\pi}{\pi}\ <\varphi<\ \frac{B}{1-B}\ \ \frac{1-\pi}{\pi}\right\},$$

而 $\tau_0=\inf\{n\geqslant 0:\ \varphi_n\notin C\}$.

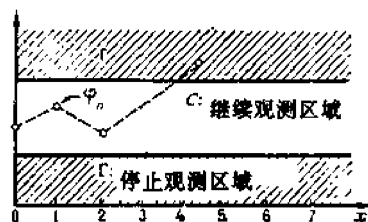


图 1

在这种情形下，若 $\varphi_{\tau_0}\geqslant[B/(1-B)][(1-\pi)/\pi]$, 则作出决定 $d=1$, 即接受假设 $H_1:\theta=1$. 如果 $\varphi_{\tau_0}\leqslant[A/(1-A)][(1-\pi)/\pi]$, 则接受假设 $H_0:\theta=0$.

对于在条件极值情形下的区分两个假设问题，这一最优停止规则的结构仍保持不变. 现将问题表述如下. 对于每个决策规则 $\delta=(\tau,d)$, 给出错误概率 $\alpha(\delta)=\mathrm{P}_1\{d=0\}$ 和 $\beta(\delta)=\mathrm{P}_0\{d=1\}$, 即给出两个固定的数 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$; 其次，设 $\Delta(\alpha,\beta)$ 是所有满足 $\alpha(\delta)\leqslant\alpha$, $\beta(\delta)\leqslant\beta$ 和 $\mathrm{E}_0\tau<\infty$, $\mathrm{E}_1\tau<\infty$ 的决策规则的全体. 下面的奠基性结果是 A. Wald 得到的. 对于 $\alpha+\beta<1$, 如果在基于似然比 φ_n 和形如

$$\tau=\inf\{n\geqslant 0:\varphi_n\notin(a,b)\},$$

$$d=\begin{cases}1,\ 若\ \varphi_\tau\geqslant b,\\ 0,\ 若\ \varphi_\tau\leqslant a,\end{cases}$$

的所有规则 $\delta=(\tau,d)$ 中，存在 $a=a^*$ 和 $b=b^*$，使第一类和第二类错误概率恰好等于 α 和 β，则 $a=a^*$ 和 $b=b^*$ 的决策规则 $\delta^*=(\tau^*,d^*)$ 在类 $\Delta(\alpha,\beta)$ 中是最优的，即对于任意 $\delta\in\Delta(\alpha,\beta)$，有

$$\mathsf{E}_0\tau^*\leqslant\mathsf{E}_0\tau,\ \mathsf{E}_1\tau^*\leqslant\mathsf{E}_1\tau.$$

序贯决策规则 $\delta^*=(\tau^*,d^*)$ 比传统方法的优越性，可以较简明地用区分两个假设 $H_0:\theta=0$ 和 $H_1:\theta=1$ 的例子来说明，其中 θ 是具有单位扩散的 Wiener 过程 ξ_t 的局部均值．第一类和第二类错误概率相应不超过给定 α 和 β 的最优序贯决策规则 $\delta^*=(\tau^*,d^*)$，可以描述如下：

$$\tau^*=\inf\{t\geqslant 0:\lambda_t\notin(a^*,b^*)\},$$

$$d^*=\begin{cases}1, & 若\ \lambda_{\tau^*}\geqslant b^*,\\ 0, & 若\ \lambda_{\tau^*}\leqslant a^*,\end{cases}$$

其中 $\lambda_t=\ln\varphi_t$，$\varphi_t=\exp\{\xi_t-t/2\}$ 是似然比（对应于 $\theta=1$ 的测度关于对应于 $\theta=0$ 的测度的密度），而 $b^*=\ln[(1-\alpha)/\beta]$，$a^*=\ln[\alpha/(1-\beta)]$（见图 2）.

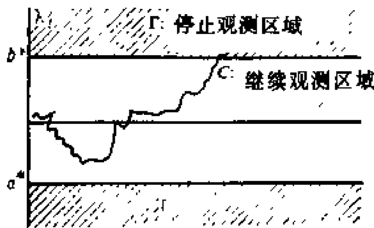


图 2

最优经典规则 $\widetilde{\delta}=(\widetilde{\tau},\widetilde{d})$（根据 Neyman-Pearson 引理）可以描述为：

$$\widetilde{t}=t(\alpha,\beta),$$

$$\widetilde{d}=\begin{cases}1, & 若\ \lambda_{\widetilde{t}}\geqslant h(\alpha,\beta),\\ 0, & 若\ \lambda_{\widetilde{t}}<h(\alpha,\beta),\end{cases}$$

其中

$$t(\alpha,\beta)=(c_\alpha+c_\beta)^2,$$

$$h(\alpha,\beta)=\frac{c_\beta^2-c_\alpha^2}{2},$$

c_γ 是如下方程的解

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_c^\infty e^{-x^2/2}dx=\gamma.$$

由于 $\mathsf{E}_0\tau^*=2\omega(\alpha,\beta)$，$\mathsf{E}_1\tau^*=2\omega(\beta,\alpha)$，其中

$$\omega(x,y)=(1-x)\ln\frac{1-x}{y}+x\ln\frac{x}{1-y},$$

可见

$$\frac{\mathsf{E}_0\tau^*}{t(\alpha,\beta)}=2\frac{\omega(\beta,\alpha)}{(c_\alpha+c_\beta)^2},$$

$$\frac{\mathsf{E}_1\tau^*}{t(\alpha,\beta)}=2\frac{\omega(\alpha,\beta)}{(c_\alpha+c_\beta)^2}.$$

数值计算表明，当 $\alpha,\beta\leqslant 0.03$ 时，有

$$\frac{\mathsf{E}_0\tau^*}{t(\alpha,\beta)}\leqslant\frac{17}{30},\quad\frac{\mathsf{E}_1\tau^*}{t(\alpha,\beta)}\leqslant\frac{17}{30}.$$

换句话说，在两类错误概率值满足 $\alpha,\beta\leqslant 0.03$ 的情形下，最优序贯区分方法比固定观测次数的最优方法，大约少用一半的观测次数．此外，如果 $\alpha=\beta$，则

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathsf{E}_0\tau^*}{t(\alpha,\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathsf{E}_1\tau^*}{t(\alpha,\alpha)}=\frac{1}{4}.$$

参考文献

[1] Wald, A., Sequential analysis, Wiley, 1947.

[2] Ширяев, А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976（英译本：Shiryaev, A. N., Statistical sequential analysis, Amer. Math. Soc., 1973）.

[3] Shiryaev, A. N., Optimal stopping rules, Springer, 1978（译自俄文）.

A. Н. Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Siegmund, D., Sequential analysis, Springer, 1985.

[A2] Lerche, R., Boundary crossing of Brownian motion: its relation to the law of the iterated logarithm and to sequential analysis, Springer, 1986.

周概容　王健 译

序列逼近法 [sequential approximation, method of; последовательных приближений метод]，逐次逼近法（method of successive approximation），累次代换法（method of repeated substitution），简单迭代法（method of simple iteration）

逼近方程解的一般方法之一．在许多情况，由这种方法所构造的逼近具有好的收敛性，使得可以在实际计算中应用．

令 E 是某个集合，A 是这个集合上将它映射到自身的一个算子（不一定是线性的）．假定要求这个映射的一个不动点，即方程

$$x=A(x),\ x\in E \tag{1}$$

的一个解．令 x^* 是 (1) 的一个解，而且 $x_0\in E$ 是由某个方法给出的它的首次逼近．那么下式给出逐次逼近法的所有其他逼近

$$x_{n+1}=Ax_n,\ n=0,1,\cdots. \tag{2}$$

这个过程称作简单单步迭代（simple one-step iteration）.

为了研究序列(2)的收敛性和证明(1)的解的存在,将广泛地应用下列形式的**压缩映射原理**(contracting-mapping principle).

令 E 为具有度量 ρ 的一个完全度量空间;算子 A 定义在具有半径 δ 和以点 x_0 为中心的一个闭球 S 上:

$$S=\{x\in E:\rho(x,x_0)\leqslant\delta\};$$

且对 S 的任意元素 x 和 y,下面的关系式成立:

$$\rho(Ax,Ay)\leqslant\alpha\rho(x,y),\ 0<\alpha=\text{常数}<1;$$

令对初始逼近 x_0,不等式 $\rho(Ax_0,x_0)\leqslant m$ 成立.而且对数 α,δ,m,条件 $m/(1-\alpha)\leqslant\delta$ 成立,则

1)对任意 n 可由公式(2)计算逐次逼近 x_n,而且它们全都属于 S;2)序列 x_n 收敛于某点 $x_*\in S$;3)极限点 x_* 是(1)的一个解;4)对逼近 x_n 与解 x_* 的距离,下面的不等式成立:

$$\rho(x_n,x_*)\leqslant\frac{m}{1-\alpha}\alpha^n.$$

而且,对 E 中任意子集上的任意两点 x,y,不等式 $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$ 成立,(1)只能有一个解.

令 $E=\mathbf{R}^n$ 是 n 维实向量空间,而且(1)中的算子 A 形式为 $Ax=Bx+b$,其中 $B=\|a_{ik}\|$ 是一个阶为 n 的方阵;给定 $b=(b_1,\cdots,b_n)$,而 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的未知向量.如果在这个空间中,度量由下式定义:

$$\rho(x,y)=\max_i|x_i-y_i|,$$

而且,如果对所有 $i,i=1,\cdots,n,B$ 的列元素满足条件

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|<1,$$

则由压缩映射原理推出代数方程组 $x=Ax$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中有唯一解,且可以由任一初始逼近 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 开始,用逐次逼近法得到该解.

如果在 $\mathbf{R}^n$ 中,给定 Euclid 度量

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2},$$

则得到逐次逼近的另一个收敛条件

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2<1.$$

令(1)是一个积分方程

$$Ax(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds,$$

其中给定的函数 f,K 分别在集合 $[a,b]$ 和 $[a,b]\times[a,b]$ 上平方可积,而 λ 是一个数值参数.可由压缩映射原理推出,如果

$$|\lambda|<\left[\int_a^b\int_a^b K^2(s,t)dtds\right]^{-1/2},$$

则研究的积分方程在空间 $L_2([a,b])$ 上有唯一解,这个解可以用逐次逼近法得到.

参考文献

[1] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.-Л., 1963 (中译本:Д. К. 法捷耶夫, В. Н. 法捷耶娃,线代数计算方法,上海科学技术出版社,1965).

[2] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы, т. 1-2, М., 1976-1977.

[3] Collatz, L., Funktionalanalysis und numerische mathematik, Springer, 1964.

Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 压缩映射原理对非线性方程是特别重要的,见[A1],[A2].

参考文献

[A1] Coddington, E. A. and Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[A2] Cronin, J., Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, Amer. Math. Soc., 1964.

袁国兴 张宝琳 译

序列空间 [sequential space; секвенциальное пространство]

一**拓扑空间**(topological space)X,使得若 $A\subset X$ 且 $A\neq[A]$(即集合 A 是非闭的),则存在 A 的点序列 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 收敛于 $[A]\setminus A$ 的点.若 $x\in[A]\subset X$ 总蕴含:存在 A 的点的序列 x_k 收敛于 x,则 X 称为 Fréchet-Урысон 空间(Fréchet-Urysohn space).

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 序列空间构成所有拓扑空间的范畴的余自反子范畴(见**自反子范畴**(reflective subcategory));余自反射是把具有拓扑结构的任意空间用下列方式再拓扑化而得到的:一个子集是闭集的充要条件是,它在序列的极限(按通常的拓扑)下是闭的.满足**第一可数公理**(first axiom of countability)的空间总是序列空间(实际上,是 Fréchet-Урысон 空间),而序列空间构成包含所有第一可数空间的最小余自反子范畴.因此,以往对第一可数空间证明的许多拓扑结论,都可以很容易地推广到序列空间.

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

白苏华 胡师度 译

序列紧空间 [sequentially-compact space; секвенциально компактное пространство]

一个拓扑空间,它的所有无限点序列都包含有一

个收敛的子序列(Bolzano-Weierstrass 条件(Bolzano-Weierstrass condition)). 在 T_1 空间类中, 序列紧空间是列紧的(见列紧性(compactness, countable)). 而且, 如果此空间满足第一可数公理(first axiom of countability)(亦见基(base)), 则其列紧性意味着它是序列紧的. 序列紧空间不必是紧空间; 例如, 小于第一个不可数序数的所有序数的集合, 赋予的拓扑是"其基是所有开区间的集合".

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 有些作者认为, Bolzano-Weierstrass 条件是指每个无限集都有一个聚点(accumulation point), 在 T_1 空间类中这等价于列紧性.

可数多个序列紧空间的乘积是序列紧的.

参考文献

[A1] Dugundji, J., Topology, Allyn & Bacon, 1966.

[A2] Kelley, J. L., General topology, v. Nostrand, 1955 (中译本: J. L. 凯莱, 一般拓扑学, 科学出版社, 1982).

白苏华 胡师度 译

序列相关系数 [serial correlation coefficient; сериальный коэффициент корреляции]

用作时间序列(time series)自相关(auto-correlation)(自相关函数)估计量的统计量. 设 $x_1, \cdots, x_N$ 是时间序列, 其 k 阶序列相关系数是由下式定义的统计量 r_k:

$$r_k = \frac{\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}(\xi_{i,k}\xi_{i+k,k})}{\left[\frac{1}{N-k}\left\{\sum_{i=1}^{N-k}\xi_{i,k}^2\right\}\frac{1}{N-k}\left\{\sum_{i=1}^{N-k}\xi_{i+k,k}^2\right\}\right]}, \quad (*)$$

其中

$$\xi_{i,k} = x_i - \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} x_i.$$

作为序列相关系数还使用与(*)相近的较简单形式的统计量. 序列相关系数的全体称为相关图(correlogram); 相关图这一术语也用来表示 r_k(作为 k 的函数)的图形.

在关于 x_i 的分布的各种假设下, 序列相关系数的分布及其矩有精确和近似表达式. 在统计问题中, 序列相关系数用于表现时间序列中项之间的相依性.

与术语"序列相关系数"同时还使用术语"样本自相关"(sample auto-correlation).

参考文献

[1] Anderson, T. M., The statistical analysis of time series, Wiley, 1971.

[2] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 3, Design and analysis, and time series, Griffin, 1966.

[3] Hannan, E. J., Time series analysis, Methuen, London, 1960.

В. Г. Ушаков 撰 周概容 译

序列概形 [serial scheme; серий схема]

同级数序列(sequence of series).

列子群 [serial subgroup; серий подгруппа]

【补注】 令 H 是群 G 的子群. H 和 G 之间的子群列(series of subgroups), 或更简短地, H 和 G 间的列是 G 的子群集合

$$S = \{A_\sigma, B_\sigma: \sigma \in \Sigma\},$$

其中 Σ 是全序集, 满足

i) $H \subset A_\sigma$, $H \subset B_\sigma$, 对所有 $\sigma \in \Sigma$;

ii) $G \setminus H = \bigcup_\sigma (B_\sigma \setminus A_\sigma)$;

iii) A_σ 是 B_σ 的正规子群;

iv) 若 $\tau < \sigma$, 则 B_τ 是 A_σ 的子群.

于是对所有 $\tau < \sigma$,

$$A_\tau \lhd B_\tau \subset A_\sigma \lhd B_\sigma$$

及

$$B_\sigma = \bigcap_{\tau > \sigma} A_\tau, \quad A_\sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} B_\tau,$$

因此对由 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 标号的有限列, 就有

$$B_i = A_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

子群 H 称为列子群(serial subgroup), 如果在 H 和 G 之间有子群列. 若 G 为有限群, H 为列子群, 当且仅当它是次正规子群(subnormal subgroup). 子群 H 称为 G 的升子群(ascendant subgroup), 如果在 H 和 G 之间有子群的升列(ascending series of subgroups), 即该列的指标集 Σ 是良序集.

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., Finiteness conditions and generalized soluble groups, Springer, 1972, Part 1, Chapt. 1.

石生明 译 王 杰 校

级数 [series; ряд], 无穷和(infinite sum)

某一线性拓扑空间(linear topological space)中的元素(称为给定级数的项(terms of the given series))的序列, 以及在其中定义了极限(limit)概念的部分和(称为级数的部分和(partial sums of the series))的确定的无穷集合. 下面是级数的最简单的一些例子.

简单数项级数. 一对复数序列 $\{a_n\}$ 与 $\{s_n\}$, 使得

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad (1)$$

称为(简单)数项级数((simple) series of numbers), 并记作

$$a_1 + \cdots + a_n + \cdots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

或

$$\sum a_n. \qquad (2)$$

序列 $\{a_n\}$ 的元素称为级数的项（terms of the series），$\{s_n\}$ 的元素称为级数的部分和（partial sums），更准确地说，a_n 称为级数（2）的第 n 项；s_n 称为它的 n 阶部分和．级数（2）由两个序列 $\{a_n\}$ 与 $\{s_n\}$ 的每一个唯一确定：序列 $\{s_n\}$ 的项是序列 $\{a_n\}$ 的项由公式（1）得到的，同时序列 $\{a_n\}$ 可以对 $\{s_n\}$ 用下述公式找回来：

$$a_1 = s_1,\ a_{n+1} = s_{n+1} - s_n,\ n = 1, 2, \cdots.$$

基于这种观点，研究级数等价于研究序列：关于级数的任何断言都可以转化成关于序列的等价断言．

级数（2）称为收敛的（convergent），如果它的部分和序列 $\{s_n\}$ 有一个有限极限

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

这个数称为级数（2）的和（sum of the series）并记为

$$s = \sum a_n.$$

于是，记号（2）既用于表示级数本身，又表示它的和．若级数（2）的部分和序列没有有限极限，则级数称为发散的（divergent）（亦见**发散级数**（divergent series））．

一个收敛级数的例子是 $|q| < 1$ 时无穷等比数列各项的和

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n. \qquad (3)$$

这时它的和等于 $q/(1-q)$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q/(1-q)$．若 $|q| \geqslant 1$，(3) 是发散级数的例子．

若级数（2）收敛，则其项的序列趋于零：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

这个断言之逆不真：**调和级数**（harmonic series）

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的项的序列 $\{1/n\}$ 虽然趋于零，但级数发散．

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ 称为级数（2）的 n 阶余项（remainder）．若级数收敛，则其每个余项都收敛．若级数的某余项收敛，则级数本身收敛．若级数（2）的 n 阶余项收敛，且其和为 r_n，即 $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$，则

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_n + r_n.$$

若级数（2）与级数

$$\sum b_n \qquad (4)$$

都收敛，则级数

$$\sum (a_n + b_n)$$

也收敛；这个级数就称为级数（2）与（4）的和（sum）；进而，这个和等于那两个级数的和．

若级数（2）收敛，λ 是复数，则级数 $\sum \lambda a_n$（称之为级数（2）与数 λ 的积（product））也收敛，且 $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$．

级数收敛的条件（不使用它的和的概念）是关于级数收敛性的 **Cauchy 判别法**（Cauchy criterion）．

若级数（2）的所有项都是实数，$a_n \in \mathbf{R}$，则级数（2）称为实级数．在级数论中，具有非负项的实级数扮演了一个重要角色：

$$\sum a_n,\ a_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, \cdots. \qquad (5)$$

级数（5）收敛的充要条件是其部分和序列上有界．若这个级数发散，则其部分和趋于无穷：

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty;$$

因此可将它记为

$$\sum a_n = +\infty.$$

对于非负项级数，存在一些收敛准则．下述准则是最基本的一种．

比较检验法（comparison test）．若对级数（5）及非负项级数

$$\sum b_n,\ b_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, \cdots, \qquad (6)$$

存在常数 $c > 0$，使得 $0 \leqslant a_n \leqslant c b_n$，则级数（6）收敛蕴涵级数（5）收敛，（5）发散蕴涵（6）发散．

当用比较检验法研究给定的非负项级数的收敛性时，只考虑 $n \to \infty$ 时其第 n 项的主要部分与 $1/n$ 的关系，以 a/n^2（a 为某常数）的形式，往往是合理的，于是取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha \in \mathbf{R} \qquad (7)$$

作为比较级数．这个级数当 $\alpha > 1$ 时收敛，$\alpha \leqslant 1$ 时发散．

当取级数（7）作为一种比较级数时，由比较检验法得到下面的法则：若

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = b,$$

则当 $\alpha > 1$ 且 $0 \leqslant b < +\infty$ 时级数（5）收敛，当 $\alpha \leqslant 1$ 且 $0 < b \leqslant +\infty$ 时级数 (5) 发散．

比较检验法还蕴涵正项级数收敛性的 **d'Alembert 准则（关于级数收敛性的）**（d'Alembert criterion (convergence of series)）和 **Cauchy 判别法**（Cauchy criterion）．对于这种级数，还有 Bertrand，Gauss，Ермаков，Kummer 及 Raabe 准则（见 **Bertrand 准则**（Ber-

trand criterion); **Gauss 准则** (Gauss criterion); **Ермаков 收敛性准则** (Ermakov convergence criterion); **Kummer 准则** (Kummer criterion); 及 **Raabe 准则** (Raabe criterion)).

收敛性的积分检验法 (integral test for convergence) 给出了由递减序列: $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$ ($n=1, 2, \cdots$) 组成的非负项级数 (5) 收敛的充分条件. 将级数 (5) 看成为对 $x \geqslant 1$ 有定义且递减的函数 f, 它在整数时的值与给定级数的项一致: $f(n)=a_n$ ($n=1, 2, \cdots$). 那么, 当 s_n 是 (5) 的部分和, r_n 是 (5) 的余项时, 有如下不等式:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant r_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(x)dx$$

且

$$s_n = \int_1^{n+1} f(x)dx + c + \varepsilon_n, n = 1, 2, \cdots.$$

其中 c 为某常数且 $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$.

因此, 级数 (5) 收敛, 当且仅当积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

若级数 (5) 发散, 则按同样方法, 其部分和 s_n 与积分 $\int_1^{n+1} f(x)dx$ 一样的递增, 即 s_n 概略等于带相应指标的积分:

$$s_n \sim \int_1^{n+1} f(x)dx, n \to +\infty.$$

对所有项组成一个递减序列的级数 (5), 有下述 Cauchy 并项定理 (Cauchy condensation theorem): 若 (5) 的项递减, 则它与级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

同时收敛或发散.

项为递减序列的级数 (5) 收敛的必要条件是

$$a_n = o\left[\frac{1}{n}\right], n \to \infty. \tag{8}$$

作为发散级数的例子

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

表明, 条件 (8) 对项为递减序列的级数 (5) 的收敛是不充分的.

一类重要的数项级数是**绝对收敛级数** (absolutely convergent series), 即级数 $\sum |a_n|$ 收敛时的级数 (2). 若级数绝对收敛, 则它收敛, 且其和与写出的相加次序无关. 收敛而不绝对收敛的级数称为条件收敛 (conditionally convergent). 条件收敛级数的例子是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

条件收敛级数的和依赖于各项所写的次序 (见关于级数项的重排的 **Riemann 定理** (Riemann theorem)): 设 α、β 属于包括无穷大 $+\infty$ 与 $-\infty$ 的实数集, $\alpha \leqslant \beta$, 可以通过重新排列以实数为项的任何条件收敛级数的项, 使所得级数的部分和 s_n 有如下等式:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} s_n = \alpha, \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} s_n = \beta.$$

因此, 对条件收敛级数, 加法交换律不成立. 加法结合律也不能对所有级数成立: 若级数发散, 则由各项经顺序组合所得的级数可能收敛; 然而, 它的和依赖于原来级数项的分组方法. 例如, 级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

发散, 但将其项两两组合所得的级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 及 $1-(1-1)-(1-1)-\cdots$ 都收敛, 且有不同的和. 但是, 如果级数收敛, 那么将其各项顺序组合所得的任何级数当然都收敛, 且其和就是给定级数的和, 因为新级数的部分和序列是原来级数部分和序列的子列.

在各项有不同符号的级数中, 常常单独提到交错级数, 对其收敛性有 **Leibniz 准则** (Leibniz criterion). 关于任意数项级数收敛性的不同判别准则, 可由两两乘积之和的 **Abel 变换** (Abel transformation) 得到, 例如, **Abel 准则** (Abel criterion); **Dedekind 准则 (关于级数收敛性的)** (Dedekind criterion (convergence of series)); **Dirichlet 准则 (关于级数收敛性的)** (Dirichlet criterion (convergence of series)); 及 **du Bois-Reymond 准则 (关于级数收敛性的)** (du Bois-Reymond criterion (convergence of series)).

级数的乘法 (multiplication of series). 级数乘法有不同的法则. 人们最熟悉的是 Cauchy 法则, 两个级数 (2) 与 (4) 相乘对应着有限"对角"中最初两两乘积 $a_m b_n$ 之和, 即指标的和 $m+n$ 有相同值的乘积:

$$c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n. \tag{9}$$

以这种和为项所得的级数 $\sum c_p$ 称为两个给定级数的 Cauchy 积 (Cauchy product). 级数乘法的这种法则是从下面幂级数乘法公式中得到启发的:

$$\sum a_m x^m \sum b_n x^n = \sum c_p x^p.$$

设级数 (2), (4) 和 (9) 都收敛, 且设

$$\sum a_m = a, \sum b_n = b, \sum c_p = c.$$

若级数 (2), (4) 绝对收敛, 则级数 (9) 也绝对收敛, 且 $ab=c$. 若级数 (2) 绝对收敛, 级数 (4) 收敛, 则 (9) 收敛且 $ab=c$ (Mertens 定理

(Mertens theorem)). 若级数 (2), (4) 条件收敛, 则 (9) 可能发散; 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

条件收敛, 级数

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}$$

发散 (它的项不趋于零). 若所有三个级数 (2), (4) 和 (9) 都收敛, 则 $ab=c$ (Abel 积定理 (Abel product theorem)).

级数另一种乘法法则的例子是这样的: 先作两两乘积 $a_m b_n$ 之和, 其中指标的积 mn 有定值:

$$c_p = \sum_{mn=p} a_m b_n,$$

则级数 (2) 与 (4) 之积定义为级数 $\sum c_p$. 这种乘法法则是从下面 **Dirichlet 级数** (Dirichlet series) 的乘法公式得到启发的:

$$\sum \frac{a_m}{m^x} \sum \frac{b_n}{n^x} = \sum \frac{c_p}{p^x}.$$

还有以所有整数 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots$ 记数的项 a_n 所成的级数. 它们记为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n. \tag{10}$$

级数 (10) 称为收敛的 (convergent), 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$$

都收敛, 且这两个级数和的和称为 (10) 的和.

结构更加复杂的数项级数是**多重级数** (multiple series), 它的项 $a_{n_1 \cdots n_m}$ 有多重指标, 其中 n_k 为正整数, $k=1, \cdots, m$; $m=2, 3, \cdots$. 在多重级数的理论中, 研究过不同类型的部分和: 三角形的

$$s_n = \sum_{k_1+\cdots+k_m \leq n} a_{k_1 \cdots k_m},$$

矩形的

$$s_{n_1 \cdots n_m} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} a_{k_1 \cdots k_m},$$

球形的

$$s_r = \sum_{k_1^2+\cdots+k_m^2 \leq r^2} a_{k_1 \cdots k_m}, \ r>0,$$

等等. 对应于所选取部分和的类型, 可以用它们相应极限定义多重级数和的概念. 这时, 若 $m=2$, 就称多重级数为**二重级数** (double series). 对于多重级数, 不象单重级数那样, 给定的部分和的集合并不决定级数的项, 也就是一般说来, 定义多重级数必须同时给出其项的多重序列及部分和的集合.

在数学分析中, 收敛级数与发散级数二者都有用. 对于后者, 各种各样的求和法已经解决.

许多重要的无理数常数可以由数项级数的和得出, 例如:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \ \pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

它与定积分的值相同, 尽管以它们为被积函数的原函数不能写成初等函数:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2},$$

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

函数级数 (series of functions). 一种 (简单) 函数级数 ((simple) series of functions)

$$\sum a_n(x), \ x \in X, \tag{11}$$

是定义在某集合 X 上数值函数组成的一对函数序列 $\{a_n\}$ 与 $\{s_n\}$, 使得

$$s_n(x) = a_1(x) + \cdots + a_n(x), \ n=1, 2, \cdots, x \in X.$$

作为数项级数看待, 序列 $\{a_n\}$ 的元素称为级数 (11) 的项 (terms), 序列 $\{s_n\}$ 的元素称为它的部分和 (partial sums). 级数 (11) 称为在集合 X 上收敛 (convergent on the set X), 如果对于每个固定的 $x_0 \in X$, 下面数项级数收敛:

$$\sum a_n(x_0).$$

例. 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \ z \in \mathbf{C},$$

在整个复平面 $\mathbf{C}$ 上收敛, 而级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \ z \in \mathbf{C},$$

仅在 $z=0$ 收敛.

连续函数 (比如在某区间上) 的收敛级数的和未必是连续函数; 例如, 级数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$$

在区间 $[0, 1]$ 收敛, 它的项在这个区间上连续, 但是它的和

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 若\ 0 \leq x < 1, \\ 1, & 若\ x = 1 \end{cases}$$

在点 $x=1$ 不连续．在一些条件下，连续函数有限和的连续性，可微函数有限和的可微性，可积函数有限和的可积性，能够搬到函数级数上来，条件是级数的一致收敛（见**一致收敛级数**（uniformly-convergent series））．

可测函数的级数（series of measurable functions）．设 X 是 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的 Lebesgue 可测子集，μ 为 Lebesgue 测度，级数

$$\sum a_k(x),\ x\in X\subset \mathbf{R}^n \tag{12}$$

的项 a_k 是 X 上可测、几乎处处有限的函数，在广义实直线（就是将 $+\infty$ 及 $-\infty$ 也看成实数）上取值．若级数（12）在 X 上几乎处处收敛，则其和 s 也是可测函数，且由 **Егоров 定理**（Egorov theorem），若 $\mu(X)<\infty$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在使 $\mu(X\setminus E)<\varepsilon$ 的紧集 $E\subset X$，且使以函数 a_k 在 E 上限制 $a_k|_E$ 为项的级数，在 E 上一致收敛，其和为 $s|_E$——和（12）在 E 上的限制．

设 $L_p(X)$ $(1\leqslant p\leqslant +\infty)$ 是函数 $f\colon X\to\mathbf{R}$ 的空间，对 $1\leqslant p<+\infty$，f 有范数

$$\|f\|_p=\left[\int_X |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

$p=\infty$ 时有范数

$$\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)|.$$

级数（12）称为在 $L_p(X)$ 中收敛（convergent），如果其部分和序列 $\{s_m\}$ 在 $L_p(X)$ 中收敛，且它的极限 s 称为该空间中（12）的和：

$$s=\sum a_k \text{ 在 } L_p(X) \text{ 中}.$$

若级数（12）在 $L_p(X)$ 中收敛，且 s 为其和，则存在其部分和序列的一个子列，在 X 上几乎处处收敛于 s．

级数的逐项可积性（term-by-term integration of series）．下述定理是一致收敛级数逐项可积性定理的扩张．

定理 1．若存在集合 X 上的可和函数 f，使得对所有 $m=1,2,\cdots$，及所有 $x\in X$，级数（12）的部分和 s_m 满足不等式

$$|s_m(x)|\leqslant f(x),$$

若级数（12）在 X 上几乎处处收敛且其和为 s，则

$$\int_X s(x)dx=\int_X[\sum a_k(x)]dx=\sum\int_X a_k(x)dx. \tag{13}$$

定理 2．若 $a_k\in L_p(X)$，$s\in L_p(X)$，$1<p<+\infty$，$\mu(X)<\infty$，级数（12）的部分和序列 $\{s_m\}$ 弱收敛于函数 s（即对任意函数 $b\in L_q(X)$，$1/p+1/q=1$，满足如下条件：

$$\lim_{m\to\infty}(s-s_m,b)\equiv$$

$$\equiv\lim_{m\to\infty}\int_X[s(x)-s_m(x)]b(x)dx=0),$$

则公式（13）成立．

当级数（12）的所有项在集合 X 中非负时，也可以进行逐项积分．对于这种级数，其部分和序列在每一点 $x\in X$ 递增，并且有被称为级数在该点和 s 的值的有限或无穷极限．

定理 3．若（12）的项非负，则公式（13）成立．

在定理 3 的假定下，公式（13）两边可能成为 $+\infty$．下述定理提供了它们有限性的充分条件．

定理 4．若（12）的项非负，且部分和 s_m 的积分一致有界：

$$\int_X s_m(x)dx\leqslant c,\ m=1,2,\cdots,$$

其中 c 为常数，则级数（12）的和 s 是可和函数．

级数的逐项可微性（term-by-term differentiation of series）．设 $\mathbf{R}^n$ 是点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$x_j\in\mathbf{R}$ 的 n 维 Euclid 空间，G 为 $\mathbf{R}^n$ 中开集，$f\colon G\to\mathbf{R}$．设 $D_{x_i}f$ 是函数 f 对 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 的广义导数．若 $a_k\in L_p(G)$，$Dx_{i_0}a_k\in L_p(G)$（i_0 固定），$1\leqslant p\leqslant+\infty$，且级数 $\sum a_k$ 与 $\sum Dx_{i_0}a_k$ 在 $L_p(G)$ 中收敛：$s=\sum a_k$，$\sigma=\sum Dx_{i_0}a_k$，则 s 在 G 中对 x_{i_0} 有广义导数，且 $Dx_{i_0}s=\sigma$，即在 $L_p(G)$ 中

$$Dx_{i_0}\sum a_k=\sum Dx_{i_0}a_k.$$

在函数级数中，特别重要的有**幂级数**（power series））**Fourier 级数**（Fourier series）；**Dirichlet 级数**（Dirichlet series）；一般地，一个级数由函数按某算子的特征函数展开得到．函数级数的一些性质，可以扩张到更一般级数，它的项是取值于线性赋范空间，或更一般地取值于线性拓扑空间的函数．也可扩张到多重函数级数，即具有多重指标的项的级数：

$$\sum a_{n_1\cdots n_m}(x).$$

函数级数理论提供了研究函数的方便且十分一般的方法，因为在一定意义上，相当广泛的一类函数可以表成为初等函数级数的和．例如，单值解析函数在其定义域某内点邻域中，是它的 **Taylor 级数**（Taylor series）的和；某区间上任意连续函数是该区间上以代数多项式为项的一致收敛级数的和；最后，对区间 $[-\pi,\pi]$ 上任意可测，几乎处处有限函数，存在一个三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

它的和与给定的函数几乎处处一样 (Д. Е. Меньшов, 1941).

函数的级数展开可用于数学的不同分支: 在分析中, 研究函数, 寻求含有未知函数的各种方程用级数形式给出的解, 例如, 不定系数法 (见**待定系数法** (undetermined coefficients, method of)), 在关于函数值近似计算的数值方法中, 等等.

历史的陈述. 古希腊科学家早就使用过无穷和的概念: 在他们的研究中, 可以求出正公比小于 1 的无穷等比级数项的和. 在 17 世纪, 级数作为一个独立的概念进入数学中. I. Newton 和 G. Leibniz 各自将级数用于解代数方程和微分方程. 级数的正式理论是在 18 和 19 世纪, 由 Jacob, Johann Bernoulli, B. Taylor, C. MacLaurin, L. Euler, J. d'Alembert, J. L. Lagrange 等人完善发展的. 这段时间里同时使用了收敛级数和发散级数, 尽管对使用它们运算时的合理性还不完全清楚. 严谨的级数理论, 直到 19 世纪, 才由 C. F. Gauss, B. Bolzano, A. L. Cauchy, P. G. L. Dirichlet, N. H. Abel, K. Weierstrass, B. Riemann 等人在极限概念的基础上建立起来.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (中译本: A. H. 柯尔莫果洛夫, C. B. 佛明, 函数论与泛函分析初步, 上, 下册, 高等教育出版社, 1992).

[2] Лузин, Н. Н., Теория функций действительного переменного, 2 изд., М., 1948.

[3] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975).

[4] Hardy, G. H., Divergent series, Clarendon, 1949.

[5] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[6] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971, 2 изд., ч. 2, М., 1980 (英译本: Il'in, V. A., Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1 − 2, Mir, 1982).

[7] Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа, т. 1 − 2, М., 1981.

[8] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1 − 2, М., 1975 (英译本: Nikol'skiĭ, S. M., A course of mathematical analysis, 1 − 2, Mir, 1977)

[9] Немыцкий, В., Слудская, М., Черкасов, А., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1 − 2, М.-Л., 1944.

Л. Д. Кудрявцев 撰

【补注】 亦见**求和法** (summation methods); **发散级数的求和** (summation of divergent series).

参考文献

[A1] Bromwich, T. J., An introduction to the theory of infinite series, Macmillan, 1949.

[A2] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

[A3] Bary, N. K. [N. K. Bari], A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964 (译自俄文).

[A4] Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1964 (英译本: Blackie, 1951).

[A5] Zygmund, A., Trigonometric series, 1 − 2, Cambridge Univ. Press, 1988.

罗嵩龄 译

表示系列 [series of representations; серии представлений]

一个局部紧群的 (连续, 不可约, 酉) 表示族 (更确切地说, 不可约表示的酉等价类的集合, 见**不可约表示** (irreducible representation); **紧群的表示** (representation of a compact group)) 具有与这个群的**正则表示** (regular representation) 有关的公共性质. 于是, 一个群的不可约酉表示族, 它的矩阵元素是在正则表示的矩阵元素的紧集上的一致极限, 形成所给群的主系列表示 (principal series representations); 剩下的不可约酉表示 (如果存在的话) 形成补系列表示 (complementary series representations); 正则表示的不可约直被加项的 (等价类的) 族形成离散系列表示 (discrete series representations). 对于可简约 Lie 群或 Chevalley 群来说, 表示的系列的概念对于这个群的表示的等价类集合的这样的子集也有意义, 这个子集中元素具有与这个群对其抛物子群的可简约商群的正则表示有关的某些性质. 一个可简约群由它的抛物子群的有限维表示所诱导的表示族形成关于这个抛物子群的表示空间的一部分; 这部分称为对应的表示的主 (主退化, 如果这个抛物子群不是一个 Borel 子群) 系列.

参考文献

[1] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978 (英译本: Kirillov, A. A., Elements of the theory of representations, Springer, 1976).

[2] Nguyen Hu'u Anh, Classification of connected unimodular Lie groups with discrete series, *Ann. Inst. Fourier*, **30** (1980), 1, 159 − 192.

[3] Cailliz, J., Les sous-groupes paraboliques de $SU(p, q)$ et $\mathrm{Sp}(n, R)$ et applications a l'étude des représentations. in J. Oberdörfer (ed.); Anal. Harmonique sur les Groupes de Lie (Sem. Nancy-Strassbourg, 1976 −

1978) Ⅱ. Lecture notes in Math., 739, Springer, 1979, 51 – 106. А. И. Штерн 撰 郝钢新 译

Serre 纤维化 [Serre fibration, Серра расслоение]

一个三元组 (X, p, Y)，其中 X 和 Y 是拓扑空间，$p: X \to Y$ 是连续映射，并具有如下性质（称为对多面体有**覆叠同伦**（covering homotopy）性质）．对任何有限多面体 K 及任何映射：

$$f: K\times[0,1]\to Y,\ F_0: K=K\times\{0\}\to X$$

若满足

$$f|_{(K\times\{0\})}=p\circ F_0,$$

则存在映射

$$F: K\times[0,1]\to X$$

使得 $F|_{(K\times\{0\})}=F_0$, $p\circ F=f$. 它是 J.-P. Serre 于 1951 年引进的，见 [1].

参考文献

[1] Serre, J. P., Homologie singulière des espaces fibrés, Applications, *Ann. of Math.*, 54 (1951), 425 – 505.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 Serre 纤维化也称为弱纤维化（weak fibration）．若定义中的同伦提升性质（homotopy lifting property）对任意空间（而不仅仅是多面体）都成立，$p: X \to Y$ 称为纤维化（fibration）或 Hurewicz 纤维空间（Hurewicz fibre space）．

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, Chapt. 2, §2; Chapt. 7, §2（中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）.

潘建中 译 沈信耀 校

Serre 子范畴 [Serre subcategory; Серра подкатегория]

Abel 范畴（Abelian category）$\mathfrak{A}$ 的一个局部小满子范畴（full subcategory）$\mathfrak{S}$，使得对于 $\mathfrak{A}$ 中的任意正合序列（exact sequence）

$$O\to A\to B\to C\to O,$$

$B\in\mathfrak{S}$ 当且仅当 $A\in\mathfrak{S}$ 且 $C\in\mathfrak{S}$．在这一概念中，范畴的局部小性（local smallness）是下述条件：任意对象的子对象的同构类代表元构成一个集合．Serre 子范畴可被刻画为定义于 $\mathfrak{A}$ 上的函子的核．

给定一个 Serre 子范畴，可以定义商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$，其对象是 $\mathfrak{A}$ 的对象，态射定义为

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{A}/\mathfrak{S}}(X,Y)=\varinjlim_{Y',X/X'\in\mathfrak{S}}\mathrm{Mor}_{\mathfrak{A}}(X',\ Y/Y').$$

商范畴 $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ 是 Abel 的．

一个 Serre 子范畴叫作局部化的（localizing），是指典范函子 $T: \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}/\mathfrak{S}$ 有一个称为截面函子（section functor）的右伴随 $S: \mathfrak{A}/\mathfrak{S}\to\mathfrak{A}$．若 $\mathfrak{A}$ 是一个有余积的 **Grothendieck 范畴**（Grothendieck category），则一个 Serre 子范畴是局部化的，当且仅当它在余积下封闭．这样就得到了对交换环上的模局部化的经典理论的推广．这个方法包含了分式环和结合环上模的挠理论（根）等许多结构．

Serre 子范畴的概念由 J.-P. Serre ([1]) 引出，称之为类（class）．运用这一概念 Serre 得到了 Hurewicz 的一个定理的很深入的推广（见**同伦群**（homotopy group））．

参考文献

[1] Serre, J.-P., Groupes d' homotopie et classes de groupes abéliens, *Ann. of Math.*, 58 (1953), 2, 258 – 294.
[2] Faith, C., Algebra: rings, modules and categories. Ⅰ, Springer, 1973.
[3] Popesco, N. and Gabriel, P., Caractérisations des catégories, abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258 (1964), 17, 4188 – 4190.

B. E. Говоров 撰

【补注】 Serre 子范畴也叫厚子范畴（thick subcategory）或稠子范畴（dense subcategory）．亦见**范畴中的局部化**（localization in categories）．

参考文献

[A1] Popescu, N., Abelian cateories with applications to rings and modules, Acad. Press, 1973.

张英伯 译

半双线性型 [sesquilinear form; полуторалинейная форма]，亦称半双线性形式

模（module）上（例如，向量空间上）两个变量的函数，它对于一个变量是线性的，对于另一个变量是半线性的．更详细地说，设 A 是一个有恒等元的结合交换环，并且有自同构 $a\to a^{\sigma}$，A 上单式模 E 上的半双线性形式是一个映射 $q: E\times E\to A, (x,y)\mapsto q(x,y)$，它当 y 固定时对于 x 是线性的，当 x 固定时对于 y 是半线性的（见**半线性映射**（semi-linear mapping））．类似地定义一个半双线性映射（sesquilinear mapping）$E\times F\to G$，其中 E, F, G 是 A 模．当 $a^{\sigma}=a\ (a\in A)$ 的情形，得到**双线性型**（bilinear form）或**双线性映射**（bilinear mapping）概念．当 V 是域 $\mathbf{C}$ 上向量空间且 $a^{\sigma}=\bar{a}$ 时，得到半双线性形式的另一个重要例子．**Hermite 型**（Hermitian form）（以及斜 Hermite 型）是半双线性形式的特殊情形．

半双线性形式也可以在非交换环 A 上的模上来考虑；此时应假定 σ 是一个反自同构（anti-automorphism），亦即

$$(ab)^{\sigma}=b^{\sigma}a^{\sigma},\ a,\ b\in A.$$

可以把双线性形式理论中的许多概念引进半双线性形式，例如，直交子模，左核和右核，非退化形式，在给定基底下形式的矩阵，形式的秩以及共轭同态等概念．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algèbre, Eléments de mathématiques, 2, Hermann, 1942 – 1959.

[2] Lang, S., Algebra, Addison - Wesley, 1984.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 设 D 是一个中心为 k 的可除环，V 是 D 上的右向量空间．令 σ 是 D 的反自同构（antiautomorphism），亦即 σ 是 D 的基础加法群的自同构，并且 $\sigma(xy)=\sigma(y)\sigma(x)$．$V$ 上的关于 σ 的半双线性形式（sesquilinear form）是双加法映射

$$f: V\times V\to D,$$

使得

$$f(vx, wy)=\sigma(x)f(v, w)y.$$

除非 $f=0$，反自同构 σ 显然由 f 唯一确定．

设 $\varepsilon\in k\setminus\{0\}$．一个 (σ, ε)-Hermite 型（(σ, ε)-Hermitian form）是 V 上的一个半双线性形式并且还满足

$$f(w, v)=\sigma(f(v, w))\varepsilon.$$

于是还必须有 $\varepsilon\sigma(\varepsilon)=1$ 及 $\sigma^2(x)=\varepsilon x\varepsilon^{-1}$，对所有 $x\in D$．对于复向量空间（其 $\sigma=$ 复共轭），Hermite、反 Hermite、对称、反对称或双线性的形式（或矩阵）等概念可作为 $(\sigma, 1)$-Hermite 形式，$(\sigma, -1)$-Hermite 形式，$(id, 1)$-Hermite 形式，及 $(id, -1)$-Hermite 形式的特殊情形而产生．

设给定子空间 $W\subset U$，则令 $W^{\perp}=\{v\in V: f(v, w)=0$ 对所有 $w\in W\}$．若 $W\subset W^{\perp}$，则称子空间 W 是全迷向的（totally isotropic）．半双线性形式的 Witt 指数（Witt index）乃是极大全迷向子空间的维数．

参考文献

[A1] Tits, J., Buildings and BN - pairs of spherical type, Springer, 1974, Chapt. 8.

[A2] Dieudonné, J., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1963（中译本：J. 狄多涅，典型群的几何学，科学出版社，1960）．

朱尧辰 译　戚鸣皋 校

集合 [set; множество]

具有共同特性的事物的聚合、全体、堆集．构成集合的事物称为集合的元素．“集合是由许多事物组成的，可以把它作为一个整体来看待”（G. Cantor）．这不是对集合概念的严格逻辑定义，而仅仅是一种解释（这是因为定义一个概念意味着给出一个类概念，使被定义的概念作为种概念包含在其中；遗憾的是，集合自身是数学和逻辑中的最广的概念）．在这种情形下，描述一个集合的方法既可以是列出集合的所有元素，也就是枚举它，也可以给出一个法则来判断一个给定的对象是否属于该集合（然而，第一种方法只有当描述的集合为有限时才是实际可接受的）．

对于“朴素”**集合论**（set theory）的富有意义的发展而言，这样一种解释是十分充分的，因为在数学理论中重要的只是定义一个集合中元素之间的关系（或集合自身之间的关系），而不是元素的本性．为了描述可能是另一个集合的元素的集合，为了避免所谓**悖论**（antinomy），人们引入了例如“类”的术语．因此，更形式的说，集合论处理称为类（class）的对象，对于类定义了隶属关系，而把一个集合自身定义为一个类，它是另一个类的元素．

近来**范畴**（category）理论（特别是，**通用集**（universal set）的概念）的统一作用已经变得越来越清楚．一个范畴的构造是建立在**公理集合论**（axiomatic set theory）的基础上的，而且容许人们考虑诸如所有的集合、群、拓扑空间等范畴的“非常大的”总体．

参考文献

[1] Учение о множествах Георга Кантора, СПБ, 1914（Новые идеи в математике, Сб. 6）．

[2] Шиханович, Ю. А., Введение в современную математику, М., 1965.

[3] Кондаков, Н. И., Логический словарь-справочник, 2 изд., М., 1975.

[4] Bourbaki, N., Elements of mathematics, Theory of sets, Addison - Wesley, 1968（译自法文）．

[5] Новиков, П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М. 1973（英译本：Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Acad. Press., 1964）．

[6] Cohn, P. M., Universal algebra, Reidel, 1981.

[7] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison - Wesley, 1967.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 见**底集**（universe）；**描述集合论**（descriptive set theory）．

参考文献

[A1] Grätzer, G., Universal algebra, Springer, 1979.

[A2] Halmos, P., Naive set theory, v. Nostrand - Reinhold, 1960.

[A3] Meschkowski, H., Hundert Jahre Mengenlehre, DTV, 1973.

[A4] Suppes, P., Axiomatic set theory, v. Nostrand, 1965.

[A5] Levy, A., Basic set theory, Springer, 1979.

[A6] Fraenkel, A. A., Abstract set theory, North - Holland, 1961.

[A7] Shoenfield, J. R., Axioms of set theory, in J. Bar-

wise (ed.): Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1978, 321 – 345.

[A8] Barwise, J., Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1978

[A9] Cantor, G., Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, Dover, reprint, 1955 (译自德文). 何 青 译 罗里波 校

集函数 [set function; функция множеств]

从集合 X 的某个子集族 Σ 到另一集合的映射 f，通常是指映入实数系 $\mathbf{R}$ 或复数系 $\mathbf{C}$. 重要的集函数类有加性集函数 (additive set functions)，它满足条件

$$f\left[\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right] = \sum_{i=1}^{n} f(M_i), \ M_i \in \Sigma. \qquad (*)$$

$$M_i \cap M_j = \emptyset, \ i \neq j,$$

还有 σ 加性集函数 (σ-additive set functions)，它使式 (*) 对可数无穷集族也成立 (以 ∞ 代 n). 如果 f 仅取非负值，$f(\emptyset)=0$ 且 Σ 是一个 σ 代数，那么 f 称为一个测度 (measure).

参考文献

[1] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (中译本: 康托洛维奇, 泛函分析, 高等教育出版社, 1982). В. Н. Соболев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

周民强 译

$F_\sigma(G_\delta)$ 型集 [set of type $F_\sigma(G_\delta)$; множество типа $F_\sigma(G_\delta)$], F_σ 集，G_δ 集

可数多个闭 (开) 集的并 (交). 见 **Borel 集** (Borel set).

赵希顺 译

集合论 [set theory; множеств теория] (朴素的)

一个数学分支，研究集合 (set)，主要是无穷集合的性质，而忽略这些集合中元素的性质. 集合的概念是原始的数学概念之一，它只能通过例子来解释. 这样，可以说某一时刻生活在我们行星上的人组成的集合，某一几何图形上的点组成的集合，以及某一微分方程的解组成的集合. 该时刻生活在该行星上的一个人，该几何图形上的一个点，该微分方程的一个解分别是这些集合的元素. 一集合 A 被认为已经确定，如果其中元素的特征性质已被确定，所谓特征性质，即是该集合的所有元素且只有这些元素所具有的性质. 集合论中的一个重要概念就是元素的属于关系. 用 $a\in A$ 表示对象 a 属于集合 A (如果 a 不属于 A，则记作 $a \bar{\in} A$ 或 $a \notin A$). (也可能没有对象满足定义 A 的特征性质；这时 A 是空集，记作 $A=\emptyset$. 例如，方程 $x^2=-1$ 的实根组成的集合是空集.) 如果集合 A 中的每一元素同时也是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集 (subset)，记作 $A \subset B$. 如果同时有 $A \subset B$ 和 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等 (equal)，记作 $A=B$. 两个集合 A 和 B 的并 (union) $A \cup B$ 是由所有至少属于 A 或 B 之一的元素组成的集合. A 和 B 的交 (intersection) $A \cap B$ 是由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合. 并运算和交运算满足交换律、结合律并且相互是可分配的. 例如 $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$. 通常只考虑包含在某一固定集合 X 中的集合. 如果 A 是 X 的子集，P 是刻画 A 中元素的性质，则写作 $A=\{x\in X: P(x) \text{ 为真}\}$. 例如，如果 X 是全体实数的集合，而 A 是正实数组成的子集，则 $A=\{x\in X: x>0\}$. 如果 $A\subset X$，则集合 $X\backslash A=\{x\in X: x\notin A\}$ 称作 A (在 X 中) 的补 (complement). 并运算和交运算通过所谓的 de Morgan 律 (de Morgan law) 联系起来. 例如，$X\backslash(A\cap B)=(X\backslash A)\cup(X\backslash B)$. 研究集合 (不仅有限集，而且无穷集) 运算的集合论分支称作集代数 (set algebra). 而集代数又是 **Boole 代数** (Boolean algebra) 理论的一种特殊情形.

集合论由 19 世纪数学家的工作所创立，这些数学家的目的就是修改数学分析的基础. 这一领域的第一篇文章 (B. Bolzano, P. du Bois-Reymond, R. Dedekind) 是研究数集和函数集的. 其中就提出了无穷集合的数量比较的问题. 集合的无穷是否是一个纯粹的否定性质 (即不允许对其进行精细刻画) 呢？或者，是否存在不同层次的数学无穷呢？是否存在不同数量强度，不同"势"的无穷集合呢？ G. Cantor (1871 – 1883) 对这个问题作了回答，他对**基数** (cardinal number) 和**序数** (ordinal number) 理论以及**良序集** (well-ordered set) 理论进行了几乎现代化的阐述. 集合间数量比较的可能性是建立在两集合间的一一对应 (或一一映射 (bijection)) 的思想之上的. 按某种规则将集合 A 中每一元素对应于集合 B 中一确定的元素，如果结果使 B 中的每一元素都与 A 中的一个且唯一的一个元素对应，则称在 A 和 B 间建立了一一对应 (one-to-one correspondence) (或一一映射 (bijective mapping 或 bijection)). 两个有限集之间存在一一映射，当且仅当它们具有同样数目的元素. 推而广之，Cantor 定义了数量等价 (quantitative equivalence)，或等势 (equipotence) 作为集合之间建立一一对应的可能性. 如果集 A 与集 B 等势，则 A 和 B 具有相同的基数. 集合的势这一概念的意义在于存在不等势的无穷集. 例如，全体实数的集合和全体自然数的集合具有不同的势. 前者具有连续统的势，而后者却是可数

集．每一无穷集 A 都有一个真子集与整个 A 等势，然而有穷集却没有这种真子部分．从而与整体等势的真子部分的存在性可作为无穷集的定义．

Cantor 的功绩不仅在于解决了集合的势的问题，而且还在于他所迈出的决定性的一步，即把集合看成是具有任一种特性的元素的全体．证实这一步的一般性是困难的，首先存在多种不相容性（见**悖论**（antinomy）），20 世纪初许多学者的这些发现导致了**公理集合论**（axiomatic set theory）的创立，其次是出现了许多问题（例如，**连续统假设**（continuum hypothesis）），而这些问题是不可判定的．

F．Hausdorff 对集合论做出了一系列贡献．他在发展了全序集理论以及把集合论应用于拓扑学之后，建立了**拓扑空间**（topological space）理论（或一般拓扑学）．之后，Borel 集的研究中出现的 $\mathcal{A}$ 运算导致了**描述集合论**（descriptive set theory）的创立．组合集合论则产生于组合数学和图论中的许多问题．最后，K．Gödel 和 P．Cohen 在公理集合论中的发现对集合论的方法和发展产生了重大影响．

参考文献

[1] Александров, П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.-Л., 1948.

[2] Bolzano, B., Paradoxes of infinite, Routledge & Kegan, 1950（译自德文）．

[3] Учение о множествах Георга Кантора, СПБ, 1914 (Новые идеи в математике. Сб. No. 6).

[4] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914. Reprinted (incomplete) English translation: Set theory, Chelsea, 1978（中译本：F．豪斯道夫，集论，科学出版社，1960）．

[5] Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set theory, North-Holland, 1968.

[6] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Theory of sets, Addison-Wesley, 1968（译自法文）．

Б. А. Ефимов 撰

【补注】 关于另外的参考文献见**集合**（set）以及[A1]－[A2]．

参考文献

[A1] Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y. and Levy, A., Foundations of set theory, North-Holland, 1973.

[A2] Kuratowski, K., Topology, 1, Acad. Press, 1966（译自法文）．

赵希顺 译

集范畴 [sets, category of; множеств категория]

以所有可能的集合为对象的**范畴**（category），其态射是从一个集合到另一个集合的所有可能的映射．态射的合成定义为通常映射的合成．若将范畴论的概念在一个固定的全域 U 内加以解释，则集范畴意味着象元为全体属于 U 的集合，态射及其合成同上．集范畴可记作 $\mathfrak{S}$，*Ens*，*Set* 或 *Me*．

空集是集范畴的始对象（左零），任意单元集是终对象（右零）．每个非空集合是一个生成元，而任意包含至少两个元素的集合是一个余生成元．每个有非空定义域的单射是分裂的（split）（即有单边逆）；每个满射是可裂的这一断言等价于**选择公理**（axiom of choice）．集范畴有唯一的**双范畴**（bicategory）（因子分解）结构．

集范畴是局部小的，完全的，余完全的，良势的，和余良势的．特别地，一族集合的积（存在且）重合于它的 Descartes 积，一族集合的余积重合于它的不交并．二元 Descartes 积，Hom 函子 $\mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ 和单元集给出了集范畴的 Descartes **闭范畴**（closed category）结构．更进一步地，它是以二元集作为子对象分类子的（初等）**拓扑斯**（topos）．每个局部小范畴均可看作集范畴上的一个相关（浓缩）范畴．

范畴 $\mathfrak{K}$ 等价于集范畴的充要条件为：1）$\mathfrak{K}$ 有严格始对象；2）$\mathfrak{K}$ 的非始对象**满子范畴**（full subcategory）有正则余象和一元生成元；3）每个对象 A 有平方 $A \times A$；4）每个等价关系是某个态射的核对．此处，对象 U 叫作一元的（unary），若 U 有任意的余幂，且从 U 到它的一个余幂仅以直和项的嵌入作为态射（见**小对象**（small object））．集合的范畴的其他刻画见[2]，[3]．

与集范畴的子范畴等价的范畴（或等价地，到集范畴有一个忠实函子的范畴）称为具体的（concrete）．一个范畴是具体的充要条件见[1]．

参考文献

[1] Freyd, P., Concreteness, *J. Pure Appl. Algebra*, 3 (1973), 171－191.

[2] Lawvere, F. W., An elementary theory of the category of sets, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 52 (1964), 1506－1511.

[3] Скорняков, Л. А., 《Матем. сб.》, 80 (1969), 4, 492－502.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 对拓扑斯中集范畴的刻画见[A1]．亦见**全域**（universe）；**范畴的生成元**（generator of a category）；**忠实函子**（faithful functor）．

参考文献

[A1] Tierney, M., Sheaf theory and the continuum hypothesis in Toposes, Algebraic Geometry and Logic, Lecture notes in math., Vol. 274, Springer, 1972, 13－42.

张英伯 译

Shannon 定理 [Shannon theorem; Шеннона теорема]

在**信息复制精确度**（information, exactness of reproduction of）的限制下，建立起一系列条件以决定给定**通信信道**（communication channel）上能否可靠传输

由给定信息源(information, source of)产生的信息的一个定理. Shannon 定理有多种不同的表达方式,参见信息传输(information, transmission of)及该条目的参考文献[1]-[4].

Р. Л. Добрушин, В. В. Прелов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Renyi, A., A diary on information theory, Akad. Kaido & Wiley, 1987.

【译注】

参考文献

[B1] Cover, T. M. and Tomas, J. A., Elements of information theory, Wiley, 1991.

[B2] Blahut, R. E., Principles and practice of information theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1987.

[B3] Ihara, S., Information theory for continuous systems, World Scientific, 1993. 骆 源 符方伟 沈世镒 译

Shapley 值[Shapley value; Шепли вектор]

定义在 n 人对策的特征函数集合上的向量函数 $\varphi(v)=(\varphi_1(v),\cdots,\varphi_n(v))$, 它满足下列公理: 1)(有效性(efficiency)) 如果联盟 T 使得对于任何联盟 S 有等式 $v(S)=v(S\cap T)$ 成立, 那么 $\sum_{i\in T}\varphi_i(v)=v(T)$; 2)(对称性(symmetry)) 如果 π 是集合 $J=\{1,\cdots,n\}$ 的置换, 且对于任何联盟 S, 等式 $v'(\pi S)=v(S)$ 成立, 那么 $\varphi_{\pi i}(v')=\varphi_i(v)$; 3)(线性性(linearity)) $\varphi_i(v+u)=\varphi_i(v)+\varphi_i(u)$. 这些公理是 L. S. Shapley([1]) 为了**合作对策**(cooperative game)中的期望支付的公理定义而引入的. 已经指出, 满足公理 1)-3) 的仅有的向量函数是

$$\varphi_i(v)=$$

$$=\sum_{i\in S}\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}[v(S)-v(S\setminus\{i\})].$$

参考文献

[1] Shapley, L. S., A value for n-person games, in Contributions to the Theory of Games, Vol. 2, Princeton Univ. Press, 1953, 307-317. А. И. Соболев 撰

【补注】 Shapley 值的概念已经由许多作者通过考虑其他的公理进行修正. 对于权力指数和各种经济形势的计算的许多应用已经给出. 对于有无限多个局中人的对策的值也已定义.

参考文献

[A1] Aumann, R. J. and Shapley, L. S., Values of non-atomic games, Princeton Univ. Press, 1974.

[A2] Owen, G., Game theory, Acad. Press, 1982.

[A3] Friedman, J. W., Oligopoly and the theory of games, North-Holland, 1977. 史树中 译

Shapley 向量[Shapley vector; шепли вектор]

见 **Shapley 值**(Shapley value).

分配[sharing 或 imputation; дележ], 对策论中的

在一个满足合理条件的**合作对策**(cooperative game)中的全部收益对所有局中人的分布. 形式上, 如果对于一个有局中人集合 $J=\{1,\cdots,n\}$ 的对策, 定义特征函数 $v(J)$, 那么分配是向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 满足 $\sum_{i=1}^n x_i=v(J)$; $x_i\geqslant v(i)$, $i=1,\cdots,n$.

Г. Н. Дюбин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rapoport, A., N-person game theory, Univ. of Michigan Press, 1970, 92; 97-100. 史树中 译

尖锐形式[sharp form; диезная форма]

开子集 $R\subset E^n$ 上的一个 r 维**微分形式**(differential form)ω, 使得余质量(见**质量和余质量**(mass and co-mass))$|\omega|_0$ 和余质量 Lipschitz 常数(co-mass Lipschitz constant)

$$\mathscr{L}_0(\omega)=\sup\frac{|\omega(p)-\omega(q)|}{|p-q|}$$

是有限的, 其中 $p,q\in R$, $|p-q|$ 是向量 $p-q$ 的长度. 数值

$$|\omega|^{\#}=\sup\{|\omega|_0,(r+1)\mathscr{L}_0(\omega)\}$$

称为形式 ω 的尖锐范数(sharp norm of the form ω).

Whitney 定理(Whitney theorem). R 中每个 r 维尖锐上链(sharp cochain)X 对应着唯一的 r 维尖锐形式 ω_X, 对此, 对所有 r 维定向单形 σ^r 有

$$X\sigma^r=\int_{\sigma^r}\omega_X;$$

$\omega_X(p)$ 由公式

$$\omega_X(p)=\lim\frac{X\sigma_i}{|\sigma_i|}$$

所定义, 其中 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots$ 是直径趋于零且位于同一平面上的包含点 p 的单形的序列. 这个对应是上链空间 $C^{\# r}(R)$ 到尖锐形式空间 $\Omega^{\# r}$ 中的一对一映射. 更进一步,

$|\omega_X|_0=|X|$, 即 X 的余质量;

$\mathscr{L}(\omega_X)=\mathscr{L}(X)$, 即 X 的 Lipschitz 常数;

$|\omega_X|^{\#}=|X|^{\#}$, 即 X 的尖锐范数(sharp norm);

$\Omega^{\# r}$ 是一个 Banach 空间.

特别地, 在零维尖锐上链和尖锐函数(sharp functions)(满足 Lipschitz 条件的有界函数)之间存在一个对应.

具有尖锐范数 $|A|^{\#}$ 的有限质量(mass)$|A|$ 的 r

维尖锐链 A 的空间 $C_r^{\#}(R)$ 同构于加性集函数的空间 $\Gamma_r^{\#}(E^n)$，该函数的值是配备尖锐范数 $|\gamma|^{\#}$ 的 r 向量（r-vectors）γ；对每个上链 X，这个对应由公式

$$XA = \int_{E^n} \omega_X d\gamma_A = [\omega \cdot \gamma](E^n) \qquad (*)$$

定义，其中 ω^X 是相应于上链 X 的 r 维尖锐形式，且

$\gamma_A(E^n) = \{A\}$，即链 A 的余向量（covector of the chain A）；

$|A| = |\gamma_A|$，即 γ_A 的完全变分（variation）；

$|\gamma_A|^{\#} = |A|^{\#}$，即链 A 的尖锐范数．

因此，$(*)$ 是通常 Lebesgue-Stieltjes 积分的一个推广．特别地，Lebesgue 可测可和函数 $\alpha(p)$ 与 A 有关（见**平坦形式**（flat form）），即对任何上链 X，对 A 存在

$$X \cdot A = \int_{E^n} \omega_X \cdot \alpha(p)\alpha p,$$

当且仅当 γ_A 是绝对连续的．

如果 ω_A 是一个正则形式（regular form），X 是一个尖锐上链，则存在形式 $\omega_{dX} = d\omega_X$，且 Stokes 公式

$$\int_{\partial\sigma} \omega_X = \int_{\sigma} d\omega$$

得到应用．关于正则形式的其他结果，可用类似的方法推广．

参考文献见**尖锐范数**（sharp norm）．

М. И. Войцеховский 撰　徐森林 译

尖锐范数［**sharp norm**；**диезная норма**］，在 r 维多面链 $C_r(E^n)$ 的空间中的

最大的拟范数 $|\cdot|'$，对任何体积 $|\sigma^r|$ 的胞腔 σ^r，它满足不等式

$$|\sigma^r|' \leqslant |\sigma^r|,$$

$$|\partial\sigma^{r+1}|' \leqslant |\sigma^{r+1}|,$$

$$|T_v\sigma^r - \sigma^r|' \leqslant \frac{|\sigma^r||v|}{r+1},$$

其中 $T_v\sigma^r$ 是由一个长度 $|v|$ 的向量 v 平移所得到的胞腔．

如果 $A = \sum a_i\sigma_i^r$，则尖锐范数 $|A|^{\#}$ 可表示为

$$|A|^{\#} = \inf\left\{ \frac{\sum |a_i||\sigma_i^r||v_i|}{r+1} + |\sum a_i T_{v_i}\sigma_i^r|^{b} \right\},$$

其中 $|C|^{b}$ 是链 C 的**平坦范数**（flat norm），下确界取遍所有的平移 v．

这时有

$$|aA|^{\#} = |a||A|^{\#},$$

$$|A + B|^{\#} \leqslant |A|^{\#} + |B|^{\#},$$

$$|A|^{\#} = 0 \iff A = 0,$$

$$|A|^{\#} \leqslant |A|^{b};$$

如果 $r = 0$，则 $|A|^{\#} = |A|^{b}$．

空间 $C_r(E^n)$ 的完全化是可分的 Banach 空间 $C_r^{\#}(E^n)$，它的元素称为 r 维尖锐链（sharp chain）．对任何 r 维多面链 A 和任何向量 v，

$$|T_vA - A|^{\#} \leqslant \frac{|A||v|}{r+1},$$

其中 T_vA 是由一个长度 $|v|$ 的向量 v 位移 A 所得的链．有限质量的平坦链（flat chain）是尖锐链；一般地，任何平坦链也可以在如下的意义下当作一个尖锐链：如果 $A = \lim^{b} A_i$，其中 A_i 是多面链，和 $\psi A = \lim^{\#} A_i$，其中 ψ 是从空间 $C_r^{b}(E^n)$ 到空间 $C_r^{\#}(E^n)$ 中的线性双射映射，ψC_r^{b} 是于尖锐范数下在 $C_r^{\#}$ 中稠密的．

不可能给尖锐链的边缘 ∂A 一个恰当的定义（[1]）；一个 r 维尖锐链 $X = XA$ 是对偶于 $C_r^{\#}(E^n)$ 的空间 $C^{\#'}(E^n)$ 的一个元素，它是平坦上链（flat cochain）且

$$|X| \leqslant |X|^{b} \leqslant |X|^{\#},$$

其中 $|X|$ 是 X 的余质量（co-mass），而尖锐上范数 $|X|^{\#}$ 类似地定义成平坦范数 $|X|^{b}$．尖锐上链的上边缘 dX 不必是尖锐的（[1]），但

$$|dX| \leqslant |X|^{b} \leqslant |X|^{\#}.$$

上链 X 的 Lipschitz 常数（Lipschitz constant）$\mathscr{L}(X)$ 定义如下：

$$\mathscr{L}(X) = \sup\left\{ \frac{|X \cdot (T_vA - A)|}{|A||v|} \right\},$$

其中 A 是多面链．对尖锐上链，此上确界是有限的，且

$$(r+1)\mathscr{L}(X) \leqslant |X|^{\#}.$$

任何具有有限 Lipschitz 常数的平坦上链是尖锐的，且

$$|X|^{\#} = \sup\{|X|^{b}, (r+1)\mathscr{L}(X)\},$$

还有

$$|dX| \leqslant (r+1)\mathscr{L}(X).$$

对开子集 $R \subset E^n$ 中的 r 维多面链，类似的概念被引进．也见**尖锐形式**（sharp form）．

在值是 r 向量（r-vector）的加性函数 γ 的空间中的尖锐范数（sharp norm）是拟范数 $|\cdot|'$ 中最大的，它满足条件：

$|\gamma|' \leqslant |\gamma|$，其中 $|\gamma|$ 是 γ 的完全变分（variation）；

$$|T_v\gamma - \gamma|' \leqslant \frac{|v||\gamma|}{r+1},$$

其中 $T_v\gamma(Q) = \gamma T_{-v}(Q)$ 是函数 γ 由长 $|v|$ 的向量 v 的移位（shift）：

$$T_{-v}(Q) = \{q - v : q \in Q \subset E^n\};$$

对每个点 p 和任意 ε，存在 $\eta > 0$ 使得 $|\gamma|' \leqslant \varepsilon|\gamma|$，如果支柱 $\operatorname{supp} t\gamma \subset U_\eta(p)$ 和 $\gamma(E^n) = 0$.

尖锐范数 $|\gamma|^\#$ 表示如下：

$$|\gamma|^\# = \sup_\omega \int_{E^n} \omega\, d\gamma,$$

其中 ω 是 r 维尖锐形式，对它，$|\omega|^\# \leqslant 1$.

参考文献

[1] Whitney, H., Geometric integration theory, Princeton Univ. Press, 1957.

М. И. Войцеховский 撰 徐森林 译

层［sheaf; пучок］

一个层是拓扑空间 X 上的一个预层（pre-sheaf）F（亦见层论（sheaf theory）），使得 X 的开子集 U_λ 的任意并 $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ 满足下述条件：

a）若 $F(U)$ 中的两个元素 s 和 s' 在每个 U_λ 的限制上重合，则 $s' = s$；

b）若 $s_\lambda \in F(U_\lambda)$，使得对任意标集 λ 和 μ，s_λ 与 s_μ 在 $U_\lambda \cap U_\mu$ 上的限制重合，则存在一个元素 $s \in F(U)$，它在每个 U_λ 上的限制重合于 s_λ.

X 上的每一个层均同构于 X 上的某个覆叠空间 $p: E \to X$ 的连续截面层，该空间在同构的意义下唯一确定（覆叠空间（covering space）意味着从 E 到 X 的一个局部同胚的连续映射），因而层亦常理解为覆叠空间 $p: E \to X$ 自身（见层论）.

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】 将上述拓扑空间上层的概念推广，亦可定义任意景（site）上的层（亦见拓扑斯（topos））.

对层的更详细的处理及进一步的文献，见层论.

参考文献

[A1] Bredon, G. E., Sheaf theory, McGraw-Hill, 1967.

[A2] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

张英伯 译

层论［sheaf theory; пучков теория］

一种特殊的数学工具，它提供了统一的途径以建立拓扑空间（特别是几何对象）的局部与整体性质间的联系，它又是研究现代代数、几何、拓扑与分析中许多问题的有力方法.

拓扑空间 X 上的预层（pre-sheaf）F 对每个开子集 $U \subset X$ 指定一个 Abel 群（环、环上的模，等）$F(U)$，对每对开集 $V \subset U$ 指定一个同态 $F_V^U: F(U) \to F(V)$，使得 F_U^U 是恒等同构，$F_W^U = F_W^V F_V^U$ 对所有的 $W \subset V \subset U$. 换句话说，预层是从 X 的开子集与它们的包含映射的范畴到群（环，等）与它们的同态的范畴里的反变函子. 映射 F_V^U 称为限制同态（restriction homomorphism）（例如，若 $F(U)$ 的元素是 U 上某种类型的函数，则 F_V^U 是这些函数到较小子集合的限制）. 设 $\mathscr{S}_x$ 是正向极限 $\lim_{x \in U} F(U)$. 集合 $\mathscr{S} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{S}_x$ 上的拓扑可用以下方式定义：对每个 $U \subset X$ 以及 $\sigma \in F(U)$，令集合 S 由 $\mathscr{S}_x (x \in U)$ 中这样的点构成，这些点是在 $\mathscr{S}_x$ 的定义中 σ 的象，再把这样的 S 作为 $\mathscr{S}$ 的开集. 在这个拓扑里，茎 $\mathscr{S}_x$ 是离散的，通过取正向极限后定义在 $\mathscr{S}$ 上的按茎的代数运算是连续的，且自然投影 $p: \mathscr{S} \to X$，这里 $\mathscr{S}_x = p^{-1}(x)$，是局部同胚. 空间 $\mathscr{S}$ 带上按茎的代数运算以及投影 p 称为与预层 F 相关联的 X 上 Abel 群（环，等）的层（sheaf）.

每个满足 $x = ps(x)$ 的连续映射 $s: U \to \mathscr{S}$ 称为 $\mathscr{S}$ 的截面（section）. 由 $\mathscr{S}_x$ 内的零元所定义的 X 上 $\mathscr{S}$ 的截面称为零截面（zero section）. 如果截面 s 在点 x 是零，则 s 在 x 的某个邻域里与零截面重合，所以 s 为非零的点的集合（s 的支集（support））在 U 内闭.

设 $\Gamma(U, \mathscr{S})$（相应地，$\Gamma_\Phi(X, \mathscr{S})$，这里 Φ 是 X 内闭子集的一个族；特别地，$\Gamma_c(X, \mathscr{S})$）是 $\mathscr{S}$ 在 U 上所有的截面（相应地，X 上所有支集在 Φ 内的截面；特别地，具有紧支集的截面的群（环、模、等）. 指派 $U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{S})$ 是 X 上的预层，称为层 $\mathscr{S}$ 的截面的预层（pre-sheaf of sections）. 用于定义 $\mathscr{S}$ 上拓扑的指派 $\sigma \mapsto s$ 也定义一个同态 $F(U) \to \Gamma(U, \mathscr{S})$，它与到 $V \subset U$ 的限制可交换，也就是说，它定义了预层的同态. 当原始预层 F 满足下列要求时，这个同态是一个同构：a）如果 $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$，$\sigma, \sigma' \in F(U)$，则当 σ 和 σ' 在每个 U_λ 上的限制相等时有 $\sigma = \sigma'$；b）如果 $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$，$\sigma_\lambda \in F(U_\lambda)$ 是一族元素使得 σ_λ 和 σ_μ 在 $U_\lambda \cap U_\mu$ 上的限制重合，则存在 $\sigma \in F(U)$ 它在每个 U_λ 上的限制与 σ_λ 重合. 满足上述要求的预层概念等价于与它关联的层的概念. 所以这样的预层常常也称为层（sheaf）.

设 G 是一个固定的群（环，等）. 形如 $X \times G$ 的层（带有显然的到 X 的投影）称为常层（constant sheaf），记为 G. 如果一个层在每个 $x \in X$ 的一个充分小邻域里是常层，就称为局部常层（locally constant sheaf）. 如 X 是分离空间，则这样的层的拓扑是分离的（即 Hausdorff）. 在更典型的情形里即使 X 是分离的 $\mathscr{S}$ 的拓扑也可能是非分离的（例如由下述预层 F 生成的连续（或可微）函数的芽层就是如此的，这里

$F(U)$ 是 U 上连续（可微）函数的集合．但是流形上解析函数的芽层是分离的）．

预层的同态 $F \to F'$ 诱导了相关联的层的映射 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$，它是局部同胚而且把茎同态地映到茎内，这样的层的映射称为**层同态**（sheaf homomorphism）．单和满同态是用标准的方式定义的．对于层同态 $f: \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$，象 $f(\mathscr{S}')$ 是 $\mathscr{S}$ 的开子集，且关于按茎的代数运算封闭．满足这些要求的 $\mathscr{S}$ 的子集称为 $\mathscr{S}$ 的**子层**（subsheaf）．层 $\mathscr{S}$ 关于子层 $\mathscr{S}'$ 的**商层**（quotient sheaf）被定义为与预层 $U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{S})/\Gamma(U, \mathscr{S}')$ 相关联的层 $\mathscr{S}''$；此外存在满同态 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}''$，且 $\mathscr{S}''_x \simeq \mathscr{S}_x/\mathscr{S}'_x$．对于每个开集 $U \subset X$ 存在 $\mathscr{S}$ 的一个子层 $\mathscr{S}_U$，它是 $p^{-1}(U)$ 与 $\mathscr{S}$ 在 X 上的零截面的并；$\mathscr{S}_{X \setminus U}$ 表示相应的商层（它在 $X \setminus U$ 上的限制与 $\mathscr{S}$ 在其上的限制重合）．

由于可将常用的术语如同态、核、象、子层、商层等搬到 X 上的层里，且使得这些概念具有与代数里本质上相同的含义，因此可以用范畴的观点考虑这些概念并且可把**同调代数**（homological algebra）的构造方法应用到层论中．结果所得到的 X 上的层的范畴具有与 Abel 群的范畴或模的范畴相同的经典性质．特别地，对于层也可以定义直和、无限直积、归纳极限以及其他概念．

层论这个工具已深入各种数学领域，其原因是下列事实：存在系数在层 $\mathscr{S}$ 内的空间 X 的上同调 $H^*(X, \mathscr{S})$ 的自然定义，它无需对 X 作任何限制（这是实质性的，例如在代数几何里遇到的空间常常是不可分离的）；另一个事实是其他的上同调可归结为层上同调（在某些特定条件下），至少在需要应用这些上同调的场合允许这样做．

为了定义 $H^*(X, \mathscr{S})$ 首先构造**典范分解**（canonical resolution）：

$$C^*(\mathscr{S}): 0 \to \mathscr{S} \to C^0(\mathscr{S}) \to C^1(\mathscr{S}) \to \cdots.$$

这里的 $C^0(\mathscr{S})$ 是由预层 F 定义的层，其中 $F(U)$ 是 $\mathscr{S}$ 在 U 上所有的（可以不连续的）截面构成的群，所以 $\Gamma(U, C^0(\mathscr{S})) = F(U)$，$C^1(\mathscr{S}) = C^0(C^0(\mathscr{S})/\mathscr{S}), \cdots, C^{p+1}(\mathscr{S}) = C^0(C^p(\mathscr{S})/\operatorname{Im} C^{p-1}(\mathscr{S})), \cdots$．作为定义，$H^p(X, \mathscr{S}) = H^p(\Gamma(X, C^*(\mathscr{S})))$（把符号 Γ 换成 Γ_Φ 可得 $H^p_\Phi(X, \mathscr{S})$）．层 $\mathscr{S}$ 本身可从 $C^*(\mathscr{S})$ 得到，所以 $H^0_\Phi(X, \mathscr{S}) = \Gamma_\Phi(X, \mathscr{S})$（在经典上同调里 $H^0(X, G)$ 是 X 上取值在 G 内的局部常函数的群）．分解 $C^*(\mathscr{S})$ 是 $\mathscr{S}$ 的正合共变函子：对应于"系数"的短正合列 $0 \to \mathscr{S}' \to \mathscr{S} \to \mathscr{S}'' \to 0$ 有分解的短正合列．函子 Γ_Φ 在分解的项 $C^p(p \geqslant 0)$ 上是正合的，所以有正合上同调列

$$\cdots \to H^{p-1}_\Phi(X, \mathscr{S}'') \to H^p_\Phi(X, \mathscr{S}') \to \to H^p_\Phi(X, \mathscr{S}) \to H^p_\Phi(X, \mathscr{S}'') \to \cdots.$$

对应于上述系数序列，它的起始部分是 $0 \to \Gamma_\Phi(X, \mathscr{S}') \to \Gamma_\Phi(X, \mathscr{S}) \to \cdots$．二元组 (X, A) 的上同调列对应于短正合列 $0 \to \mathscr{S}_{X \setminus A} \to \mathscr{S} \to \mathscr{S}_A \to 0$（$A$ 是闭子集）．

上同调群 $H^*_\Phi(X, \mathscr{S})$ 有以下的"普遍"性质使人看到了它们的意义：对于任何别的分解 $\mathscr{L}^*$（即从 $\mathscr{S}$ 开始的层 $\mathscr{L}^q$ 的正合列）存在自然的"比较"同态 $H^p(\Gamma_\Phi(X, \mathscr{L}^*)) \to H^p_\Phi(X, \mathscr{S})$，它是通过谱序列用 $H^p_\Phi(X, \mathscr{L}^q)$ 来描述的．一个重要的情形是分解的层为 Φ **零调的**（Φ-acyclic），即当 $H^p_\Phi(X, \mathscr{L}^q) = 0$ $(p \geqslant 1)$ 时，在这种情形上述同态是同构的．零调层的基本例子是**松弛层**（flabby sheaf）（对所有的 $U \subset X$ 映射 $\Gamma(X, \mathscr{L}) \to \Gamma(U, \mathscr{L})$ 是满同态）以及**软层**（soft sheaf）（闭集上的任何截面可扩张为整个 X 上的截面）．典范分解是由松弛层构成的．如果 X 是仿紧空间，则松弛层也是软层．

普遍性性质使得人们可以把具体情况里产生的上同调与层上同调比较（从而也能相互比较），以画出一个自然边界，在此范围内它们的应用是有效的，并且也能应用层论的方法解决具体的问题．例如 **Александров-Čech 同调与上同调**（Aleksandrov-Čech homology and cohomology）可以用从特殊选取的开覆盖系的上链通过取正向极限而得到的上链来定义．这些上链被证明是构成系数群（或甚至是层）的分解的上链芽层（与函数芽层类似地定义）的截面，当空间为仿紧时这个层是软的．因此对于仿紧空间 Александров-Čech 上同调与层上同调重合．类似结论对 Zariski 空间（特别对代数簇）也成立．Alexander-Spanier 上链也被证实是一个分解的层的截面，此外当 X 仿紧时这个分解由软层构成，所以在这种情形 Alexander-Spanier 和 Александров-Čech 上同调是自然同构的．在奇异上同调的情形下，把在"小的"奇异单形，即从属于（任意）开覆盖的奇异单形上重合的上链认为相同，即可导出所谓**局部化上链**（localized cochain）（给出同样的上同调），它们是通常奇异上链的预层所确定的层的截面．如果 X 是仿紧的，则这些层是软的（如果 X 是世传仿紧的，则它们也是松弛的），但只有满足附加要求 X 是**弱局部可缩的**（weakly locally contractible）（在每个点 $x \in X$ 的每个邻域 U 内存在更小的邻域它可在 U 内收缩到一点），这些层才构成一个分解．一个经典的例子是 **de Rham 定理**（de Rham theorem）：微分流形的微分形式的复形的上同调与系数在实数域 $\mathbf{R}$ 里的通常上同调重合（微分形式的芽层是软的且构成 $\mathbf{R}$ 的分解：充分接近每个点

时、闭微分形式是精确的).

也有对应于任何开覆盖和局部有限闭覆盖的分解，这些分解使得人们能把 X 的上同调与覆盖的上同调相比较(覆盖的谱序列)．特别地，如果对覆盖的所有元素以及它们的有限交都有 $H^q=0(q\geqslant 1)$，则这给出了同构(Leray 定理(Leray theorem))．取关于开覆盖的正向极限就给出了 Александров-Čech 上同调 $\check{H}^*$ 与层上同调间的同构，甚至对于非仿紧的 X 也对，只要 X 内有足够多的小开集 U，使得 $\check{H}^q(U,\mathscr{F})=0$，当 $q\geqslant 1$(Cartan 定理(Cartan theorem))．这意味着在代数几何里使用的系数在凝聚层里的上同调 $\check{H}^*$ 也同构于标准层上同调 H^*.

保证比较同态存在性的一般构造使得人们也能把上同调 $H^p(X,\mathscr{H}^q)$ 与超上同调 $H^*(\Gamma(X,\mathscr{L}^*))$ 作比较(类似地，$H^p_\Phi(X,\mathscr{H}^q)$ 与 $H^*(\Gamma_\Phi(X,\mathscr{L}^*))$)，这里 $\mathscr{L}^*$ 是任意的微分层(differential sheaf)(即复合映射 $\mathscr{L}^q\to\mathscr{L}^{q+2}$ 对任一 q 都为零的层)且 $\mathscr{L}^q$ 零调，$\mathscr{H}^q$ 是 $\mathscr{L}^*$ 的导出层(derived sheaves)(即对每个维数 q 都是核关于象的商层)．相应的谱序列有许多应用．此外如果当 $q\geqslant 1$ 时 $\mathscr{H}^q=0$，则 $H^*(\Gamma(X,\mathscr{L}^*))=H^*(X,\mathscr{H}^0)$)．举例来说，如果用链的层 $\mathscr{C}_*$(边缘运算把维数降低 1，$\Gamma(U,\mathscr{C}_*)$ 的元素是二元组 $(X,X\backslash U)$ 的链，茎 $\mathscr{H}^x_q=\lim_{x\in U}H_q(X,X\backslash U)=H_q(X,X\backslash x)$) 代替 $\mathscr{L}^*$，则可得知同调 $H^\Phi_*(X,G)$ 对所有可能的 $H^p_\Phi(X,\mathscr{H}_q)$ 的依赖关系．对于流形，当 $q>n=\dim X$ 时 $\mathscr{H}_q=0$，且 $H^\Phi_p(X,G)=H^{n-p}_\Phi(X,\mathscr{H}_n)$，即 **Poincaré 对偶性**(Poincaré duality)成立．如果 A 是局部紧空间 X 的开或闭子集，则 A 的同调由 $\mathscr{C}_*$ 的支撑集在 A 内的截面确定，并且二元组 (X,A) 的同调由 $\mathscr{C}_*$ 到 $X\backslash A$ 的限制的截面所确定．反之(这也是 Poincaré 对偶性的表现之一)，如果 $\mathscr{C}^*$ 是上同调的一个松弛分解，则 $\mathscr{C}^*$ 在 $X\backslash A$ 上的限制确定了 $X\backslash A$ 的上同调并且 $\mathscr{C}^*$ 的支撑集在 A 内的截面确定了二元组 $(X,X\backslash A)$ 的上同调．由于层 $\mathscr{C}_*$ 对于流形是松弛的，二元组 (X,A) 的同调序列在编号互反的条件下与二元组 $(X,X\backslash A)$ 的上同调序列重合．这意味着流形的对偶性，例如 **Lefschetz 对偶性**(Lefschetz duality) $H_p(X,U,G)=H^{n-p}(X\backslash U,\mathscr{H}_n)$ 是 Poincaré 对偶性的特殊情形．事实表明那些不包含在上述纲要内的对偶关系是 Poincaré 对偶性以及在某些维数里流形的零调性的推论.

正是这样的情况出现在连续映射 $f:X\to Y$ 的情形里．X 的上同调的分解确定了 Y 上某个微分层 $\mathscr{F}^*$，它的茎 $\mathscr{H}^q_y$ 是上同调群 $H^q(f^{-1}(U),\mathscr{F})$ 关于点 y 的邻域 U 的正向极限(对于闭映射 $H^q_y=H^q(f^{-1}(y),\mathscr{F})$)，这里 $H^*(X,\mathscr{F})=H^*(\Gamma(Y,\mathscr{F}^*))$．$H^*(X,\mathscr{F})$ 对 $H^p(Y,\mathscr{H}^q)$ 的依赖情况是由映射 f 的 Leray 谱序列描述的(**Serre 纤维化**(Serre fibration)的谱序列是这里的一个特殊情形)．零调映射对应于 $\mathscr{H}^q$ 消失的情形，这样就保证了当 X 和 Y 具有相应系数时的上同调是同构的(Vietoris 定理(Vietoris theorem)及其推广)．上面提到的一般构造也给出了映射的谱序列并且考虑到了(与它们的上同调结构一起)点的原象的不连续性次数；这对于零维或有限到一的映射特别有效(在覆盖的情形下，它成为 Cartan 谱序列)．在 G 空间(受到群 G 作用的空间)的范畴里也有特殊的谱序列.

在层上同调里有自然的方法定义乘法结构．映射由某个半单形结构确定的特殊松弛分解的存在性使得对于上链的积能给出明显的公式，类似于通常的公式．同时这也使得有可能在层论里定义其他上同调运算.

凡是抽象同调方法有实质性运用的地方层论的结构就有许多应用：在拓扑里(同调和上同调维数，局部同调和对偶，各种连续映射类的结构包括到稠密子集的嵌入以及紧化等)，在解析流形理论中(系数在凝聚解析层里的同调上同调及其应用，上同调与解析微分形式，同调与解析流(de Rham 定理的类似)，等)，以及在抽象代数几何里(系数在凝聚代数层里的仿射、射影和完全代数簇的上同调，代数 Serre 对偶性，代数(组合)维数，等).

层论和谱序列的某些基本概念出现在 J. Leray 有关局部紧空间连续映射的同调性质研究的工作中(1945 及以后)，他也给出了系数在层里的(具有紧支撑集的)上同调的定义．应用分解对层论作相当完整的叙述是后来 H. Cartan 给出的．A. Weil 给出的 de Rham 定理的证明(1947)以及 J.-P. Serre 对代数簇的工作(在 50 年代早期)相当大地影响了层论的发展．系数在层里的上同调首先是用 Александров-Čech 方法定义的．层论的成熟的外貌可以在 50 年代末的 A. Grothendieck([3])和 R. Godement([2])的工作中找到，其中层论达到了极大的普遍性，使用的方法也大大简化．例如证明了 X 上层的范畴有一个生成元(generator)(即到任何非零层内都有一个非零同态的层 J：对于 Abel 群层，$J=\sum_{U\subset X}\mathbf{Z}_U$)，从而每个层可被嵌入一个内射层(Grothendieck 定理(Grothendieck theorem))．这就是系数在层里的上同调理论形式上相似于模范畴里的导函子理论的理由．在 X 上层的范畴里有"足够多"内射对象(显然，一般说来，只有很少的射影对象)，所以人们可以相当自由地应用同调代数里的所有相应技巧，特别可以定义上同调 $H^*_\Phi(X,\mathscr{F})$(对 X 不加任何限制)作为左正合函子 $\Gamma_\Phi(X,\mathscr{F})$ 的导函子(甚至作为 $\mathrm{Ext}^*(\mathbf{Z}_X,\mathscr{F})$).

这也阐明了下述一些概念的一般性本质：空间（在 Z 上）的上同调维数，簇的代数维数与环的整体维数．Grothendieck 给出的对 Ext 函子的谱序列描述在代数几何中是本质性的．构造内射层的更简单的方法是 Godement 发现的，他也证明了为了构造一个上同调理论，只要使用他的典范松弛分解就够了，而后者从同调代数的观点来看就是层的零调分解．Godement 是应用松弛层和软层的第一个人（软层仅当 X 仿紧时才是零调的，这解释了为什么它们主要应用于拓扑中）．

参考文献

[1] Bredon, G. E., Sheaf theory, McGraw-Hill, 1967.

[2] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[3] Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119 – 221.

[4] Swan, R., The theory of sheaves, Chicago Univ. Press, 1964.

[5] Sklyarenko, E. G., Homology and cohomology of general spaces, Springer, Forthcoming（译自俄文）.

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射，$\mathscr{S}$ 是 X 上的层．则 $\mathscr{S}$ 在 f 下的正象（direct image）是层 $f_*\mathscr{S}$，定义为 $(f_*\mathscr{S})(U) = \mathscr{S}(f^{-1}(U))$，这里 U 为 Y 内开集．函子 $\mathscr{S} \mapsto f_*\mathscr{S}$ 在模层或 Abel 群层上是左正合的．$\mathscr{S}$ 的高次正象（higher direct image）$f_*^q\mathscr{S}$ 是 f_* 的右导函子．层 $f_*^q\mathscr{S}$ 是与预层 $U \mapsto H^q(f^{-1}(U), \mathscr{S})$ 相关联的层．

给出 Y 上的层 $\mathscr{G}$，设 $\pi: \mathscr{G} \to Y$ 是相伴的"层空间"（所以 $\mathscr{G}(U) = \pi$ 在 $U \subset Y$ 上的截面）．考虑纤维积 $f^*\mathscr{G} = X \times_Y \mathscr{G}$．逆象层（inverse image sheaf）$f^*\mathscr{G}$ 是 $f^*\mathscr{G} \to X$ 的截面的层．

函子 f^* 是正合的（在模层或 Abel 群层上）．这两个函子是相伴的：$\mathrm{Hom}(f^*\mathscr{G}, \mathscr{S}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{S})$．

空间 X 上的 Abel 群层或模层的短序列 $0 \to \mathscr{S}' \to \mathscr{S} \to \mathscr{S}'' \to 0$ 为正合，当且仅当对每个 $x \in X$ 相应的茎的序列 $0 \to \mathscr{S}'_x \to \mathscr{S}_x \to \mathscr{S}''_x \to 0$ 为正合．

Grothendieck 及其学派极其广泛地推广了层论，从空间上的层推广到更一般的景（site）上以及拓扑斯（topos）的层的概念（见[A6]－[A8]）．

关于代数簇上凝聚层的理论亦见基础性文章（[A11]）．关于艾达尔拓扑中层的理论以及 l 进层见[A8]，[A12]－[A14]．

关于层论起源的更详细的历史见[A1]．原著条目几乎完全集中于层论在上同调理论中的应用，但它确实还有许多其他的应用：例如在环和其他代数系的表示理论中（见[A3]，[A4]），在逻辑中以及在为构造性数学提供模型中（见[A2]，亦见[A9]，[A10]）．

参考文献

[A1] Gray, J. W., Fragments of the history of sheaf theory, in Applications of Sheaves, Lecture notes in math., Vol. 753, Springer, 1979, 1 – 79.

[A2] Fourman, M. P. and Scott, D. S., Sheaves and logic, in Applications of Sheaves, Lecture notes in math., Vol. 753, Springer, 1979, 302 – 401.

[A3] Mulvey, C. J., Representations of rings and modules, in Applications of sheaves, Lecture notes in math., Vol. 753, Springer, 1979, 542 – 585.

[A4] Borceux, F. and van den Bossche, G., Algebra in a localic topos with applications to ring theory, Lecture notes in math., 1038, Springer, 1983.

[A5] Tennison, B. R., Sheaf theory, Cambridge Univ. Press, 1975.

[A6] Artin, M., Grothendieck topologies, Harvard Univ. Press, 1964.

[A7] Johnstone, P. T., Topos theory, Acad. Press, 1977.

[A8] Grothendieck, A., et al., Théorie de topos et cohomologie des schémas (SGA 4 – 5), Lecture notes in math., 269, 270, 305, 589, Springer, 1972 – 1977.

[A9] Makkai, M. and Reyes, G. E., First order categorical logic, Lecture notes in math., 611, Springer, 1977.

[A10] Tierney, M., Sheaf theory and the continuum hypothesis, in F. W. Lawvere (ed.): Toposes, Algebraic Geometry and Logic (Dalhousie Univ., Jan. 1971), Lecture notes in math., Vol. 274, Springer, 1972, 13 – 42.

[A11] Serre, J.-P., Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, 61 (1955), 197 – 278.

[A12] Deligne, P. et al., Cohomologie étale (SGA 4 1/2), Lecture notes in math., 569, Springer, 1977.

[A13] Milne, J. S., Étale cohomology, Princeton Univ. Press, 1980.

[A14] Freitag, E. and Kiehl, R., Etale cohomology and the Weil conjecture, Springer, 1988.

[A15] Leray, J., Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des répresentations, J. Math. Pures Appl., 24 (1945), 95 – 167.

[A16] Leray, J., L'anneau spectral et l'anneau fibré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, *J. Math. Pures appl.*, 29 (1950), 1 – 139.

[A17] Weil, A., Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., 1946.

[A18] Sem. H. Cartan, 1 – , Secr. Math. Inst. H. Poincaré, 1948 –

陈志杰 译

移位 [shear; сдвиг]

平面内一个**仿射变换** (affine transformation), 在它之下每一点沿 x 轴方向移动一个与这个点的纵坐标成比例的距离. 在 Descartes 坐标系内, 一个移位由关系

$$x' = x + ky,\ y' = y,\ k \neq 0,$$

定义. 在移位之下, 面积和定向被保持.

空间的沿 x 轴的移位由关系

$$x' = x + kz,\ y' = y,\ z' = z,\ k \neq 0,$$

定义. 体积和定向在空间的移位之下被保持.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 在一个线性空间内沿任意方向的移位见**平延** (transvection). 从射影观点来看, 它们是中心在无穷远而以一个仿射超平面作为轴的 (射影) 平延 (具有关联中心和轴的有心直射变换).

术语"移位"(代替平延)特别用于连续统力学里 (例如, 弹性体的形变). 如果这个形变由 $x_1 = p_1 + \gamma p_2$, $x_2 = p_2$, $x_3 = p_3$ 给出, 系数 γ 称为移位应变 (shearing strain). 这是一个单移位 (simple shear).

参考文献

[A1] Gurtin, M. E., An introduction to continuum mechanics, Acad. Press, 1981, Chapt, Ⅸ, § 26.

郝钢新 译

Sheffer 竖 [Sheffer stroke 或 Sheffer bar; Шеффера штрих]

一种**逻辑运算** (logical operation), 通常表示为 |, 由下列**真假值表** (truth table) 给出:

A	B	$A\|B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

于是, 命题 $A|B$ 意味着 A 和 B 是不相容的, 也就是说它们不能同时真. 所有其他的逻辑运算符都可以用 Sheffer 竖表示. 例如, 命题 $\neg A$ (A 的否定 (negation)) 等价于命题 $A|A$; 两个命题 A 和 B 的析取 (disjunction) $A \vee B$ 可以表示为:

$$(A|A)|(B|B).$$

合取 (conjunction) $A \& B$ 和蕴涵 (implication) $A \to B$ 可以分别表示为 $(A|B)|(A|B)$ 和 $A|(B|B)$. Sheffer 竖是 H. Sheffer 首先考虑的.

参考文献

[1] Sheffer, H. M., A set of five independent postulates for Boolean algebras, with applications to logical constants. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1913), 481–488.

В. Е. Плиско 撰

【补注】 sheffer 竖运算也被称为交错否定 (alternative denial).

参考文献

[A1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1950 (中译本: S. C. 克林, 元数学导论, 科学出版社, 上册 1984, 下册 1985).

[A2] Marek, W. and Onyszkiewicz, J., Elements of logic and the foundations of mathematics in problems, Reidel & PWN, 1982.

何 青 译 罗里波 校

壳体理论 [shell theory; оболочек теория]

弹性力学 (见**弹性力学的数学问题** (elasticity, mathematical problems of)) 和结构力学的一个领域, 它的主要目的是描写作用在壳体上的外载荷所引起的应力和变形. 一个壳体是指由两个曲面为界所限定的固体, 其厚度相对于其他典型尺寸来是很小的. 在壳体理论中也考虑其他的外部作用, 例如热的作用.

在壳体理论中引进一个光滑曲面 g, 称为中面 (mean surface), 在中面两侧界定曲面上的点与 g 的法向距离为 $h(x)$. 在大多数情况下, 厚度是常数, 即有 $h(x) \equiv h$. 最为普遍采用的壳体理论采用所谓 Kirchhoff-Love 假定 (Kirchhoff-Love hypothesis), 即所有垂直于 g 的线素 (垂直于中面的线段) 在变形后保持为直线, 其长度不变, 且仍与中面相垂直. 从这个假定出发, 对于作为弹性固体的壳体内各点的位移, 其相应的三维弹性力学理论的方程组就化为两个变量 x_1 和 x_2 的三个微分方程, 其中 x_1 和 x_2 为未变形的中面上一点的曲线坐标. 一般说来, 这个方程组是非线性的. 如果再附加上变形和外载荷很小的假定, 其非线性项就可以忽略. 问题就化为求解下面的线性方程组:

$$\sum_{j=1}^{3} m_{ij} u_j = q_i,\ i = 1,\ 2,\ 3 \qquad (1)$$

(见[3], [4]), 其中, q_i 为外载荷的分量, m_{ij} 为线性微分算子, 其系数决定于曲面 g 的几何特征, $u_j(x)$ 则为所求的在中面上一点的位移分量. 方程组 (1) 可在四类边界条件下求解, 这些条件决定于曲面 g 的边界的固定方式. 在式 (1) 中的算子 m_{ij} 有如下特殊的形式:

$$m_{ij} = h^2 n_{ij} + l_{ij}$$

其中小参数 h^2 置于最高阶导数之前. 方程组 (1) 在 Douglis 和 Nirenberg 的意义上是椭圆的 (见[5]), 在形式上是自共轭的 (见[7]). 对于自然地发生的边界条件, 方程组 (1) 导致椭圆型边值问题. 方程组 (1) 通常称之为有矩壳体理论 (moment shell theo-

ry）的方程组，因在其推导中计及了弯矩和扭矩．在附加的假定下，上述这些项可被忽略，从而导得无矩（薄膜）壳体理论（moment-free (membrane) shell theory）．在形式上，这相当于在方程组（1）中除去包含小参数 h^2 的项．无矩的方程组：

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij} u_j = q_i,\ i=1,2,3, \qquad (2)$$

要比式（1）简单得多．式（2）中的算子最多为二阶．式（2）的主符号行列式（特征多项式）的阶数是4；而（1）式的为 8.

由于式（1）中存在一个小参数，可以采用一种渐近积分的方法（见[4]）．如果中面 g 的 Gauss 曲率 K 为正值，式（2）为椭圆系统，在边界完全或部分固定的情况下，当 $h\to 0$ 时，有矩问题向无矩问题的退化就是正则的．仅在 g 的边界的一个很小的邻域内，解才可能发散（边界效应）．对于 $K\leqslant 0$ 的情况，当 $h\to 0$ 时，有矩问题向无矩问题的退化的图象在本质上要复杂得多；由系统（1）过渡到系统（2）的结果，不但在 g 的边界上，而且也在内部各处，都会引起严重的误差．对于非正则退化的壳体理论中采用渐近积分的方法，至今未找到数学上的根据．

无矩的壳体理论与曲面的无穷小弯曲变形的问题密切相关．广义解析函数技术（见**广义解析函数**（generalized analytic function），[2]）的引入，是对壳体的无矩理论以及无穷小弯曲变形理论的重大的贡献．

壳体理论的一个重要问题是平衡形式稳定性的研究，以及与此有关的确定临界载荷的问题．这些问题可以在线性的（或者更确切地说，线性化的）和非线性的表达方式下进行研究．在非线性的表达方式下求解的一种方法本质上用的是弯曲变形理论（见[8]）．

对于静态问题，壳体理论的方程用复变函数来表示的方法是很有效的．由此，可通过引进辅助函数将方程组(1)化为其特征多项式为 4 阶的等效方程组（见[7]）．

壳体的自由振动和强迫振动是作过大量数学分析的动力学问题之一．自由振动的基频频谱的结构和相应的振型的构造可以通过渐近积分的方法和算子的频谱理论得到（见[5]，[9]）．

在壳体理论中广泛采用数值计算的方法．对于静态和动态问题中可分离变量的情况下，**打靶法**（shooting method）特别有效；而对于任意形状的壳体，则采用有限元法是适当的．

参考文献

[1] Алумяэ, Н. А., Теория упругих оболочек и пластинок, в кн., Механика в СССР за лет, т. 3, М., 1972, 227－266.

[2] Векуа, И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

[3] Власов, В. З., Общая теория оболочек и ее приложение в технике, М.-Л., 1949.

[4] Гольденвейзер, А. Л., Теория упругих тонких оболочек, 2 изд., М., 1976.

[5] Гольденвейзер, А. Л., Лидский, В. Б., Товстик, П. Е., Свободные колебания тонких упругих оболочек, М., 1979.

[6] Муштари, Х. М., Галимов, К. З., Нелинейная теория упругих оболочек, Казань, 1957（英译本：Mushtari, Kh. M. and Galimov, K., The non-linear theory of elastic shells, Israel Program Scient. Transl., 1961）.

[7] Новожилов, В. В., Теория тонких оболочек, 2 изд., Л., 1962（中译本：B. B. 诺沃日洛夫，薄壳理论，科学出版社，1963）.

[8] Погорелов, А. В., Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, М., 1967.

[9] Прочность, Устойчивость, Колебания. Справочник, т. 3, М., 1968.

В. Б. Лидский 撰

【补注】 对于大多数有实际意义的情况，例如，对于圆柱壳的弯曲问题，不可能完全消除 $h^2 n_{ij}$ 项．

参考文献

[A1] Flügge, W., Stresses in shells, Springer, 1967（中译本：W. 弗留盖，壳体中的应力，中国工业出版社，1965）.

[A2] Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., Theory of plates and shells, McGraw-Hill, 1959（中译本：S. 铁摩辛柯，S. 沃诺斯基，板壳理论，科学出版社，1977）.

王克仁 译 诸德超 校

Sheppard 校正 [Sheppard corrections; Шеппарда поправки]，对矩的

对连续型随机变量实现的离散化的校正．在连续随机变量的矩的估计问题中，此校正用于在给定舍入体系下减小系统误差．这样的校正是 W. F. Sheppard 在[1]中首先得到的．

假设随机变量 X 有连续型分布函数，其概率密度 $p(x)$ $(x\in\mathbf{R}^1)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 中处处有 s 阶连续导数 $p^{(s)}(x)$，并且满足条件：对某个 $\delta>0$，当 $x\to\infty$ 时，有

$$p^{(s)}(x)=O(|x|^{-1-\delta});$$

又设存在矩（moment）$\alpha_k=\mathbf{E}X^k$．其次，假设给出观测结果的舍入体系（即选定计量的始点 x_0 和步长 h，$h>0$），致使所观测的实质上并非原连续型随机变量 X 的实现，而是离散型随机变量

$$Y=x_0+h\left[\frac{X-x_0}{h}+\frac{1}{2}\right]$$

的实现 $x_m=x_0+mh\,(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，其中

$[a]$ 表示数 a 的整数部分．随机变量 Y 的矩 $a_i=\mathrm{E}Y^i(i=1,\cdots,k)$ 的计算公式为：

$$a_i=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_m^i\mathrm{P}\{Y=x_m\}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_m^i\int_{x_m-h/2}^{x_m+h/2}p(x)dx.$$

一般 $a_i\neq\alpha_i$．因而产生问题：能否对矩 $a_1,\cdots,a_k$ 进行校正，使之提供矩 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 的"好的"逼近？Sheppard 校正对此问题作出了肯定的回答．

设 $g(t)$ 是随机变量 X 的**特征函数**（characteristic function），$f(t)$ 是随机变量 Y 的特征函数；而

$$\varphi(t)=\mathrm{E}e^{it\eta}=\frac{2}{th}\sin\frac{th}{2}$$

是与 X 统计独立且在区间 $[-h/2,h/2]$ 上均匀分布的随机变量 η 的特征函数．在这种情形下，当 h 较小时，有

$$f(t)=g(t)\varphi(t)+O(h^{s-1}).$$

由此可见，离散型随机变量 Y 的矩精确到 $O(h^{s-1})$ 与随机变量 $X+\eta$ 的矩相同，从而下列等式精确到 $O(h^{s-1})$ 成立：

$$\alpha_1=a_1,\ \alpha_4=a_4-\frac{1}{2}a_2h^2+\frac{7}{240}h^4,$$

$$\alpha_2,=a_2-\frac{1}{12}h^2,\ \alpha_5=a_5-\frac{5}{6}a_3h^2+\frac{7}{48}a_1h^4,$$

$$\alpha_3=a_3-\frac{1}{4}a_1h^2,$$

$$\alpha_6=a_6-\frac{5}{4}a_4h^2+\frac{7}{16}a_2h^4-\frac{31}{1344}h^6\cdots$$

这些式子包含着对矩 $a_1,\cdots,a_k$ 的所谓 Sheppard 校正．

参考文献

[1] Sheppard, W. F., On the calculation of the most probable values of frequency-constants for data arranged according to equidistand divisions of a scale, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 29(1898), 353－380.

[2] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H．克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）.

[3] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Wiley, 1962.

[4] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

М. С. Никулин 撰　周概容　王健 译

移位动力系统［shift dynamical system；сдвигов динамическая система］

连续函数 φ：$\mathbf{R}\to S$（S 是度量空间）的一个赋予紧开拓扑（compact-open topology）（即在区间上一致收敛的拓扑）的空间上的一个**动力系统**（dynamical system）f^t（或用不同记号 $f(t,\cdot)$）．它由

$$f^t\varphi=T_t\varphi$$

定义，这里 T_t 是作移位 t 的**移位算子**（shift operator），即有

$$T_t\varphi(\cdot)=\varphi(\cdot+t).$$

这样，移位动力系统中点 φ 的轨道是 φ 的所有移位，即所有形如 $\varphi(t+\tau)$（$\tau\in\mathbf{R}$）的函数的集合．此轨道的闭包是所有形如

$$\tilde{\varphi}(\tau)=\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k+\tau)$$

的函数的集合，其中的极限在任一区间上是一致的．对移位动力系统赋予规范化**不变测度**（invariant measure）；基于 Боголюбов-Крылов 定理，这些测度恒存在（Боголюбов-Крылов 不变测度集中在紧集上）．

在动力系统理论中，移位动力系统主要用来构造例子（此时 S 通常取为 $\mathbf{R}$；紧集上非严格遍历系统的 Марков 例子（Markov example），它的每个轨道是处处稠密的，以及其他例子）；在非自治常微分方程组理论中也是如此，此时 S 通常取为 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 映射的一个空间（在线性齐次非自治系统中通常取 $S=\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$）．

亦见**奇异指数**（singular exponents）；**中心指数**（central exponents）．　　В．М．Миллионщиков 撰

【补注】 上面定义的移位动力系统常称为 Bebutov 系统（Bebutov system）；见［A3］．Bebutov-角谷定理（Bebutov-Kakutani theorem）断言，紧度量空间上的动力系统同构于 $S=\mathbf{R}$ 的 Bebutov 系统的一个子系统，当且仅当它的不变点的集合同胚于 $\mathbf{R}$ 的一个子集（见［A5］，其推广见［A4］）．

上述 Марков 例子见［A7］第六章，9.35．关于 Bebutov 系统对非自治常微分方程组的应用，见［A8］．

通常把移位动力系统理解为形如 (Ω_S,σ) 的离散时间系统（**瀑布**（cascade））；这里 S 表示一个有限非空集，$\Omega_S=S^{\mathbf{Z}}$ 是所有元素取自 S 的双向无穷序列构成的空间，赋予通常积拓扑（当连同其离散拓扑考虑 S 时，Ω_S 恰是赋予紧开拓扑的空间 $C(\mathbf{Z},S)$），σ 是作移位 1 的移位算子，即对 $x=(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}\in\Omega_S$，有 $(\sigma x)_n=x_{n+1}$，$n\in Z$．

这些（离散）移位系统在遍历理论和拓扑动力学中有重要作用．例如，Bernoulli 系统（Bernoulli system）是在 $S^{\mathbf{Z}}$ 上赋予乘积测度的移位系统，此乘积测度由 S 上的一个概率测度定义（见 **Bernoulli 自同构**（Bernoulli automorphism））．离散移位系统及其子系统（子移位（subshift））不仅用来构造特殊例子（对代换这

一重要方法，见[A6]），它们对研究一大类瀑布的性态也很重要，这种研究通过用 Ω_S(S 取为适当的集合)的元素对系统的轨道加以"编码"来进行（见符号动力学（symbolic dynamics））．最近证实用于对所谓有限型子移位（见[A2]）进行分类的这一方法对于信息处理也是有用的；见[A1]．

参考文献

[A1] Adler, R. L., Coppersmith, D., Hassner, M., Algorithms for sliding block codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **29** (1983), 5－22.

[A2] Adler, R., Marcus, B., Topological entropy and equivalence of dynamical systems, Amer. Math. Soc., 1979.

[A3] Furstenberg, H., Recurrence in ergodic theory and combinatonal number theory, Princeton Univ. Press, 1981.

[A4] Hajek, O., Representations of dynamical systems, *Funkcial. Ekvac.*, **114** (1971), 25－34.

[A5] Kakutani, S（角谷静夫）., A proof of Bebutov's theorem, *J. Differential Equations*, **4** (1968), 194－201.

[A6] Martin, J. C., Substitution minimal flows, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 503－526.

[A7] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949（中译本：B. B. 涅梅茨基，B. B. 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，科学出版社，1956）.

[A8] Sell, G. R., Topological dynamics and ordinary differential equations, v. Norstrand Reinhold, 1971.

沈永欢 译

移位算子[shift operator; сдвига оператор]

一个依赖于参数 t 的算子 T_t，它按公式

$$T_t\varphi(\cdot)=\varphi(\cdot+t)$$

作用于映射 $\varphi:A\to E$（这里 A 是 Abel 半群（semigroup），而 E 是一个集合）的一个集合 Φ 中（T_t 也称为移位 t 的算子（operator of shift by t）．半群 A 常取为 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}^+$（此时 T_t 是实变函数的某个空间中的移位），$\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{N}$（此时 T_t 是某个序列空间中的移位）．通常对集合 E 以及相应的集合 Φ 赋予某种（向量空间、拓扑向量空间、赋范空间、度量空间或概率空间）结构．

移位算子特别用于动力系统理论中（见移位动力系统（shift dynamical system）；**Bernoulli 自同构**（Bernoulli automorphism））．也使用"沿微分方程组轨道的移位算子"这一术语（见 **Cauchy 算子**（Cauchy operator））．

B. M. Миллионщиков 撰

【补注】 由作用于序列空间的移位算子生成的离散动力系统通常容易分析．它们由于下述 Smale-Birkhoff 定理（Smale-Birkhoff theorem）而在动力系统理论中占有很重要位置：含有一个**同宿点**（homoclinic point）（在该点处稳定流形与不稳定流形横截地相互作用）的离散时间**动力系统**（dynamical system）必包含一个紧不变集，在该集合上系统的动力同构于某种类型的周期轨道为稠密的移位．这是证明确定性**浑沌**（chaos）的熟知方法（[A1]，[A2]）．

参考文献

[A1] Guckenheimer, J., Holmes, P., Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer, 1983.

[A2] Smale, S., Diffeomorphisms with many periodic points, 载于 S. Cairns (ed.), Differential and combinatorial topology, Princeton Univ. Press, 1963, 63－80.

[A3] Никольский, Н. К., Лекции об операторе сдвига, М., 1980（英译本：Nikol'skii, N. K., Treatise on the shift operator: spectral function theory, Springer, 1986）.

沈永欢 译

移位参数[shift parameter; сдвига параметр]

函数族 $\{\varphi_\theta(\cdot)\}$ 的一个参数 θ，$\theta\in\Theta\subset\mathbf{R}^k$，它在 $\mathbf{R}^k$ 上由下式定义：对任一 $\theta\in\Theta$，

$$\varphi_\theta(\cdot)=\varphi(\cdot-\theta),$$

其中 $\varphi(\cdot)$ 是给定的 $\mathbf{R}^k$ 上的函数．

参考文献

[1] Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979（英译本：Ibragimov, I. A., Has'minskii, R. Z., Statistical estimation: asymptotic theory, Springer, 1981）.

M. C. Никулин 撰

【补注】 此参数亦称位置参数（location parameter）．

沈海玉 译

Шмидт 群[Shmidt group; Шмидта группа]

有限非幂零群，其所有真子群皆为**幂零群**（nilpotent group）．Шмидт 群是阶为 $p^\alpha q^\beta$ 的**可解群**（solvable group），这里 p，q 是不同的素数．任何有限非幂零群中必有某子群为 Шмидт 群．这种群是 О. Ю. Шмидт 在 1924 年引进的．

参考文献

[1] Шмидт, О. Ю., Избр. Труды, М., 1959.

H. H. Вильямс 撰

【补注】 Шмидт 问题（Shmidt problem，也拼写成 Smidt problem）是问何种无限群具有性质：它的所有真子群都是有限群．这种群有时也称为 Шмидт 群（在俄文文献中）．其答案如下：令 p 是素数．则有循环群的如下的唯一嵌入

$$C_{p^i}=\mathbf{Z}/(p^i)\to\mathbf{Z}/(p^{i+1})=C_{p^{i+1}}.$$

其有向极限是拟循环群(quasi-cyclic group)

$$C_{p^\infty} = \lim_{\substack{\rightarrow \\ i}} C_{p^i} = \mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p$$

(这里 Q_p 是有理数的 p 进完全化，而 $\mathbf{Z}_p$ 是 $\mathbf{Q}_p$ 的整数环). 若某个群的每个有限子集都生成有限群，就称它为局部有限的(locally finite). 有如下结果：若无限的局部有限群仅有有限子群，则它必为拟循环群 C_{p^∞} 之一. 这样的群称为 Prüfer 群(Prüfer group).

参考文献

[A1] Kegel, O. H. and Wehrfritz, B. A. F., Locally finite groups, North-Holland, 1973, Chapt. 2, Thm. 2.6.

[A2] Kargapolov, M. I. and Merzlyakov, Yu. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979. Chapt. 1, § 2(译自俄文).

石生明 译　王　杰 校

Шнирельман 法 [Shnirel'man method; Шнирельмана метод]

Л. Г. Шнирельман 于 1930 年创立的相加正整数序列的一种方法. 设 $\nu(x) \neq 0$ 是给定正整数序列中不大于 x 的元素个数. 类似于集合的测度，定义序列的密度(density of a seqence)为

$$\alpha = \inf_{n=1,2,} \frac{\nu(n)}{n}.$$

给定两个序列 A, B, 元素为 $c = a + b(a \in A, b \in B)$ 的序列 C 称为 A 与 B 之和.

Шнирельман 定理(Shnirel'man theorem) 1)：如果 α, β 分别是序列 A, B 的密度，则 A, B 之和的密度为 $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$. 如果把一个序列与其自身相加有限次后得到全体自然数的序列，则最初的序列称为一个基. 此时每个自然数可表示为给定序列中数目有限制的一些项之和. 具有正密度的序列是一个基.

Шнирельман 定理 2)：序列 $\mathscr{P} + \mathscr{P}$ 具有正密度，这里序列 $\mathscr{P}$ 由 1 及所有素数组成；因此，$\mathscr{P}$ 是自然数序列的一个基，即每个不小于 2 的自然数能表示为个数有上界的一些素数之和. 对于相加项的个数(Шнирельман 绝对常数(Shnirel'man absolute constant)), 已得到估计 $S \leqslant 19$. 在通过相加项为 S(称为 Шнирельман 常数(Shnirel'man constant))的素数之和表示充分大的自然数 $n \geqslant n_0$ 的情形，Шнирельман 法连同解析方法给出 $S \leqslant 6$. 然而，用 И. М. Виноградов 的更加强有力的**三角和法**(trigonometric sums, method of), 已得到 $S \leqslant 4$.

应用 Шнирельман 法可证明：由 1 和形如 $p + a^m$(p 是一素数，a 是一不小于 2 的自然数，$m = 1, 2, \cdots$)的数构成的序列是自然数序列的一个基(Н. П. Романов, 1934).

参考文献

[1A] Шнирельман, Л. Г., Ueber additive Eigenschaften von Zahlen, *Math. Ann.*, **107** (1933), 649 - 690.

[1B] Шнирельман, Л. Г., 《Успехи матем. наук》, 7 (1940), 7 - 46

[2] Хинчин, А. Я., Три жемчужины теории чисел, 2 изд., М.-Л, 1948(中译本：А. Я. 辛钦，数论的三颗明珠，上海科学技术出版社，1984).

[3] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957

Н. И. Климов 撰　沈永欢 译

冲击波的数学理论 [shock waves, mathematical theory of; ударных волн математическая теория]

介质参量的间断面(所谓的冲击波)的性质、运动和与周围介质相互作用的数学描述. 在广义和更抽象的意义上冲击波的数学理论是描述一阶拟线性双曲型偏微分方程组(见**拟线性双曲型方程和方程组**(quasi-linear hyperbolic equations and systems))解的间断面的性质. 冲击波的数学理论是在 19 世纪下半叶与气体和可压缩流体的运动问题联系着出现的，它的基础是在 S. Earnshaw, B. Reimann, W. Rankine, H. Hugoniot 的工作中建立的(见例如[1] - [4]).

当把真实气体和流体理想化时,就把介质视为没有粘性和热传导的无耗散性质的介质. 在运动过程中在这种理想化的介质内可能出现所有流动参量(密度、压力、温度、速度等)分布的间断. 流动参量间断点的集合可能非常复杂. 只有最简单的基本情况被系统地研究过，这时该集合形成由第一类参量的间断点组成的块块光滑的间断面. 在一般情况下，二维间断面随时间进展在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中运动，冲击波是间断面的可能类型之一.

间断的出现使理想气体和流体的流动问题的数学提法大大复杂化，因为间断函数不能是气体动力学(流体动力学)微分方程的解. 所以，带间断面的流动由气体动力学的拟线性方程组(见**气体动力学方程**(gas dynamics, equations of))的广义解描述，且冲击波的数学理论组成了气体动力学积分守恒定律方程组的广义解理论的一部分.

间断面. 在间断面(surfaces of discontinuity)上应满足由质量、动量和能量积分守恒定律所导出的条件，唯有运动开始时刻的间断(所谓的初始间断(initial discontinuities))除外，此类间断可以是任意的. 设 $\Sigma(t)$ 是气体(流体)流动参量的光滑间断面，并设 D 是间断面运动的法向速度. 这里将只讨论由密度 $\rho(r, t)$, 压力 $p(r, t)$、气体单位质量内能 $\varepsilon(r, t)$ 和介质运动的速度矢 $u(r, t)$ 所表征的均质介质.

在面 $\Sigma(t)$ 的点上设 $u = u_n + u_\tau$, 其中 u_n 和 u_τ

分别是速度矢 u 的法向和切向速度分量（相对 $\Sigma(t)$）．面 $\Sigma(t)$ 上的质量、动量和能量流的连续性条件表示为等式形式：

$$\left.\begin{aligned}&[\rho(u_n-D)]=0,\ [p+\rho(u_n-D)^2]=0,\\&[\rho(u_n-D)u_\tau]=0,\\&[\rho(u_n-D)(\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{(u-D)^2}{2})]=0.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

式中方括号代表括号内的量在由间断面的一边过渡到另一边时值的跃变，即 $[f(r,t)]=f_1-f_0$，这里 f_1，f_0 是在由两边趋近点 $(\mathbf{r},t)\in\Sigma(t)$ 时量 f 在该点的极限值．条件（1）是给气体动力学方程在介质参量间断面上增加的内边界条件．

存在两类间断：$u_{n1}=u_{n0}=D$、$j=\rho_1(u_{n1}-D)=\rho_0(u_{n0}-D)=0$ 时的切向间断（tangential discontinuity）和 $j\neq0$ 时的冲击波（shock waves）．向量 j 称为穿过运动的间断面（冲击波）$\Sigma(t)$ 单位面积的质量流（mass flow）．

切向和接触间断．对于切向间断（$j=0$）在 $\Sigma(t)$ 上压力是连续的，$[p]=0$，而量 ρ，ε，u_τ 在 $\Sigma(t)$ 上可以有任意的跃变．如果量 $[\rho]$，$[\varepsilon]$ 中至少一个不为零，则间断也称为接触间断（contact discontinuity）．在接触间断情况面 $\Sigma(t)$ 是不同性质的特别是具有不同状态方程的介质的分界面，它由发自初始间断面的流线组成．

切向间断（$j=0$，$[u_\tau]\neq0$）是不稳定的，因为在甚至很小的气体和流体固有粘性作用下，由速度矢的分量 u_τ 表现的初始切向间断将发散为很宽的连续过渡区．一些特殊情况除外，这时这种间断是在短时间间隔内实现的（喷管中的切向间断，不同流动的混合区的初始区段，等等），人们不把它视为可容许的间断．这显现出把甚至小粘性的介质看作"理想"介质所带来的局限性，因为在理想介质中切向间断是保持的．所以，理想介质流动中切向间断的可容许性或不可容许性问题须对每个具体课题进行分析．

纯接触间断．现在 $j=0$，$[u_\tau]=0$，$[p]=0$，$[\rho]^2+[\varepsilon]^2\neq0$．这种间断可能被分子扩散过程破坏，通常，该过程相当慢，以致在一段有限时间间隔内接触间断可被视为稳定的．

然而，如果在一段长时间过程中接触边界上介质的加速度是指向密度低的介质一边，则接触间断也可能变得不稳定并迅速瓦解．在这种情况下，接触间断被破坏且初始位于接触间断两边的介质开始"掺混"．一个类似的、明显多维的不稳定性的简单例子是一个容器中在其下部盛轻流体而上部盛较重流体的水平接触间断在重力场中的解体（所谓的 Rayleigh-Taylor 不稳定性（Rayleigh-Taylor instability））．

冲击波（Shock waves）．在这情况下 $j=\rho_1(u_{n1}-D)=\rho_0(u_{n0}-D)\neq0$ 和由（1）得 $[u_\tau]=0$，即不存在速度矢的切向间断．冲击波 $\Sigma(t)$ 上的条件（1）导致三个方程

$$\left.\begin{aligned}&[\rho(u_n-D)]=0,\ [p+\rho(u_n-D)^2]=0,\\&\left[\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{(u_n-D)^2}{2}\right]=0.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

它们称为 Rankine-Hugoniot 条件（Rankine-Hugoniot conditions）．如果 $u_\tau=0$，则冲击波称为正的（straight），在相反情况下称为斜的（oblique）．由（2）中消去 $(u_{n1}-D)$ 和 $(u_{n0}-D)$ 就给出关系式

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_1-\varepsilon_0+\frac{1}{2}(V_1-V_0)(p_1+p_0)=0,\\&V=\frac{1}{\rho}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

它只联系着冲击波两边介质的热力学参量，此关系式称为冲击绝热曲线（adiabatic shock）或 Hugoniot 绝热曲线（Hugoniot adiabatic）．

设面 $\Sigma(t)$ 沿 D 方向由左向右运动，这时，如果 $j<0$，则冲击波相对介质向右运动，物质相对 $\Sigma(t)$ 由右向左运动穿过冲击波 $\Sigma(t)$．反之，如果 $j>0$，则冲击波相对介质朝左运动．当 $j<0$ 时在冲击波右边的介质和 $j>0$ 时在冲击波左边的介质就称为冲击波波前的介质（medium in front of the shock wave），其他的介质是冲击波波后的介质（medium beyond the shock wave）．冲击波波前介质的参量是 $u_{n0}=u_0$，V_0，p_0，ε_0；冲击波波后介质的参量是 $u_{n1}=u_1$，V_1，p_1，ε_1．在运动过程中冲击波波前的质点穿过冲击波面 $\Sigma(t)$ 并汇入冲击波波后的介质（u_0，V_0，p_0，$\varepsilon_0\to u_1$，V_1，p_1，ε_1）．并且，它穿过一个陡梯度区（冲击波区），不论物质的粘性和热传导系数多小也不能忽略耗散过程——摩擦和热传导．鉴于耗散过程的不可逆性，必须满足条件 $S_0<S_1$，这里 S 是气体的熵．这个不等式不允许交换状态 u_0，V_0，p_0，ε_0 和 u_1，V_1，p_1，ε_1 的位置（按（2）和（3）是允许的），但指明了这些状态相对于面 $\Sigma(t)$ 的位置．

条件 $S_1>S_0$ 称为冲击波的稳定性条件（stability condition of the shock wave）．冲击波的现实性（容许性）问题，按照它（2），（3）和 $S_1>S_0$ 成立，只对所谓的正常气体能够相对容易地解决．气体（流体）将称为正常气体（normal gas），如果它的状态方程有如下形式的话：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial V}(V,S)<0,\ \frac{\partial^2 p}{\partial V^2}(V,S)>0,\\&p(V,S)\to\infty\ 当\ V\to0\ 时,\\&\frac{\partial p}{\partial S}(V,S)>0,\ c_V=\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}(V,T)>0.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

对于正常气体条件 $S_1 > S_0$ 保证了冲击波的稳定性：这时，根据 Hugoniot 条件（2）冲击波阵面后的状态 u_1、V_1，p_1，ε_1 被给定的状态 u_0、V_0，p_0，ε_0 及质量流 j 唯一确定，如果

$$-j^2 < \frac{\partial p}{\partial V}(V_0, S_0)$$

的话．根据冲击波的稳定性条件 $S_1 > S_0$ 得出性质：a）冲击波以超声速沿波前介质和以亚声速沿波后介质而运动（Tsemplen 定理（Tsemplen theorem）），即

$$|u_0 - D| > c_0,\quad |u_1 - D| < c_1,$$

$$c^2 = -V^2 \frac{\partial p}{\partial V}(V, S);$$

b）冲击波导致物质压缩和物质内的压力增加，即 $S_1 > S_0$ 意味着 $\rho_1 > \rho_0$，$p_1 > p_0$．

冲击绝热曲线．对于正常气体冲击绝热线（3）在（V，p）平面上表现为下凹曲线 $H(V, p; V_0, p_0) = 0$，$V_1 = V$，$p_1 = p$，它通过称为冲击绝热线中心（centre of the adiabatic shock）的点（V_0，p_0）．冲击绝热线的 $V < V_0$ 段位于 Poisson 绝热线 $S = S_0$ 的上方，而 $V > V_0$ 段位于其下方，在点（V_0，p_0）处这两条绝热线至少二阶相切．冲击波阵面后的状态（V_1，p_1）对应冲击绝热线的左支（$V < V_0$）．

对具有如下状态方程的介质

$$pV = RT,\ \varepsilon = \frac{pV}{\gamma - 1},\ \gamma = 常数 > 1$$

（所谓的理想气体（ideal gas）），条件（4）成立且方程（3）取形式

$$\left.\begin{aligned}&(p + hp_0)(V - hV_0) = (1 - h^2)p_0V_0,\ p = p_1,\\ &V = V_1,\ 0 < h = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} < 1.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

方程（5）定义一条具有渐近线 $V = hV_0$，$p = -hp_0$ 的双曲线．在无限强冲击波（infinitely strong shock wave）后边达到介质的极限压缩度：

$$\frac{p_1}{p_0} = \infty,\ \frac{V_0}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{h} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

根据给定的 u_{n0}，ρ_0，p_0 和 D 表出的（2）的解 u_{n1}，ρ_1，p_1 由下列公式给出：

$$\left.\begin{aligned}&u_{n1} = u_{n0} - (\operatorname{sign} j)(1 - h)c_0\left[M_0 - \frac{1}{M_0}\right],\\ &\rho_1 = \rho_0 \frac{M_0^2}{(1 - h + hM_0^2)},\\ &p_1 = p_0[(1 + h)M_0^2 - h];\\ &M_0 = \frac{|u_0 - D|}{c_0},\ M_0 > 1.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

对于具有反常热力学性质的气体，这时条件（4）遭破坏，$S_1 > S_0$ 的要求已不保证冲击过渡的稳定性（容许性）．冲击过渡容许性的条件问题非常复杂，且对于具有只满足必要的热力学条件的任意状态方程的气体尚未解决．研究最多的情况是，条件（4）中仅只条件 $p''_{VV}(V, S) > 0$ 受破坏且 $p''_{VV}(V, S)$ 可能变号．在这种情况下冲击绝热线（3）含有状态 V_1，p_1，ε_1，对该状态冲击过渡 V_0，p_0，$\varepsilon_0 \to V_1$，p_1，ε_1 甚至在条件 $S_1 > S_0$ 满足时也是不稳定的．

冲击过渡区及其宽度．这是对具有有限粘性和热传导性的实际介质情况介质参量由它在冲击波波前的值变到其波后值的连续变化区域．这里假定只对稳定的冲击波存在连续过渡，所以连续冲击过渡的研究就给出冲击波的容许性判据．还研究过渡区中介质参量变化的特性．

对狭窄的过渡区任何冲击波都可视为局部平的，所以，冲击过渡可以用粘性和热传导气体的具有平面对称性的一维气体动力学方程的解来描述：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big[p + \rho u^2 +\\ &-\left(\frac{4\mu}{3} + \mu_v\right)\frac{\partial u}{\partial x}\Big] = 0.\\ &\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\varepsilon + \rho\frac{u^2}{2}\right] +\\ &+\Big[\rho u\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) +\\ &-\left(\frac{4\mu}{3} + \mu_v\right)u\frac{\partial u}{\partial x} - \kappa\frac{\partial T}{\partial x}\Big] = 0.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

式中 μ 和 κ 是粘性和热传导系数（这里假定是常数），μ_v 是体积粘性．给方程（7）再补充由 $\varepsilon = \varepsilon(V, T)$ 得的状态方程 $p = p(V, T)$．在以冲击波速度 D 运动的坐标系中，冲击过渡可以描述为方程（7）的定常解，对它们得到两个方程：

$$\left.\begin{aligned}&j\mu\frac{dV}{dx} = M(V, T) = p + j^2V - f,\\ &\kappa\frac{dT}{dx} = L(V, T) = j\left[\varepsilon - \frac{j^2V^2}{2} + fV\right] - g.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

其中 $j > 0$，f 和 g 是常数．

对方程（8）必须求这样的解 $V(x)$，$T(x)$：当 $x \to \infty$ 时 $V(x) \to V_0$，$T(x) \to T_0$ 和当 $x \to -\infty$ 时 $V(x) \to V_1$，$T(x) \to T_1$．这种解存在的必要条件

$$M(V_0, T_0) = L(V_0, T_0) =$$
$$= M(V_1, T_1) = L(V_1, T_1) = 0$$

就化为 Hugoniot 条件（2）．

定性研究方程组（8）的积分曲线图象导致结论：

如果气体的状态方程满足条件(4)，参量 $V_0, p_0, u_0, \varepsilon_0$ 和 $V_1, p_1, u_1, \varepsilon_1$ 满足 Hugoniot 条件，冲击波的稳定性条件 $S_1 > S_0$ 成立，则存在此问题唯一的积分曲线．冲击过渡区的“宽度”是无限的，并且向极限值的趋近是按指数规律进行的．在非粘性的热传导气体的情况下($\mu = 0, \kappa > 0$)，此情况可看作一般情况的 $\mu \to 0$ 极限，如果在变量 V, T 的平面上曲线 $M(V, T) = 0$ 是单调的，则也存在冲击波过渡问题的连续解．在相反情况下(这在足够强冲击波时出现)积分曲线在 $\mu \to 0$ 时的极限可能有温度不变的密度间断(所谓的等温跃变(isothermal jump))．这意味着无粘性的导热介质的气体动力学方程的解可能是间断的．如果介质有粘性($\mu > 0$)而无热传导性($\kappa = 0$)，则总是存在连续过渡 $V_0, T_0 \to V_1, T_1$．由此可得结论，粘性介质的气体动力学方程的解不可能有冲击波类型的间断，亦即对于它 Cauchy 问题有整体解(对任何 $t > 0$)．但是，这结论的严格证明尚没有．

类似地，可以对理想气体 $p = RT/V$，$\varepsilon = c_V T$ (这里 R, c_V 是常数)研究冲击波过渡．方程(8)可在这情况下在 $\kappa = 0, \mu > 0$ 时求出积分：

$$[V_0 - V(x)]^{V_0/(V_0 - V_1)}[V(x) - V_1]^{V_1/(V_0 - V_1)} = $$

$$= c \exp \frac{(\gamma + 1)x}{2\mu}.$$

冲击过渡区的有效宽度定义如下：

$$l = \frac{V_0 - V_1}{\max\left|\frac{dV}{dx}(x)\right|}.$$

计算表明，冲击波的宽度 l 具有分子自由程的量级．

这证明了这样的观点，按该观点气体流动划分为可逆过程区域和不可逆过程区域，在可逆过程区内流动可以用不考虑耗散项的气体动力学方程描述，而不可逆过程区域则表现为可以用运动的间断面(冲击波)有效地描述的狭窄区间．更确切地说，在冲击过渡区中介质参量的行为是由非平衡态的气体动力学过程的 **Boltzmann 方程**(Boltzmann equation)描述．

对于具有反常热力学性质的气体，冲击过渡区的研究更为复杂．$p''_{VV}(V, S)$ 变号的情况已被研究过．设(8)中 $\kappa = 0, \mu > 0$，这时 $L(V, T) = 0$ 和 $V(x), T(x)$ 的确定就化为求解单个方程：

$$j\mu \frac{dV}{dx} = M(V, T) = [p(V, T) + j^2 V - f]. \quad (9)$$

这方程的解 $V = V(x)$(当 $x \to -\infty$ 时 $V(x) \to V_0$ 和当 $x \to +\infty$ 时 $V(x) \to V_1$)将存在，假如 V_0, p_0, ε_0 和 V_1, p_1, ε_1 在冲击绝热线(3)上和假如

$$\frac{p - p_0}{V - V_0} \geqslant -j^2 = \frac{p_1 - p_0}{V_1 - V_0} \quad (10)$$

当 $(V - V_0)(V - V_1) < 0$ 时在曲线 $L(V, T) = 0$ 的点上．

由(10)得出 $S_1 \geqslant S_0$，并且如果 $S_1 = S_0$，则在变量 V, p 平面上点 (V_0, p_0) 和 (V_1, p_1) 之间的 Hugoniot 绝热线(3)的线段乃是直线 $p - p_0 = j^2(V_0 - V)$ 的线段．不等式(10)给出了 $p''_{VV}(V, S)$ 变号情况时冲击波容许性的条件．冲击波的基本性质在这情况下变更为：a) $|u_{n0} - D| \geqslant c_0$, $|u_{n1} - D| \leqslant c_1$；b) 冲击波导致不减少熵($S_1 \geqslant S_0$)．存在压缩冲击波($\rho_1 > \rho_0$)和稀疏冲击波($\rho_1 < \rho_0$)．

冲击波的产生．在理想介质中由于初始间断分解成稳定间断(冲击波、接触间断和切向间断)的结果，以及在连续到一定时刻的流动过程中都会碰见冲击波．例如，在理想气体的一维等熵流动中($S(x, t)$ = 常数)，如果在 $t = 0$ 时条件

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u - \frac{2}{\gamma - 1}c\right] \geqslant 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[u + \frac{2}{\gamma - 1}c\right] \geqslant 0$$

成立，则不产生冲击波，反之，如果这些条件中任一个被破坏，则产生冲击波．

在拟线性双曲型方程和方程组的间断解理论中也发展了间断理论，类似于气体动力学中的冲击波数学理论．只对两个独立变量 x 和 t 的情况获得了基本结果(远不完全)．一个拟线性方程

$$u_t + [\varphi(u)]_x = 0 \quad (11)$$

可视为守恒定律，这时 $\varphi(u)$ 是量 u 的流．过间断线 $x = x(t)$ 的流动连续性导致条件

$$[Du - \varphi(u)] = 0; \; D = x'(t), \quad (12)$$

它类似(1)可以称为 Hugoniot 条件(Hugoniot condition)．像对气体动力学中的冲击波那样，给(12)加上间断稳定性的要求，这就保证间断函数族中(11)的 Cauchy 问题解的唯一性．如果 $\varphi(u) \in C^2$ 和 $\varphi''_{uu}(u) \neq 0$，则稳定性条件取形式

$$\varphi'_u(u(x(t) - 0, t)) \geqslant \varphi'_u(u(x(t) + 0, t)).$$

对拟线性守恒定律方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial x} = 0, \; i = 1, \cdots, n,$$

$$u = \{u_1, \cdots, u_n\}, \quad (13)$$

Hugoniot 条件有形式(12)，其中 $u = \{u_1, \cdots, u_n\}$，$\varphi(u) = \{\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u)\}$．求找间断稳定性的正确条件的问题只对很窄一类形式(13)的方程组得到了解决．

参考文献

[1] Earnshaw, S., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **150**

(1860), 133 − 148.

[2] Riemann, B., Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, in Gesamm math Werke, Dover, reprint, 1953, 156 − 175.

[3] Rankine, W. J. M., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **160** (1870), 277 − 288.

[4] Hugoniot, H., *J. École Polytechn.*, **58** (1889), 1 − 125.

[5] Кочин, Н. Е., Сбор. соч., т. 2, М-Л, 1949, 5 − 42.

[6] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Механика сплошных сред, 2 изд., М., 1954 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹, 连续介质力学, 人民教育出版社, 1958).

[7] Weyl, H., Shock waves in arbitrary fluids, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2** (1949), 103 − 122.

[8] Gilbarg, D., The existence and limit behavior of the onedimensional shock layer, *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 256 − 274.

[9] Becker, R., *Z. Phys.*, **8** (1922), 321 − 362.

[10] Courant, R. and Friedrichs, K. O., Supersonic flow and shock waves, Interscience, 1948 (中译本: R. 柯朗, K. O. 弗里德里克斯, 超声速流与冲击波, 科学出版社, 1986).

[11] Седов, Л. И., Механика сплошной среды, 3 изд., т. 1, М., 1976 (英译本: Sedov, L. I., A course in continuum mechanics, 1 − 4, Wolters-Noordhoff, 1971 − 1972).

[12] Зельдович, Я. Б., Теория горения и детонации газов, М.-Л., 1944.

[13] Рождественский, Б. Л., Яненко, Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, 2 изд., М., 1978 (英译本: Rozhdestvenskii, B. L. and Yanenko, N. N., Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics, Amer. Math. Soc., 1983).

[14] Олейник, О. А., 《Успехи матем. наук》, 12 (1957), 3, 3 − 73. Б. Л. Рождественский 撰

【补注】 关于应用 Boltzmann 方程描述冲击波过渡区中流体力学变量行为的简短结论意见需要某些澄清. 冲击波结构的问题已是许多研究工作的课题([A1]); 对于弱冲击波(M_0 接近 1) Boltzmann 方程的解与可压缩流体的 Navier-Stokes 方程的解相一致, 但当 M_0 增加时($M_0 \geqslant 2$)这两个解有很大差别.

参考文献

[A1] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1988.

[A2] Smoller, J., Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer, 1983. 李维新 译

打靶法 [shooting method; пристрелки метод]

求解常微分方程初值和边值问题的一种方法. 这方法即引入一些控制变量(参数)然后由方程组决定它们, 这里参数的选取对加速方程组的求解有决定的影响.

设在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上给出了微分方程

$$y' = F(x, y) \tag{1}$$

及边值条件

$$g(y(a), y(b)) = h, \tag{2}$$

要求定出 x 的向量函数 $y = (y_1, \cdots, y_n)^T$, 向量函数 $F = (F_1, \cdots, F_n)^T$ 和 $g = (g_1, \cdots, g_n)^T$ 是已知的, 数值向量 $h = (h_1, \cdots, h_n)^T$ 也是给定的.

设 **Cauchy 问题** (Cauchy problem)

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = F(x, Z), \tag{3}$$

$$Z(a, r) = r, \tag{4}$$

其中 $Z = (Z_1, \cdots, Z_n)^T$, $r = (r_1, \cdots, r_n)^T$, 有唯一解 $Z(x, r)$ 定义于 $a \leqslant x \leqslant b$, $r \in \mathbf{R}^n$. 在(2)中以已给值 $Z(a, r) = r$ 代 $y(a)$, 而以计算此 Cauchy 问题所得的值 $Z(b, r)$ 代 $y(b)$, 则得关于参数 r 的方程

$$g(r, Z(b, r)) = h. \tag{5}$$

打靶法的算法如下. 先求(5)之一解 $r = r^*$, 然后要求解的边值问题(1)−(2)的解即为 Cauchy 问题

$$y' = F(x, y), \quad y(a) = r^*$$

之解. 后一问题可用数值方法解出. 解(5)时通常要用某种迭代方法.

如果 y 的某些分量只依赖于 $y(a)$ 而其余分量只依赖于 $y(b)$, 则可用另外的参数选取方法(见[1], 又见**非线性边值问题, 数值方法** (non-linear boundary value problem, numerical methods)). 打靶法还有其他的类型(见[4]). 打靶法也用于求解网格边值问题.

参考文献

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М. 1975 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977).

[2] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы, 2 изд., М. 1977 (英译本: Godunov, S. K., Ryaben'kii, V. S., The theory of difference schemes, North-Holland, 1964).

[3] Крылов, В. И., Бобков, В. В., Монастырный, П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977.

[4] Hall, G. and Watt, J. M. (eds.), Modern numerical methods for ordinary differential equations, Clarendon Press, 1976. А. Ф. Шапкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ascher, U., Matthey, R. M. M. and Russell, R., Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations, Prentice-Hall, 1988.

齐民友 译

最短线 [shortest line; кратчайшая линия]

在度量空间中连结两点的曲线，其长度不大于任何连结这两点的其他曲线的长度．在平面上，最短线是直线段，而在球面上它们是大圆周弧．在 Riemann 空间中，**测地线** (geodesic line) 的一小截是最短线；对应的一小截测地线的长度能够根据空间的曲率和拓扑进行估计．最短线在度量不加任何正则性条件的曲面的大范围几何学中担当重要的角色．在有**内度量** (internal metric) 的一般空间的公理化构造中这些概念是基本的和简单的：一般凸曲面的许多内在的和外在的性质能够用最短线的性质来证明（见**凸曲面** (convex surface)）．

А. Д. Милка 撰 陈维桓 译

散粒效应 [shot effect; дробовой эффект]

一个线性系统，当其输入上有在随机时刻产生的随机扰动时，对于该系统输出上电压涨落的数学描述．若 $W(t, \tau)$ 是系统在时刻 t 由在时刻 $\tau \leqslant t$ 所施加的单一脉冲引起的输出，散粒效应可由**随机过程** (stochastic process)

$$X(t)=\sum_{\{k:\tau_k\leqslant t\}}\alpha_k W(t, \tau_k)$$

予以描述，其中 $\cdots<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_k<\cdots$ 是脉冲到达时刻，而 α_k 是表征脉冲强度量值的随机变量．在 $W(t, \tau)=W(t-\tau)$, $W(s)=0$, $s\leqslant 0$, 的特殊情况下，α_k 是具有有限方差的均匀分布独立随机变量，而 $\cdots<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\cdots$ 形成具有参数 λ 的事件的 **Poisson 流** (Poisson flow)，过程 $X(t)$ 狭义上是**平稳随机过程** (stationary stochastic process)，具有

$$\mathrm{E}X(t)=\lambda \mathrm{E}\alpha_1\int_0^\infty W(s)ds,$$

$$\mathrm{D}X(t)=\lambda \mathrm{E}\alpha_1^2\int_0^\infty W^2(s)ds.$$

参考文献

[1] Laning, J. H. and Battin, R. G., Random processes in automatic control, McGraw-Hill, 1956.

А. Н. Ширяев 撰

【补注】

参考文献

[A1A] Rice, S. O., Mathematical analysis of random noise, *Bell Systems Techn. J.*, 23 (1944), 283－332.

[A1B] Rice, S. O., Mathematical analysis of random noise, *Bell Systems Techn. J.*, 24 (1945), 46－156.

[A2] Wax, N., Selected papers on noise and stochastic processes, Dover, reprint, 1953.

[A3] Parzen, E., Stochastic processes, Holden Day, 1962.

[A4] Wong, E., Stochastic processes in information and dynamical systems, McGraw-Hill, 1971.

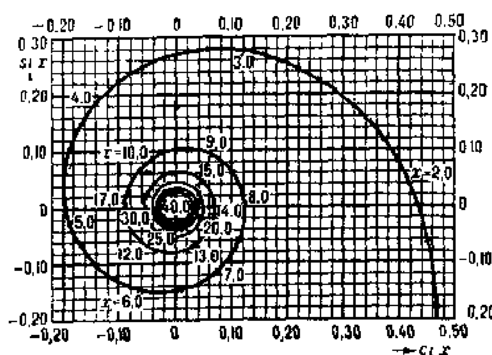
徐锡申 译

si-ci 螺线 [si-ci-spiral; si-ci-спираль]

一条平面曲线，在 Discartes 直角坐标系中其方程形式为

$$x=\mathrm{ci}(t),\ y=\mathrm{si}(t),$$

其中 ci 是**积分余弦** (integral cosine)，si 是**积分正弦** (integral sine)，t 是实参数（见图）．



从 $t=0$ 到 $t=t_0$ 的弧长等于 $\log t_0$，曲率等于 $\kappa=t_0$．

参考文献

[1] Jahnke, E., Emde, F. and Lösch, F., Tafeln höheren Funktionen, Teubner, 1966.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1972.

杜小杨 译

Siegel 区域 [Siegel domain; Зигеля область]

一个在 $(n+m)$ 维复仿射空间中形如

$$D(V, F)=$$
$$=\{(z, w)\in \mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^m: \mathrm{Im}\,z-F(w, w)\in V\}$$

的有界区域，其中 V 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一开凸锥又 $F: \mathbf{C}^m\times\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^n$ 是一映射，它是一 V-Hermite 形式 (V-Hermitian form)，即 F 关于第一个变元是线性的，$F(w', w)=\overline{F(w, w')}$, $F(w, w)\in\bar V$（其中 $\bar V$ 是 V 的闭包），又只当 $w=0$ 时 $F(w, w')=0$．当 $m=0$（也使得 $F=0$）时区域 $D(V, F)$ 称为第一类 Siegel

区域并简记为 $D(V)$；当 $m\neq 0$ 时，$D(V, F)$ 称为第二类 Siegel 区域．

Siegel 区域的最简单例子（第一类的）是 $\mathbf{C}$ 中的上半平面．C. L. Siegel（[1]）在他关于 Abel 簇的研究中，他研究 p 阶复对称矩阵空间中的区域 H_p，它由具正定虚部的矩阵组成．这个区域，现在称为 Siegel 上半平面（Siegel upper half-plane）（当 $p=1$ 就是通常的上半平面），它是关联于 p 阶正定对称矩阵锥的第一类 Siegel 区域．Siegel 区域的一般概念是由多复变数自守函数理论产生的（见[5]），以后这个概念变为齐性有界域理论的核心（见**齐性有界域**（homogeneous bounded domain））．

任何 Siegel 区域都解析同构于一有界域．例如，当 $n=1$ 时一 Siegel 区域同构于一复单位球

$$\{z\in\mathbf{C}^{m+1}: |z_1|^2+\cdots+|z_{m+1}|^2<1\}.$$

任何齐性有界域都同构于一关于仿射变换是齐性的 Siegel 区域．两个 Siegel 区域是解析同构的，当且仅当每一个都能用一仿射变换变到另一个（见[3]）．

参考文献

[1] Siegel, C. L., Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, *Math. Ann.*, **116** (1939), 617－657.

[2] Siegel, C. L., Analytic functions of several complex variables, Princeton Univ. Press, 1950.

[3] Kaup, W., Matsushima, Y. and Ochiai, T., On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 475－498.

[4] Murakami, S., On automorphisms of siegel domains, Lecture notes in math., 286, Springer, 1972.

[5] Итоги науки. Матем. анализ., 1963, М., 1965, 81－124.

Э. Б. Винберг 撰

【补注】 一般的 Siegel 区域是在 50年代后期由 И. И. Пятецкий-Шапиро 引进的（见[A1]）．他曾经发现一个齐性 Siegel 区域不是对称的例子．

参考文献

[A1] Пятецкий-Шапиро, И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, Москва, 1961（英译本：Piatetski-Shapiro, I. I. (I. I. Pyatetskiǐ-Shapiro), Automorphic functions and the geometry of classical domains, Gordon & Breach, 1969）.

钟同德 译

Siegel 法 [Siegel method; Зигеля метод]

研究满足系数在 $\mathbf{C}(z)$ 上的线性微分方程的 E 函数在代数点的值的算术性质的方法；首先由 C. L. Siegel（[1]）提出．

整函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{z^n}{n!}$$

称为 E 函数（E-function），如果它的所有系数 c_n 属于一个有限次代数数域（见**代数数**（algebraic number），域（field）），且对每个 $\varepsilon>0$、c_n 的最大模是 $O(n^{\varepsilon n})$，而且存在一列有理整数 $q_n=O(n^{\varepsilon n})$，使得 $q_nc_k(k=0,\cdots,n)$ 是代数整数．E 函数例子有 e^z，$\sin z$ 和 **Bessel 函数**（Bessel functions）$J_0(z)$．

设 $[\alpha,0]=1$，$[\alpha,n]=(\alpha+n-1)[\alpha,n-1]$，$n=1,2,\cdots$．如果 $a_1,\cdots,a_l$ 和 $b_1,\cdots,b_m$ 是有理数，$b_k\neq-1,-2,\cdots$，且 $m-l=t>0$，那么函数

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a_1,n]\cdots[a_l,n]}{[b_1,n]\cdots[b_m,n]}z^{tn}$$

是一个 E 函数：它满足一个系数在 $\mathbf{C}(z)$ 中的 m 阶线性微分方程．

Siegel 的主要结果是关于下述函数的值：

$$K_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}\left[\frac{z}{2}\right]^{2n}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left[\frac{z}{2}\right]^{\lambda}J_\lambda(z),$$

式中 $J_\lambda(z)$ 是 Bessel 函数．如果 λ 是一个有理数，$\lambda\neq\pm1/2,-1,\pm3/2,-2,\cdots$，则对任何代数数 $\alpha\neq0$，$K_\lambda(\alpha)$ 和 $K'_\lambda(\alpha)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是代数无关的（见**代数无关性**（algebraic independence））．

1949 年 Siegel 在一般情形下提出了他的方法，但是加在 E 函数 $f_1(z),\cdots,f_m(z)$ 上使得它们的值代数无关的条件很难检验．因此，他没能得到任何具体的新结果．

对 Siegel 方法的进一步发展和推广应归功于 А. Б. Шидловский（见[2]，[3]）：设 E 函数 $f_1(z),\cdots,f_m(z)$ 是微分方程组：

$$y'_k=q_{k0}+\sum_{i=1}^{m}q_{ki}y_i,\ k=1,\cdots,m,\ q_{ki}\in\mathbf{C}[z]\quad(1)$$

的一组解，α 是非零也非方程组（1）的奇点的一个代数数；则 m 个数 $f_1(\alpha),\cdots,f_m(\alpha)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上代数无关，当且仅当函数 $f_1(z),\cdots,f_m(z)$ 在 $\mathbf{C}(z)$ 上代数无关．特别地，这个定理说明，如果 $f_1(z),\cdots,f_m(z)$ 代数无关，那么所有的数 $f_k(\alpha)$ 是超越的（见**超越数**（transcendental number））；如果 A 是代数的，对函数 $f_k(z)$ 的非零 A 点，只要它不是方程组（1）的极点，上述结论同样成立．这个定理导致了关于某些特殊的 E 函数的许多结果，也导致了许多满足阶 >2 的线性齐次和非齐次微分方程的 E 函数的值的代数无关性的证明．例如，函数

$$\psi_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{kn}}{(n!)^k}$$

满足一个系数在 $\mathbf{C}(z)$ 中阶为 k 的线性微分方程；可以证明，对任意的代数数 $\alpha\neq0$，$r(r+1)/2$ 个数 $\psi_k^{(l)}(\alpha)$ $(l=0,\cdots,k-1,k=1,\cdots,r)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上代数无关．

在相同条件下，数 $f_1(\alpha),\cdots,f_m(\alpha)$ 中在 $\mathbf{Q}$ 上代数无关的最大数目等于函数 $f_1(z),\cdots,f_m(z)$ 在 $\mathbf{C}(z)$ 上代数无关的最大数目．如果 $f_1(z),\cdots,f_l(z)$ 是在 $\mathbf{C}(z)$ 上代数无关的 E 函数且适合方程组（1），则对所有点 α，除去有限多个例外，数 $f_1(\alpha),\cdots,f_l(\alpha)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是代数无关的．在每一个特定情形下，例外点的个数实际上是可以确定的．

实际上，关于 E 函数在代数点的值的超越性与代数无关性普遍本质性的问题，这些定理都提供了解答．

Siegel 法能够估计数 $f_1(\alpha),\cdots,f_m(\alpha)$ 的代数无关性度量，因此给出一个定量形式的结果．如果函数 $f_1(z),\cdots,f_m(z)$ 是代数无关的，则 $\Phi(f_1(\alpha),\cdots,f_m(\alpha);n,H)>CH^{-\gamma n^m}$，其中 $C>0$ 与 H 无关，$\gamma>0$ 仅仅与 m 及代数数 α 的次数有关．

参考文献

[1] Siegel, C. L., Ueber einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, *Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, 1929, 1, 1－41.

[2] Шидловский, А. Б., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **23**(1959), 1, 35－66.

[3] Шидловский, А. Б., 《Изв. АН СССР. Сер матем.》, **26**(1962), 6, 877－910.

[4] Шидловский, А. Б., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, **132** (1973), 169－202.

[5] Lang, S., A transcendence measure for E-functions, *Mathem.*, **9**(1962), 157－161.

[6] Фельдман, Н. И., Шидловский, А. Б., 《Успехи матем. наук》, **22**(1967), 3, 1－81.

Ю. В. Нестеренко 撰

【补注】 上文中，Φ 是代数无关性的度量，见**代数无关度**（algebraic independence, measure of）．

裴定一 译　赵春来 校

Siegel 定理［Siegel theorem; Зигеля теорема］

1）关于 Dirichlet L 函数的 Siegel 定理：对任给的 $\varepsilon>0$，存在常数 $c=c(\varepsilon)>0$，使得对任意的模 k 的非主的实 **Dirichlet 特征标**（Dirichlet character）χ 有

$$L(1,\chi)>\frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}}.$$

这首先由 C. L. Siegel（[1]）证明．定理的一个等价形式是关于 L 函数的实零点：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $c_1=c_1(\varepsilon)>0$，使得对任意的非主的实的 Dirichlet 特征标 χ，当 $z>1-c_1/k^{\varepsilon}$ 时 $L(z,\chi)\neq0$．常数 $c(\varepsilon)$ 和 $c_1(\varepsilon)$ 都是非实效的，即对任意的 $0<\varepsilon<1/2$，无法实际估算出它们的下界．因此，应用 Siegel 定理所得到的结论，都具有非构造性的特征标．例如，设 $h(-D)$ 是判别式为 $-D$ 的二次域的除子类数，由这定理就可推出：当 $\varepsilon<1/2$ 时

$$h(-D)>c_2(\varepsilon)D^{1/2-\varepsilon},$$

这里 $c_2(\varepsilon)>0$ 是非实效常数．类似的，设 $\pi(x;k,l)$ 是不超过 x 且可表为 $kn+l$ 形式的素数个数，A 为任意给定的正数．那么，对 $1\leqslant k\leqslant\log^A x$，$(k,l)=1$，一致地有估计

$$\pi(x;k,l)-\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{dt}{\log t}=O(xe^{-c_3\sqrt{\log x}}),$$

这里 $c_3>0$ 是非实效常数（也见**素数分布**（distribution of prime numbers））．

参考文献

[1] Siegel, C. L., Ueber die Klassenzhal quadratischen Zahlkorper, *Acta Arithmetica*, 1 (1935), 83－86.

[2] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, 1981.

[3] Карацуба, А. А., Основы аналитической теории чисел, 2 изд., М., 1983, гл. IX（中译本：卡拉楚巴，A. A. 解析数论基础，科学出版社，1984）．

С. М. Воронин 撰

【译注】

参考文献

[B1] 潘承洞、潘承彪，解析数论基础，科学出版社，1991．

2）关于整点的 Siegel 定理：关于某一类 Diophantus 方程有有限多个整数解的定理．这定理的最简单的形式可表述如下：设 $F(x,y)$ 是整系数多项式，它定义了亏格为 $g>0$ 的不可约曲线 $F=0$，那么方程 $F(x,y)=0$ 有有限多个整数解．这一结论（实际上是关于代数整数的更一般的形式）是 1929 年由 C. L. Siegel（[1]）证明的，他利用了 Diophantus 逼近和 Abel 簇的理论．这把由 A. Thue（见［2］，［3］）在 1908 年所开创的 Diophantus 方程理论中的一个研究方向推到了顶点．后来，这定理被推广到在整体域中的有限型子环上定义的亏格 $g>0$ 的任意仿射曲线的情形（见［5］）．特别地，上述方程 $F(x,y)=0$ 有有限多个如下形式的解：

$$\frac{m}{p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}},$$

其中 $m,m_1,\cdots,m_s\in\mathbf{Z}$，及 $p_1,\cdots,p_s$ 是给定的素数．直到最近，这个定理的各种证明，当说到解数有限时，都有一个共同的缺陷——不能给出定量估计（见**高**（**Diophantus 几何中的**）（height, in Diophantine geometry）），所以没有算法来明确地构造解．克服这一缺陷的第一个结果属于 A. Baker（1967）．对种种不同类型的 Diophantus 方程已经得到了 Siegel 定理的有

实效的证明，但是在一般情形下问题仍然没有解决（见[4]）．另一重要问题是把 Siegel 定理推广到维数大于 1 的簇．

参考文献

[1] Siegel, C. L., Ueber einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, 1 (1929), 41 – 69.

[2] Гельфонд, А. О., Решение уравнений в целых числах, 2 изд., М., 1956（中译本：盖里冯德，方程式的整数解，中国青年出版社，1955）.

[3] Davenport, H., The higher arithmetic, Hutchinson, 1952.

[4] Проблемы теории диофантовых приближений, М., 1974（译自英文）.

[5] Lang, S., Diophantine geometry, Interscience, 1962.

А. Н. Паршин 撰

【补注】 Mordell 猜想是说：对任意数域 K 及任意定义在 K 上的亏格大于 1 的光滑代数曲线 $F(X, Y) = 0$，仅有有限个 K 有理解．它已由 G. Faltings 在 1983 年证明．

参考文献

[A1] Mazur, B., On some of the mathematical contributions of Gerd Faltings, in Proc. Internat. Congress Mathematicians Berkeley, 1986, Amer. Math. Soc., 1987, 7 – 12.

[A2] Faltings, G., Endlichkeitssätze für abelschen Varietäten über Zahlköper, *Invent. Math.*, 73 (1983), 349 – 366.

潘承彪 译 朱尧辰 校

Sierpiński 曲线 [Sierpiński curve; Серпиньского кривая], Sierpiński 地毯 (Sierpiński carpet)

Cantor 曲线 (Cantor curve) 的一个例子，它包含一个同胚于任一给定 Cantor 曲线的子集． 此例由 W. Sierpiński ([1]) 作出；其作法见**线（曲线）**(line (curve))．Sierpiński 曲线在每一点都具有连续的分支指数．

参考文献

[1A] Sierpiński, W., Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **160** (1915), 302 – 305.

[1B] Sierpiński, W., Sur une courbe cantorienne qui contient une image binniro que et continue de toute courbe donnée, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **162** (1916), 629 – 632.

[2] Александров, П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977.

[3] Kuratowski, K., Topology, 2, Acad. Press, 1968（译自法文）.

М. И. Войцеховский 撰 白苏华 胡师度 译

筛法 [sieve method; решета метод]

数论中的一个一般方法，它推广了从自然数列中筛去合数的这个原理，见 **Eratosthenes 筛法** (Eratosthenes, sieve of)．筛法的问题在于对一个有限整数集 A 来计算不能被某个素数集 P 中任何素数 p 整除的元素之个数．"筛"函数 $S(A; P, x)$（它表示在附加条件 $p < x$ 之下 A 中这种元素的个数）常利用与集合 A_q 中元素个数 $N(A_q)$ 有关的信息来进行估计．集合 A_q 由 A 中可以被无平方因子数 q 整除的元素组成．当 $q = 1$ 时，$A_q = A$．因此常对更为一般的筛函数 $S(A_q; P, z)$ 进行估计．

选取形如 $(\omega(q)/q)X$ 的表达式作为 $N(A_q)$ 的预期的值，受到下述限制（其中 X 为 $N(A)$ 预期的值，而 $\omega(q)$ 为一积性函数）：误差项

$$R(X, q) = N(A_q) - \frac{\omega(q)}{q} X$$

的阶应当比较低．此外，若（至少"平均来说"）有 $\omega(p) = k$，则 k 称为筛的**维数** (dimension of the sieve)．

筛法一般理论及其应用的最前沿的分支是线性筛（当 $k = 1$ 时）．筛法有各种特例，其中最重要的是 **Brun 筛法** (Brun sieve) 和 **Selberg 筛法** (Selberg sieve)．

当筛法应用于加性问题时（见**加性数论** (additive number theory))，必须对筛函数作下界以及上界估计．下界估计基于逻辑的组合恒等式

$$S(A_q; P, z) = N(A_q) - \sum_{\substack{p < z \\ p \in P}} S(A_{qp}; P, p).$$

最精确的下界估计是借助于与权函数的使用有关的组合考虑得到的．带权函数的筛法的应用中一个强有力的结果是：每个充分大的偶数 N 可表示成 $N = p + P_2$，这里 p 是素数，而 P_2 至多有两个素因子．

参考文献

[1] Prachar, K., Primzahlverteilung, Springer, 1957.

[2] Гельфонд, А. О., Линник, Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962（英译本：Gel'fond, A. O. and Linnik, Yu. V., Elementary methods in the analytic theory of numbers, M. I. T., 1966）.

[3] Halberstam, H. and Richert, H. E., Sieve methods, Acad. Press, 1974.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】

第一个筛法是以 V. Brun 的名字命名的 Brun 筛法，他于 1919 年证明了级数 $\sum_p 1/p$ 收敛，这里求和取遍所有孪生素数．利用筛法思想及某些其他的解析工具，陈景润于 1973 年证明了：存在无穷多个素数 p，使 $p+2$ 是一个 P_2 数（P_2 数或者是一个素数，或者是两个素数的乘积）．用同样的方法陈景润还证明了：每个充分大的偶数都是一个素数与一个 P_2 数之和．这个结果与 **Goldbach 问题** (Goldbach problem) 的解已相当接近．

Ю. В. Линник 于 1941 创立的大筛法则是以完全不同的思想为基础的.

【译注】

关于 $k=1/2$ 的筛(半维筛),见[B1];关于 $k=1$ 的筛(线性筛),见[B2]-[B5];关于 $k>1$ 的筛法的最新发展,见[B6]-[B8]及其中所列的有关文献.

参考文献

[B1] Iwaniec, H., The half dimensional sieve, *Acta Arith*., 29 (1976), 69-95.

[B2] Iwaniec, H., On the error term in the linear sieve. *Acta Arith*., 19 (1971), 1-30.

[B3] Iwaniec, H., Rosser's sieve. *Acta Arith*., 36 (1980), 171-202.

[B4] Iwaniec, H., A new form of the error term in the linear sieve, *Acta Arith*., 37 (1980), 307-320.

[B5] Motohashi, Y., Sieve methods and prime number theory, Springer-Verlag, 1983, Chap. Ⅲ.

[B6] Diamond, H. G., Halberstam, H. and Richert, H.-E., A boundary value problem for a pair of differential delay equations related to sieve theory, Ⅰ, in "Analytic Number Theory: Proceedings of a Conference in Honor of P. T. Bateman" (B. Berndt et al., Eds.), pp. 133-157, Birkhäuser, Basel, 1990.

[B7] Diamond, H. G., Halberstam, H. and Richert, H.-E., A boundary value problem for a pair of differential delay equations related to sieve theory, Ⅱ, *J. Number Theory*, 45 (1993), 129-185.

[B8] Diamond, H. G., Halberstam, H. and Richert, H.-E., A boundary value problem for a pair of differential delay equations related to sieve theory, Ⅲ, *J. Number Theory*, 47 (1994), 300-328.

张明尧 译 戚鸣皋 校

符号检验[sign test; знаков критерий]

假设"H_0:随机变量 μ 服从参数为 $(n;\ p=0.5)$ 的二项分布"的**非参数检验**(non-parametric test).如果假设 H_0 成立,则

$$\mathrm{P}\left\{\mu\leqslant k\,\middle|\,n,\frac{1}{2}\right\}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=$$

$$=I_{0.5}(n-k,k+1),$$

$$k=0,\cdots,n,$$

其中

$$I_z(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt,$$

$$0\leqslant z\leqslant 1,$$

而 $B(a,b)$ 是 B 函数.根据符号检验,在显著性水平 $\alpha(0<\alpha\leqslant 0.5)$ 下,如果

$$\min\{\mu,n-\mu\}\leqslant m,$$

则否定假设 H_0,其中临界值 $m=m(\alpha,n)$ 是下列不等式的整数解

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\leqslant\frac{\alpha}{2},\ \sum_{i=0}^{m+1}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}>\frac{\alpha}{2}.$$

符号检验用于检定假设 H_0:独立同分布连续型随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的未知分布关于 0 对称,即对于任意 x,有

$$\mathrm{P}\{X_i<-x\}=\mathrm{P}\{X_i>x\}.$$

在这种情形下,符号检验基于统计量

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\delta(X_i),\quad \delta(x)=\begin{cases}1, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x<0;\end{cases}$$

这时,如果假设 H_0 成立,则统计量 μ 服从参数为 $(n;p=0.5)$ 的二项律.

类似,符号检验用于检验假设 H_0:独立同分布连续型随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的未知分布的中位数为 ξ_0,为此只需将给定随机变量换成随机变量 $Y_1=X_1-\xi_0,\cdots,Y_n=X_n-\xi_0$.

参考文献

[1] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, М. 1983.

[2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[3] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[4] Смирнов, Н. В., Дунин-Барковский, И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

信号提取[signal extraction; выделение сигнала],噪声背景中的

统计通讯理论的一个分支.信号提取的数学问题是随机过程理论的统计问题(亦见**信息论**(information theory)).下面列举信号提取的若干典型问题.

一个消息 $s(t)$,它可以是有一定结构的随机或非随机函数,被转换为一个信号 $x(t)=V(s,n)$,其中 $n(t)$ 是随机过程(噪声),而 V(通讯通道)则是一个把 (s,n) 转换成被接收信号 x 的算子.通常假定噪声对信号的作用是加性的:$x(t)=s(t)+n(t)$.在这种情形下,信号提取问题可概述如下.

1) 信号检测,即检验假设 $x(t)=s(t)+n(t)$(有信号),而其对立假设为 $x(t)=n(t)$(无信号).

也研究更复杂类型的初始假设：从某时刻 τ 开始有 $x(t)=s(t)+n(t)$，τ 可能是随机的，它是信号出现的时刻．这里产生了估计 τ 的问题．

2) 信号识别，即检验假设 $x(t)=s(t)+n(t)$，$s\in S_1$，而其对立假设是 $x(t)=s(t)+n(t)$，$s\in S_2$，这里 S_1 与 S_2 是信号的两个不同的集合．

3) 滤波（信号的重建），即在 $x(t)$ $(t\in T)$ 被接收后，寻求信号 $s(t)$ 在点 t 的值的统计估计．

亦见**统计假设**（statistical hypothesis）；**随机过程的滤波**（stochastic processes, filtering of）．

参考文献

[1] Davenport, W. B., Root, W. L., An introduction to the theory of random signals and noise, McGraw-Hill, 1970.

[2] Харкевич, А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965.

И. А. Ибрагимов 撰

【补注】

[A1] Wozencraft, J. M., Jacobs, I. M., Principles of communication engineering, Wiley, 1965.

[A2] Helstrom, C. W., Statistical theory of signal detection, Pergamon, 1968.

潘一民 译

表征，符号差 [signature; сигнатура]

1) 代数系统的表征（signature of an algebraic system）是所给的代数系统的基础集合上的关系和运算的集合连同对它们的元数的指示．表征为 Ω 的代数系统（**泛代数**（universal algebra））也称为 Ω 系统（Ω-system）（相应地，Ω 代数（Ω-algebra））．

2) 有序域上的二次型或对称双线性型的符号差（signature of a quadratic, or symmetric bilinear, form）是一对非负整数 (p, q)，其中 p 是所给的型的正惯性指标，q 是负惯性指标（见**惯性律**（law of inertia）；**二次型**（quadratic form））．有时数 $p-q$ 也称为这个型的符号差．

О. А. Иванова 撰

3) 流形 M^n 的符号差（signature of a manifold M^n）是二次型

$$Q_M(x)=(x\cup x, O)$$

的符号差，这里 $\cup$ 是上同调上积而 $O\in H_n(M;Z)$ 是**基本类**（fundamental class）．流形被假定是紧的，可定向的并且维数 $n=4m$．符号差记作 $\sigma(M)$．

如果 $n\not\equiv 0 \bmod 4$，就令 $\sigma(M)=0$．符号差具有以下性质：

a) $\sigma(M+M')=\sigma(M)+\sigma(M')$;

b) $\sigma(M\times M')=\sigma(M)\sigma(M')$;

c) $\sigma(\partial M)=0$.

一个流形的符号差可以表示成它的 **Понтрягин 数**（Pontryagin number）（[2]）的一个线性函数．关于将符号差表示成一个微分算子的指标，见**指标公式**（index formulas）．

参考文献

[1] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1980.

[2] Milnor, J. and Stasheff, J., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 令 $A=\oplus_{n=0}^{\prime}A^n$ 是一个有单位元的交换环 R 上一个交换分次代数．令 $\Lambda(A)$ 表示由一切元素 $1+a_1+a_2+\cdots$，$a_i\in A^i$，在这种表示式的显易乘法

$$(1+a_1+a_2+\cdots)(1+b_1+b_2+\cdots)=$$

$$=1+(a_1+b_1)+(a_2+a_1b_1+b_2)+\cdots$$

之下所构成的群．系数在 R 内的多项式 $K_1(x_1)$，$K_2(x_1,x_2)$，$\cdots$ 的序列 $\{K_n\}$ 称为多项式的乘法序列（multiplicative sequence of polynomials），如果每一个 K_i 是 i 次齐次的且对每个 A，映射

$$K:(1+a_1+a_2+\cdots)\mapsto$$

$$(1+K_1(a_1)+K_2(a_1,a_2)+\cdots)$$

定义一个由 $\Lambda(A)$ 到 $\Lambda(A)$ 的群同态．给出一个常数项为 1 的幂级数 $f(t)\in R[[t]]$，恰存在 R 上一个乘法序列 $\{K_n\}$ 使得 $K(1+t)=f(t)$．这个乘法序列称为由幂级数 $f(t)$ 所定义的乘法序列．

现在令 $\{L_n\}$ 是由幂级数

$$\frac{\sqrt{t}}{\tanh(\sqrt{t})}=$$

$$=1+\frac{1}{3}t+\frac{1}{45}t^2+\cdots+(-1)^{k-1}2^{2k}B_k\frac{t^k}{(2k)!}+\cdots$$

所定义的乘法序列，这里 B_k 是第 k 个 **Bernoulli 数**（Bernoulli number）．一个 $4m$ 维流形 M 的 L 亏格（L-genus）定义为

$$L(M^{4m})=\langle L_m(p_1,\cdots,p_m),[M]\rangle,$$

这里 $[M]$ 是 M 的基本同调类，而 p_i 是第 i 个 **Понтрягин 类**（Pontryagin class）．如果 M 的维数不是 4 的倍数，就令 $L(M)=0$．Hirzebruch 符号差定理（Hirzebruch signature theorem）是说，一个流形的 L 亏格等于它的符号差（[2]，§19）．

在一些旧的文献里，一个流形的符号差指的是流形的指数（index of a manifold）．

郝锕新 译

显著性水平 [significance level; значимости уровень]，统计检验的

在被检定基本假设成立的情形下，错误地否定基本假设的概率．在**统计假设检验**（statistical hypotheses,

verification of) 理论中，显著性水平亦称为第一类错误概率．显著性水平的概念最先产生于理论与试验数据的一致性检验中．例如，如果观测结果纪录了 n 个随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的值，要求根据这些数据检验假设 H：变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合分布具有某种确定的性质，则相应的统计检验由适当选择的函数 $Y=f(X_1,\cdots,X_n)$ 来构造：此函数，一般当 H 成立时取较小值，而当 H 不成立时取较大值．特别地，如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是对某未知常量 a 独立测量的结果，并且假设 H 假定测量结果不含系统误差，则检定 H 应选 Y 等于 $(2m-n)^2$，其中 m 是测量结果 X_i 中不大于 a 的真值的测量值个数．当试验中观测到较大 Y 值时，显然应在统计上否定"观测结果与所检定假设之间一致"的假设．相应的**显著性检验**（significance test）是一种规则：把超越给定临界值 y 的函数 Y 的值认为是显著的．至于 y 值的选取决定于给定的显著性水平、而在假设 H 成立的情形下显著性水平等于事件 $\{Y>y\}$ 的概率．

使用任何检验规则都不可避免地产生损失，在选取显著性水平时要考虑这种损失．例如，假如显著性水平太大，则基本损失将超过由于错误否定所检定假设所造成的损失；如果显著性水平太小，则通常损失产生于错误的接受不真实假设．实际中，在处理统计核算时，通常在 0.01 到 0.1 的范围内选取显著性水平．例如，在统计鉴定有毒医药制剂时，以及在其它一些保障不错误地否定所检定假设具有重大意义的情形下，采用小于 0.01 的显著性水平．亦见**置信估计**（confidence estimation）．

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton, Univ. Press, 1946（中译本：H．克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）．

Л．Н．Большев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1969.

周概容 王健 译

显著性检验［**significance test; значимости критерий**］

统计假设检验（statistical hypotheses, verification of）的基本方法之一，用于检定作为随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 实现的观测结果 $x_1,\cdots,x_n$，与关于 $X_1,\cdots,X_n$ 之概率分布的假设 H_0 的一致性．显著性检验根据某统计量 $T=T(X_1,\cdots,X_n)$ 的观测值否定或接受假设 H_0，其中统计量 T 的具体形式依问题的提法而定．运用显著性检验时，一般不假定有在 H_0 被否定时应被接受的备选假设 H_1．但是，如果给定 H_1，则按统计假设检验的一般理论，根据检验功效最大化原则（见**统计检验的功效**（power of a statistical test））．由备选假设 H_1 决定统计量 T 的选取．

显著性检验通常以如下方式进行．选定检验的统计量 $T(X_1,\cdots,X_n)$ 之后，根据 T 在假设 H_0 下的分布和事先选定的显著性水平 $\alpha(0<\alpha<0.5)$，确定一检验的**临界值**（critical value）t_α，使 $P\{T\geqslant t_\alpha|H_0\}=\alpha$．根据水平为 α 的显著性检验，如果 $T(x_1,\cdots,x_n)\geqslant t_\alpha$，则否定假设 H_0．如果 $T(x_1,\cdots,x_n)<t_\alpha$，则认为假设 H_0 与观测结果 $x_1,\cdots,x_n$ 不矛盾，至少新的观测结果迫使试验者改变观点前可以这样认为．

例．假设计数器在工作的第一个小时里记录了 **Poisson 过程**（Poisson process）的 150 个脉冲，第二个小时记录了 117 个脉冲，那么是否可以认为脉冲在单位时间内出现的强度为常数（假设 H_0）？

假如假设 H_0 成立，则观测值 150 和 117 可以解释两个随机变量 X_1 和 X_2 的实现，其中 X_1 和 X_2 服从同一 Poisson 分布，其分布参数 λ 未知．因为在假设 H_0 下，随机变量

$$Y_1=\sqrt{4X_1+1}-2\sqrt{\lambda},$$

$$Y_2=\sqrt{4X_2+1}-2\sqrt{\lambda},$$

近似服从参数为 $(0,1)$ 的正态分布，从而统计量

$$X^2=\frac{1}{2}[Y_1-Y_2]^2=\frac{1}{2}[\sqrt{4X_1+1}-\sqrt{4X_2+1}]^2$$

近似服从自由度为 1 的 χ^2 分布，即

$$\mathrm{P}\{X^2>x|H_0\}\approx\mathrm{P}\{\chi_1^2>x\}.$$

由 χ^2 分布表查出对应于给定显著性水平 $\alpha=0.05$ 的临界值 $\chi_1^2(0.05)=3.841$，即

$$\mathrm{P}\{\chi_1^2\geqslant3.841\}=0.05.$$

其次，由 $X_1=150$ 和 $X_2=117$ 计算检验的统计量 X^2 的值，得

$$X^2=\frac{1}{2}[\sqrt{4\cdot150+1}-\sqrt{4\cdot117+1}]^2=4.087.$$

由于 $X^2=4.087>\chi_1^2(0.05)=3.841$，可见根据 χ^2 检验在显著性水平 α 下，应该否定关于脉冲出现的强度保持不变的假设 H_0．

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton, 1946（中译本：H．克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）．

[2] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[3] Смирнов, Н. В., Дунин-Барковский, И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969.

[4] Девятов, Б. И., 《Теория вероятн. и её примен.》, 14(1969), 1, 175－178.

М. С. Никулин 撰 周概容 王健 译

有效数字 [**significant figure** 或 significant digit; **значащая цифра**]

用于近似确定一个**实数** (real number) 的术语. 设实数 x 在基为 q 的数系中由 q 进分数表示为

$$x \approx x^* = (\alpha_n \cdots \alpha_1 \alpha_0, \ \alpha_{-1}\alpha_{-2}\cdots\alpha_{-n}).$$

假定在此表示式中 α_s 是从左面数起第一个不等于零的数字, 则所有后继数字称为近似数 x^* 的有效数字.

一个有效数字 α_t 称为准确的 (correct), 如果 x^* 的绝对误差 $\Delta(x^*)$ 即差 $|x - x^*|$ 满足不等式

$$\Delta(x^*) \leqslant \frac{1}{2} q^t.$$

近似确定一实数通常仅意味着确定它的有效数字.

Х. Д. Икрамов 撰

【补注】 在进行演算时, 如果每次运算都予以舍入, 使得在第一个非零数字后 (包括此非零数字) 不多于 3 位数字, 就说演算到 3 位有效数字 (significant digits). 从计算 (数学中) 或测量 (科学技术中) 中得到的一个具有 r 位有效数字的近似数 $x^* = (\alpha_1 \cdots \alpha_r) \times q^{-m}$ 称为准确到 n 位有效数字 ($n \leqslant T$), 如果误差

$$|((\alpha_1 \cdots \alpha_n) \times q^{r-n-m}) - x|$$

小于 $q^{r-n-m}/2$. 通常 $q = 10$ 或 2. 例如, 0.0308 是 $\sqrt{x^2+1} - 1 = 0$ 的准确到 3 位有效数字的解.

参考文献

[A1] Young, D. M., Grerory, R. T., A survey of numerical mathematics, 1, Dover, reprint, 1988, Chapt. 1.

沈永欢 译

正负号函数 [**signum**; **сигнум**]

实变量 x 的函数, 若 x 是正数, 它等于 1; 若 x 为 0, 它等于 0; 若 x 是负数, 等于 -1. 记为 $\mathrm{sgn}\, x$ 或 $\mathrm{sign}\, x$. 即

$$\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1, & 若\ x > 0, \\ 0, & 若\ x = 0, \\ -1, & 若\ x < 0. \end{cases}$$

Ю. А. Горьков 撰

【补注】 正负号函数通常由公式 $\mathrm{sgn}\, z = z/|z|$ 若 $z \neq 0$ (且 $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$) 推广到复平面上去. 所以, 它确定了由原点到 z 的射线的角度.

王斯雷 译

相似矩阵 [**similar matrices**; **подобные матрицы**]

两个同阶的方阵 A 与 B, 满足关系式 $B = S^{-1}AS$, 其中 S 是一个同阶的非退化矩阵. 相似矩阵具有相同的秩, 相同的行列式, 相同的特征多项式, 以及相同的本征值. 为一个给定的矩阵选择一个形式尽可能简单的相似矩阵, 这往往是很重要的, 例如, 选择一个对角的或 Jordan 型的 (见 **Jordan 矩阵** (Jordan matrix)).

Т. С. Пиголкина 撰 蒋滋梅 译

相似算子 [**similar operators**; **подобные операторы**]

Banach 空间 X 上两个算子 S 和 T (不必有界), 存在具有有界逆的 X 上有界算子 U 使得满足以下关系

$$S = U^{-1}TU.$$

如果 U 是**酉算子** (unitary operator), 则 S 和 T 称为酉等价的 (unitarily equivalent).

这概念是相似映射 (similar mapping) 概念的一个例子. 设 f 和 g 是集合 X 到自身中的两个映射. 如果存在一个一一映射 (bijection) U: $X \to X$ 使得 $Uf = gU$, 则这些映射称为相似的 (similar). 已经试图给出关于从一个集合 X 到另一集合 Y 中的映射的相似性的定义; 例如, 这样的映射称为相似的, 如果存在集合 X 和 Y 到它们自身中的一一映射 U 和 V 使得 $Vf = gU$.

М. И. Войцеховский 撰 葛显良 译 吴绍平 校

相似集 [**similar sets**; **подобные множества**]

初等几何相似性 (similarity) 概念的推广. 分别被 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 全序的两个集合 A 和 B 称为相似的, 如果存在一个一一映射 (bijection) f: $A \to B$, 使得对任意 $x, y \in A$, 只要 $x \mathscr{R} y$, 就有 $f(x) \mathscr{S} f(y)$.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 全序集在相似关系下的一个等价类常常称为序型 (order type) (亦见**全序集** (totally ordered set); **序型** (order type)).

卢景波 译

相似统计量 [**similar statistic**; **подобная статистика**]

在某复合假设成立的情形下, 具有固定分布的统计量.

假设统计量 T 是样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathscr{B}_{\mathfrak{X}}, \mathsf{P}_\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ 到可测空间 $(\mathfrak{Y}, \mathscr{B}_{\mathfrak{Y}})$ 的映射, 考虑某复合假设 $H_0: \theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$. 这时, 如果对于任一事件 $B \in \mathscr{B}_{\mathfrak{Y}}$, 概率

$$\mathsf{P}_\theta(T^{-1}(B)) \text{ 不依赖 } \theta\ (\theta \in \Theta_0), \qquad (*)$$

则称 T 关于假设 H_0 为相似统计量或简称为相似统计量. 条件 (*) 显然等价于: 当 θ 在 Θ_0 中取值时, 统计量 T 的分布与 θ 无关. 关于这一性质, 有时称相似统计量不依赖于参数 θ $(\theta \in \Theta_0)$. 相似统计量在构造相似检验时以及在解决有多余参数的统计问题时,

有重要应用．

例 1．设 $X_1,\cdots,X_n$ 是独立同正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的随机变量，其中 $|a|<\infty$，$\sigma>0$．那么，对于任意 $\alpha>0$，统计量

$$T=\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^{2\alpha},$$

其中

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

不依赖于二维参数 (a,σ^2)．

例 2．设 $\mathscr{F}=\{F(x)\}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上一切连续型分布函数的族；$X_1,\cdots,X_{n+m}$ 是独立同分布随机变量，其分布函数属于 $\mathscr{F}$．如果 $F_n(x)$ 和 $F_m(x)$ 相应为由观测结果 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $X_{n+1},\cdots,X_{n+m}$ 构造的经验分布函数，那么 Смирнов 统计量（Smirnov statistic）

$$S_{n,m}=\sup_{|x|<\infty}|F_n(x)-F_m(x)|$$

关于族 $\mathscr{F}$ 是相似的．

参考文献

[1] Soler, J.-L., Basic structures in mathematical statistics, Moscow, 1972（译自法文）.

[2] Линник, Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966（英译本：Linnik, Yu. V., statistical problems with nuisance parameters, Amer. Math. Soc., 1968）.

[3] Barra, J.-R., Mathematical bases of statistics, Acad. Press, 1981（译自法文）.

М. С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

周概容 王健 译

相似检验 [**similar test；подобный критерий**]

检定复合假设 $H_0:\theta\in\Theta_0$ 对复合备选假设 $H_1:\theta\in\Theta_1$ $(\Theta_0\cap\Theta_1=\varnothing)$ 的统计检验，其功效函数（见**检验的功效函数**（power function of a test））在 Θ_0 上取区间 $(0,1)$ 中的同一个固定值．

见 **Neyman 结构**（Neyman structure）；**Behrens-Fisher 问题**（Bahrens-Fisher problem）；**相似域**（similarity region）.

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

相似 [**similarity；подобие**]

Euclid 空间的一个变换，在这个变换下，对于任何两点 A 和 B 与它们的象点 A' 和 B'，有 $|A'B'|=k|AB|$，这里 k 是一个正数，称为**相似系数**（similarity coefficient）.

任何**位似变换**（homothety）是一个相似．一个**等距映射**（isometric mapping）（包括恒等变换）也可当作一个系数等于 1 的相似．称图形 F **相似**（similar）于图形 F'，如果存在一个相似，在它之下 $F\to F'$．图形的相似是一个等价关系，即它有自反性、对称性与传递性．相似是 Euclid 空间到自身上的一个一一映射；相似也保持直线上的点的次序，即如果一点 B 位于点 A 与 C 之间，而 B',A' 与 C' 是在某相似之下对应的象，那么 B' 位于 A' 与 C' 之间；不在一直线上的点，在任何相似之下均变为不在一直线上的点．一个相似分别变换直线到直线，线段到线段，射线到射线，角到角，圆到圆．在相似之下，角的数值保持不变．

一个系数 $k\neq1$ 的相似变换每一直线到平行于它的一直线是一个系数为 k 或 $-k$ 的位似变换．任何相似能够看作是一个运动 D 与某个具有正系数的位似变换 Γ 的合成．

一个相似称为**正常的**（proper）（**反常的**（improper）），如果**运动**（motion）D 是**正常的**（非正常的）．一个正常的相似保持图形的定向，而一个非正常的相似使得定向相反．

类似地，可在 3 维 Euclid 空间，并且也可在 n 维 Euclid 与伪 Euclid 空间中定义相似（保持以上性质）．

n 维 Riemann，伪 Riemann 或 Finsler 空间中定义的相似是改变空间的度量到相差一个常数因子的一个变换．

n 维 Euclid，伪 Euclid，Riemann，伪 Riemann 或 Finsler 空间的全部的相似的集合构成一个 r 维的 Lie 变换群，称为对应空间的**相似（位似）变换群**（group of similarity (homothetic) transformations）．在这些类型的每一个空间中，具有 r 个参数的相似变换 Lie 群包含一个 $r-1$ 维的等距正规子群．

人们开始对具有包含有公共轨道的无限维等距子群的相似和等距群的向量密度度量空间感兴趣．

И. П. Егоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957, Chap. Ⅱ.

[A2] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1969, 72－76.

[A3] Berger, M., Geometry, I, Springer, 1987（中译本：M．贝尔热，几何，第一—五卷，科学出版社，1987－1991）.

[A4] Besse, A., Einstein manifold, Springer, 1987.

林向岩 译 陆珊年 校

相似区域 [**similarity region** 或 similar region; **подобная область**]

术语"与样本空间相似的临界区域"的普遍采用的简称，在数理统计中指统计检验的具有非随机化相似性的**临界区域**(critical region).

设 X 是取值于样本空间 $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mathrm{P}_\theta)(\theta\in\Theta)$ 的随机变量；考虑复合假设 $H_0:\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ 对复合备选假设 $H_1:\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$ 的检验．其次，假设为检定 H_0 对 H_1，已构造出一个水平 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的非随机化**相似检验**(similar test)，其临界函数为 $\varphi(x)$，$x\in\mathfrak{X}$．因为此检验是非随机化的，故

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in K\subset\mathfrak{X},\\ 0, & 若\ x\notin K,\end{cases} \tag{1}$$

其中 K 是空间 $\mathfrak{X}$ 的某个子集，称为检验的临界集(critical set for the test)：根据此检验，如果事件 $\{X\in K\}$ 在试验中出现，则假设 H_0 被否定而倾向于接受 H_1．此外，由于

$$\int_{\mathfrak{X}}\varphi(x)d\mathrm{P}_\theta=\alpha \quad (对于一切\ \theta\in\Theta_0), \tag{2}$$

则所得检验是相似的．由(1)和(2)可见，非随机化相似检验的临界区域 K 具有如下性质：

$$\mathrm{P}_\theta\{X\in K\}=\alpha,\ 对于一切\ \theta\in\Theta_0.$$

正是由于非随机化检验的临界集的这条性质，J. Neyman 和 E. S. Pearson 称 K 为"与样本空间 $\mathfrak{X}$ 相似的区域"，意思是两个概率 $\mathrm{P}_\theta\{X\in K\}$ 和 $\mathrm{P}_\theta\{X\in\mathfrak{X}\}$ 都与 $\theta\in\Theta_0$ 无关．

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[2] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[3] Neyman, J. and Pearson, E. S., On the problem of the most efficient test of statistical hypotheses, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **231** (1933), 289-337.

[4] Lehmann, E. L. and Scheffe, H., Completeness, similar regions, and unbiased estimation I, *Sankhyā*, **10** (1950), 305-340.

[5] Lehmann, E. L. and Scheffe, H., Completeness, similar regions, and unbiased estimation II, *Sankhyā*, **15** (1955), 219-236.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

相似理论 [**similarity theory**; **подобия теория**]

基于物理相似性的概念对物理现象进行的研究．

两个物理现象称为相似的(similar)，如果通过类似于从一个测量单位系统转变为另一个测量单位系统的简单转换，可以从一个现象的特征数值导出另一个现象的特征数值．对于任何一组相似的现象，所有对应的无量纲特征量(有量纲量的无量纲组合)都有相同的数值(见**量纲分析**(dimensional analysis))．结论反过来说也是正确的，即如果对于两个现象，其所有相应的无量纲特征量都相等，则这两个现象在物理上就是相似的．

量纲分析和相似理论是密切相联系的，它们是模型实验的基础．在实验中，把自然中的现象用一个相类似的、适合于特殊的实验室条件的、较大或较小的模型的现象来代替，进行研究．

当建立了确定一相关类现象的参数系统之后，就可以建立两个现象之间的相似关系了．例如，一个现象可由 n 个独立参数加以确定，其中有一些是无量纲的．同时，使某些变量的量纲和物理常数由 $k(k\leqslant n)$ 个具有独立量纲的参数的量纲来表示．这样，从 n 个量中，只能形成 $n-k$ 个独立的无量纲组合．该现象所有需要的无量纲特性都可以认为是这 $n-k$ 个独立的用来定义参数的无量纲参数组合的函数．在定义一个现象特性的无量纲量的组合中，总可以找到某一组基即一组无量纲量来确定其他所有的量．

由相应的替代问题所定义的现象类中包含的现象，一般地说，相互之间并不一定相似．下面的条件可以用来从中选出一个相互之间相似的子类．

两个现象相似的充分必要条件是：由组成基的定义参数的完整名单编纂成的无量纲组合的数值对于这两个现象都相等．由确定该现象的给定量所组成的有关参数的基保持不变的条件，称为**相似准则**(similarity criteria)．

在流体动力学中，主要的相似准则基于表示惯性力与粘性力之间的关系的 **Reynolds 数**(Reynolds number)，表示气体的可压缩性的 **Mach 数**(Mach number)，以及表示惯性力与重力之间关系的 **Froude 数**(Froude number)．对于液体或气体与一物体之间的热传导，基本的相似准则是表征介质热力学状态的 **Prandtl 数**(Prandtl number)，表征物体表面与液体或气体体内对流热传导率的 **Nusselt 数**(Nusselt number)，表征在液体中对流热传导与分子热传导过程之间关系的 **Péclet 数**(Péclet number)，以及表征在液体或气体的流动过程中能量的耗散的 **Stanton 数**(Stanton number)．对于固体中的热分布，相似准则基于表征在环境中热条件变化率和物体内温度场适应率的 **Fourier 数**(Fourier number)，以及表征两个固体之间热传导速率和物体内温度分布的 Biot 数(Biot number)．在随时间变化的过程中，表征时间过程中相同历程的基本相似准则是均时性准则．在空气动力学中，这种均时性准则称之为 **Strouhal 数**(Strouhal number)．

在机械运动中的相似准则是 **Newton 数**（Newton number）．在弹性变形中的相似准则是 Poisson 比（Poisson ratio）．

如果相似条件得到满足，为了根据由模型得到的有量纲特性的数据来计算所有的实际特性值，必须知道所有相应量的尺度因子．如果一个现象是由 n 个参数确定的，其中 k 个参数具有独立的量纲，那么这些有独立量纲的参数可以采用任何尺度因子，其值应根据问题的情况，包括试验中的测试情况来指定．所有其他的有量纲量的换算因子应该从以 k 个具有独立量纲的量的量纲来表示的各有量纲量的量纲的公式推导出来，而其尺度因子则由实验情况和问题的提法来指明．

例如，对于不可压缩的粘性流体绕一物体作稳态流动的情况，所有表征总体运动的无量纲量由三个参数确定：表示物体平移速度方向相对于表面的角度 α 和 β，以及 Reynolds 数 R．物理相似的条件（相似准则）为

$$\alpha = 常数, \beta = 常数, R = \frac{Pvd}{\mu} = 常数.$$

这里意味着，在模拟上面的现象时，只有模型和实际现象的 α，β 和 R 都相同时，从模型实验取得的数据才可以转变为实际现象的数据．前两个条件在实际中总是容易得到满足的，但是第三个条件就较难满足，特别是对于模型小于实际物体而后者又有大的尺寸的情况，例如机翼．当尺寸减小时，为了保持 Reynolds 数不变，或者是增加流动速度，这在实际上往往不可能；或者是大大改变流体的密度和粘度．在实际上，这些特点为研究气动阻力设置了很大的困难，例如要在风洞中，或在封闭的管道中（被压缩后的，即密度增加后的空气在其中以很高的速度循环流动）研究环绕真实大小的飞机的空气流动．

专门的理论研究和实验研究表明，对于某些流线型的物体，Reynolds 数仅对热阻的无量纲参数有显著的影响，而有时对无量纲升力系数和某些其他的、在实际应用中起重大作用的量没有多少影响．在某些方面，模型和实物的 Reynolds 数的差别是无关紧要的．

类似地，在模拟物体在气体中以高速运动时，模型和实物的 Mach 数必需相等．

在模拟船只在水中行驶时，必需使实物和模型有相同的 Froude 数和 Reynolds 数．但是，如果在实验室的水中实验的线性尺寸缩小了，则为了保持 Reynolds 数不变，就必须增加模型的速度，而另一方面，为了保持 Froude 数不变，就必须减小模型的速度．因此，一般地说，在实验室里试验船只模型无法达到精确的模拟．有时，可以用不同的液体，或把物体置于大直径旋转系统之内用“离心模拟”的方法人为地改变重力加速度．这样来克服上述困难．

仔细考察流体动力学现象的本质可以发现，在很多场合下，可以采用补充计算的方法，或通过简单的实验并用平板弯曲的数据，把 Reynolds 数的影响考虑进去．对于在通常的水中行驶的船只，在作流体动力学研究时，Froude 数是最重要的，因此，模拟应使 Froude 数保持不变．

借助于模型进行研究常常是实验研究和解决重大实际问题的唯一可能的方法．对于在自然界以十年、百年、甚至于千年的时间尺度下发生的现象，就属于这种情况；在模型实验的条件下，相似的现象可能只用几小时或几天（例如，模拟炼油的过程）．也有相反的情况，代替研究自然界中非常快的过程，人们研究某些在模型中进行得慢得多的相似现象．

模型化是进行下述工作的基础：实际确定自然定律、探索各类现象的一般性质和特点、改进研究各类问题的实验方法和理论方法，以及为处理具体的实际问题获取系统的资料、手段、规则和建议．

参考文献

[1] Bridgman, P. W., Dimensional analysis, Yale Univ. Press, 1937.

[2] Седов, Л. И., Методы подобия и размерности в механике, 9 изд., М., 1981（中译本：Л．И．谢多夫，力学中的相似方法和量纲理论，科学出版社，1982）．

Л．И．Седов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Huntley, H. E.: Dimensional analysis, Dover, reprint, 1967.

[A2] Birkhoff, G.: Hydrodynamics, Princeton Univ. Press, 1960, Chapt. Ⅳ.

王克仁 译 诸德超 校

单代数［**simple algebra**; **простая алгебра**］

由多于一个元素组成的代数，没有异于 0 和整个代数的双侧理想．不含单位元的单代数未必是一个单环（simple ring），因为此时并非环的每个理想都是代数的一个理想．对某些代数类，有限维单代数的分类是已知的，见**交错环与交错代数**（alternative rings and algebras）；**Jordan 代数**（Jordan argebra）；**Lie 代数**（Lie argebra）．域上的有单位元的每个结合代数，可以嵌入到含有相同单位元的单代数中．

见**单环**（simple ring）．

Л．А．Скорняков 撰 蔡传仁 译

简单弧［**simple arc**; **простая дуга**］

线段的同胚象（见**同胚**（homeomorphism））．内在的刻画是：简单弧是这样的**线**（**曲线**）（line (curve)），它的两点（端点（end point））具有分歧指数 1，而在

其余所有点（内点（interior point））具有分歧指数 2.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 简单弧也称为 Jordan 弧（Jordan arc）.

参考文献

[A1] Kuratowski, K., Introduction to set theory and topology, Pergamon, 1961, Chapt. Ⅲ, § 3.

白苏华 胡师度 译

有限单群 [**simple finite group** 或 finite simple group; **простая конечная группа**]

除平凡子群及整个群本身以外没有**正规子群**（normal subgroup）的**有限群**（finite group）. 有限单群是最小的"建筑块"，用它通过扩张可"构造"出任何有限群. 有限群的**合成序列**（composition sequence）的每个因子是有限单群，而极小正规子群是有限单群的直积. 素数阶循环群是有限单群的最早的例子. 仅有这些有限单群出现在**可解群**（solvable group）的合成序列的因子中. 所有其他有限单群是非可解的，且它们的阶是偶数（见 **Burnside 问题 1**（Burnside problem 1）. 交错群 $\mathfrak{A}_n$, 阶为 q 的有限域上射影特殊线性群 PSL(n, q), 射影辛群 PSP$(2n, q)$, 射影正交群 P$\Omega(n, q)$ 及射影酉群 PSU(n, q^2) 给出了无限多个非循环有限单群的例子. 所有上述有限单群在 19 世纪就已知道. 此外在 19 世纪末还发现了另外 5 个群（见 **Mathieu 群**（Mathieu group））. 20 世纪初造出了 G_2 型单 Lie 群的有限类似物（见 **Dickson 群**（Dickson group））. 20 世纪 50 年代有限单群的新的无限系列的发现使得从单 Lie 代数的自同构群能够造出大多数类型的已知单群（见 **Chevalley 群**（Chevalley group））. 已知的有限单群的无限系列列于下面表中.

这里 q 是素数的非零方幂，l 是自然数，而 (s, t) 是两数 s 及 t 的最大公因子. 除去表中的群外还知道 26 个别的有限单群；它们不在有限单群的任何无限系列中（是所谓**零散单群**（sporadic simple group））.

符号，关于对应的 Lie 代数的类型	替代的符号	存在有限单群的条件	群的阶	d
	$\mathbf{Z}_p$	p 是素数	p	
	$\mathfrak{A}_l$	$l \geqslant 5$	$l!/2$	
$A_l(q)$	PSL$(l+1, q)$	$l \geqslant 2$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)}(q^2-1)\cdots(q^{l+1}-1)/d$	$(l+1, q-1)$
$B_l(q)$	P$\Omega(2l+1, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$C_l(q)$	PSP$(2l, q)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l^2}(q^2-1)\cdots(q^{2l}-1)/d$	$(2, q-1)$
$D_l(q)$	P$\Omega^+(2l, q)$	$l \geqslant 3$	$q^{l(l-1)}(q^2-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l-1)/d$	$(4, q^l-1)$
$E_6(q)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)\cdot(q^9-1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q-1)$
$E_7(q)$			$q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)\cdot(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)/d$	$(2, q-1)$
$E_8(q)$			$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)\cdot(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)$	
$F_4(q)$			$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$	
$G_2(q)$			$q^6(q^2-1)(q^6-1)$	
${}^2A_l(q^2)$	PSU$(l+1, q^2)$	$l \geqslant 3$; $l=2$, $q \geqslant 3$; $l=1$, $q \geqslant 4$	$q^{l(l+1)/2}(q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^{l+1}+(-1)^l)/d$	$(l+1, q+1)$
${}^2D_l(q^2)$	P$\Omega(2l, q)$	$l \geqslant 2$	$q^{l(l-1)/2}(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2l-2}-1)(q^l+1)/d$	$(4, q^l+1)$
${}^2E_6(q^2)$			$q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)\cdot(q^9+1)(q^{12}-1)/d$	$(3, q+1)$
${}^3D_4(q^3)$			$q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$	
${}^2B_2(q)$	$Sz(q)$	$q=2^{2l+1}$	$q^2(q-1)(q^2+1)$	
${}^2G_2(q)$	$R(q)$	$q=3^{3l+1}$	$q^3(q-1)(q^3+1)$	
${}^2F_4(q)'$		$q=2^{2l-1}$	$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)/d$	2 当 $q=2$ 时 1 当 $q>2$ 时

有限单群理论的基本问题是将它们全部分类．这是要证明每个有限单群皆同构于已知单群之一．另一个基本问题是已知单群性质的研究：它们的矩阵表示的研究（见**有限群表示**（finite group，representation of a））；所有本原置换表示的描述（见**置换群**（permutation group）），或更一般地作为各种数学对象（图，有限几何）的自同构群的表示的描述；子群的描述，特别是极大子群的描述；等等．

参考文献

[1] Carter，R．W．，Simple groups of Lie type，Wiley，（Interscience），1972．

[2] Gorenstein，D．，Finite simple groups，An introduction to their classification，Plenum，1982．

[3] Huppert，B．，Endliche Gruppen，I，Springer，1967（中译本：贝・胡佩特，有限群，I，上、下册，福建人民出版社，1992）．

[4] Blackburn，N．and Huppert，B．，Finite groups，2－3，Springer，1984．

В．Д．Мазуров 撰

【补注】 根据1990年的材料，虽然全部证明的某些部分还未在正式杂志上出现，有限单群分类从1982年以后就被公众所接受．其结果为：除去上面的那些以外，仅有的别的有限单群（非Abel的），是21个零散单群，它们与5个Mathieu群一起，形成了**零散单群**（sporadic simple group）中的26个群的表．

"图册"（atlas），[A1]，是关于这些群的构造、性质及参考文献的好的资料出处．关于分类的一个纲要可参看[2]．决定有限单群的极大子群的进展的信息可参看[A2]，[A3]．

参考文献

[A1] Conway，J．H．，Curtis，R．T．，Norton．S．P．，Parker，R．A．and Wilson，R．A．，Atlas of finite groups，Clarendon Press，1985．

[A2] Kleidman，P．B．and Liebeck，M．W．，A survey of the maximal subgroups of the finite simple groups，*Geom Dedicata*，25（1988），375－389．

[A3] Kleidman，P．B．and Liebeck，M．W．，The subgroup structure of the finite classical groups，Cambridge Univ．Press，1990．

[A4] Gorenstein，D．，The classification of finite simple groups，I．Groups of noncharacteristic 2 type，Plenum，1983．

【译注】 关于零散单群的统一处理参见[B1]．

[B1] Aschbacher，M，Sporadic groups，Cambridge Univ．Press，1994．

石生明 译 王 杰 校

单群[simple group；простая группа]

除了单位子群及整个群外没有其他**正规子群**（normal subgroup）的群．全部有限单群的描述是有限群论的中心问题（见**有限单群**（simple finite group））．在无限群论中，单群的意义大为减少，因它们难于具体化．若集合 M 的基数至少是5，除 M 的有限个元素外，固定它的所有其他元素的全部偶置换作成单群．若 M 是无限集，则该群也是无限群．存在有限生成的，以至有限表现的无限单群．任何群皆可嵌入单群中．这里的单群的定义与Lie群论和代数群论中的有些不同（见**半单Lie群**（Lie group，semi-simple））．

А．Л．Шмелькин 撰

【补注】 无限群论中使用了两个比单性强的概念，绝对单群（absolutely simple group）及严格单群（strictly simple group）．有以下蕴涵关系：绝对单⇒严格单⇒单．有单群的例子，它们不是绝对单的或不是严格单的．

群是严格单的，如果它没有非平凡上升子群；它是绝对单的，若它没有非平凡的**列子群**（serial subgroup）．更多的细节请参看[A6]．

代数闭域上的代数群是单的（simple），如果它没有闭的非平凡正规子群．它是拟单的（quasi-simple），或殆单的（almost simple），若它没有非平凡的无限正规子群．若 G 是殆单的，则 $G/Z(G)$ 作为抽象群是单群，这里 $Z(G)$ 是 G 的中心．

Lie群是单的（simple），若它没有非平凡的Lie子群．对连通Lie群，这与它的Lie代数的单性一致．

拓扑群称为单的（simple），如果它没有真的闭正规子群．

对于代数群和拓扑群，文献中还可以找到定义：这样的群是单的，如果它没有非平凡闭连通正规子群．

参考文献

[A1] Humphreys，J．E．，Linear algebraic groups，Springer，1975．

[A2] Pontryagin，L．S．，Topological groups，Princeton Univ．Press，1939（中译本：Л．С．邦德列雅金，连续群，上、下册，科学出版社，1974）．

[A3] Mackey，G．W．，Unitary group representations，Benjamin，1978．

[A4] Freudenthal，H．and Vries，H．de．，Linear Lie groups，Acad．Press，1969．

[A5] Weinstein，M．，Examples of groups，Polygonal Publ．House，1977，Examples 6.14；6.15．

[A6] Robinson，D．J．S．，Finiteness conditions and generalized soluble groups，Springer，1972，Part 1，Chapt．1．

石生明 译 王 杰 校

单同伦型[simple homotopy type；простой гомотопический тип]

两个CW复形 K、L 为单同伦等价，如果存在

同伦等价 $\tau: K \to L$，它的 **Whitehead 挠率**（Whitehead torsion）为零．单同伦等价下的等价类称为单同伦型．

М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Rham, G. de, Torsion et type simple d'homotopie, Lecture notes in math., 48, Springer, 1967.

薛春华 译

简单假设［simple hypothesis; простая гипотеза］，数理统计中的

关于被观测随机变量服从具体给定概率分布的论断．由简单假设所决定的概率分布称为假设分布（hypothesis distribution）．例如，X 是被观测随机变量，则论断"X 服从参数为 1 的 Poisson 律"是简单假设．亦见**复合假设**（composite hypothesis）．

М. С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mood, A. M. and Graybill, F. A., Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill, 1963, § 12.2（中译本：A. M. 穆德，F. A. 格雷比尔著，统计学导论，科学出版社，1978）．

周概容 译

简单迭代法［simple-iteration method; простой итераций метод］

一种近似求解线性代数方程组 $Ax=b$ 的方法．该方程组可以变成 $x=Bx+c$ 的形式，它的解可视为序列 $x^{k+1}=Bx^k+c, k=0,1,\cdots$，的极限，其中 x^0 是初始逼近．对任意初始逼近 x^0，简单迭代法收敛的充要条件是 B 的所有本征值的模小于 1；其充分条件是 B 的某种范数小于 1．如果对某种范数（与向量 x 的范数相容），B 满足 $\|B\| \leqslant \rho < 1$，则简单迭代法以几何级数速度收敛，而且其误差估计为

$$\|x^m - x\| \leqslant \rho^m \|x^0 - x\|.$$

在立方体、八面体或球面向量范数情形，当

1) $\sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leqslant \rho,\ i=1,\cdots,n$,

2) $\sum_{i=1}^n |b_{ij}| \leqslant \rho,\ j=1,\cdots,n$,

3) $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 \leqslant \rho^2$

时，则条件 $\|B\| \leqslant \rho$ 满足．

这个方法最简单的型式相应于 $B=I-A$，其中 I 是单位阵．如果 A 的所有对角元非零，则选 $b=D^{-1}(D-A)$ 和 $c=D^{-1}b$，其中 D 是对角阵，其元素为 A 的对角元，得到 **Jacobi 法**（Jacobi method），或同时替换法．

简单迭代法的一种特殊情形是 $B=I-\tau A$，$c=\tau b$，其中 τ 是迭代参数，该参数的选取条件是使 $I-\tau A$ 的范数关于 τ 极小．如果 γ_1 和 γ_2 是对称正定阵 A 的最小和最大特征值，而且 $\tau=2/(\gamma_1+\gamma_2)$，则在球面范数情形，矩阵 B 有估计式 $\|B\| \leqslant \rho$，其中 $\rho=(\gamma_2-\gamma_1)/(\gamma_2+\gamma_1)<1$．

对非线性代数方程组

$$\varphi_i(x)=0,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ x=(x_1,\cdots,x_n),$$

简单迭代法的形式为

$$x_i^{k+1}=x_i^k-\tau\varphi_i(x^k),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ k \geqslant 0.$$

迭代参数 τ 的选取与 φ_i 的可微性质有关，通常的限制条件为，在解的一个邻域这个方法局部收敛．

参考文献

[1] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963（中译本：Д. К. 法捷耶夫，В. Н. 法捷耶娃，线代数计算方法，上海科学技术出版社，1965）．

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966（英译本：Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods, pergamon, 1973）．

[3] Ortega, J. and Rheinboldt, W., Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Acad. Press, 1970（中译本：J. M. 奥特加，W. C. 莱因博尔特，多元非线性方程组迭代解法，科学出版社，1983）．

[4] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978（英译本：Samarskii, A. A. and Nikolaev, E. S., Numerical methods for grid equations, 1-2, Birkhäuser, 1989.

Е. С. Николаев 撰 袁国兴 张宝琳 译

单层位势［simple-layer potential; простого слоя потенциал］

一个表达式

$$u(x)=\int_S h(|x-y|)f(y)d\sigma(y), \tag{1}$$

其中 S 是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 的（$C^{1,\lambda}$ 类的）闭 Ляпунов 曲面（见 **Ляпунов 曲面和曲线**（Lyapunov surfaces and curves）），它把 $\mathbf{R}^n$ 分成内区域 D^+ 和外区域 D^-；$h(|x-y|)$ 是 **Laplace 算子**（Laplace operator）的**基本解**（fundamental solution）：

$$h(|x-y|)=\begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\omega_n|x-y|^{n-2}}, & n \geqslant 3; \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n=2; \end{cases}$$

其中 $\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球的面积；$|x-y|$ 是两点 x 和 y 之间的距离；而 $d\sigma(y)$ 是 S 的面积元．

若 $f\in C^{(0)}(S)$，那么 u 在 $\mathbf{R}^n$ 上处处有定义．单层位势是 **Newton 位势**（Newton potential）的特殊情形，它由分布在 S 上的具有曲面密度 f 的质量所生成且具有下述性质．

在 D^+ 和 D^- 里，单层位势 u 有各阶导数，可以在积分号下进行微分运算，且满足 **Laplace 方程**（Laplace equation）$\Delta u=0$，即它是**调和函数**（harmonic function）．当 $n\geqslant 3$ 时，是一个在无穷远点正则的函数，$u(\infty)=0$．单层位势在 $\mathbf{R}^n$ 上处处连续，且对任意 ν $(0<\nu<\lambda)$，有 $u\in C^{(0,\nu)}(\mathbf{R}^n)$．在点 $y_0\in S$，沿着 S 的外法线方向 n_0 的导数在穿过曲面 S 时不连续．分别从 D^+ 和 D^- 到 S，法线导数的极限存在且处处连续，并且分别可用下面公式表示：

$$\lim_{x\to y_0}\frac{du}{d\mathbf{n}_0}\bigg|_i=\frac{du(y_0)}{d\mathbf{n}_0}-\frac{f(y_0)}{2},\ x\in D^+,\quad (2)$$

$$\lim_{x\to y_0}\frac{du}{d\mathbf{n}_0}\bigg|_e=\frac{du(y_0)}{d\mathbf{n}_0}+\frac{f(y_0)}{2},\ x\in D^-,$$

其中

$$\frac{du(y_0)}{d\mathbf{n}_0}=\int_S\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_0}h(|y-y_0|)f(y)d\sigma(y)\quad (3)$$

是所谓的单层位势在点 $y_0\in S$ 法向导数的直接值（direct value of the normal derivative）．此外，对所有 ν $(0<\nu<\lambda)$，有 $(du/d\mathbf{n}_0)(y_0)\in C^{(0,\nu)}(S)$．如果 $f(y)\in C^{(0,\nu)}(S)$，那么 $u(x)$ 的偏导数可以分别连续开拓到 $\overline{D^+}$ 和 $\overline{D^-}$，成为 $C^{(0,\nu)}(\overline{D^+})$ 和 $C^{(0,\nu)}(\overline{D^-})$ 类函数．在此情形下，同样有

$$\frac{du}{d\mathbf{n}_0}(y_0)\in C^{(0,\lambda)}(S).$$

这些性质可沿各种方向作推广．例如，如果 $f\in L_1(S)$，那么在 S 所界定的内部和 S 上，$u\in L_1$，公式 (2) 在 S 上几乎处处成立，且 (3) 式的积分在 S 上是可和的．单层位势也可看成关于任一集合中在 S 上的 Radon 测度 μ 的积分：

$$u(x)=\int h(|x-y|)d\mu(y),$$

以此来研究其性质．这时，u 在 S 的余集是调和函数．而公式 (2) 当用测度的导数 $\mu'(y_0)$ 代替 $f(y_0)$ 时，在 S 上关于 Lebesgue 测度几乎处处成立．在定义 (1) 式中，可以用 $C^{(0,\lambda)}$ 类变系数的一般二阶椭圆型算子的任意一个 Lewy 函数代替 Laplace 方程的基本解，用沿余法线的导数代替法线方向导数 $d/d\mathbf{n}_0$．在这种情形下，仍具有上述性质（见[2]，[3]，[4]）．

单层位势用于解椭圆型方程的边值问题．具有指定法向导数的第二边值问题的解可表示成带有待求密度 f 的单层位势：利用公式 (2) 和 (3) 导出在 S 上关于 f 的第二类 Fredholm 积分方程（见[2]－[5]）．

在解抛物型方程的边值问题时，可以利用具如下形式的单层热位势（simple-layer heat potential）：

$$v(x,t)=\int_0^t\int_S G(x,t;y,\tau)f(y,\tau)d\sigma(y)d\tau,$$

其中

$$G(x,t;y,\tau)=$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n(t-\tau)^{n/2}}\exp\left[\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right]$$

是 n 维空间热（传导）方程的基本解，而 $f(y,\tau)$ 是密度．函数 v 及其在任意二阶抛物型方程的推广具有类似于上述对 u 所阐明的性质（见[3]，[4]，[6]）．

参考文献

[1] Гюнтер, Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953（英译本：Günter, N. M., Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics, F. Unger, New-York, 1967）.

[2] Miranda, C., Partial differential equations of elliptic type, Springer, 1970（译自意大利文）.

[3] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 5 изд, М., 1977（中译本：А. Н. 吉洪诺夫，А. А. 萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1956）.

[4] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 4, 5 изд., М., 1958（中译本：В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，人民教育出版社，1958）.

[5] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964（中译本：A. 弗里德曼，抛物型偏微分方程，科学出版社，1984）.

[6] Бицадзе, А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966（英译本：Bitsadze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equation, North-Holland, 1968）.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 在 $\mathbf{R}^n$ 的更一般开集上的单层位势见[A1]．

参考文献

[A1] Král, J., Integral operators in potential theory, Springer, 1980.

高琪仁 吴炯圻 译

单比[**simple ratio**; **простое отношение**]，一直线上三点 M_1，M，M_2 的

数 λ，使得

$$\overline{M_1M}=\lambda\overline{MM_2}.$$

此外，还可以说，点 M 以比 λ 分割线段 M_1M_2．如果点 M_1 和 M_2 的坐标是 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，则点 M 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

单比是仿射变换的不变量.

А. Б. Иванов 撰 杜小杨 译

单表示 [simple representation; простое представление]

同**不可约表示** (irreducible representation).

单环 [simple ring; простое кольцо]

含有不止一个元素, 除了 0 和整个环, 没有其他双侧**理想** (ideal) 的环. 有单位元并含极小单侧理想的结合单环同构于某个除环上的矩阵环. 亦见**结合环与结合代数** (associative rings and algebras). 若不假设单位元的存在, 这样的环是某个除环 D 上的局部矩阵环, 即环的每个有限子集包含在一个与 D 上矩阵环同构的子环内 (见[2]). 存在不同于除环的无零因子单环 (甚至是 Noether 单环, 亦见 **Noether 环** (Noetherian ring)), 也存在有零因子而无幂等元的 Noether 单环 ([3]). 同时是 N. Jacobson 意义下的根的单环也被发现 (见[1]). 可是, 诣零单环的存在性问题尚未解决.

交错单环的结构描述归结到结合情形 (见**交错环与交错代数** (alternative rings and algebras)). 亦见**单代数** (simple algebra).

参考文献

[1] Вокуть, Л. А., Ассоциативные кольца, ч. 1-2. Новосиб., 1977-1981.

[2] Jacobson, N., Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.

[3] Залесский, А. Е., Нерославский, О., 《Сущес-твуют Alg.》, 5(1977), 3, 231-244.

[4] Faith, C., Algebra, 1-2, Springer, 1973-1976.

[5] Cozzens, J. and Faith, C., Simple Noetherian rings, Cambridge Univ. Press, 1975.

Л. А. Скорняков 撰 蔡传仁 译

单半群 [simple semi-group; простая полугруппа]

不含真理想或某固定类型的同余的**半群** (semi-group). 依赖于所考虑的类型而出现不同种类的单半群: 理想单半群 (ideal-simple semi-groups), 它不含真的双边理想 (术语单半群通常仅用于这种半群); 左 (右) 单半群 (left (right) simple semi-groups), 它不含真的左 (右) 理想; (左, 右) 0 单半群 (0-simple semi-group), 它具有零元, 不含非零双边 (左, 右) 理想且不是具有零乘法的两元素半群; 双单半群 (bi-simple semi-group), 它由一个 $\mathscr{D}$ 类组成 (见 **Green 等价关系** (Green equivalent relations)); 0 双单半群 (0-bi-simple semi-group), 它由两个 $\mathscr{D}$ 类组成, 其中之一为零类; 以及非同余半群 (congruence-free semi-group), 它除了泛关系及等式关系外没有别的同余关系.

每个左或右单半群是双单的; 每个双单半群是理想单的, 但有理想单半群不是双单的 (甚至于它的所有 $\mathscr{D}$ 类由单个元组成). 理想单半群 (0 单半群) 中最重要的类型是完全单半群 (完全 0 单半群) (见**完全单半群** (completely simple semi-group)). 双单的但非完全单的半群的最重要的例子有: **双循环半群** (bicyclic semi-group) 及 4 螺线半群 Sp_4 ([11]). 后者, Sp_4, 由生成元 a, b, c, d 及定义关系 $a^2=a$, $b^2=b$, $c^2=c$, $d^2=d$, $ba=a$, $ab=b$, $bc=b$, $cb=c$, $dc=c$, $cd=d$, $da=d$ 来给定. 它同构于某双循环半群上的 **Rees 矩阵型半群** (Rees semi-group of matrix type), 这个双循环半群具有生成元 u, v, 满足 $uv=1$, 而 Rees 半群带有三明治矩阵

$$\left\|\begin{matrix}1 & v\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|.$$

某种意义上, Sp_4 是由有限个幂等元生成的非完全单的双单半群中最小的, 它常作为这种半群的子半群出现.

右单半群也称为具有右除法的半群 (semi-group with right division) 或具有右可逆性的半群 (semi-group with right invertibility). 使用这术语的原因是这种半群的如下的等价性: 对任何两个元素 a, b 都有 x 使得 $ax=b$. 包含幂等元的右单半群恰是**右群** (right group). 没有幂等元的右单半群的重要例子是集合 M 上所有满足如下性质的变换 φ 的半群 $T(M,\delta,p,q)$: 1) φ 的核是 M 上的等价性关系 δ; 2) 商集合 M/δ 的基数是 p; 3) 集合 $M\varphi$ 与每个 δ 类的交至多有一个元素; 4) 与 $M\varphi$ 不相交的 δ 类的集合有无限基数 q, 且 $q\leqslant p$. 半群 $T(M,\delta,p,q)$ 称为型 (p,q) 的 Teisser 半群 (Teisser semi-group), 又若 δ 是等式关系, 则它称为 (p,q) 型的 Baer-Levi 半群 (Baer-Levi semi-group) (参见 [6], [7]). Teisser 半群是没有幂等元且不一定满足右消去律的右单半群的例子. 没有幂等元的任何右单半群可嵌入到适当的 Teissier 半群中, 而具有右消去律的每个这样的半群可嵌入到适当的 Baer-Levi 半群中 (两种情形下都能取 $p=q$).

各种类型的单半群常作为"积木块"出现, 能用它们来构造所考虑的半群. 单半群的经典例子见**完全单半群** (completeley-simple semi-group); **Brandt 半群** (Brandt semi-group); **右群**; 对于双单逆半群 (包括在某些限制下, 幂等元半格的结构定理) 见[1], [8], [9]. 存在有任意个数 $\mathscr{D}$ 类的理想-单逆半群. 在将半群嵌入到单半群的研究中通常或者提出相

应的嵌入的可能性条件，或者证明任何半群可嵌入到所考虑的类型的半群中．例如，任何半群可嵌入到有幺元的双单半群中（见[1]），到由幂等元生成的双单半群中（见[10]），到对于一些同余是单的某种半群中（可以预先给定这些同余的某些性质：具有或不具有零，完全性，有空的 Frattini 子半群等等，可参见[3]－[5]）．

参考文献

[1] Clifford, A. H. and Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1－2, Amer. Math. Soc., 1961－1967.

[2] Ляпин, Е. С., Полугруппы, М., 1960.（英译本：Lyapin, E. S., Semigroups, Amer. Math. Soc., 1974）.

[3] Бокуть, Л. А.,《Сиб. матем. ж.》, **4** (1963), 3, 500－518

[4] Шутов, Э. Г.,《Матем. сб.》, **62** (1963), 4, 496－511.

[5] Климов, В. Н.,《Сиб. матем. ж.》, **14** (1973), 5, 1025－1036.

[6] Baer, R. and Levi, F., Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiome n, *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wissenschaft. Math.-Nat. Kl.*, **2** (1932), 3－12.

[7] Teissier, M., Sur les demi-groupes admettant léxistence du quotient d'un cote', *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236** (1953), 11, 1120－1122.

[8] Munn, W. D., Some recent results on the structure of inverse semigroups, in Folley, K. W.(ed.): Semigroups, Acad. Press, 1969, 107－123.

[9] Howie, J., An introduction to semigroup theory, Acad. Press, 1976.

[10] Pastijn, F., Embedding semigroups in semibands, *Semigroup Forum*, **14** (1977), 3, 247－263.

[11] Byleen, K., Meakin, J. and Pastijn, F., The fundamental four-spiral semigroup, *J. of Algebra*, **54** (1978), 6－26.

Л. Н. Шеврин 撰　石生明 译　王 杰 校

单集 [simple set; простое множество]，亦称单纯集

一个自然数的递归可枚举集（见**可枚举集**（enumerable set）），其补集为**禁集**（immune set）．在所谓 m 可归约性的意义下（见**递归集合论**（recursive set theory）），单集介于可解集和创造集之间．在 m 可归约性意义下，创造集是在可枚举集中的最大的．设 P 是任意单集，K 是自然数的一任意创造集（例如形式算术的定理的 Gödel 数集），那么不存在把 K 归约到 P 的**一般递归函数**（general recursive function）f，即使得

$$x\in K \Leftrightarrow f(x)\in P.$$

P 到 K 的可归约性总是存在的．没有可解集可归约到 P．

参考文献

[1] Успенский, В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960（英译本：Uspenskiì, V. A.: Leçons sur les fonctions calculables, Hermann, 1966）.

[2] Мальцев, А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965（英译本：Mal'tsev, A. I., Algorithms and recursive functions, Wolters-Noordhoff, 1970）.

[3] Rogers, Jr. H., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967.

С. Н. Артемов 撰　杨东屏 译

单形 [simplex; симплекс]，（亦称单纯形）

一个 n 维多胞形（见**多面体**（polyhedron）），它是 $n+1$ 个不在任一（$n-1$）维平面中的点（单形的**顶点**（vertices））的凸包．当 $n=0, 1, 2$，或 3 时，单形分别是点，区间，三角形，或四面体．单形的面是低维的单形．两个相同维数的单形是仿射等价的．单形的每一点对应单位质量在顶点的唯一分布，在此分布下单形以该点为重心．这被用于在单形中引入**重心坐标**（barycentric coordinates），也作为把单形的概念推广到无限维情形的一种方法（见 **Choquet 单形**（Choquet simplex）；**单形（抽象的）**（simplex (abstract)））．一个单形可取定两个定向中的一个，这样就诱导了每一个（$n-1$）维面上的一个特殊定向．

В. А. Залгаллер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Grünbaum, B., Convex polytopes, Wiley, 1967.

[A2] McMullen, P. and Shephard, G. C., Convex polytopes and the upper bound conjecture, Cambridge Univ. Press, 1971.

陆珊年 译

单形（抽象的）[simplex (abstract); симплекс]

一个**拓扑空间**（topological space）$|A|$，它的点是一个有限集 A 上满足 $\sum_{a\in A}\varphi(a)=1$ 的非负函数 $\varphi: A\to \mathbf{R}$．$|A|$ 上的拓扑是从 A 到 $\mathbf{R}$ 中的所有函数的空间 $\mathbf{R}^A$ 诱导的．实数 $\varphi(a)$ 称为点 φ 的**重心坐标**（barycentric coordinates），$|A|$ 的**维数**（dimension）定义为 card$(A)-1$．当 A 是 Euclid 空间中线性无关的子集时，$|A|$ 同胚于集合 A 的凸包（同胚由对应 $\varphi\mapsto\sum_{a\in A}\varphi(a)\cdot a$ 给出）．Euclid 空间中一个线性无关子集的凸包称为一个 **Euclid 单形**（Euclidean simplex）．

对任意有限集间的映射 $f: A\to B$，公式 $(|f|\varphi)(b)=\sum_{f(a)=b}\varphi(a)$，$b\in B$，定义一个连续映射 $|f|: |A|\to|B|$，对于 Euclid 单形，它是扩

充 f 的一个仿射（非齐次线性）映射．这定义了从有限集的范畴到拓扑空间的范畴中的一个函子．如果 $B \subset A$ 且 $i: B \to A$ 是相应的包含映射，则 $|i|$ 是到 $|A|$ 的一个闭子集上的同胚，称为面（face），它通常等同于 $|B|$．零维面称为顶点（通常，把它们等同于 A 的元素）．

一个拓扑有序单形（topological ordered simplex）是一个拓扑空间和一个给定的同胚 $h: \Delta^n \to X$，其中 Δ^n 是一个**标准单形**（standard simplex）．Δ^n 的面在 h 下的象称为拓扑有序单形 X 的面．两个拓扑有序单形 X 和 Y 间的一个映射 $X \to Y$ 称为线性的（linear），如果它有形式 $k \circ F \circ h^{-1}$，其中 k 和 h 是给定的同胚，F 是 $\Delta^n \to \Delta^n$ 的 $|f|$ 形式的映射．

一个（n 维的）拓扑单形（topological simplex）是一个拓扑空间 X，配备了 $(n+1)!$ 个同胚 $\Delta^n \to X$（即，具有 $(n+1)!$ 个拓扑有序单形的结构），这些同胚间相差一个 $\Delta^n \to \Delta^n$ 的 $|f|$ 形式的同胚，其中 f 是顶点的一个任意置换．类似地，拓扑单形间的一个映射称为线性的，如果它是对应的拓扑有序单形间的一个线性映射．

单纯集（simplicial set）的元素和**单纯概形**（simplicial scheme）的不同子集也被称为单形．

А．В．Хохлов 撰

【补注】 一个单形也是一个**单纯复形**（simplicial complex）的组成成分．一个其构成子集的所有子集都是单形的单纯复形也称为一个单形．　　陆珊年 译

单纯形法 [**simplex method; симплексный метод**]，逐次计划改进法（method of sequential plan improvement）

解下列一般**线性规划**（linear programming）问题的方法：

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mapsto \max;\ \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = A_0;$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \cdots, n,$$

其中 $A_j = (a_{1j}, \cdots, a_{mj})^T,\ j = 1, \cdots, n$．

单纯形法是最为流行的线性规划方法．它是通过在由线性规划问题的约束所定义的多面体集的相邻顶点间移动而形成的算法，且其实现只要求有限次迭代．问题的多面体可行集的顶点基（basis of a vertex）$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是 m 个线性无关向量 $A_{s_1}, \cdots, A_{s_m}$（$s_\alpha \geqslant 1$，$\alpha = 1, \cdots, m$）的组．它满足当 $j \notin \{s_1, \cdots, s_m\}$ 时，$x_j = 0$．此方法每次迭代的输入信息是顶点 x 的基 $A_x = (A_{s_1}, \cdots, A_{s_m})$ 的一个组合，参数 x_{ij} 由

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{s_i},\ j = 0, \cdots, n,$$

确定（特别是，$x_{i0} = x_{s_i}$ 是顶点 x 的基分量），而参数

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{s_i} x_{ji} - c_j,\ j = 1, \cdots, n.$$

如果 $\Delta_j \geqslant 0$ 对于所有 j 成立（1），那么 x 是问题所需要的解．否则选择一个负参数 Δ_k．如果 x_{ik}，$i = 1, \cdots, m$，都不是正的（2），那么问题不可解，因为问题的目标函数在多面体集上无界．在某个 x_{ik} 为正的情形下（3），顶点 x 被代替为顶点 $x' = x + \theta x^k$，其中

$$x^k = (x_1^k, \cdots, x_n^k),\ x_{s_i}^k = -x_{ik},\ i = 1, \cdots, m,\ x_k^k = 1,$$

x^k 其余的分量是零，且

$$\theta = \min_{i: x_{ik} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}} = \frac{x_{r0}}{x_{rk}}.$$

于是顶点 x' 有基 $A_{x'}$，它不同于 A_x，其中 A_{s_r} 被代替为 A_k．对于 $A_{x'}$ 的参数 x'_{ij} 和 Δ'_j 通过简单的递推公式用 x_{ij} 和 Δ_j 来表达．

情形（1）意味着，沿着由顶点 x 出发的多面体集的每条棱，目标函数不增．情形（2）和（3）对应沿着它目标函数增加的棱的存在，并且在情形（2）中这条棱是射线，而在情形（3）中这条棱是以顶点 x' 为另一个端点的区间．迭代继续到得到最优顶点或断言问题不可解．

当问题的规模充分大时，单纯形方法的程序实现通常基于另一种算法实现，其中对于每次迭代的基本输入信息是基 A_x 的逆矩阵 A_x^{-1}（逆矩阵法（inverse matrix method））．这是对于约束矩阵 $A = (A_1 A_2 \cdots A_n)$ 有稀疏性质（property of sparseness）（非零 a_{ij} 的个数少于 mn）的线性规划问题来设计的．稀疏矩阵在计算机内存中能以紧凑的形式储存，其中只有非零元素及其位置被保存．储存基的逆的特殊方法已经研制，它允许减少使用刻画 A_x^{-1} 的内存．它们基于把 A_x^{-1} 表示为不同于只有一列的单位矩阵的矩阵因子（乘数）的乘积．乘数的非零元素个数依赖于向量在基中所引入的顺序．因此，经过一定数量的的乘数的累积，所谓复制品被重新组织，它给出 A_x^{-1} 的简短的乘数表示．

单纯形算法的重要部分是对于在基中引入的选择向量 A_k 时所使用的策略．一方面，必须促使减少用来刻画 A_x^{-1} 的内存，另一方面，防止碰上病态基．

对于阶数 m, n 分别为几千和几万的稀疏约束矩阵的线性规划问题的求解，有多种单纯形法的实现．

单纯形法已经有许多变种，它们用来针对线性规划问题的各种特殊类（分块问题、运输问题等等）的特点．

尽管单纯形法在理论上并非相当有效（作为整体来说，线性规划类的算法复杂性只是多项式型的，但是它在最坏情形的有效性估计是指数型的），对它

的应用经验和与其他方法的比较说明．至今它还没有重要的竞争对手．

参考文献

[1] Юдин, Д. Б., Гольштейн, Е. Г., Линейное программирование, М., 1963 (英译本: Yudin, D. B. and Gol'shtein, E. G., Linear programming, Israel Progr. Sci. Transl., 1965).

[2] Danzig, J., Linear programming and extensions, Princeton Univ. Press, 1963.

[3] Ашманов, С. А., Линейное программирование, М., 1981

Е. Г. Гольштейн 撰

【补注】 关于最坏情形的单纯形算法的功能的否定结果，见[A1]；对于其平均情形的功能的肯定结果，见[A2]，[A3]．对于线性规划的具有多项式时间最坏情形性态的另外的算法已经由 Л. Г. Хачиян ([A4]) 和 N. Karmarkar ([A5]) 提出．Хачиян的结果解决了线性规划的计算复杂性问题，而 Karmarkar 方法看来是单纯形法的实际竞争者．关于单纯形法、Karmarkar 算法（内部算法（interior algorithm））和椭球体算法之间的关系的最近的综述，见[A8]．

参考文献

[A1] Klee, V. and Minty, G., How good is the simplex algorithm? in O. Shisha (ed.): Inequalities, Vol. III, Acad. Press, 1972, 159－172.

[A2] Borgwardt, K. H., The average number of pivot steps required by the simplex-method is polynomial, *Z. Oper. Res.*, **26** (1982), 157－177.

[A3] Shamir, R., The efficiency of the simplex method: a survey, *Management Science*, **33** (1987), 3, 301－334.

[A4] Khachiyan, L. G., A polynomial algorithm in linear programming, *Soviet Math. Dokl.*, **20** (1979), 1, 191－194, (《Докл. Акад. Наук. СССР》, **244** (1979), 1093－1096.)

[A5] Karmarkar, N., A new polynominal-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, **4** (1984), 4, 373－395.

[A6] Heesterman, A. R. G., Matrices and simplex algorithms, Reidel, 1983.

[A7] Zionts, S., Linear and integer programming, Prentice-Hall, 1974.

[A8] Todd, M. J., Recent developments and new directions in linear programming, in M. Iri and K. Tanabe (eds.): Mathematical Programming, Kluwer, 1989, 109－157.

史树中 译

单纯形搜索 [simplex search; симплексный поиск]

一种多元函数极大化（极小化）的方法，其中下降（上升）方向的选取是用依次地拣出容许多面体集合的顶点而作出的（见**单纯形法**（simplex method））．

А. Б. Иванов 撰 葛显良 译 吴绍平 校

单纯复形 [simplicial complex; симплициальная схема]，单纯概形（simplicial scheme），抽象单纯复形（abstract simplicial complex）

其元素叫作顶点（vertex）的一个集合，在它里面，指定了一组称为单形（simplex）的有限非空子集，这组子集适合以下的条件：单形 s 的每个非空子集是单形（称为 s 的面（face）），又每个单元素子集为单形．

一个单形叫作 q 维（q-dimensional）单形，如果它由 $(q+1)$ 个顶点构成．单纯复形 K 的诸单形（可能有无穷多个）的最大维数叫作 K 的维数（dimension）$\dim K$．单纯复形叫做局部有限的（locally finite），如果它的每个顶点只属于有限多个单形．单纯复形叫作有序的（ordered），如果它的顶点间有一个偏序、而限于每个单形上为全序的．

例．设 X 为集合，$U=\{U_\alpha;\ \alpha\in A\}$ 为 X 的一族非空子集．A 的一个非空有限子集 B 叫作一个单形，如果集合 $\bigcap_{\alpha\in B}U_\alpha$ 非空．所得单纯复形 A 叫作族 U 的神经（nerve）．（见**集族的神经**（nerve of a family of sets）．）

单纯复形 K_1 到单纯复形 K_2 中的单纯映射（simplicial mapping）是一个映射 $f: K_1\to K_2$，它将 K_1 中的每个单形 s 映为 K_2 中的单形 $f(s)$．单纯复形和它们的单纯映射构成一个范畴．

如果单纯映射 $f: L\to K$ 为置入，称 L 为 K 的单纯子复形（simplicial subcomplex）．单纯复形 K 中维数不超过 n 的所有单形构成 K 的单纯子复形，记作 K^n，称为 K 的 n 维（或 n）骨架（n-dimensional（或 n-）skeleton）．单纯复形 K 的子复形 L 叫作满的（full），如果 K 中其顶点都属于 L 的每个单形也属于 L．

每个单纯复形 K 典范地决定一个**单纯集**（simplicial set）$O(K)$，它的 n 维单形是 K 的顶点的所有 $(n+1)$ 点组 $(x_0,\cdots,x_n)$ 的集合，且这时要求存在 K 中一单形 s 使得 $x_i\in s$，$i=0,\cdots,n$．$O(K)$ 的边界算子 d_i 和退化算子 s_i 由下式决定：

$$d_i(x_0,\cdots,x_n)=(x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n),$$

$$s_i(x_0,\cdots,x_n)=(x_0,\cdots,x_i,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n),$$

这里 ˆ 表示在它下面的符号略去．当 K 有序时，可以定义单纯子集 $O^+(K)\subset O(K)$，它由适合条件 $x_0\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 的 $(x_0,\cdots,x_n)$ 组成．$O(K)$ 的（上）同调群与 $O^+(K)$ 的（上）同调群同构，叫作 K 的（上）同调群．

每个三角剖分（**单纯空间**（simplicial space））X，决定一个单纯复形，它的顶点就是 X 的顶点，它的单形是由那些在 X 中张成一个单形的诸非空有限顶点集

构成．对每个单纯复形 K，存在同构意义下唯一的三角剖分，它的单纯复形就是 K．这个三角剖分叫作 K 的几何实现（geometric realization）（或体（body），或几何单纯复形（geometric simplicial complex）），记为 $|K|$．它是单纯集 $O(K)$ 在 Giever-胡（世桢）意义下（见**单纯集**（simplicial set））的一个几何模型 $\|O(K)\|$．当 K 有序时，是单纯集 $O^{+}(K)$ 在 Milnor 意义下的几何模型 $|O^{+}(K)|$．对应 $K \mapsto |O(K)|$ 是从单纯复形范畴到胞腔空间范畴的一个协变函子．和某个单纯复形 K 的体 $|K|$ 同胚的拓扑空间 X 叫作多面体（polyhedron）（或剖分空间（triangulated space）．见**抽象多面体**（polyhedron，abstract）），而偶 (K, f)，当 $f: |K| \to X$ 为同胚时，称为 X 的一个三角剖分（triangulation）．

拓扑空间 $|K|$ 的点可恒同为函数 $\alpha: K^0 \to [0, 1]$，这时集合 $\{x \in K^0, \alpha(x) \neq 0\}$ 为 K 的单形，又

$$\sum_{x \in K^0} \alpha(x) = 1.$$

数 $\alpha(x)$ 叫作 α 的第 x 个重心坐标（barycentric coordinate）．公式

$$d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{x \in K^0} (\alpha(x) - \beta(x))^2}$$

决定了 $|K|$ 上的一个度量，但这个度量所决定的拓扑，一般较原来的强．装备这个度量拓扑的集合 $|K|$ 记为 $|K|_d$．

单纯复形 K 与空间 $|K|$ 的顶点的星形族的神经同构，即与开子集 $\mathrm{St}\, x = \{\alpha \in |K|: \alpha(x) \neq 0\}$ 的族的神经同构，这里 $x \in K^0$．

下面的一组命题等价：1）单纯复形 K 为局部有限；2）空间 $|K|$ 局部紧；3）$|K| = |K|_d$；4）$|K|$ 可度量化；5）$|K|$ 满足**第一可数公理**（first axiom of countability）．此外，空间 $|K|$ 可分（紧），当且仅当 K 至多为可数的（有限）．

复形 $|K|$ 的胞腔与 K 的单形一一对应，又和单形 s 对应的胞腔的闭包 $|s|$ 为

$$|s| = \{\alpha \in |K|: \alpha(x) \neq 0 \Rightarrow x \in s\}.$$

这是一个与 q 维闭球同胚的集合，这里 $q = \dim s$．因此复形 $|K|$ 是正则的．此外，每个集合 $|s|$ 有一个典型的线性（仿射）结构．在这个结构下，它与**标准单形**（standard simplex）Δ^q 同构．由此以及对 $s, s' \subset K$ 有 $|s \cap s'| = |s| \cap |s'|$，知空间 $|K|$ 可以同胚地（可以嵌入）映入 $\mathbf{R}^n$ 中（这里 n 可以超有限），因此所有的闭胞腔 $|s|$ 是（线性）单形．这表明 $|K|$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的象为**单纯空间**（simplicial space）（多面体），即，只在整个面相交的闭单形的并．这个单纯空间叫作单纯复形 K 在 $\mathbf{R}^n$ 中的实现（realization）．

单纯复形 K 可以在空间 $\mathbf{R}^n$（n 有限）中实现的充要条件是，K 为局部有限，至多可数和维数有限．此外，若 $\dim K \leq n$，那么 K 可在 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中实现．由 $2n+3$ 个顶点构成的单纯复形，如果它的每个由 $(n+1)$ 个元素构成的子集均为单形，那么这个复形就不可能在 $\mathbf{R}^{2n}$ 中实现．

由单纯复形 K 出发，可以构造一个新的单纯复形 $\mathrm{Bd}\, K$ 如下：它的顶点是 K 的单形，它的单形是 K 的一组单形 $(s_0, \cdots, s_q)$，适合条件 $s_0 \subset \cdots \subset s_q$．$\mathrm{Bd}\, K$ 叫作 K 的重心加细（barycentric refinement（或重分（subdivision）））．胞腔空间 $|\mathrm{Bd}\, K|$ 和 $|K|$ 自然同胚（但不同构）．这个同胚将 $|\mathrm{Bd}\, K|$ 的每个顶点 $|s|$（即对应于 $\mathrm{Bd}\, K$ 的顶点 s 的零维胞腔）映成闭单形 $|s| \subset |K|$ 的重力中心（重心）．

单纯复形 $\mathrm{Bd}\, K$ 有一个自然的序．如果 K 有序，那么对应 $s \mapsto$（s 的第一个顶点）决定了一个保持序关系的单纯映射 $\mathrm{Bd}\, K \to K$，称它为典范平移（canonical translation）．它的几何实现（是一个连续映射 $|\mathrm{Bd}\, K| \to |K|$）与自然同胚 $|\mathrm{Bd}\, K| \to |K|$ 同伦．

单纯映射 $\varphi: K \to L$（或者它的几何实现 $|\varphi|: |K| \to |L|$）叫作连续映射 $f: |K| \to |L|$ 的单纯逼近（simplicial approximation），如果对每个点 $\alpha \in |K|$，点 $|\varphi|(\alpha)$ 属于包含点 $f(x)$ 的最小闭单形，或者，等价地，如果对每个点 $x \in K$，$f(\mathrm{St}\, x) \subset \mathrm{St}\, \varphi(x)$．映射 f 和 $|\varphi|$ 同伦．

单纯逼近定理（simplicial approximation theorem）是说，如果单纯复形 K 有限，那么对于每个连续映射 $f: |K| \to |L|$，存在整数 N 使得对于所有的 $n \geq N$，有 f 的单纯逼近 $\mathrm{Bd}^n K \to L$ 存在（这时 f 视为映射 $|\mathrm{Bd}^n K| \to |L|$）．

参考文献

[1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966（中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）．

[2] Hilton, P. J. and Wylie, S., Homology theory: An introduction to algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1960（中译本：P. J. 希尔顿，S. 瓦理，同伦论，上海科学技术出版社，1963）．

[3] Whitehead, J. H. C., Simplicial spaces, nuclei and *M*-groups, *Proc. London Math. Soc.*, 45 (1939), 243–327.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников 撰

【补注】 在西方，这里所阐述的概念，通常叫作（抽象）单纯复形（simplicial complex），单纯概形（simplicial scheme）一般用于表示概形范畴中的单纯对象（见**范畴中的单纯对象**（simplicial object in a category））．

参考文献

[A1] Maunder, C. R. F., Algebraic topology, v. Nos-

trand, 1972.
[A2] Lefschetz, S., Topology, Chelsea, reprint, 1956.
[A3] Lamotke, K., Semisimpliziale algebraische Topologie. Springer, 1968. 沈信耀 译 潘建中 校

单纯映射 [simplicial mapping; симплициальное отображение]

单纯空间(simplicial space)或**单纯概形**(simplicail scheme)范畴中的一个态射. A B. Хохлов 撰

【补注】 此概念作为任意涉及单形的对象的范畴中的一个态射有更广泛的含义, 亦见例如**单纯集**(simplicial set)和**范畴中的单纯对象**(simplicial object in a category). 张英伯 译

范畴 $\mathscr{C}$ 中的单纯对象 [simplicial object in a category $\mathscr{C}$; симплициальный объект]

从范畴 Δ 到 $\mathscr{C}$ 的一个反变函子 $X: \Delta \to \mathscr{C}$(或等价地, 一个共变函子 $X: \Delta^{op} \to \mathscr{C}$), 其中 Δ 的对象是有序集 $[n]=\{0,\cdots,n\}$, $n\geqslant 0$, 态射是非减映射 $\mu: [n]\to[m]$. 共变函子 $X:\Delta\to\mathscr{C}$(或等价地, 反变函子 $X:\Delta^{op}\to\mathscr{C}$)叫作 $\mathscr{C}$ 中的一个余单纯对象(co-simplicial object).

Δ 中的态射

$$\delta_i=\delta_i^n:[n-1]\to[n],\ 0\leqslant i\leqslant n,$$

$$\sigma_i=\sigma_i^n:[n+1]\to[n],\ 0\leqslant i\leqslant n,$$

其中

$$\delta_i^n(j)=\begin{cases} j & 若\ j<i, \\ j+1 & 若\ j\geqslant i,\end{cases}$$

$$\sigma_i^n(j)=\begin{cases} j & 若\ j\leqslant i, \\ j-1 & 若\ j>i,\end{cases}$$

生成 Δ 的全部态射, 这样, 单纯对象 X 由 $X([n])=X_n(n\geqslant 0)$(称为单纯对象 X 的 n 纤维(n-fibres)或 n 分量(n-components))和态射

$$d_i=X(\delta_i):X_n\to X_{n-1}\ 以及\ s_i=X(\sigma_i):X_n\to X_{n+1}$$

(分别称为边缘算子(boundary operators)和退化算子(degeneracy operators))确定. 如果 $\mathscr{C}$ 是有结构的集合的范畴, 元素 X_n 通常称为 X 的 n 维单形(n-dimension simplices). 映射 δ_i 和 σ_i 满足关系

$$\left.\begin{aligned} &\delta_j\delta_i=\delta_i\delta_{j-1} \quad 若\ i<j, \\ &\sigma_j\sigma_i=\sigma_i\sigma_{j+1} \quad 若\ i\leqslant j; \\ &\sigma_j\delta_i=\begin{cases}\delta_i\sigma_{j-1} & 若\ i<j, \\ id & 若\ i=j\ 或\ i=j+1, \\ \delta_{i-1}\sigma_j & 若\ i>j+1,\end{cases}\end{aligned}\right\}(*)$$

且这些映射之间的任意关系是(*)的推论. 这就是说, 一个单纯对象 X 可以恒同于 $\mathscr{C}$ 中对象 X_n($n\geqslant 0$)以及态射 $d_i:X_n\to X_{n-1}$ 和 $s_i:X_n\to X_{n+1}$ ($0\leqslant i\leqslant n$)的一个组 $\{X_n, d_i, s_i\}$, 态射 d_i, s_i 满足关系式

$$d_id_j=d_{j-1}d_i,\quad 若\ i<j;$$

$$s_is_j=s_{j+1}s_i,\quad 若\ i\leqslant j;$$

$$d_is_j=\begin{cases} s_{j-1}d_i, & 若\ i<j, \\ id, & 若\ i=j\ 或\ i=j+1 \\ s_jd_{i-1}, & 若\ i>j+1.\end{cases}$$

类似地, 一个余单纯对象 X 可以恒同于对象 $X^n(n\geqslant 0)$(n 余纤维(n-co-fibres))和态射 $d^i: X^{n-1}\to X^n$($0\leqslant i\leqslant n$)(上边缘算子(co-boudary operators)), 和 $s^i: X^{n+1}\to X^n$, ($0\leqslant i\leqslant n$)(上退化算子(co-degeneracy operators))的一个组 $\{X^n, d^i, s^i\}$, 同样满足关系(*)(其中 $\delta_i=d^i$, $\sigma_i=s^i$).

在(同一个范畴 $\mathscr{C}$ 中)单纯对象间的一个单纯映射(simplicial mapping) $f:X\to Y$ 是从函子 $X:\Delta\to\mathscr{C}$ 到 $Y:\Delta\to\mathscr{C}$ 的一个变换(态射), 即 $\mathscr{C}$ 中的一族态射 $f_n: X_n\to Y_n$ ($n\geqslant 0$), 使得

$$d_if_{n+1}=f_nd_i,\ 0\leqslant i\leqslant n+1,$$

$$s_if_n=f_{n+1}s_i,\ 0\leqslant i\leqslant n.$$

$\mathscr{C}$ 中的单纯对象和它们的单纯映射作成一个范畴, 记作 $\Delta^0\mathscr{C}$.

范畴 $\mathscr{C}$ 中两个单纯映射间的单纯同伦(simplicial homotopy) $h: f\simeq g$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一族态射 $h_i: X_n\to Y_{n+1}$, $0\leqslant i\leqslant n$, 使得

$$d_0h_0=f_n;$$

$$d_nh_n=g_n;$$

$$d_ih_j=\begin{cases} h_{j-1}d_i & 若\ i<j, \\ d_jh_{j-1} & 若\ i=j>0, \\ h_jd_{i-1} & 若\ i>j+1;\end{cases}$$

$$s_ih_j=\begin{cases} h_{j+1}s_i & 若\ i\leqslant j, \\ h_js_{i-1} & 若\ i>j.\end{cases}$$

在此定义的基础上, 本质上说可以对任意范畴 $\mathscr{C}$ 引出范畴 $\Delta^0\mathscr{C}$ 中通常的同伦理论. 在集合或拓扑空间范畴的情况下, 几何实现函子(见单纯集(simplicial set))将这一"单纯"理论转变为通常的理论.

单纯对象的例子有单纯集, 单纯拓扑空间, 单纯代数簇, 单纯群, 单纯 Abel 群, 单纯 Lie 代数和单纯光滑流形等等.

每一个单纯 Abel 群均可看作一个带有边缘算子 $d=\sum(-1)^id_i$ 的链复形.

参考文献

[1] Gabriel, P. and Zisman, M., Calculus of fractions and homotopy theory, Springer, 1967.

[2] May, J. P., Simplicial objects in algebraische topology, v. Nostrand, 1967.

[3] Lamotke, K., Semisimpliziable algebarische Topologie, Springer, 1968.

С. Н. Мальгин, М. М. Постников 撰　张英伯 译

单纯概形 [**simplicial scheme**; **симплициальная схема**]

见单纯复形（simplicial complex）.

单纯集 [**simplicial set**; **симплициальное множество**]（曾称为半单纯复形（semi-simplicial complex），满半单纯复形（full semi-simplicial complex））

集范畴 Ens 中的一个单纯对象（见**范畴中的单纯对象**（simplicial object in a category）），即一组集合（n 纤维（n-fibre））K_n, $n\geqslant 0$, 其间有映射（边缘算子（boundary operator））$d_i: K_n\to K_{n-1}$, $0\leqslant i\leqslant n$ 和（退化算子（degeneracy operator））$s_i: K_n\to K_{n+1}$, $0\leqslant i\leqslant n$, 满足条件

$$\left.\begin{array}{l} d_id_j=d_{j-1}d_i,\ 若\ i<j,\\ s_is_j=s_{j+1}s_i,\ 若\ i\leqslant j;\\ d_is_j=\begin{cases} s_{j-1}d_i,\ 若\ i<j,\\ \mathrm{id},\ 若\ i=j\ 或\ i=j+1,\\ s_id_{i-1},\ 若\ i>j+1.\end{cases}\end{array}\right\}(*)$$

纤维 K_n 中的元素叫作单纯集 K 的 n 维单形（n-dimensional simplex）. 如果只给算子 d_i, 适合条件 $d_id_j=d_{j-1}d_i$, $i<j$, 那么称 $\{K_n, d_n\}$ 为半单纯集（semi-simplicial set）.

两个单纯集 K 和 K' 间的单纯映射（simplicial mapping）$f: K\to K'$ 是函子间的一个态射，即，一串映射 $f_n: K_n\to K_n'$, $n\geqslant 0$, 满足

$$d_if_{n+1}=f_nd_i,\ 0\leqslant i\leqslant n+1;$$
$$s_if_n=f_{n+1}s_i,\ 0\leqslant i\leqslant n.$$

单纯集和它们的单纯映射构成一个范畴 Δ^0Ens. 如果所有的 f_n 均为嵌入，则 K 叫作 K' 的单纯子集（simplicial subset）. 这时，K 的边界算子和退化算子都是 K' 相应算子的限制.

给定拓扑空间 X, 可以定义一个叫作空间 X 的奇异单纯集（singular simplicial set）的单纯集 $S(X)$. 它的单形是 X 的奇异单形（见**奇异同调**（singular homology）），即连续映射 $\sigma: \Delta^n\to X$, 这里 Δ^n 是 n 维几何标准单形（standard simplex）：

$$\Delta^n=\left\{(t_0,\cdots,t_n): 0\leqslant t_i\leqslant 1,\ \sum_{i=0}^n t_i=1\right\}\subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

此单纯集中的边界算子 d_i 和退化算子 s_i 由下式定义：

$$(d_i\sigma)(t_0,\cdots,t_{n-1})=$$
$$=\sigma(t_0,\cdots,t_{i-1},0,t_i,\cdots,t_{n-1}),$$
$$(s_i\sigma)(t_0,\cdots,t_{n+1})=$$
$$=\sigma(t_0,\cdots,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},\cdots,t_{n+1}).$$

对应 $X\mapsto S(X)$ 是从拓扑空间范畴 Top 到单纯集范畴 Δ^0Ens 的一个函子（叫做奇异函子（singular functor））.

任一单纯复形（simplicial complex）K 都决定一个单纯集 $O(K)$. 它的 n 维单形是 K 的 $(n+1)$ 个顶点 $(x_0,\cdots,x_n)$, 这些顶点属于 K 的同一个单形 s. 此单纯集中的算子 d_i 和 s_i 由下式给定：

$$d_i(x_0,\cdots,x_n)=(x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_n),$$
$$s_i(x_0,\cdots,x_n)=(x_0,\cdots,x_i,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n),$$

这里 ^ 表示它下面的记号略去. 如果 K 是有序的，那么满足 $x_0\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 的单形 $(x_0,\cdots,x_n)$ 的全体构成 $O(K)$ 的一个单纯子集 $O^+(K)$. 对应 $K\mapsto O(K)$ $(K\mapsto O^+(K))$ 是从单纯复形（有序单纯复形）范畴到范畴 Δ^0Ens 中的一个函子.

对任一群 π, 可以定义一个单纯集 $K(\pi)$. 它的 n 单形是 $(n+1)$ 重元 $(x_0:\cdots:x_n)$, $x_i\in\pi$, 的等价类（这里 $(x_0:\cdots:x_n)\sim(x_0':\cdots:x_n')$, 如果存在元素 $y\in\pi$ 使 $x_i=yx_i'$, 对所有的 $i=0,\cdots,n$）. $K(\pi)$ 的算子 d_i 和 s_i 由下式给定：

$$d_i(x_0:\cdots:x_n)=(x_0:\cdots:x_{i-1}:x_{i+1}:\cdots:x_n),$$
$$s_i(x_0:\cdots:x_n)=$$
$$=(x_0:\cdots:x_{i-1}:x_i:x_i:x_{i+1}:\cdots:x_n).$$

实际上，单纯集 $K(\pi)$ 是一个单纯群.

给定一个 Abel 群 π 和任一整数 $n\geqslant 1$, 可以定义一个单纯集（事实上，是一个单纯 Abel 群）$E(\pi,n)$. 它的 q 维单形是系数取自 π 的 q 维几何标准单形 Δ^q 的 n 维上链（即，$E(\pi,n)_q=C^n(\Delta^q;\pi)$）. 用 e_j^q, $j=0,\cdots,q$, 表示 Δ^q 的顶点，那么有单纯映射 $\delta_i: \Delta^{q-1}\to\Delta^q$ 和 $\sigma_i: \Delta^q\to\Delta^{q-1}$, 它们由下式给定：

$$\delta_i(e_j^{q-1})=\begin{cases} e_j^q, & 当\ j<i,\\ e_{j+1}^q, & 当\ j\geqslant i;\end{cases}$$

$$\sigma_i(e_j^q)=\begin{cases} e_j^{q-1}, & 当\ j\leqslant i,\\ e_{j-1}^{q-1}, & 当\ j>i.\end{cases}$$

它们在上链群上所诱导的同态

$$d_i = \delta_i^*: C^n(\Delta^q; \pi) \to C^n(\Delta^{q-1}; \pi),$$
$$s_i = \sigma_i^*: C^n(\Delta^{q-1}; \pi) \to C^n(\Delta^q; \pi),$$

由定义就是单纯集 $E(\pi, n)$ 的边界算子和退化算子. 是上闭链的那些单形构成 $E(\pi, n)$ 的一个单纯子集, 叫作 Eilenberg-MacLane 单纯集 (Eilenberg-MacLane simplicial set), 记为 $K(\pi, n)$. 群 $C^*(\Delta^q; \pi)$ 上的上边缘算子决定一个典范单纯映射 $E(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$, 记为 δ. 由于一维上闭链概念在 π 为非 Abel 时也有意义 (见**非 Abel 上同调** (non-Abelian cohomology)), 单纯集 $K(\pi, 1)$ 在不假定 π 为 Abel 时仍可定义. 这个单纯集与单纯集 $K(\pi)$ 同构 (每个单形 $z \in K(\pi, 1)_q = Z^1(\Delta^q, \pi)$ 所对应的一串值, 由上边缘为 z 的零维上链在顶点 e_i^q 的值给出).

对单纯集 K 的每个纤维 K_n, 对应一个由它生成的自由 Abel 群以后, 得到一个单纯 Abel 群, 因此有一链复形 (chain complex). 这个复形记为 $C(K)$, 叫作 K 的链复形. $C(K)$ 的 (系数在群 G 的) (上) 同调群叫作 K 的 (上) 同调群 ((co) homology group) $H(K; G)$ 和 $H^*(K; G)$. 奇异单纯集 $S(X)$ 的 (上) 同调群是空间 X 的 (上) 同调群. $O(K)$ 和 $O^+(K)$ 的 (上) 同调群同构, 叫作单纯复形 K 的 (上) 同调群 ((co) homology groups of the simplicial complex). 单纯集 $K(\pi)$ 的 (上) 同调群是 π 的 (上) 同调群.

单纯集 K 的单形 $x \in K_n$ 叫作退化的 (degenerate), 如果有单形 $y \in K_{n-1}$ 和退化算子 s_i, 使 $X = s_i y$. Eilenberg-Zilber 引理 (Eilenberg-Zilber lemma) 说, 每个单形 $x \in K_n$ 可以唯一写成 $x = K(s)y$, 这里 s 是一个满射 $s: [n] \to [m]$, $m \leqslant n$, 又 $y \in K_m$ 为非退化单形. 单纯集 K 中包含它的全部维数不超过 n 的非退化单形的最小单纯子集记作 K^n 或 $\mathrm{sk}^n K$. 叫作 K 的 n 维骨架 (n-dimensional skeleton) 或 n 骨架 (n-skeleton).

标准几何单形 (见**标准单形** (standard simplex))

$$\Delta^n = \left\{(t_0, \cdots, t_n): 0 \leqslant t_i \leqslant 1, \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\right\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

构成一个余单纯拓扑空间, 它的余边界算子 δ_i 和余退化算子 σ_i 由下式定义.

$$\delta_i(t_0, \cdots, t_{n-1}) = (t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_{n-1}),$$
$$\sigma_i(t_0, \cdots, t_{n+1}) =$$
$$= (t_0, \cdots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \cdots, t_{n+1}).$$

在不交并 $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \times \Delta^n$ 中, 这里 K_n 视为离散集, 公式

$$(d_i x, u) \sim (x, \delta_i u), \ x \in K_n, \ u \in \Delta^{n-1};$$
$$(s_i x, u) \sim (x, \sigma_i u), \ x \in K_n, \ u \in \Delta^{n+1},$$

产生一个等价关系, 在这个等价关系下的商空间是一个复形 (胞腔空间), 它的胞腔与 K 的非退化单形一一对应. 这个复形记为 $|K|$ 或 RK, 叫作 K 的 Milnor 意义下的几何实现 (geometric realization in the sense of Milnor). 单纯映射 $f: K \to L$ 诱导连续映射 $Rf: RK \to RL$, 它由

$$Rf[x, u] = [f(x), u]$$

给定, 而对应 $K \mapsto RK$, $f \mapsto Rf$ 决定一个函子 $R: \Delta^0\mathrm{Ens} \to \mathrm{Top}$. 这个函子与奇异函子 $S: \mathrm{Top} \to \Delta^0\mathrm{Ens}$ 左相伴. 相应的自然同构

$$\varphi: \Delta^0\mathrm{Ens}(K, S(X)) \to \mathrm{Top}(RK, X),$$
$$\psi: \mathrm{Top}(RK, X) \to \Delta^0\mathrm{Ens}(K, S(X))$$

由下式定义

$$\varphi(f)[x, u] = f(x)(u),$$
$$(\psi(g)(x))(u) = g[x, u],$$

这里 $x \in K_n$, $u \in \Delta^n$, $f \in \Delta^0\mathrm{Ens}(K, S(X))$, $g \in \mathrm{Top}(RK, X)$. 对拓扑空间 X, 相伴态射 $\Phi(X): RS(X) \to X$ 为弱同伦等价 (这表明, 每个拓扑空间都弱同伦等价于一个复形).

几何实现 $|K|$ 的作法可以推广到单纯拓扑空间 K 去. 还可定义 Giever-胡 (世桢) 意义下的几何实现 (geometric realization in the sense of Giever-Hu) $\|K\|$, 这时只考虑边界算子 d_i (在这个实现里, 不只是对 K 的非退化单形, 而是对 K 的全部单形都对应有胞腔). 如果每个退化算子 s_i 都是闭余纤维化 (一个在单纯集情形自动成立的条件), 那么自然映射 $p: \|K\| \to |K|$ 是同伦等价.

范畴 $\Delta^0\mathrm{Ens}$ 具有乘积结构: 给定单纯集 $K = \{K_n, d_i^K, s_i^K\}$ 和 $L = \{L_n, d_i^L, s_i^L\}$, 它们的乘积是单纯集 $K \times L$, 这时

$$(K \times L)_n = K_n \times L_n,$$
$$d_i^{K \times L} = d_i^K \times d_i^L,$$
$$s_i^{K \times L} = s_i^K \times s_i^L.$$

特别, 给定单纯集 K, 可以定义它和单纯区间 Δ^1 的乘积. 投射 $\pi_1: K \times L \to K$ 和 $\pi_2: K \times L \to L$ 定义了一个一一映射

$$R\pi_1 \times R\pi_2: R(K \times L) \to RK \times RL,$$

这个一一映射在乘积 $RK \times RL$ 为复形时 (例如, 单纯集 K 和 L 都是可数的, 或者 RK, RL 中有一个是局部有限的就行), 它就是同胚. 特别可知, 可数

单纯幺半群（群，Abel 群）的几何实现为拓扑幺半群（群，Abel 群）.

两个单纯映射 $f, g: K \to L$ 称为**同伦的**（homotopic），如果存在一个单纯映射（**同伦**（homotopy））$F: K \times \Delta^1 \to L$ 使

$$F(x, sd_0 t_1) = f(x),$$
$$F(x, sd_1 t_1) = g(x),$$

对任意的单形 $x \in K_n$ 和退化算子（长为 n）的任一复合 s 成立. 这个（以通常的连续映射的同伦为样板的）定义，与（单纯集情形的）任意单纯对象间的单纯映射的同伦的一般定义等价（见**范畴中的单纯对象**（simplicial object in a category））.

有了同伦概念，就可以像多面体那样为单纯集去发展一套同伦理论. 这两套理论完全是平行的. 这表现在对应的同伦范畴是等价的这一点上（几何实现函子就是这个等价）. 特别地，同伦的单纯映射的几何实现是同伦的，又如 $K(\pi, n)$ 的几何实现是 **Eilenberg-MacLane 空间**（Eilenberg-MacLane space）$K(\pi, n)$. 然而，单纯集的同伦理论，其实际作法与拓扑空间的同伦理论的作法有点差别. 主要的差别在于，对于单纯映射而言，同伦关系一般不是一个等价关系. 这个困难可用下面的办法来予以克服.

单纯集 K 的一个**角形**（horn）是将标准角形（见**标准单形**（standard simplex））映入 K 的一个单纯映射 $\Lambda_k^n \to K$. 每个角形都唯一地由 n 单形的 $(n+1)$ 重 $x_0, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}$，决定，这里 $d_i x_j = d_{j-1} x_i$, $i < j$, $i \neq k$. 称角形为**可填的**（fill out），如果存在 $(n+1)$ 维单形 x 使 $d_i x = x_i$，对每个 $i \neq k$. 单纯集 K 称为**满的**（full）或称**满足 Kan 条件**（satisfy the Kan condition），如果它的角形均可填.

任意拓扑空间 X 的奇异单纯集 $S(X)$ 总是满的，每个单纯群也是满的，特别，Eilenberg-MacLane 单纯集 $K(\pi)$ 和 $K(\pi, n)$ 是满的. 满单纯集的重要性在于，从任一单纯集到满单纯集的单纯映射之间的同伦关系是等价关系. 因此，在满单纯集这个子范畴里，建立同伦理论没有什么大困难. 此外，存在函子（见 [4]）$\mathrm{Ex}^\infty: \Delta^0\mathrm{Ens} \to \Delta^0\mathrm{Ens}$，它将每个单纯集 K 映为一个满单纯集 $\mathrm{Ex}^\infty K$，后者的几何实现与 K 的几何实现同伦等价，因此在所有的同伦问题中，都可用它来代替 K.

单纯集 K 的两个 n 单形 x 和 x' 叫作**可比较的**（comparable），如果 $d_i x = d_i x'$, $0 \leq i \leq n$. 两个可比较的单形叫作**同伦的**（homotopic），如果存在一个 $(n+1)$ 维单形 y 使 $d_n y = x$, $d_{n+1} y = x'$，又 $d_i y = s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i x'$, $0 \leq i \leq n$. 对于满单纯集而言，这是一个等价关系，而两个单形同伦的充分必要条件是它们的特征单纯映射 $\mathrm{rel}\,\mathrm{Sk}^{n-1}\Delta^n$ 同伦.

单纯集 K 称为**带基点的**（pointed），如果它包含有一个特定的零维单形 θ（这里符号 θ 也用来表示由这个单形产生的所有退化元，以及由它生成的单纯集. 通常称其为 K 的**特定点**（distinguished point））. 对于一个满的带基点的单纯集 K，与 θ 贴近的 n 维单形的同伦类集合 $\pi_n(K)$ 是一个群，当 $n \geq 1$. 这个群叫作 K 的 **n 维同伦群**（n-dimensional homotopy group）. 由于 $\pi_n(K) = \pi_n(|K|)$，这个术语是合适的，且特别有 $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi$ 和 $\pi_i(K(\pi, n)) = 0$，对 $i \neq n$. 单纯集 K 叫作 **n 连通集**（n-connected set），如果当 $i \leq n$ 时有 $\pi_i(K) = 0$；特别，0 连通单纯集叫作**连通的**（connected），1 连通单纯集叫作**单连通的**（simply connected）. 当 $n \geq 1$ 时，$\pi_n(K)$ 中的加法是如下的运算：对于两个（与 θ 贴近的）单形 x 和 y，规定单形 $d_n z$ 和它们对应，这里 z 是 $n+1$ 维单形，它填满角形 $x_i = \theta$, $i \leq n-2$, $x_{n-1} = x$, $x_{n+1} = y$. 如果 K 是单纯幺半群，θ 为其单位，那么这个加法也就是幺半群中的乘法（两个与 θ 贴近的单形，其乘积仍和 θ 贴近.）

由于每个和 θ 贴近的单形是（由 K 决定的链复形 $C(K)$ 的））闭链，所以有一个自然的 Hurewicz **同态**（Hurewicz homomorphism）$h: \pi_n(K) \to H_n(K)$，当 $n = 1$ 时，它导出同构（Poincaré **定理**（Poincaré theorem））

$$\pi_1(K)/[\pi_1(K), \pi_1(K)] \to H_1(K),$$

当 $n > 1$ 时，如果 K 是 $(n-1)$ 连通的，它本身是同构（Hurewicz **定理**（Hurewicz theorem））. 对满单纯集，Whitehead **定理**的两个变形都成立，即满单纯集的单纯映射 $f: K \to L$ 为同伦等价，当且仅当它导出同伦群间的同构；在单连通的情形，这个条件等价于它在同调群间诱导的同态为同构.

在 K 是单纯群的情形，同伦群 $\pi_n(K)$ 与（不必为 Abel）链复形 $\bar{K}$ 的同调群 $H_n(\bar{K})$ 同构，这里

$$\bar{K}_n = K_n \cap \mathrm{Ker}\, d_0 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\, d_{n-1},$$

边缘算子是 $(-1)^n d_n$ 在 $\bar{K}_n$ 上的限制. 如果 K 是交换的，则 $\bar{K}$ 是 K 的子复形，这里将 K 视为链复形. 又 $\bar{K}$ 为 K 的链形变收缩核，因此是 K 的一个直和项. 于是由退化单形生成的子复形可取为另一直和项. 这样 K 的相应商复形和它链等价. 例如，由此知：任一单纯集 K 的上同调群与正规上同调群同构（**正规化定理**（normalization theorem）），后者是由所有在退化单形上为零的上链得到的. 此外，$\pi_n(C(K)) = H_n(K)$.

函子 $K \mapsto \bar{K}$ 在单纯交换群的同伦论和链复形的

同调论间导出一个等价. 特别, 它导出: 每个连通单纯交换群 K 同伦等价于 Eilenberg-MacLane 单纯集 $K(\pi_n(K), n)$ 的乘积.

满单纯集 K 叫作极小的 (minimal), 如果它的贴近单形同伦, 当且仅当它们重合. 单纯集 $K(\pi, n)$ 是极小的. 极小单纯集的每个同伦等价均为同构. 每个满单纯集 K 都有一极小子集, 它是形变收缩核, 因此在同构意义下唯一.

单纯映射 $p: E \to B$ 叫作 Kan 纤维化(Kan fibration), 如果 E 中的每个角形 $f: \Lambda_k^n \to E$ 随 $p \circ f: \Lambda_k^n \to B$ 可填而也可填, 又若 $g: \Delta^{n+1} \to B$ 为 $p \circ f$ 的填满, 则有 f 的填满 $\widetilde{f}: \Delta^{n+1} \to E$ 使 $p \circ \widetilde{f} = g$. Kan 纤维化是 **Serre 纤维化** (Serre fibration) 在单纯情形的类似物. 它们满足以下的同伦提升定理 (homotopy lifting theorem): 如果单纯映射 $\widetilde{f}: K \to E$ 和 $\Phi: K \times \Delta^1 \to B$ 满足方程 $\Phi \circ (\mathrm{id} \times \delta_1) = p \circ \widetilde{f}$, 则有单纯映射 $\widetilde{\Phi}: K \times \Delta^1 \to E$ 使 $\widetilde{\Phi} \circ (\mathrm{id} \times \delta_1) = \widetilde{f}$ 和 $p \circ \widetilde{\Phi} = \Phi$. 如果纤维化 p 是满射, 则 E 是满的, 当且仅当 B 是满的. 纤维化 $p: E \to B$ 的纤维 (fibre) 是 (自动为满的) 单纯集 $F = p^{-1}(\theta)$, 这里 θ 是 B 的特定点. 对每个 Serre 纤维化 $p: E \to B$, 单纯映射 $S(p): S(E) \to S(B)$ 是 Kan 纤维化. 同样, 对每个 Kan 纤维化 $p: E \to B$, 映射 $Rp: RE \to RB$ 为 Serre 纤维化 (见[5]).

设 K 为满的带基点单纯集, 又设 $n \geqslant 0$. 对 $x, y \in K_q$, 如果 $d_i x = d_i y$, 对所有 $i \leqslant n$ 成立, 即

$$\chi_x|_{\mathrm{Sk}^n \Delta^q} = \chi_y|_{\mathrm{Sk}^n \Delta^q},$$

(见**标准单形** (standard simplex)) 记为 $x \overset{n}{\sim} y$. 这是一个等价关系. 商集 $(\mathrm{Cosk}^n K)_q = K_q / \tau^n$ 构成一个单纯集 $\mathrm{Cosk}^n K$ (边缘算子和退化算子都是自然诱导出的), 叫作 K 的 n 余骨架 (n-co-skeleton). 按定义, $\mathrm{Cosk}^\infty K = K$. 对任一 $n \geqslant 0$, 单纯集 $\mathrm{Cosk}^n K$ 是满的, 且 $\pi_q(\mathrm{Cosk}^n K) = 0$, 当 $q > n$. 此外, 对任意的 $m \leqslant n$, 自然满单纯映射

$$p_m^n: \mathrm{Cosk}^n K \to \mathrm{Cosk}^m K$$

是一个纤维化, 它导出维数 $\leqslant m$ 时的同伦群间的一个同构. 特别 p_{n-1}^n 的纤维是同伦等价于 Eilenberg-MacLane 单纯集 $K(\pi_n(K), n)$) 的. 纤维化序列

$$K \to \cdots \to \mathrm{Cosk}^{n+1} K \to \mathrm{Cosk}^n K \to \mathrm{Cosk}^{n-1} K \to \cdots$$

叫做满单纯集 K 的 **Постников** 系统 (Postnikov system). 如果 K 是极小的, 那么这个序列是 K 的预解式 (见**同伦型** (homotopy type)).

Постников 系统的造法可以直接推广到满单纯集 B 上的满单纯集 E 的纤维化 $p: E \to B$. 设 $\mathrm{Cosk}^n p$ 是这样一个单纯集, 它的纤维 $(\mathrm{Cosk}^n p)_q$ 是纤维 E_q 按关系 $x \sim^n y$ 的商集, 这时关系 $x \sim^n y$ 成立的充分必要条件为 $p(x) = p(y)$, $d_i x = d_i y$, $i \leqslant n$. 按定义, $\mathrm{Cosk}^\infty p = E$. 注意 $\mathrm{Cosk}^0 p = B$. 对于 $m \leqslant n \leqslant \infty$, 自然单纯映射

$$p_m^n: \mathrm{Cosk}^n p \to \mathrm{Cosk}^m p$$

为纤维化, 它导出维数 $\leqslant m$ 和 $> n+1$ 时的同伦群间的同构. 特别 p_{n-1}^n 的纤维与 Eilenberg-MacLane 单纯集 $K(\pi_n(F), n)$ 同伦等价. $p_0^n: \mathrm{Cosk}^n p \to B$ 的纤维是单纯集 $\mathrm{Cosk}^n F$, 这里 F 为 $p: E \to B$ 的纤维. 纤维化序列

$$E \to \cdots \to \mathrm{Cosk}^{n+1} p \to \mathrm{Cosk}^n p \to \mathrm{Cosk}^{n-1} p \to \cdots \to B$$

叫作 $p: E \to B$ 的 Moore-Постников 系统 (Moore-Postnikov system).

用单纯集的语言来定义谱也很容易. 一个单纯谱 (simplicial spectrum) 是一串对整数 q 有定义的带基点的集合 $\{X_{(q)}\}$, 它的元素叫作单形, 而特定单形记为 θ. 集合间有映射 $d_i: X_{(q)} \to X_{(q-1)}$, $i \geqslant 0$ (边缘算子 (boundary operators)) 和 $s_i: X_{(q)} \to X_{(q+1)}$, $i \geqslant 0$ (退化算子 (degeneracy operators)), 它们适合条件 (*) 和以下条件: 对每个单形 $x \in X$, 有整数 n 使 $i > n$ 时有 $d_i x = 0$. 对谱 X 和整数 n, 有如下定义的单纯集 X_n 存在:

$$(X_n)_q = \{x \in X_{(q-n)}: d_i x = \theta,$$
$$\text{当 } i > q,\ d_0, \cdots, d_q x = 0\}.$$

这些单纯集 X_n 间, 存在嵌入 $SX_n \subset X_{n+1}$, 这里 S 是**纬垂** (suspension) 函子. 由单纯集 X_n 的序列和嵌入 $SX_n \subset X_{n+1}$, 单纯谱 X 可以唯一地恢复. 如果 X 的每个成员为完整的, 那么 $X_n = \Omega X_{n+1}$, 这里 Ω 是**闭路** (loop) 函子. 几何实现函子在单纯谱范畴和拓扑谱范畴间给出一个等价. 单纯谱可以对任一范畴定义. 交换群谱范畴与 (交换) 链复形范畴同构.

参考文献

[1] Gabriel, P. and Zisman, M., Calculus of fractions and homotopy theory, Springer, 1967.

[2] May, J. P., Simplicial objects in algebraic topology, v. Nostrand, 1967.

[3] Lamotke, K., Semisimpliziale algebraische Topologie, Springer, 1968.

[4] Kan, D. M., On c. s. s. complexes, *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 449 – 476.

[5] Quillen, D. G., The geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19 (1968), 1499 – 1500.

[6] Brown, E. H., Finite computability of Postnikov complexes, *Ann. of Math.* (2), 67 (1957), 1 – 20.
[7] Kan, D. M., A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math* (2), 67 (1958), 282 – 312
[8] Kan, D. M., On homotopy theory and c. s. s groups, *Ann. of Math.* (2), 68 (1958), 38 – 53.
[9] Kan, D. M., An axiomatization of the homotopy groups. *Illinois J. Math.*, 2 (1958), 548 – 566.
[10] Kan, D. M., A relation between CW-complexes and free c. s. s. groups, *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 512 – 528.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников 撰

【补注】"Kan 条件",即每个角形为可填的,也称扩张条件(extension condition).

单纯集或单纯复形 K 叫作 Kan 复形(Kan complex),如果它满足 Kan 条件([2],第 2 页).

设 B 为角形的全部单态射 $\Lambda^k[n] \to \Delta[n]$ 的集合.

范畴中的一类单态射 $\mathscr{M}$ 叫作饱和的(saturated),如果它满足下面的条件:

i) 所有的同构属于 $\mathscr{M}$;

ii) 设

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ m\downarrow & & \downarrow m' \\ X' & \to & Y' \end{array}$$

为上 Descartes 正方形.那么当 $m \in \mathscr{M}$ 时,$m' \in \mathscr{M}$($\mathscr{M}$ 在推出(pushout)下稳定,而上 Descartes 正方形(co-Cartesian square)在对偶范畴中为 **Descartes 正方形**(Cartesian square)).

iii) 在给定的交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & X \\ m'\downarrow & & \downarrow m & & \downarrow m' \\ X' & \xrightarrow[u']{} & Y' & \xrightarrow[v']{} & X' \end{array}$$

中,若 $v \circ u = \mathrm{id}$, $v' \circ u' = \mathrm{id}$ 又 $m \in \mathscr{M}$,则 $m' \in \mathscr{M}$($\mathscr{M}$ 在收缩下稳定).

iv) $\mathscr{M}$ 在可数多复合及任意多直和下稳定.

设 $\hat{B}$ 为 B 的饱和闭包(saturated closure),即包含 B 的全部饱和类的交.在[1]中称它们为安全扩张(anodyne extension).

Δ^0Ens 的态射 $p: E \to X$ 称为 Kan 纤维化(Kan fibration),如果对每个扩张 $i: K \to L$ 和交换正方形

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & E \\ i\downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{v} & X \end{array}$$

存在有态射 $w: L \to E$ 使 $w \circ i = u$,又 $p \circ w = v$.单纯集 X 为 Kan 复形,当且仅当唯一的态射 $X \to \Delta[0]$ 为 Kan 纤维化,这里 $\Delta[0]$ 是标准零维单形.

沈信耀 译 潘建中 校

单纯空间 [simplicial space; симплициальное пространство]

一个由拓扑单形所覆盖的拓扑空间 X(称为一个**三角剖分**(triangulation)),使得每个单形的面属于该剖分,任意两个单形的交是其中每一个的面(可能是空的),子集 $F \subset X$ 是闭的,当且仅当它与每个单形的交是闭的.每个单纯空间都是**胞腔空间**(cellular space).给出一个三角剖分等价于给出一个同胚 $|S| \to X$,此处 S 是某个**单纯复形**(simplicial complex)的几何实现.单纯空间也叫作单纯复形(simplicial complex)或单纯分解(simplicial decompositions).

单纯空间是一个范畴的对象,此范畴的态射 $X \to Y$ 是使 X 的三角剖分的每个单形线性地映到 Y 的三角剖分的某个单形上的映射.这种态射叫作单纯映射(simplicial mapping).

А. В. Хохлов 撰

【补注】术语"单纯空间"不常用于这种含义,对于一个有三角剖分的空间的常用名称是多面体(polyhedron)(见**抽象多面体**(polyhedron, abstract)).术语"单纯空间"更常用于拓扑空间的单纯对象(见**范畴中的单纯对象**(simplicial object in a category)).

参考文献

[A1] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill 1966, p. 113 ff.
[A2] Gray, B., Homology theory, Acad. Press, 1975, § 12.

张英伯 译

单连通区域 [simply-connected domain; односвязная область],在道路连通空间中的

一个区域 D,在这区域中,所有的闭道路都同伦于 0,或换句话说,该区域,它的**基本群**(fundamental group)是平凡的.这意味着,D 中任何闭道路可连续地形变为一个点,且自始至终保持在该单连通区域 D 中.一般情形下,单连通区域 D 的边界可由任意 $k(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ 个连通分支组成,甚至在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n \geqslant 2)$ 或 $\mathbf{C}^m(m \geqslant 1)$ 中的单连通区域的情形也如此.有界的平面单连通区域的边界由单个的连通分支组成.所有平面单连通区域是彼此同胚的.

也见**极限元素**(limit elements).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】更一般地,一个单连通空间(simply-connected space)X 是一个道路连通空间,对于它,每一条闭路都是可缩的,即 X 的**基本群**(fundamental group)$\pi_1(X, x)$ 对某个(且因此对所有的)基点 x 为零.球面 $S^n(n \geqslant 2)$ 是单连通的,但二维环面和 $\mathbf{C}$ 中的

圆环不单连通．

参考文献

[A1] Jänich, K., Topology, Springer, 1984.

[A2] Nehari, Z., Conformal mapping, Dover, reprint, 1975.

徐森林 译

单连通群 [simply-connected group; односвязная группа]

一个拓扑群（topological group）（特别，一个 **Lie 群**（Lie group））它的底拓扑空间是单连通的．单连通群在 Lie 群论中的重要性可以由下列定理说明．

1) 每一个连通 Lie 群 G 都同构于某个单连通群（称为 G 的**万有覆叠**（universal covering））对一个离散的中心子群的商群 $\pi_1(G)$.

2) 两个单连通 Lie 群是同构的，当且仅当它们的 Lie 代数是同构的；再者，一个单连通群 G_1 的 Lie 代数到一个任意 Lie 群 G_2 的 Lie 代数内的同态都是 G_1 到 G_2 内一个（唯一确定的）同态的微分．

一个单连通半单紧或复 Lie 群 G 的中心 Z 是有限的．对于各种单 Lie 群来说，它们的中心由下表给出．

G	A_n	B_n	C_n	D_{2n}	D_{2n+1}	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
Z	$\mathbf{Z}_{n+1}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_4$	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_2$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$

在代数群论（见**代数群**（algebraic group））中，一个单连通群是一个连通代数群 G，它不容有任何非平凡的**同源**（isogeny）$\varphi:\widetilde{G}\to G$，这里 $\widetilde{G}$ 也是一个连通代数群．对于复数域上半单代数群来说，这个定义与上面所给的定义等价．

Э. Б. Винберг 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hochschild, G., The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

[A2] Hermann, R., Lie groups for physicists, Benjamin, 1966.

[A3] Humphreys, J. E., Lenear algebraic groups, Springer, 1975.

郝锕新 译

单周期函数 [simply-periodic function, simple periodic function; однопериодическая функция]

复变量 z 的**周期函数**（periodic function）$f(z)$，它的所有周期 p 都是唯一的单个基本周期（fundamental period）或原始周期（primitive period）$2\omega\neq 0$ 的整数倍，即 $p=2n\omega(n\in\mathbf{Z})$．例如，**指数函数**（exponential function）e^z 是具有基本周期 $2\omega=2\pi i$ 的单周期整函数，而**三角函数**（trigonometric functions）$\tan z$ 和 $\cot z$ 是具有基本周期 $2\omega=\pi$ 的单周期亚纯函数．

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 更一般地，线性空间 X 上的单周期函数是一个周期函数，其所有周期是某个基本周期 $2\omega\in X$ 的整数倍．实变量的非常值连续周期函数必是单周期的．

沈永欢 译

Simpson 公式 [Simpson formula; Симпсона формула]

Newton-Cotes 求积公式（Newton-Cotes quadrature formula）的一种特殊情形，其三个结点的公式为

$$\int_a^b f(x)dx\cong\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left[\frac{a+b}{2}\right]+\right.$$
$$\left.+f(b)\right]. \qquad (1)$$

假如把区间 $[a,b]$ 分成 n（偶数）个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$，$i=0,\cdots,n-1$，子区间长为 $h=(b-a)/n$，而且在区间 $[x_{2k},x_{2k+2}]$ 上用求积公式（1）计算积分：

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx\cong\frac{h}{3}\,[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+$$
$$+f(x_{2k+2})].$$

将上式两边从 0 到 $(n/2)-1$ 对 k 求和，得到复合 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)dx\cong\frac{h}{3}\,\{f(a)+f(b)+2[f(x_2)+f(x_4)+$$
$$+\cdots+f(x_{n-2})]+4[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+ \qquad (2)$$
$$+f(x_{n-1})]\},$$

其中 $x_j=a+jh$, $j=0,\cdots,n$．求积公式（2）也称作 Simpson 公式（即，丢掉了"复合"）．求积公式（2）和（1）的代数精度为 3．

如果被积函数 f 在 $[a,b]$ 上有四阶连续导数，则求积公式（2）的误差——近似方程（2）的左端和右端的差 $R(f)$，可以写成

$$R(f)=-\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\xi),$$

其中 ξ 是区间 $[a,b]$ 中的某点．

Simpson 公式是以 Th. Simpson 命名的，他于 1743 年得到该公式，虽然这个公式，例如在 1668 年由 J. Gregory 已得到．

И. П. Мысовских 撰

【补注】 Simpson 公式也称作 Simpson 法则．

参考文献

[A1] Courant, R., Vorlesungen über differential-und integral-rechnung, 1, Springer, 1971.

[A2] Young, D. M. and Gregory, R. T., A survey of numerical mathematics, Dover, reprint, 1988, § 7.4.

袁国兴 张宝琳 译

Simson 线 [Simson straight line; Симсона прямая]

连接从三角形的外接圆上任一点向三角形的三边所引垂线的垂足的一条直线．这条直线把连接点 P 和三角形三高的交点的线段二等分．这和直线称为 Simson 线，因误传它是 R．Simson 发现的．

А．Б．Иванов 撰

【补注】 在 R．Simson(1687－1768)的工作中并未提到过这条直线．它实际上是 W．Wallace 于 1799 年发现的(例如见[A1]，Chapt．V．和 p．300；[A2]，p．16；[A3])．

参考文献

[A1] Altshiller-Court，N．，College geometry，New York，1952

[A2] Coxeter，H．S．M．，Introuction to geometry，Wiley，1989．

[A3] Gillispie，C．G．，Dictionary of scientific biography，Vol．14，1976，140．

[A4] Berger，M．，Geometry，Springer，1987(中译本：M．贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991)．

[A5] Coolidge，J．，A treatise on the circle and the sphere，Chelsea，reprint，1971．

杜小杨 译

Simula 语言[Simula，源于 SIMUlation LAnguage；Симула]

在 **Algol 语言**(Algol)基础上由挪威计算中心开发的两个算法语言的名字，非正式地区别为 Simula 1 语言和 Simula-67 语言．

Simula 1 语言．1964 年开发的模拟离散事件(例如排队系统)系统的面向问题的语言(problem-oriented language)．模型的规约把进程(process)指派给集合(客户，机器，材料等)的分量．进程有属性(数据结构)和动作程序(算法)．模型在拟并行性(quasi-parallelism)原理下工作：每一瞬间仅一个进程是活动的；通过履行它的程序，能使用它本身的和其他的属性去生成新的进程，为它本身和其他进程以及新的活动阶段去规划事件(event)(通过应用语言中表述的离散时间的概念)，并停止它本身．Simula 1 语言的实现导致开发很一般性的算法方法，使人们能表达(不必是离散的)模拟的其他方法．它们被包含在语言中就导致 Simula-67 语言的形成．

Simula-67 语言．企图作为构造面向问题语言基础的语言．它的基本方法包括所有 Algol-60 语言(稍有改变)的方法，以及基于对象类(class of objects)概念的扩充机制．

对象的概念是从 Simula 1 中进程的概念产生的，是从按离散时间拟并行履行的相对部分的组织抽象出来的．通过类的描述来表示程序和对象的属性的创新的方法形成 Simula-67 的主要成就．特别重要的是类前缀(prefixing by a class)原理，使人们能在新一类对象(例如"学生"类)的描述中包括更一般类(例如"人")的属性和动作．加前缀也能应用于 Algol 语言意义上的分程序；如此加前缀的分程序(prefixed block)从它的前缀程序得到一个"序幕"和一个"跋"，和所有它的属性(变量和过程(procedure))．这使人们能用类的描述形成面向问题语言的细化．特别地，通过加标准类前缀 SIMULATION，用户可以访问等价于 Simula 1 方法的(用库描述的)方法．

Simula-67 语言的思想对更现代的程序设计语言有很大的影响．作为动作和数据组合的对象的概念导致用于人工智能中程序设计问题的许多语言中的动作者(actor)的概念，并影响了抽象数据类型概念的发展．数据库、机器绘图等领域的语言能直接用 Simula-67 语言和模拟语言的方法描述．

Simula-67 语言已在 BESM-6 和 ES 计算机上实现．

参考文献

[1] Дал，О．И．，Нигард，К．，СИМУЛА-язык для программирования и описания систем с дискретными событиями，пер．с англ．，《Алгоритмы и алгоритмические языки》，1967，в．2，3－72．

[2] Дал，У．И．，Мюрхауг，Б．Нюгорд，К．，СИМУЛА-67 универсальный язык программирования，пер．с англ．，М．，1969．

В．В．Окольнишников，С．Б．Покровский 撰

程 虎 译　刘椿年 校

正弦[sine；синус]

三角函数(trigonometric functions)之一：

$$y=\sin x$$

定义域是整个实轴，值域是区间[－1，1]．正弦是奇周期函数(周期为 2π)．在正弦和**余弦**(cosine)之间存在公式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

在正弦和**余割**(cosecant)之间存在公式

$$\sin x=\frac{1}{\operatorname{cosec} x}.$$

正弦的导数是

$$(\sin x)'=\cos x.$$

正弦的不定积分是

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$$

正弦的幂级数展开是

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,\ -\infty<x<\infty.$$

正弦的反函数是反正弦(arcsine).

在复自变量 z 的正弦、余弦和指数函数之间存在 Eular 公式(Eular formula):

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

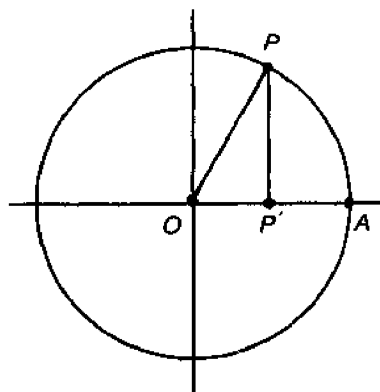
$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

并且如果 $z=ix$ 是纯虚数,则

$$\sin x=-\sinh x,$$

其中 $\sinh x$ 是双曲正弦. Ю. А. Горьков 撰

【补注】 当然, $\sin x$ 也可由 Euler 公式或幂级数来定义.一个直观定义如下所述.考虑一个单位圆,其中心在直角坐标系的原点 O,以及一个旋转半径 OP.设 x 是 OA 和 OP 之间的夹角(取反时针方向为正), P' 是 P 在 OA 上的投影.这时, $\sin x$ 定义为比 $(PP')/(OP)$, $\cos x$ 定义为 $(OP')/(OP)$, $\tan x$ 定义为 $(PP')/(OP')$.



另一个(解析的)方法是从定义在闭区间 $[-1,1]$ 上的函数 $\varphi(x)$ 出发, $\varphi(x)=\int_0^x dt/\sqrt{1-t^2}$.当 $x=\pm1$ 时,这个积分是反常的,但是收敛.不难看出, $\varphi(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上是单调增加的和连续的,在开区间 $(-1,1)$ 上是可微的,并且在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上取值.因此,它具有在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上定义,在 $[-1,1]$ 中取值的反函数.这个反函数称为 $\sin x$,并且可以证明它的定义域可以延拓到整个实轴.函数 $\varphi(x)$ 称为反正弦(arcsine).

$\sin x$ 的图形是**正弦曲线**(sinusoid)(亦见三角函数(trigonometric functions)).

参考文献

[A1] Abramowitz, M. and Stegun, J. A., Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1972.

杜小杨 译

辐角正弦 [sine amplitude; синус амплитуды], 椭圆正弦(elliptic sine)

三个基本 **Jacobi 椭圆函数**(Jacobi elliptic functions)之一,记为

$$\operatorname{sn} u=\operatorname{sn}(u,k)=\sin\operatorname{am} u.$$

辐角正弦可以通过 θ 函数或级数定义如下:

$$\operatorname{sn} u=\operatorname{sn}(u,k)=\frac{\theta_3(0)\theta_1(v)}{\theta_2(0)\theta_0(v)}=$$

$$=u-(1+k^2)\frac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!}-\cdots,$$

其中 k 是辐角正弦的模数(通常 $0\leqslant k\leqslant1$), $v=u/2\omega$, $2\omega=\pi\theta_3^2(0)$.当 k 分别等于 0, 1 时, $\operatorname{sn}(u,0)=\sin u$, $\operatorname{sn}(u,1)=\tanh u$.

参考文献

[1] Hurwitz, A. and Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 2, Springer, 1964.

Е. Д. Соломенцев 撰 杜小杨 译

正弦 Gordon 方程 [sine-Gordon equation; синус Гордона уравнение]

空间-时间两个变量的相对论不变方程.它有形

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m^2\sin u=0; \qquad (1)$$

$$-\infty<x,t<+\infty,\ u\in\mathbf{R}^1,\ m>0.$$

这个名称是由 M. Kruskal 建议的,由于它和线性的 **Klein-Gordon 方程**(Klein-Gordon equation)(其中 u 出现在 $\sin u$ 处)相类似.用特征(光锥)变量,正弦 Gordon 方程有形

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\partial\tau}+m^2\sin u=0,\ \sigma,\tau,u\in\mathbf{R}^1,\ m>0.\ (2)$$

在(1)和(2)两种情形下,正弦 Gordon 方程容许 Lax 表示(Lax representation)

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[L,M],$$

其中 L 和 M 是线性算子, $[L,M]=LM-ML$.这使得能用反散射法去得到 Cauchy 问题的解.

正弦 Gordon 方程的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem)可用下面的方式列出.

情形(1):

$$u|_{t=0}=u_1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_2;$$

$$\frac{du_1}{dx},\ u_2\in S(\mathbf{R}^1);\ \lim_{|x|\to\infty}u_1(x)\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

情形(2):

$$u|_{\tau=0}=u_0;\ \frac{du_0}{d\sigma}\in S(\mathbf{R}^1);$$

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} u_0(\sigma) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

这里 $S(\mathbf{R}^1)$ 是 Schwartz 速降函数空间．在对初始条件的某些附加限制下、Cauchy 问题（1）和（2）可以唯一地解出，且它们的解集重合．对相应的 L 算子的散射数据的开方可用显式给出，而解 $u(x,t)$ 和 $u(\sigma,\tau)$ 则可用 Гельфанд-Левитан-Марченко 型的积分方程求出．

对正弦 Gordon 方程的周期问题可以利用代数几何方法来研究（类似于 **Korteweg-de Vries 方程**（Korteweg-de Vries equation）情形）．特别地，得到了在对应的 Abel 族上用 θ 函数表达的正弦 Gordon 方程的有限缝隙解的明显表达式．

正弦 Gordon 方程（例如，在情形（1））的 Hamilton 版本是具有 Hamilton 总能量

$$P_0 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\pi^2(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + m^2(1-\cos u)\right]dx,\ \gamma > 0$$

和辛形式

$$\Omega = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} d\pi(x)\wedge du(x)dx,\ \pi = \frac{\partial u}{\partial t}$$

的 **Hamilton 系统**（Hamiltonian system）．这个系统是完全可积的，将变量 u 和 π 换成对应算子 L 的散射数据就生成作用角型变量的标准变换．相空间参数化为三个类型的标准伴随变量：

1）$0 \leqslant \rho(p) < \infty,\ 0 \leqslant \varphi(p) < 2\pi,\ p\in\mathbf{R}^1$；

2）$p_a, q_a \in \mathbf{R}^1,\ a = 1,\cdots,N_1,\ N_1 \geqslant 0,\ N_1\in\mathbf{Z}$；

3）$\eta_b, \xi_b \in \mathbf{R}^1,\ 0 \leqslant \xi_b < 8\pi/\gamma,\ 0 \leqslant \eta_b < 2\pi,\ b = 1,\cdots,N_2,\ N_2 \geqslant 0,\ N_2\in\mathbf{Z}$．

场 u 的总能量 P_0 和总动量

$$P_1 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(x)\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

在新变量之下为

$$P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{p^2+m^2}\,\rho(p)dp + \sum_{a=1}^{N_1}\sqrt{p_a^2+M^2} +$$

$$+ \sum_{b=1}^{N_2}\sqrt{\eta_b^2+(2M\sin\theta_b)^2};$$

$$P_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}p\rho(p)dp + \sum_{a=1}^{N_1}p_a + \sum_{b=1}^{N_2}\eta_b,$$

$$M = \frac{8m}{\gamma},\ \theta_b = \frac{\gamma}{16}\xi_b.$$

在情形（1）还得到了完全可积的 Hamilton 系统．

对量子场论的一个应用．令 $u(x,t)$ 是具有 **Lagrange 函数**（Lagrangian）

$$L = \frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. - 2m^2(1-\cos u)\right]dx$$

的标量场，其中 γ 是相互作用常数．正弦 Gordon 方程是关于这个拉格朗日能量的 **Euler-Lagrange 方程**（Euler-Lagrange equation）．在场 u 的准经典量子化中，P_0 和 P_1 的上述公式起着基本的作用．它们右端的第一项分别对应于质量 m 的质点和基域的质点（亦见**孤立子**（soliton））．第二和第三项对应于正弦 Gordon 方程的局部化解，即分别具有质量 M 和 $2M\sin\theta$ 的孤立子和对偶孤立子．此系统服从（拓扑电荷的）守恒律：

$$Q = \frac{1}{2\pi}(u(+\infty,t) - u(-\infty,t)),\ Q\in\mathbf{Z}.$$

第一和第三型的质点有电荷零，而第二型的质点有电荷 ± 1．具有相同电荷的质点排斥，而具有不同电荷的质点吸引．无穷多个守恒律的存在意味着每个型的质点数在散射下是保持不变的；n 质点的 S 矩阵化为成对的 S 矩阵（见**散射矩阵**（scattering matrix））．利用轨道上的积分（见**轨道积分**（integral over trajectories））可以计算对质量的和对孤立子的准经典 S 矩阵的量子修正．上述模型非平凡的性质之一是出现质点（孤立子）的完全谱，而理论的拉格朗日能量只包含一个场．而且，在弱相互作用的近似中（即，当 γ 小时），孤立子是重质点，且它们之间是强相互作用的．

参考文献

[1] Ablowitz, M., et al., Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Letters*, 30 (1973), 1262 – 1264.

[2] Тахтаджян, Л. А., Фаддеев Л. Д., 《Теоретич. и матем. физика》, 21 (1974), 2, 160 – 174.

[3] Тахтаджян, Л. А., Фаддеев, Л. Д., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 142 (1976), 254 – 266.

[4] Козел, В. А., Котляров, В. П., 《Докл. АН УССР, сер. А》, 1976, 10, 878 – 881.

[5] Корепин, В. Е., Фаддеев Л. Д., 《Теоретич. и матем. физика》, 25 (1975), 2, 147 – 163.

[6] Bianchi, L., Lezioni di geometria differenziale, 1 – 2, Zanichelli, Bologna, 1923 – 1927.

[7] Фиников, С. П., Изгибание на главном основании и связанные проблемы в геометрии, М.-Л., 1937.

[8] Пелиновский, Е. Н., «Изв. вузов, Радиофизика», 19(1976), 5—6, 883—901. Л. А. Тахтаджян 撰

【补注】 有与每一个 **Kac-Moody 代数** (Kac-Moody algebra) 相联系的"典型"的正弦 Gordon 型方程 (sine-Gordon type equations)([A5], [A4]). 它们称作 Лезнов-Савелиев 系统 (Leznov-Saveliev systems). 与每一个 Kac-Moody 代数相联系的还有 Korteweg-de Vries 型孤立子方程 (Korteweg-de Vries type soliton equations), 以及修正的 Korteweg-de Vries 型方程 (modified Korteweg-de Vries type equations). 这些与同一个(扩充的)根系统相联系的 mKdV 正体方程和 Лезнов-Савелиев 系统在下述意义下是"对偶"的, 即一个(方程的)解作为另一个(方程的)解的对称, 反之亦然 ([A4]).

参考文献

[A1] Ablowitz, M. J. and Segur, H., Solitons and the inverse scattering transform, SIAM, 1981.

[A2] Faddeev, L. D. and Takhtadzhyan, L. A., Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer, 1967 (译自俄文).

[A3] Newell, A. C., Solitons in mathematics and physics, SIAM, 1985.

[A4] Drinfel'd, V. G. and Sokolov, V. V., Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type, *J. Soviet Math.*, **30** (1985), 2, 1975—2036. (*Sov. Probl. Mat.*, **24** (1984), 81—180.)

[A5] Leznov, A. N., On complete integrability of a nonlinear system of partial differential equations in two-dimensional space. *Teoret. Mat. Fiz.*, **42** (1980), 3, 343—349 (俄文).

孙和生 译 陆柱家 校

双曲正弦 [sine, hyperbolic; синус гиперболический]

见**双曲函数** (hyperbolic functions).

正弦定理 [sine theorem; синусов теорема]

对 Euclid 空间中的任何三角形, 设其三边为 a, b, c, 相对的角分别为 A, B, C. 这时, 等式

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

成立, 其中 R 是外接圆的半径. Ю. А. Горьков 撰

【补注】 在球面几何学中, 正弦定理为

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

而在 Лобачевский 几何学中, 正弦定理为

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C}.$$

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L., Geometry revisited, Math. Assoc. Amer., 1975.

杜小杨 译

奇异分布 [singular distribution; сингулярное распределение]

$\mathbf{R}^n$ 上集中于一个 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure) 为零的集合上且对每个单点集给出零概率的**概率分布** (probability distribution).

在实直线 $\mathbf{R}^1$ 上, 奇异分布的上述定义等价于: 一个分布称为奇异的 (singular), 如果其对应的分布函数为连续且其生长点集具有 Lebesgue 零测度.

$\mathbf{R}^1$ 上奇异分布的一个例子是集中于 Cantor 集上的分布, 即所谓 Cantor 分布 (Cantor distribution), 它可描述如下: 设 X_1, X_2, … 是独立随机变量序列, 每个以概率 1/2 取值 0 和 1, 则随机变量

$$Y = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} X_j$$

具有 Cantor 分布, 其特征函数为

$$f(t) = e^{it/2} \prod_{j=1}^{\infty} \cos \frac{t}{3^j}.$$

$\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 上奇异分布的一个例子是正半径球面上的**均匀分布** (uniform distribution).

两个奇异分布的卷积可以是奇异的, 绝对连续的或两者的混合.

任一概率分布 P 可唯一地分解为

$$P = a_1 P_d + a_2 P_a + a_3 P_s,$$

其中 P_d 是离散的, P_a 是绝对连续的, P_s 是奇异的, $a_i \geqslant 0$ 且 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ (Lebesgue 分解 (Lebesgue decomposition)).

有时在下述较广意义下理解奇异性: 概率分布 F 关于测度 P 是奇异的, 如果它集中于集合 N 上而 $P\{N\} = 0$. 按此定义, 任一离散分布关于 Lebesgue 测度是奇异的.

关于奇异集函数, 亦见集函数的**绝对连续性** (absolute continuity).

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prokhorov, Yu. V., Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[2] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 2, Wiley, 1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 第二卷, 科学出版社, 1994).

В. Г. Ушаков 撰 沈永欢 译

奇异指数 [singular exponents; особые показатели], 线性常微分方程组的

由下式定义的量:

$$\Omega^0(A) = \overline{\lim_{\theta - \tau \to +\infty}} \frac{1}{\theta - \tau} \ln \| X(\theta, \tau) \|$$

(上奇异指数 (upper singular exponent)) 以及

$$\omega^0(A) = \varliminf_{\theta-\tau\to+\infty} \frac{1}{\tau-\theta} \ln \| X(\theta, \tau) \|$$

(下奇异指数 (lower singular exponent), 这里 $X(\theta, \tau)$ 是方程组

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

的 **Cauchy 算子** (Cauchy operator) (即基本解 (fundamental solution) 或主解 (principal solution)), $A(\cdot)$ 是一映射 $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, 而在每个区间上可和.

奇异指数可以等于 $\pm\infty$; 若对某个 $T>0$ 有

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \int_t^{t+T} \| A(\tau) \| d\tau < +\infty, \tag{1'}$$

则奇异指数是数.

对常系数的方程组 (1) ($A(t) \equiv A(0)$), 奇异指数 $\Omega^0(A)$ 和 $\omega^0(A)$ 分别等于算子 $A(0)$ 的本征值的最大与最小实部. 对具有周期系数的方程组 (1) (即有一 $T>0$ 使对一切 $t \in \mathbf{R}$, $A(t+T) = A(t)$). 奇异指数 $\Omega^0(A)$ 和 $\omega^0(A)$ 分别等于乘子 (multipliers) 绝对值的对数之最大与最小值除以周期 T. 奇异指数有时也称为一般指数 (general exponent) (见 [4]).

如果 (1') 对某个 $T>0$ 成立, 则下面的定义与上面所述等价: 奇异指数 $\Omega^0(A)$ 等于这样的数 α 之集合的最大下界, 对这种 α, 存在数 $C_\alpha > 0$ 使对方程组 (1) 的任意解 $x(t) \neq 0$, 以下不等式成立:

$$|x(\theta)| \leqslant C_\alpha e^{\alpha(\theta-\tau)} |x(\tau)| \text{ 对一切 } \theta \geqslant \tau \geqslant 0;$$

奇异指数 $\omega^0(A)$ 等于这样的数 β 之集合的最小上界, 对这种 β, 存在数 $C_\beta > 0$ 使对方程组 (1) 的任意解 $x(t) \neq 0$, 以下不等式成立:

$$|x(\theta)| \geqslant C_\beta e^{\beta(\theta-\tau)} |x(\tau)| \text{ 对一切 } \theta \geqslant \tau \geqslant 0.$$

对于奇异指数和 **Ляпунов 特征指数** (Lyapunov characteristic exponent), 对每个 $T>0$, 不等式

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \| A(\tau) \| d\tau \geqslant \Omega^0(A) \geqslant \lambda_1(A) \geqslant \cdots$$

$$\cdots \geqslant \lambda_n(A) \geqslant \omega^0(A) \geqslant -\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \| A(\tau) \| d\tau$$

成立. 对常系数和周期系数的线性方程组,

$$\Omega^0(A) = \lambda_1(A), \quad \omega^0(A) = \lambda_n(A),$$

但是存在这样的方程组, 使这两式成为严格的不等式 (见一致稳定性 (uniform stability)).

奇异指数 $\Omega^0(A)$ (相应的, $\omega^0(A)$) 作为形如 (1) 且有有界连续系数 (即映射 $A(\cdot)$ 为连续的且 $\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \| A(t) \| < +\infty$) 的所有方程组所成的空间上之函数是上半连续的 (相应为下半连续的), 但不处处连续; 此空间中赋有度量

$$d(A, B) = \sup_{t\in\mathbf{R}^+} \| A(t) - B(t) \|.$$

若映射 $A: \mathbf{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ 一致连续, 且

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \| A(t) \| < +\infty,$$

则移位动力系统 (shift dynamical system) ($S = \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$) 有不变的规范化测度 μ_1, μ_2 集中在点 A 的轨道之闭包上, 使得对 (测度 μ_1 意义下的) 几乎所有 $\widetilde{A}$, 方程组

$$\dot{x} = \widetilde{A}(t)x \tag{2}$$

的上奇异指数等于最大的 (即第一个) Ляпунов 特征指数

$$\Omega^0(\widetilde{A}) = \lambda_1(\widetilde{A}),$$

而对于 (测度 μ_2 意义下的) 几乎所有 $\widetilde{A}$, 方程组 (2) 的下奇异指数等于最小的 Ляпунов 特征指数

$$\omega^0(\widetilde{A}) = \lambda_n(\widetilde{A}).$$

对殆周期映射 $A(\cdot)$ (见**殆周期系数的线性微分方程组** (linear system of differential equations with almost-periodic coefficients)), 测度 μ_1 和 μ_2 相同, 即是此时存在的唯一的规范化不变测度, 它集中在平移动力系统在点 A 的轨道之闭包上之限制之中, 这时这个测度是存在的.

设在一个闭的 n 维光滑流形 V^n 上的动力系统由一光滑向量场定义. 则对此动力系统存在规范化的不变测度 μ_1 和 μ_2, 使得对于 (测度 μ_1 意义下的) 几乎每一点 $x \in V^n$, 上奇异指数与沿 x 的轨道的变分方程组 (即变分所适合的方程, 线性化方程) 的最大 Ляпунов 特征指数相同, 而对 (测度 μ_2 意义下的) 几乎每一点 $x \in V^n$, 下奇异指数与沿 x 的轨道的变分方程组之最小 Ляпунов 特征指数相同. 奇异指数、Ляпунов 特征指数等的定义, 对于定义在任一光滑流形上的光滑动力系统之变分方程组仍有意义. 这种动力系统在一点 x 的轨道上的变分方程组, 只要采用 x 轨道上每一点对 V^n 的切空间之一个基就可以写成 (1) 的形状, 这个基例如可以是由 V^n 在 x 的切空间之某一基沿此轨道平行移动 (在光滑 Riemann 度量诱导的 Riemann 联络意义下的平行移动) 而来.

参考文献

[1] Bohl, P., Über Differentialgleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, **144** (1913), 284 – 318.

[2] Персидский, К., 《Матем. сб.》, **40** (1933). 3, 284 – 293.

[3] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости, М., 1966.

[4] Далецкий, Ю. Л. Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970 (英译本: Daletskiĭ, Yu. L., and Krein, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974).

[5] Изобов, Н. А., в кн., Итоги науки и техники. Матем. анализ, т. 12 м., 1974, 71 – 146.

В. М. Миллионщиков 撰 齐民友 译

奇异函数 [**singular function**; **сингулярная функция**]

在定义区间上的非常数的连续**有界变差函数** (function of bounded variation), 其导数几乎处处为 0. 作为一个加项, 奇异函数出现在有界变差函数的 **Lebesgue 分解** (Lebesgue decomposition) 中. 例如, $[a,b]$ 上的连续有界变差函数 f 均可唯一地写成 $f=\varphi+r$ 的形式, 其中 φ 为满足条件 $\varphi(a)=f(a)$ 的绝对连续函数 (见**绝对连续性** (absolute continuity)), 而 r 为奇异函数或恒为零.

例. 设 $X=[0,1]$. 任意 $x\in X$ 均可表成形式

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{3^i}=0.\alpha_1\alpha_2\cdots,$$

其中 $\alpha_i\in\{0,1,2\}$, $i=1,2,\cdots$. 因此, 令 C 为 **Cantor 集** (Cantor set), 若 $x\in C$, 则 $\alpha_i=0$ 或 2, 对一切 i. 记 $n=n(x)$ 为使 $\alpha_n=1$ 成立的第一个足标; 若没有这种足标, 则令 $n(x)=\infty$. 那么函数

$$\psi(x)=\sum_{1\leq i<n}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^n}$$

就是 X 上的单调奇异函数.

参考文献

[1] Lebesgue, H., Leçons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928.

[2] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 上、下册, 高等教育出版社, 1958).

[3] Halmos, P., Measure theory, V. Nostrand, 1950 (中译本: 哈尔姆斯, 测度论, 科学出版社, 1958).

В. И. Голубов 译

【补注】 函数 ψ 是完全确定的 (即 $\psi(x)$ 的值不依赖于 x 的具体表达式的选取); 如所周知, 它称为 Lebesgue 奇异函数 (Lebesgue singular function).

参考文献

[A1] Hewitt, E. and Stromberg, K., Real and abstract analysis, Springer, 1965.

[A2] Stromberg, K., Introduction to classical real analysis, Wadsworth, 1981.

王斯雷 译

奇异同调 [**singular homology**; **сингулярные гомологии**]

拓扑空间 X 的用奇异单形定义的同调 (homology), 正如多面体的通常 (单纯) 同调 (和上同调) 是用线性单形定义的那样. 所谓奇异单形 (singular simplex) σ^n 是指 n 维**标准单形** (standart simplex) Δ^n 到 X 中的一个连续映射; σ^n 的象通常称为 σ^n 的支撑 (support) 记为 $|\sigma^n|$. 奇异链 (singular chains) 是奇异单形的形式线性组合, 这时系数取自交换群 G. 奇异链全体构成一个群 $S_n(X;G)$, 它与 (全部 σ^n 上的) 群 $G_{\sigma^n}=G$ 的直和同构. 合在一起, 链群构成一个奇异链复形 $S_*(X;G)$, 这时边界同态 $\partial:S_n(X;G)\to S_{n-1}(X;G)$ 由下式决定

$$\partial\sigma^n=\sum_i(-1)^i\sigma_i^{n-1},$$

这里 σ_i^{n-1} 是由 Δ^{n-1} 映成 Δ^n 的第 i 个面的映射和 σ^n 的合成映射. 一如往常, 闭链和边缘链, 分别为属于 ∂^n 的核和象的那些链. n 维奇异同调群 $H_n^s(X;G)$ 定义为 n 维闭链群模边缘链这个子群的商群.

如果 $A\subset X$, 那么群 $H_n^s(A;G)$ 用 $S_*(X;G)$ 中, 支撑属于 A 的那些链所构成的子复形来定义, 而偶 (X,A) 的群 $H_n^s(X;A;G)$, 用对应的商复形来定义. 存在着一个正合的同调序列

$$\cdots\to H_n^s(A;G)\to H_n^s(X;G)\to$$
$$\to H_n^s(X,A;G)\xrightarrow{\delta}H_{n-1}^s(A;G)\to\cdots,$$

它是拓扑空间偶 (X,A) 和它们的连续映射所构成的范畴上的一个协变函子.

同态 δ 是对 (X,A) 的代表 $H_n^s(X,A;G)$ 的相应元的闭链在 X 中取边界而得到. 奇异同调是具有紧支撑的同调, 其意义为: 联系于 X 的这些群等于紧集 $C\subset X$ 的同调群的顺向极限.

奇异上同调 (singular cohomology) 用对偶的方式定义, 上链复形 $S^*(X;G)$ 定义为整奇异链复形 $S_*(X;\mathbf{Z})$ 映入 G 的同态复形. 马虎些, 可以说上链 (cochains) 就是定义在奇异单形上, 值取在 G 中的函数 ξ, 而上边界同态 d 为

$$(d\xi)(\sigma^{n+1})=\sum_i(-1)^i\xi(\sigma_i^{n+1}).$$

奇异上同调群 $H_s^n(X;G)$ 是 n 维上闭链 (cocycle) 群 (d 的核) 模上边缘 (coboundary) 子群 (d 的象) 的商群. 子空间 A 的上链群定义为上链群 $S^*(X;G)$ 在 A 上的限制, 而偶的上同调群 $H_s^n(X,A;G)$ 定义为 $S^*(X;G)$ 中那些在 A 的奇异单形上为零的全体上链所构成的子复形的上同调. 存在着一个正合序列

$$\cdots\to H_s^n(X,A;G)\to H_s^n(X;G)\to$$

$$\to H_c^n(A;G) \xrightarrow{\delta} H_c^{n+1}(X,A;G) \to \cdots,$$

它是 (X,A) 的反变函子. 映射 δ 定义为 A 的、代表 $H_c^n(A;G)$ 的上闭链在 X 中的上边缘.

系数在任意群 G 中的同调群和上同调群可以通过万有系数公式, 用整同调和上同调群表达. 上述公式, 在上同调的情形, 只在 G 为有限生成的情形成立.

在多面体范畴里, 奇异同调理论等价于单纯(以及胞腔)理论. 这一点也可以用来建立单纯理论的拓扑不变性. 然而, 奇异同调群的重要性不限于此. 它定义简单, 可用于一般的拓扑空间范畴, 并为同伦不变量. 奇异理论和同伦理论的自然联系, 使它成为同伦拓扑中不可少的东西.

然而, 尽管奇异同调群是对所有的拓扑空间定义, 没有什么条件, 但它的应用却限于局部可缩或同调局部连通的空间. 奇异链反映的是"很"线性连通这个事实, 因此, 当"连续"闭链不是"充分地"线性连通时, 它不提供什么信息. 存在着其他的可能的"异常现象"(例如, Euclid 空间的紧子空间, 它的同调群可以在任何高维上非零, 偶 (X,A) 的同调群和上同调群, 在 X 到 X 的对应于闭子空间 $A\subset X$ 的商空间 X/A 上的自然映射下, 不和象同构, 等等), 因此在拓扑空间的一般范畴里, 还使用相应的 Александров-Čech 上同调及其相伴同调(参见 **Александров-Čech 同调与上同调**)(Aleksandrov-Čech homology and cohomology). 它们没有上述缺点, 而且当它们可以应用时, 与奇异理论一致.

参考文献

[1] Dold, A., Lectures on algebraic topology, Springer, 1972.

[2] Massey, W. S., Homology and cohomology theory, M. Dekker, 1978. Chapts 8, 9.

[3] Скляренко, Е. Г., «Успехи матем. наук», 34 (1979), 6, 90-118.

[4] Massey, W. S., Singular homology theory, Springer, 1980.

[5] Sklyarenko, E. G., Homology and cohomology of general spaces, Springer, Forthcoming (译自俄文).

Е. Г. Скляренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975, Chapt. 10.

[A2] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966. Sects. 4.4; 5.4 (中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

沈信耀 译　潘建中 校

奇异积分 [singular integral; сингулярный интеграл]

对 $[a,b]$ 上可积函数 f 定义的、在点 x 有一个奇点的积分

$$I_n(f,x)=\int_a^b f(t)\Phi_n(t,x)\,dt,$$

它的核 Φ_n 满足以下条件: 对任一 $\delta>0$ 和任意区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[\alpha,\beta]\cap[x-\delta,x+\delta]}\Phi_n(t,x)\,dt=1, \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[\alpha,\beta]-[x-\delta,x+\delta]}\Phi_n(t,x)\,dt=0 \qquad (2)$$

且

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,x-\delta]\cup[x+\delta,b]}|\Phi_n(t,x)|\leqslant\Phi_x(\delta)<\infty, \qquad (3)$$

这里 $\Phi_x(\delta)$ 仅依赖于 δ 和 x 而不依赖于 n. 如果 (1), (2) 和 (3) 在一个 x 集合 $E\subset[a,b]$ 上一致地满足, 则该积分 $I_n(f,x)$ 称为在 E 上**一致奇异的** (uniformly singular). 最大的注意力已集中在所谓的正核 ($\Phi_n(t,x)\geqslant 0$), **Dirichlet 核** (Dirichlet kernel)

$$D_n(t,x)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}},$$

Fejér 核 (见 **Fejér 积分** (Fejér integral))

$$F_n(t,x)=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}(t-x)}{2(n+1)\sin^2\frac{t-x}{2}},$$

Poisson-Abel 核 (见 **Poisson 积分** (Poisson integral))

$$P_r(t,x)=\frac{1-r^2}{2[1-2r\cos(t-x)+r^2]},$$

$$0\leqslant r<1,$$

以及由各种按规范正交多项式正交展开的求和法所导出的核的性质上.

"奇异积分"的概念是由 H. Lebesgue ([1]) 引入的, 他指出其在研究收敛问题中的重要性. 这样, 三角 **Fourier 级数** (Fourier series), **Fourier 级数 (关于正交多项式的)** (Fourier series (in orthogonal polynomials)), 以及关于一般正交系的展开式的收敛性与可求和性问题可归结为奇异积分收敛性的研究.

在有界变差连续函数 f 的情形 Lebesgue 建立了奇异积分的收敛准则. 在可和函数 f 的情形 Д. К. Фаддеев ([2]) 建立了奇异积分在 **Lebesgue 点** (Lebesgue point) 收敛的必要充分条件. 由于对具体的奇异积分 Lebesgue 和 Фаддеев 的条件难以检验, 有一系列文章致力于寻找奇异积分在各别点收敛和一致收敛的有效的充分条件. 为了奇异积分在一连续点收敛, 只

需算子 $I_n(f, x)$ 按范数有界就足够了，即积分序列

$$\int_a^b |\Phi_n(t, x)| dt, \ n = 1, 2, \cdots,$$

有界，而为了在一 Lebesgue 点收敛，必须对核 $\Phi_n(t, x)$ 存在所谓"隆起的强函数"，即在 $[a, x)$ 上单调递增而在 (x, b) 单调递减的可积函数 $\Psi_n(t, x) \geq 0$，使得对几乎所有的 $t \in [a, b]$，

$$|\Phi_n(t, x)| \leq \Psi_n(t, x),$$

且

$$\int_a^b \Psi_n(t, x) dt = O(1).$$

参考文献

[1] Lebesgue, H., Sur les intégrales singulières, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 1 (1909), 25 – 117.

[2] Фаддеев, Д. К.,《Матем. сб.》, 1 (1936), 351 – 368.

[3] Коровкин, П. П., Линейные операторы и теория приближений, М., 1959 (英译本: Korovkin, P. P., Linear operators and approximation theory, Hindustan Publ. Comp., 1960).

[4] Натансон, И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974 (中译本: И. П. 那汤松, 实变函数论, 上、下册, 高等教育出版社, 1955).

[5] Alexits, G., Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961 (译自俄文).

[6] Ефимов, А. В.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 24 (1960), 5, 743 – 756.

[7] Теляковский, С. А.,《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 28 (1964), 6, 1209 – 1236.

А. В. Ефимов 撰

【补注】 奇异积分的一个基本例子是 **Hilbert 奇异积分** (Hilbert singular integral) (亦见 **Hilbert 变换** (Hilbert transform)).

参考文献

[A1] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1979.

葛显良 译 吴绍平 校

奇异积分方程 [singular integral equation; сингулярное интегральное уравнение]

Cauchy 意义下反常积分 (见 **Cauchy 积分** (Cauchy integral)) 的积分号下含有未知函数的一种方程. 依据在其上作积分的流形的维数，区分为一维的和多维的奇异积分方程. 与 **Fredholm 方程** (Fredholm equation) 理论相比，奇异积分方程理论更加复杂. 例如，一维和多维奇异积分方程两种理论，在最终结果的表达方式上 以及用来得出这些结果的方法上彼此显然不同. 在一维情形，该理论已得到更完满的发展，且其结果比多维情形的相应表达得更简单. 以下，主要关注于一维情形.

一维奇异积分方程中重要的一类是带有 Cauchy 核的:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_\Gamma k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

其中 a, b, k, f 是已知函数，k 是 Fredholm 核 (见**积分算子** (integral operator))，φ 是所求的函数，Γ 是一平面曲线，且反常积分是理解成 Cauchy 主值 (Cauchy principal value)，即

$$\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ t \in \Gamma,$$

这里 $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus l_\varepsilon$，$l_\varepsilon$ 是 Γ 上弧 $t'tt''$ 使得 tt' 和 tt'' 的长度均为 ε.

由 (1) 的左边定义的算子 K 称为奇异算子 (singular operator) (有时或称为广义奇异算子 (general singular operator)):

$$K = aI + bS + V, \tag{2}$$

其中 I 是单位算子，S 是奇异积分算子 (singular integral operator) (有时称为具有 Cauchy 核的奇异积分算子 (singular integral operator with Cauchy kernel))，即

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ t \in \Gamma,$$

又 V 是具有核 $k(t, \tau)$ 的积分算子.

算子 $K_0 = aI + bS$ 称为奇异算子的特征部分 (characteristic part of the singular operator)，或特征奇异算子 (characteristic singular operator)，而方程

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{\tau - t} d\tau = f(t), \ t \in \Gamma, \tag{3}$$

称为特征奇异积分方程，其中函数 a 和 b 是相应算子或方程的系数.

方程

$$a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_\Gamma k(\tau, t)\psi(\tau) d\tau = g(t), \ t \in \Gamma,$$

称为方程 (1) 的伴随 (adjoint) 方程，而算子 $K' = aI + SbI + V'$ (V' 是具有核 $k(\tau, t)$ 的积分算子) 称为 K 的伴随算子. 特别地 $K_0' = aI + SbI$ 是 K_0 的伴随.

算子 K, K_0, K', K_0' 或它们的相应方程称为属

于正规型 (normal type)，如果函数

$$A=a+b,\ B=a-b$$

在 Γ 上任何处不为零，在这种情况也称算子或方程的系数满足正规性条件 (normality condition).

设 $H_\alpha(\Gamma)$, $0<\alpha\leqslant 1$，是定义在 Γ 上且对所有的 $t_1, t_2\in\Gamma$，满足条件

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant \text{const}|t_1-t_2|^\alpha$$

的函数类 $\{f\}$. 如果 f 对某容许值 α 属于 $H_\alpha(\Gamma)$ 且不需要知晓 α 的数值，则记成 $f\in H(\Gamma)$，或甚至 $f\in H$ 如果从上下文所指的围道 Γ 是清楚的.

集合 H 称为 Hölder 函数类 (Hölder class of functions)，且如果 $f\in H$，则称 f 满足 Hölder 条件 (Hölder condition) 或称 f 是一个 H 函数 (H-function).

设 G 是在一条有向闭简单光滑围道 Γ 上不为零的复值连续函数，且设

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_\Gamma, \tag{4}$$

这里 $[\ ]_\Gamma$ 表示方括号中函数沿正向绕 Γ 一圈后的增量. 整数 κ 称为函数 G 的指标 (index of the function)，$\kappa=\text{ind}\,G$.

特征奇异积分方程及其伴随的解. 设 Γ 是一条简单、闭、有向、光滑围道，其正向是这样选取的，使得它所界定的有限区域在其左侧，设坐标原点在此区域内，设 $a, b, f\in H(\Gamma)$，又设 a 和 b 满足正规性条件. 此外，设对

$$G=\frac{a-b}{a+b}, \tag{5}$$

κ 由 (4) 定义. 则以下的论断成立.

1) 如果 $\kappa\geqslant 0$，则方程 (3) 对任何右端 $f\in H(\Gamma)$ 在 $H(\Gamma)$ 中可解，且所有它的 H 解由公式

$$\varphi(f)=a_*(t)f(t)+$$
$$-\frac{b_*(t)\omega(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\tau)}{\omega(\tau)(\tau-t)}d\tau+$$
$$+b_*(t)\omega(t)p_{\kappa-1}(t) \tag{6}$$

给出 (见 [1], [2])，其中

$$a_*=\frac{a}{a^2-b^2},\ b_*=\frac{b}{a^2-b^2},$$

$$\omega(t)=t^{-\kappa/2}\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}\times$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\ln[\tau^{-\kappa}G(\tau)]}{\tau-t}d\tau\right],$$

且 $p_{\kappa-1}$ 是任意一个 $\kappa-1$ 次多项式 ($p_{-1}=0$). 如果 $\kappa<0$，则方程 (3) 在 $H(\Gamma)$ 中可解，当且仅当 f 满足条件

$$\int_\Gamma\frac{t^k}{\omega(t)}f(t)dt=0,\ k=0,\cdots,-\kappa-1.$$

当这些条件满足时，(3) 有唯一的 H 解，由公式 (6) 给出，其中 $p_{\kappa-1}=0$.

2) 伴随于 (3) 的奇异积分方程

$$a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=g(t),\ t\in\Gamma. \tag{7}$$

对任何 $g\in H(\Gamma)$ 在 H 中可解如果 $\kappa\leqslant 0$，且它的所有的 H 解由公式

$$\psi(t)=a_*(t)g(t)+$$
$$+\frac{1}{\pi i\omega(t)}\int_\Gamma\frac{\omega(\tau)b_*(\tau)g(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{p_{-\kappa-1}}{\omega(t)} \tag{8}$$

给出. 但如果 $\kappa>0$，则方程 (7) 可解，当且仅当 g 满足 κ 个条件

$$\int_\Gamma t^k b(t)\omega(t)g(t)dt=0,\ k=0,\cdots,\kappa-1,$$

又如果这些条件满足，则解由 (8) 给出，其中 $p_{-\kappa-1}=0$.

Noether 定理 (Noether theorem). 设 ν 和 ν' 分别是齐次方程 $K_0\varphi=0$ 和 $K_0'\psi=0$ 的线性无关解的个数. 则差 $\nu-\nu'$ 称为算子 K_0 的指标 (index of the operator) 或方程 $K_0\varphi=0$ 的指标 (index of the equation):

$$\text{ind}\,K_0=\nu-\nu'.$$

定理 1 齐次奇异积分方程 $K_0\varphi=0$ 和 $K_0'\psi=0$ 有有限多个线性无关解.

定理 2 非齐次方程 (3) 可解的必要充分条件是

$$\int_\Gamma f(t)\psi_j(t)dt=0,\ j=1,\cdots,\nu',$$

其中 $\psi_1,\cdots,\psi_{\nu'}$ 是伴随齐次方程 $K_0'\psi=0$ 的线性无关解的一个完全集.

定理 3 K_0 的指标 (见算子的指标 (index of an operator)) 等于由方程 (5) 定义的函数 G 的指标，即

$$\text{ind}\,K_0=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-b}{a+b}\right]_\Gamma. \tag{9}$$

在一般奇异积分方程 (1) 的情形，这些定理仍然成立，即在这些定理 K_0, K_0' 可分别换成 K, K'. 只

须记住，在一般奇异积分方程的情形，ν 和 ν' 两者一般均不为零，而在特征奇异积分方程的情况，其中之一必为零．

定理 1－3 称为 F. Noether 定理，他在具有 **Hilbert 核**（Hilbert kernel）的一维奇异积分方程

$$a(s)\varphi(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cot\frac{t-s}{2}\,dt+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}k(s,t)\varphi(t)dt=f(s),\ -\pi\leqslant s\leqslant\pi \tag{10}$$

的情形首先证明了这些定理（[9]）．这些定理类似于 Fredholm 定理（见 **Fredholm 方程**（Fredholm equation））且跟它们不同之处仅在于齐次方程和其伴随方程方程的线性无关解的个数一般是不同的，即 Fredholm 方程的指标总是等于零，而奇异积分方程可以有非零的指标．

在 $\Gamma=\bigcup\Gamma_k$ 由有限个光滑互不相交的闭围道组成的情况，类似于 Noether 定理、公式（6）和（8）仍然成立．在此情形，（4）中的符号 $[\ \ ]_\Gamma$ 表示方括号中函数绕每一个围道 Γ_k 一圈后的增量之和．

当 Γ 是有限个光滑互不相交开围道之并的情况需要特殊的考虑．如果在每一个不包含端点的 Γ_k 的任一封闭部分的内部 φ 是 H 函数，又如果靠近每一个端点 c 它可以写成形式 $\varphi(t)=\varphi_*(t)|t-c|^{-\alpha}$，$0\leqslant\alpha=$ 常数 <1，这里 φ_* 在包含 c 的 c 的某邻域内是 H 函数，则称 φ 属于类 H^*．如果 $a,b\in H$，$f,g\in H^*$，且在 H^* 中寻找方程（3），（7）的解，则能够以这样的方式定义数 κ 和函数 ω 使得（6）和（8）仍然成立．此外，如果按相应的方式定义 H^* 的子类，在其中寻求给定的奇异积分方程及其伴随的解，则 Noether 定理也仍然成立（见[1]）．

以上结果能以各种不同方式推广．能够证明（见[1]）在分段光滑围道 Γ（即当 Γ 是有限多条除它们的端点外互不相交的光滑开弧之并时）的情形在一定条件下以上结果仍然成立．奇异积分方程也可以在 Lebesgue 函数空间 $L_p(\Gamma)$ 和 $L_p(\Gamma,\rho)$ 中加以研究，这里 $p>1$ 而 ρ 是某一个权（见[4]－[7]）．[4]－[6] 包含直接推广上述结果的一些结果．

设 Γ 是一条简单的可求长的围道，其方程为 $t=t(s)$，$0\leqslant s\leqslant\gamma$，这里 s 是 Γ 上由某固定点出发的弧长而 γ 是 Γ 的长度．称定义在 Γ 上的函数 f 是几乎处处有限、可测、可积等等，如果函数 $f(t(s))$ 在区间 $[0,\gamma]$ 上有相应的性质．f 在 Γ 上的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_\Gamma f(t)dt=\int_0^\gamma f(t(s))t'(s)ds.$$

设 $L_p(\Gamma)$ 表示在 Γ 上可测且使得 $|f|^p$ 在 Γ 上可积的函数的集合．如果用

$$\|f\|=\left[\int_\Gamma|f|^p ds\right]^{1/p}$$

引入范数，则函数类 $L_p(\Gamma)$ $(p\geqslant1)$ 成为一个 Banach 空间．

如果在方程（3），（7）中等式几乎处处成立，且系数 a、b 连续并满足正规性条件，$f,g\in L_p(\Gamma)$，$p>1$，则 1）和 2）仍然保持有效，只须用 $L_p(\Gamma)$，$p>1$ 代替 H．此外，当算子 K 有形式（2），$K\varphi=f$ 的解在 $L_p(\Gamma)$，$p>1$ 中寻找，而其齐次伴随 $K'\psi=0$ 的解在 $L_{p'}(\Gamma)$ $(p'=p/(p-1))$ 中寻找，则 Noether 定理仍保持有效且 V 可以是 $L_p(\Gamma)$ 上任何的**完全连续算子**（completely-continuous operator）．

当 Γ 是开围道的有限并时，或者如果 Γ 是封闭的但奇异积分方程的系数是不连续的，则这些方程的解常可在加权函数空间 $L_p(\Gamma,\rho)$，$p>1$ $(f\in L_p(\Gamma,\rho)\Leftrightarrow\rho f\in L_p(\Gamma))$ 中找到．在关于权函数 ρ 的特殊条件下，类似于上述的结果仍然成立．

正则化问题．奇异积分方程理论中的基本问题之一是正则化问题，即把奇异积分方程简化成 Fredholm 方程的问题．

设 E 和 E_1 是 Banach 空间，两者可以相同，且设 $A:E\to E_1$ 是有界线性算子．有界线性算子 B 称为 A 的左正则化子（left regularizer）如果 $BA=I+V$，这里 I，V 分别是 E 上单位算子和完全连续算子．如果方程 $A\varphi=f$ 和 $BA\varphi=Bf$ 对每一个 $f\in E_1$ 是等价的，则 B 称为 A 的左等价正则化子（left equivalent regularizer）．有界线性算子 B 称为 A 的右正则化子（right regularizer）如果 $AB=I_1+V_1$，这里 I_1，V_1 分别是 E_1 上单位算子和完全连续算子．如果方程 $A\varphi=f$ 和 $AB\psi=f$ 当 f 跑遍 E_1 时同时可解或不可解，且在可解的情形它们的解之间关系式 $\varphi=B\psi$ 成立，则 B 称为 A 的右等价正则化子（right equivalent regularizer）．如果 B 同时是 A 的左和右正则化子，则称它为双边正则化子（two-sided regularizer），或简称正则化子（regularizer）．称 A 容许左、右、双边、或等价正则化，如果它分别有左、右、双边、或等价的正则化子．

设 K 是由（2）定义的算子，其中 Γ 是闭简单光滑围道，a 和 b 是满足正规化条件的 H 函数（或连续函数）而 V 是 $L_p(\Gamma)$ $(p>1)$ 上的完全连续算子．则 K 在 $L_p(\Gamma)$ 上有正则化子的不可数集，例如其中之一是算子

$$M=\frac{a}{a^2-b^2}I-\frac{b}{a^2-b^2}S.$$

为了 K 容许左等价正则化，必要充分条件是其指标 κ 非负（[7]）. 可取 M 作为一个等价左正则化子. 如果 $\kappa<0$，则 K 容许右等价正则化，可利用 M 来实现（见[1]）.

奇异积分方程组．如果在（1）中 a, b 和 k 是 n 阶方阵，看成未知向量 $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 的线性变换矩阵，而 $f=(f_1, \cdots, f_n)$ 是已知向量，则（1）称为奇异积分方程组，称它属于正规型如果矩阵 $A=a+b$ 和 $B=a-b$ 在 Γ 上非奇异，即对所有的 $t\in\Gamma$, $\det A\neq 0$ 和 $\det B\neq 0$.

Noether 定理对 H 类中的奇异积分方程组仍保持有效（见[1]，[3]），且能推广到 Lebesgue 函数空间的情形（见[4]，[5]）．与单个方程的情形不同，特征奇异积分方程组一般不能用求积法求解，即使对指标有类似于（9）的公式（见[1]）：

$$\operatorname{ind} K=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\det A^{-1}B\right]_\Gamma$$

对奇异积分方程组，正则化问题（见[3]）类似于单个方程的问题.

当正则化条件不成立时，对单个的奇异积分方程和奇异积分方程组都已经作了一些研究（见[11]及其中的文献）.

多维奇异积分方程．这些是形如

$$a(t)\varphi(t)+\int_\Gamma \frac{g(t,\theta)}{r^m}\varphi(\tau)d\tau+$$
$$+(V\varphi)(t)=f(t),\ t\in\Gamma, \qquad (11)$$

的方程，其中 Γ 是 Euclid 空间 $E_m(m>1)$ 中的一个区域．Γ 可以有界或无界，且在特殊情形可与 E_m 一致；t 和 τ 是 E_m 中的点 $r=|t-\tau|$, $\theta=(\tau-t)/r$, $d\tau$ 是 E_m 中的体积元，而 V 是在其中求解的 Banach 函数空间上的完全连续算子．此外，a 和 g 是已给定的函数而反常的奇异积分是理解成主值意义下的，即

$$\int_\Gamma \varphi(\tau)\frac{g(t,\theta)}{r^m}d\tau=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma\setminus\{r<\varepsilon\}}\varphi(\tau)\frac{g(t,\theta)}{r^m}d\tau. \qquad (12)$$

这里 t 称为奇异积分（12）的极点（pole），$g(t,\theta)$ 称为它的特征（characteristic）而 φ 称为它的密度（density）．通常，当以下条件

$$\int_\sigma g(t,\theta)d\sigma=0 \qquad (13)$$

不成立时，（12）中的极限不存在，这里 σ 是中心在原点的单位球面．因而假定（13）总是成立.

在多维奇异积分方程理论中，象征的概念（见**算子的象征**（symbol of an operator））起着重要的作用．它是借助于 a 和 g 来定义的，且由给定的象征原奇异算子可以恢复到相差一个完全连续项．奇异算子的合成对应于它们的象征的乘法．已经证明（[7]）在某些限制下（11）容许有一个空间 $L_p(p>1)$ 中的正则化，当且仅当其象征的绝对值有正下界，且在这种情形下 Fredholm 定理成立.

历史概况．一维奇异积分方程的研究起源于 D. Hilbert 和 H. Poincaré 的著作，几乎与 **Fredholm 方程**（Fredholm equation）理论的建立在同一时期．一种特殊情况，具有 Cauchy 核的一个奇异积分方程很早以前在 Ю. В. Сохоцкий 于 1873 年发表于圣彼得堡的博士论文中已被研究；然而这个研究工作一直没有被注意到.

在方程（1）和（10）的一般理论建立上的基本结果是 20 世纪 20 年代初由 F. Noether（[9]）和 T. Carleman（[10]）得到的．Noether 首先引入了一种指标的概念且应用左正则化方法证明了上述的定理 1－3．这个方法首先是由 Poincaré 和 Hilbert 描述的（在各种特殊情形），但其一般形式应归功于 Noether．上述方法的实现中的关键在于应用 Cauchy 主值意义下的累次奇异积分的置换（合成）公式（**Poincaré-Bertrand 公式**（Poincaré-Bertrand formula））．对方程（3）的某些特殊类，Carleman 的基本观点是基于把该方程化成以下的解析函数论中边界问题的一种方法（线性共轭性问题（linear conjugacy problem），见[1]和 **Riemann-Hilbert 问题（解析函数）**（Riemann-Hilbert problem（analytic functions）））：

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in\Gamma,$$

而且他找到一种构造显式解的途径．Carleman 和 И. Н. Векуа 找到一个正则化方程（1）的方法，这种方法涉及到特征方程（3）的解.

临近 20 世纪 30 年代末，与求解固体介质力学（弹性、流体与气体力学理论及其他）和理论物理学中一些很重要的问题相联系，奇异积分方程在理论上和实践中的重大意义变得特别明显．一维奇异积分方程理论在 20 世纪 40 年代有意义重大的进展且在前苏联数学家的工作中达到了一种最终形式（在一定意义下）．该理论在 Hölder 函数类中的阐述可在其开创者之一的 Н. И. Мусхелишвили 的一本专著中找到（见[1]）．该专著也促进了某些其他方向的科学研究，例如在不满足 Hausdorff 正规性条件的奇异积分方程、有非对角奇异性（具有位移）的奇异积分方程．Wiener-Hopf 方程、多维奇异积分方程理论等方面.

多维奇异积分方程最早的研究是由 F. Tricomi 于 1928 年作出的，他对二维奇异积分方程建立了一个置换公式且应用它去解一类奇异积分方程．在这个方

向，奠基性工作是由 G Giraud 于 1934 年作出的，他对某一类 Ляпунов 流形上的多维奇异积分方程证明了 Fredholm 定理的正确性.

参考文献

[1] Мусхелишвили, Н И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М, 1968（中译本：Н. И. 穆斯海里什维里，奇异积分方程，上海科学技术出版社，1966）.

[2] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977（英译本：Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966）.

[3] Векуа, Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, 2 изд., М., 1970（中译本：维库阿，奇异积分方程组及某些边值问题，上海科学技术出版社，1963）.

[4] Хведелидзе, Б. В., «Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР», 23 (1956), 3 – 158.

[5] Данилюк, И. И., Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М, 1975.

[6] Гохберг, И. Ц., Крупник, Н., Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Киш., 1973.

[7] Михлин, С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962（中译本：С. Г. 米赫林，多维奇异积分和积分方程，上海科学技术出版社，1964）.

[8] Бицадзе, А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966（英译本：Bitsdze, A. V., Boundary value problems for second-order elliptic equations, North-Holland, 1968）.

[9] Noether, F., Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Math. Ann.*, **82** (1921), 42 – 63.

[10] Carleman, T., Sur le résolution des certaines équations intégrales, *Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, **16** (1922), 26 [illegible] – 19.

[11] Prössdorf, S., Einige Klassen singulärer Gleichungen, Birkhäuser, 1974.

А. В. Бицадзе, Б. В. Хведелидзе 撰

【补注】 对某些奇异积分方程组显式解公式可以用系统论中的状态空间方法得到（见[A1]和**卷积型积分方程**（integral equation of convolution type））.

参考文献

[A1] Bart, H., Gohberg, I. and Kaashoek, M. A., Minimal factorization of matrix and operation functions, Birkhäuser, 1979.

[A2] Clancey, K. and Gohberg, I., Factorization of matrix functions and singular integral operators, Birkhäuser, 1981.

葛显良 译 吴绍平 校

奇点［singular point; особая точка］

1）解析函数 $f(z)$ 的奇点（singular point of an analytic function）是复变量 z 的函数 $f(z)$ 的一个元素沿 z 平面内任一曲线解析延拓（analytic continuation）的一个障碍.

设 $f(z)$ 由 Weierstrass 元（Weierstrass element）$(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 定义，此元素由幂级数

$$f_\zeta = f_\zeta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\zeta)^k \qquad (1)$$

及其以 $\zeta \neq \infty$ 为圆心、收敛半径为 $R>0$ 的收敛圆盘

$$U(\zeta, R) = \{z \in \overline{\mathbf{C}}: |z-\zeta| < R\}$$

组成. 考虑以此元素中心 ζ 为起点的所有可能的曲线 $L: [0, 1] \to \overline{\mathbf{C}}$ 即区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 到扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的连续映射 $L: z = \varphi(t)$, $\zeta = \varphi(0)$. 如果给定的元素可沿任何这样的曲线解析延拓到任一点 $z \in \overline{\mathbf{C}}$，则这样得到的完全解析函数退化为一个常数：$f(z)=$ 常数. 对于非平凡解析函数 $f(z) \neq$ 常数，沿某些曲线 L 作解析延拓存在障碍是其特征.

设 a 是扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 中曲线 $L_1: z = \varphi_1(t)$, $\varphi_1(0) = \zeta$ 和 $L_2: z = \varphi_2(t)$, $\varphi_2(0) = \zeta$ 上的点：$a = \varphi_1(\tau_1)$ $(0 < \tau_1 \leqslant 1)$, $a = \varphi_2(\tau_2)$ $(0 < \tau_2 \leqslant 1)$，并设所给元素可沿 L_1 和 L_2 解析延拓到所有前于 a 的点 $z = \varphi_1(t)$ $(0 \leqslant t < \tau_1)$ 和 $z = \varphi_2(t)$ $(0 \leqslant t < \tau_2)$. 两条这样的曲线 L_1, L_2 称为关于给定元素 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 到点 a 的解析延拓是等价的（equivalent），如果对 a 在 $\overline{\mathbf{C}}$ 中的任一邻域 $V(a)$，存在数 $\varepsilon > 0$，使得由 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 沿 L_1 解析延拓到任一点 $z' = \varphi_1(\tau')$ $(\tau_1 - \varepsilon < \tau' < \tau_1)$ 所得到的 Weierstrass 元，可沿位于 $V(a)$ 中的某条曲线解析延拓到由 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 沿 L_2 延拓到任一点 $z = \varphi_2(\tau'')$ $(\tau_2 - \varepsilon < \tau'' < \tau_2)$ 所得到的元素.

如果沿一条曲线 L 可解析延拓到点 a，则沿含有 L 的等价类 $\{L\}$ 中所有曲线都能解析延拓到点 a. 此时偶 $(a, \{L\})$ 称为正则的（regular）或正常的（proper）；它定义了解析函数 $f(z)$ 在点 a 的邻域 $V(a)$ 中的一个单值正则分支.

如果沿曲线 $L: z = \varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $\varphi(0) = \zeta$（此曲线通过点 a, $a = \varphi(\tau)$, $0 < \tau \leqslant 1$）可解析延拓到所有前于 a 的点 $\varphi(t)$ $(0 \leqslant t < \tau)$，但不能延拓到点 $a = \varphi(\tau)$，则 a 是对于元素 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 沿曲线 L 解析延拓的奇点（singular point for analytic continuation）. 此时它也是对于沿通过点 a 的等价类 $\{L\}$ 中所有曲线延拓的奇点. 由点 $a \in \overline{\mathbf{C}}$ 和诸曲线 L（它们通过点 a 且 a 对于沿这些曲线延拓是奇点）的等价类 $\{L\}$ 构成的偶 $(a, \{L\})$，称为由元素 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 定义的解析函数 $f(z)$ 的奇点（singular point of the analytic function）. 两个奇点 $(a, \{L\})$ 和 $(b, \{M\})$ 称为相同，如果 $a = b$ 且类 $\{L\}$ 与类 $\{M\}$ 相

同. 扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 的点 a 称为奇点 $(a, \{L\})$ 的投影(projection)或 z 坐标(z-coordinate); 此时也称奇点 $(a, \{L\})$ 处于点 $a\in\overline{\mathbf{C}}$ 之上. 一般地说, 通过解析延拓同一个元素 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$, 可以得到若干(甚至可数个)不同的奇异偶和正则偶 $(a, \{L\})$ 处于同一点 $a\in\overline{\mathbf{C}}$ 之上(见**分支点**(branch point)).

如果初始级数(1)的收敛半径 $R<\infty$, 则在收敛圆盘 $U(\zeta, R)$ 的边界圆周 $\Gamma=\{z\in\overline{\mathbf{C}}: |z-\zeta|=R\}$ 上至少有元素 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 的一个奇点 a, 即存在解析函数 $f(z)$ 对于沿类 $\{L\}$ 中诸曲线 $z=\varphi(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ (它们并满足: 当 $0\leqslant t<1$ 时, $z=\varphi(t)\in U(\zeta, R)$ 且 $a=\varphi(1)$) 延拓的奇点. 换言之, 元素 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 的一个奇点是一个点 $a\in\Gamma$, 使得元素 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 从圆盘 $U(\zeta, R)$ 到任一邻域 $V(a)$ 的直接解析延拓成为不可能. 在这种情形下, 而且一般地在不明显描述曲线类 $\{L\}$ 不致引起混淆的各种情形下, 通常就只限于提及奇点的 z 坐标 a. 研究解析函数奇点位置如何依赖于初始元素 $(U(\zeta, R), f_\zeta)$ 的系数序列 $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的性质, 是函数论的主要研究方向之一(见关于乘法的 **Hadamard 定理**(Hadamard theorem); **函数元的星形**(star of a function element)以及[1], [3], [5]). 例如, 熟知级数

$$f_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k z^{d^k}$$

(其中 $b\in\overline{\mathbf{C}}$, $|b|<1$, $d\geqslant 2$ 是一自然数) 的奇点填满其收敛圆盘 $U(0, 1)$ 的整个边界 $\Gamma=\{z\in\overline{\mathbf{C}}: |z|=1\}$; 虽然此级数的和在闭圆盘 $\overline{U}(0, 1)=\{z\in\overline{\mathbf{C}}: |z|\leqslant 1\}$ 上处处连续. 这里 Γ 是解析函数 $f_0(z)$ 的自然边界; $f_0(z)$ 不可能越过圆盘 $U(0, 1)$ 的边界进行解析延拓.

假定在点 $a\neq\infty$ 的充分小邻域 $V(a)=\{z\in\overline{\mathbf{C}}: |z-a|<R\}$ (或 $V(\infty)=\{z\in\overline{\mathbf{C}}: |z|>R\}$) 内沿一个特定类 $\{L\}$ 中的曲线延拓得到的所有元素可解析延拓到此邻域中任一异于 a 的点, 即可沿位于去心邻域 $V'(a)=\{z\in\overline{\mathbf{C}}: 0<|z-a|<R\}$ (对应地 $V'(\infty)=\{z\in\mathbf{C}: R<|z|<\infty\}$) 中所有曲线解析延拓, 则奇点 $(a, \{L\})$ 称为**孤立奇点**(isolated singular point). 如果此时沿类 $\{L\}$ 中的曲线延拓所得的元素沿位于 $V'(a)$ 中的所有可能的闭曲线解析延拓不改变这些元素, 则孤立奇点 $(a, \{L\})$ 称为单值奇点(single-valued singular point). 这种类型的奇点可能是极点或本质奇点: 如果当 z 沿类 $\{L\}$ 中的曲线趋于 a 时存在无穷极限: $\lim f(z)=\infty$, 则单值奇点 $(a, \{L\})$ 称为**极点(函数的)**(pole (of a function)); 如果当 z 沿类 $\{L\}$ 中的曲线趋于 a 时不存在有限或无穷极限 $\lim f(z)$, 则 $(a, \{L\})$ 称为**本质奇点**(essential singular point); 存在有限极限的情形对应于正则点 $(a, \{L\})$. 如果沿类 $\{L\}$ 中的曲线延拓所得的元素沿 $V'(a)$ 中围绕 a 的闭曲线解析延拓改变这些元素, 则孤立奇点 $(a, \{L\})$ 称为**分支点**(branch point)或多值奇点(many-valued singular point). 分支点又可分为代数分支点和超越分支点(包括对数分支点), 见**代数分支点**(algebraic branch point); **对数分支点**(logarithmic branch point); **超越分支点**(transcendental branch point). 如果沿类 $\{L\}$ 中的曲线延拓得到的元素在 $V'(a)$ 中以同一方向围绕 a 转有限 $m(\geqslant 2)$ 次单圈延拓后回到初始元素, 则 $(a, \{L\})$ 是代数分支点, $m-1$ 称为它的阶(order). 反之, 如果绕 a 转圈给出一个又一个新元素, 则 $(a, \{L\})$ 是超越分支点.

例如, 对于函数

$$f(z)=\frac{1}{(1+z^{1/2})(1+z^{1/6})},$$

点 $a=0, \infty$ (对所有曲线) 是 5 阶代数分支点. 作为点函数, $f(z)$ 只能在相应的 **Riemann 曲面**(Riemann surface) S 上才能表示为单值函数, 此 S 由以特殊方式在点 $0, \infty$ 上联结起来的 $\overline{\mathbf{C}}$ 上的 6 叶组成. 此外, $f(z)$ 的 3 个正则分支处于点 $a=1$ 之上, 这些分支在 S 的相应 3 叶上是单值的; 在 S 的一个叶上有一 2 阶极点, 而在 S 的 2 个叶上有一阶极点. 一般地说, 在研究奇点的特征时, 引进 Riemann 曲面概念是特别方便并富有成果的.

如果初始级数(1)的收敛半径 $R=\infty$, 则它表示一个**整函数**(entire function), 即在整个有限平面 $\mathbf{C}$ 中全纯的函数 $f(z)$. 当 $f(z)\neq$ 常数时, 这个函数具有一个单值特征孤立奇点 $a=\infty$; 如果 $a=\infty$ 是极点, 则 $f(z)$ 是整有理函数(entire rational function)或多项式(polynomial), 如果 $a=\infty$ 是本质奇点, 则 $f(z)$ 是超越整函数(transcendental entire function).

当解析延拓级数(1)导致 $\mathbf{C}$ 内的单值解析函数 $f(z)$ 而其奇点都是极点时, 就得到有限平面 $\mathbf{C}$ 内的一个**亚纯函数**(meromorphic function) $f(z)$. 如果 $a=\infty$ 是极点或正则点, 则 $f(z)$ 在扩充平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上的极点总数为有限, 从而 $f(z)$ 是有理函数(rational function). 对于 $\mathbf{C}$ 内的超越亚纯函数 $f(z)$, 无穷远点 $a=\infty$ 可以是极点的极限点, 这是单值解析函数的非孤立奇点的最简单的例子. 任意区域 $D\subset\overline{\mathbf{C}}$ 内的亚纯函数以同样方式定义.

一般地说, 非孤立奇点的投影可以形成扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}$ 上不同的点集. 特别地, 对任何区域 $D\subset\overline{\mathbf{C}}$, 存在 D 内的解析函数 $f_D(z)$, 使得 D 是此函数的自然存在域, 而边界 $\Gamma=\partial D$ 是其自然边界; 于是就不可能越过 D 的边界解析延拓函数 $f_D(z)$. 这里自然

边界 Γ 含有可达点和不可达点(见极限元(limit elements)). 如果点 $a\in\Gamma$ 沿类 $\{L\}$ (可以有若干这样的类)中的曲线(它们除终点 a 外均位于 D 内)都是可达的, 则只有函数 $f_D(z)$ 的奇点才能处于 a 之上, 因为否则就可能通过 Γ 在点 a 的一个邻域中的部分越过 D 的边界解析延拓 $f_D(z)$; 可达点在 Γ 上形成一个稠密集.

多复变量 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ $(n>1)$ 的解析函数 $f(z)$ 的定义元素可以取, 例如, Weierstrass 元(Weierstrass element) $(U^n(\zeta,R),f_\zeta)$, 这里 f_ζ 是多重幂级数

$$f_\zeta=f_\zeta(z)=\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty}c_{k_1\cdots k_n}(z_1-\zeta_1)^{k_1}\cdots(z_n-\zeta_n)^{k_n},\qquad(2)$$

而

$$U^n(\zeta,R)=$$

$$=\{z\in\mathbf{C}^n:|z_\nu-\zeta_\nu|<R_\nu,\ \nu=1,\cdots,n\}$$

是此幂级数的收敛多圆柱, 它以 $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbf{C}^n$ 为心, 以 $R=\{R_1>0,\cdots,R_n>0\}$ 为收敛半径. 以元素(2)沿所有可能的曲线 $L:[0,1]\to\mathbf{C}^n$ (它是区间 $[0,1]$ 到复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的连续映射)的解析延拓为基础, 就能得到函数 $f(z)$ 的奇点 $(a,\{L\})$ $(a\in\mathbf{C}^n)$ 的一般定义, 在形式上这完全类似于上述 $n=1$ 的一维情形.

然而, 作为当 $n>1$ 时 **Cauchy-Riemann 条件**(Cauchy-Riemann conditions)的超定性以及由此引出的解析延拓"巨大威力"的结果, $n>1$ 的情形从根本上不同于 $n=1$ 的情形. 特别是, 对于 $n>1$, 存在不可能是任一单值解析函数或全纯函数的自然存在域的区域 $D\subset\mathbf{C}^n$. 换言之, 在该区域的边界 ∂D 的一些特定截面上, 任一定义于 D 内的全纯函数都没有奇点, 从而可越过这些截面进行解析延拓. 例如, 下述 Osgood-Brown 定理(Osgood-Brown theorem)成立: 如果紧集 K 位于有界域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 内, 它使得 $D\setminus K$ 也是一个区域, 函数 $f(z)$ 在 $D\setminus K$ 内全纯, 则此函数能全纯延拓到整个区域 D (亦见**可去集**(removable set)). 全纯函数的自然存在域有时称为**全纯域**(domain of holomorphy), 它由一些特定的几何性质所刻画. 解析延拓最初定义于一个区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 内的全纯函数 $f(z)$ 而保持其单值性使得有必要引进 **Riemann 区域**(Riemannian domain)——Riemann 曲面的推广, 一般地说, 它是 $\mathbf{C}^n$ 上的多叶全纯域. 在这样的解释下, 可证明全纯函数 $f(z)$ 的奇点是其全纯域 $\hat{D}$ 的边界 $\Gamma=\partial\hat{D}$ 的点. Osgood-Brown 定理表明, Γ 的连通分支不可能构成紧集 K, 使得函数 $f(z)$ 在 $\hat{D}\setminus K$ 内全纯. 特别地, 对于 $n>1$, 不存在全纯函数的孤立奇点.

多复变量解析函数最简单的奇点类型由一个区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ $(n>1)$ 内的亚纯函数 $f(z)$ 所提供, 它由下列性质刻画: 1) $f(z)$ 在 D 内除一个由奇点构成的**极集**(polar set) P 外处处全纯; 2) 对每个点 $a\in P$, 存在邻域 $V(a)$ 和 $V(a)$ 中的全纯函数 $\psi_a(z)$, 使得函数 $\varphi_a(z)=\psi_a(z)f(z)$ 能全纯延拓到 $V(a)$. 奇点 $a\in P$ 划分为极点(在该点处 $\varphi_a(a)\neq0$)和不定性点(point of indeterminacy)(在该点处 $\varphi_a(a)=0$). 在极点情形下, 当 $z\in D\setminus P$ 而趋于 a 时, 有 $\lim f(z)=\infty$; 在不定性点的任一邻域内, $f(z)$ 取到所有的值 $w\in\mathbf{C}$. 例如, $\mathbf{C}^2$ 内的亚纯函数 $f(z)=z_1/z_2$ 以直线 $P=\{z=(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2: z_2=0\}$ 作为其极集; 在此直线上, 除不定性点 $(0,0)$ 外, 所有点都是极点. 亚纯函数 $f(z)$ 在其全纯域 $\hat{D}$ 内可整体地表示为两个全纯函数的商, 即其极集 P 是一个**解析集**(analytic set).

点 $a\in\mathbf{C}^n$ 称为函数 $f(z)$ 的亚纯点(point of meromorphy), 如果 $f(z)$ 在该点的某个邻域内亚纯; 这样, 如果一个奇点是亚纯点, 则它或是极点, 或是不定性点. 解析函数 $f(z)$ 的所有非亚纯点的奇点有时都称为本质奇点(essential singular point). 它们包括, 例如, $f(z)$ 的分支点, 即 $f(z)$ 的(多叶)全纯域 $\hat{D}$ 的分支点. 全纯函数 $f(z)$ 的所有奇点构成的集合的维数通常等于 $2n-1$. 对 $f(z)$ 加以额外的限制, 可证明此集合是解析的(因而具有较小维数; 见[2]).

参考文献

[1] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1–2, М., 1967–1968 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

[2] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1–2, М., 1976 (第二卷英译本: Shabat, B. V., Introduction to complex analysis. Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992).

[3] Стоилов, С., Теория функций комплексного переменного, т. 1–2, М., 1962 (译自罗马尼亚文).

[4] Hurwitz, A., Courant, R., Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 1, Springer, 1964.

[5] Bieberbach, L., Analytische Fortsetzung, Springer, 1955.

[6] Bieberbach, L., Lehrbuch der Funktionentheorie, 1–2, Chelsea, reprint, 1945.

[7] Владимиров, В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964 (英译本: Vladimirov, V. S., Methods of the theory of functions of several complex variables, M. I. T., 1966).

[8] Фукс, Б. А., Введение в теорию аналитических

функций многих комплексных переменных, 2 изд., М., 1962 (英译本: Fuks, B. A., Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc., 1965).
[9] Gunning, R. C., Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.
[10] Behnke, H., Thullen, P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Springer, 1970.

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 有时这样的点称为**可去奇点**(removable singular point): 解析函数 $f(z)$ 在该点没有定义, 但可在该点给以定义且保持解析.

对于 $n=1$, 涉及解析函数在其本质奇点邻域内取值的一条著名定理是 Picard 大定理(见 **Picard 定理**(Picard theorem)). 对于加于系数和幂上的限制以使 $f(z)$ 具有奇点, 见 **Fabry 定理**(Fabry theorem).

Osgood-Brown 定理也称为 Hartogs 扩张定理(Hartogs extension theorem).

参考文献

[A1] Hörmander, L., An Introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.
[A2] Cohn, H., Conformal mapping on Riemann surfaces, Dover, reprint, 1980.
[A3] Conway, J. B., Functions of one complex variable, Springer, 1978 (中译本: J. B. 康威, 单复变函数, 上海科学技术出版社, 1985).
[A4] Krantz, S. G., Function theory of several complex variables, Wiley, 1982.
[A5] Range, R. M., Holomorphic functions and integral representation in several complex variables, Springer, 1986.
[A6] Чирка, Е. М., Комплексные аналитические множества, М., 1985 (英译本: Chirka, E. M., Complex analytic sets, Kluwer, 1989).
[A7] Narasimhan, R., Several complex variables, Univ Chicago Press, 1971 (中译本: R. 纳拉西姆汉, 多复变函数, 科学出版社, 1985).
[A8] Remmert, R., Funktionentheorie, I, Springer, 1984.
[A9] Kaupp, L., Kaupp, B., Holomorphic functions of several variables, de Gruyter, 1983 (译自德文).

沈永欢 译

2) 代数簇的奇点(singular point, singularity)是其上光滑性遭到破坏的点. 更精确地说, 设 X 是域 k 上的有限型**代数簇**(algebraic variety)或**概形**(scheme), 则点 $x\in X$ 称为奇的(singular), 如果对应的局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 不是正则的(具有极大理想 $\mathfrak{m}$ 的局部 Noether 环 A 的正则性(regularity)意味着 $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=\dim A$). X 的奇点构成的集合关于 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)是闭的, 记为 $\mathrm{Sing}\,X$. 如果 X 是约化簇, 则 $\mathrm{Sing}\,X$ 在 X 内是疏的. 如果 x 是 $\mathrm{Sing}\,X$ 中的孤立点, 则 x 称为孤立奇点(isolated singular point). 为检验 $x\in X$ 是否为奇点, 可用 Jacobi 准则(见**光滑概形**(smooth scheme)).

一个真双有理态射 $\pi: \bar{X}\to X$(此处 $\bar{X}$ 是一个光滑簇)称为代数簇 X 的奇点的分解(resolution of singularities)或非奇异化(desingularization). 对于广泛的一类簇, 特别是对于特征为 0 的域上所有的簇, 已证明奇点分解的存在性(见[13]). 奇点分解一般不是唯一的. 奇点分解用来引进簇 X 的各种不变量; 例子之一是上同调空间 $H^i(\bar{X},\mathcal{O}_{\bar{X}})$. 满足对于一切 $i>0$ 有 $H^i(\bar{X},\mathcal{O}_{\bar{X}})=0$ 的正规簇 X 称为具有有理奇点的簇(variety with rational singularities). 超环奇点([6])和 Schubert 簇的奇点([3])是有理的. 对于 n 维簇 X, 空间 $H^{n-1}(\bar{X},\mathcal{O}_{\bar{X}})$ 的维数称为 X 的几何亏格(geometric genus). 亦见**奇点的分解**(resolution of singularities).

奇点的形变理论(theory of deformations), 即具有奇点的簇的形变理论, 可平行于(光滑)代数簇的形变理论来构造. 一个**平坦态射**(flat morphism) $f: X\to S$, 如果满足对于某个 $s_0\in S$ 有 $f^{-1}(s_0)=X_0$, 就称为 X_0 的一个**形变**(deformation); 空间 S 称为形变的基(base of the deformation). 对于具有一个孤立奇点的簇 X_0, 存在一个包含簇 X_0 的所有形变的通用形变. 此奇点可以是刚性的(rigid), 即通用形变的基由一个点构成因而其所有形变都是平凡的([4]). 与刚性奇点相反的是可光滑奇点(smoothable singular point), 在其通用形变的基 S 内, 是使得 $X_s=f^{-1}(s)$ 为非奇异的点. 使得 X_s 为奇异的点 $s\in S$ 构成的集合 D, 称为判别子集(discriminant subset).

单值群 $\pi_1(S\setminus D)$ 在 X 的纤维的上同调空间上的作用, 在形变的研究中是一个重要部分.

一个真态射 $\pi: \bar{X}\to X$ 称为一个族 $X\to S$ 的联合奇点分解(simultaneous resolution of singularities), 如果 $\bar{X}$ 是光滑 S 概形且对每个 $s\in S$, 态射 $\bar{X}_s\to X_s$ 是奇点分解. 单奇点(见下)的通用形变, 在其基的某个有限覆叠后, 以对应的根系的 Weyl 群作为此覆叠的 Galois 群, 可以有一个联合分解(见[5]).

复超曲面的奇点(singular point of a complex hypersurface). 设超曲面 X 在 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中由方程 $f(x_0,\cdots,x_n)=0$ 定义, 其中 f 是一个多项式(或点 0 处一个解析函数的芽). 环 $\mathbf{C}\{x_0,\cdots,x_n\}$ 中的理想 $J(f)=J(\partial f/\partial x_0,\cdots,\partial f/\partial x_n)$ 称为多项式 f 的 Jacobi 理想(Jacobi ideal); 奇点 0 是孤立的, 当且仅当空间 $\mathbf{C}\{x_0,\cdots,x_n\}/J(f)$ 是有限维的. 此空间的维数 μ 称为多项式 f 的 Milnor 数(Milnor number), 它与自由 Abel 群 $\tilde{H}_*(X_t,\mathbf{Z})$ 的秩相等, 这

里 X_ε 对于小的 $\varepsilon \neq 0$ 由方程 $f(x_0, \cdots, x_n) = \varepsilon$ 定义. 更精确地, 流形 X_ε 同伦等价于 μ 个 n 维球面的一个球束 (见[12]). 此奇点的通用形变的基是非奇异的而且也是 μ 维的 (见[9]). 最简单的例子是非退化二次奇点 $x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 0$; 此时 $\mu = 1$.

使得在一个形变中只出现有限个其他奇点的奇点, 称为该超曲面的一个单奇点 ([9]); 此时该超曲面由下列方程之一所定义:

A_μ: $x_0^{\mu+1} + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$, $\mu \geqslant 1$;

D_μ: $x_0^{\mu-1} + x_0 x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$, $\mu \geqslant 4$;

E_6: $x_0^4 + x_1^3 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$;

E_7: $x_0^3 x_1 + x_1^3 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$;

E_8: $x_0^5 + x_1^3 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0$.

这里较低的指标 μ 是此奇点的 Milnor 数. 在曲面情形 ($n = 2$) 下, 这些奇点称为 Du Val 奇点 (Du Val singularity) 或二重有理奇点 (double rational singular point). 这些奇点也可为下述事实所刻画: 空间 $H_n(X_\varepsilon, \mathbf{R})$ 上的相交形式是确定的. 又由于复性, 单峰奇点可加以分类 ([9]). 这些概念的自然类似以及它们同突变理论的联系已得到研究 ([10]). 关于超曲面的奇点的许多定理已推广到完全交的奇点上.

曲线的奇点 (singular points of curves). 设 A 是一条曲线的一个奇点 x 的局部环, $\bar{A}$ 是它的正规化; 奇点的一个主不变量是 $\delta_x = \dim \bar{A}/A$. 对于不可约曲线 X, 其算术亏格等于其几何亏格加 $\sum_x \delta_x$ (求和取遍 X 的所有奇点). 因此, 对于平面曲线, 有 $2\delta_x = \mu + r - 1$, 其中 μ 是 Milnor 数, r 是所给曲线在点 x 处的分支数.

设 $X \subset \mathbf{C}^2$ 是在点 0 处具有重数 (见**奇点的重数** (multiplicity of a singular point)) 为 n 的奇点的平面不可约曲线. 此时 X 可有参数化 $x = t^n$, $y = \sum_{i \geqslant n} a_i t^i$, 此参数化写为

$$y = \sum_i a_i x^{i/n}$$

的形式 (Puiseux 展开 (Puiseux expansion)). 数

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_1 n_2} < \cdots < \frac{m_g}{n_1 \cdots n_g} = \frac{m_g}{n}$$

称为此展开的特征指数, 其中 m_1/n_1 是 Puiseux 展开中第一个非整数指数, $m_2/n_1 n_2$ 是 Puiseux 展开中第一个不能被 n_1 整除的指数, 等等. 序列 $\{n, \beta_1, \cdots, \beta_g\}$ 称为奇点的特征 (characteristic of the singularity), 这里 $\beta_\nu = (m_\nu n)/(n_1 \cdots n_\nu)$. 平面 1 维奇点为拓扑等价, 当且仅当它们的特征相同 (见[8]).

曲面的奇点 (singular points of surfaces). 在正规曲面的奇点分解中, 可唯一地区分出极小分解 π: $\bar{X} \to X$, 所有其他的分解都通过此分解. 如果 x 是曲面 X 的奇点, 则曲线 $A = \pi^{-1}(x)$ 称为例外的 (exceptional). 曲线 A 的权图 (weight graph) Γ 是奇点 x 的组合不变量, 其顶点对应于 A 的不可约分支 A_i; 分支 A_i 与 A_j 的交点由相应顶点之间的边表示; 对顶点指定一个权, 它等于曲线 A_i 的亏格, 有时甚至等于自相交指标 (A_i^2). A 的分支的相交矩阵 $\|(A_i, A_j)\|$ 是负定的; 图 Γ 是连通的. 使得 $(Z, A_i) \leqslant 0$ 对所有 i 成立的最小正除子 $Z = \sum r_i A_i$, 称为奇点的基本闭链 (fundamental cycle of the singularity). 它恒存在且其算术亏格

$$p(Z) = 1 - \dim H^0(Z, \mathcal{O}_Z) + \dim H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$$

是非负的. 一个奇点为有理的, 当且仅当 $p(Z) = 0$; 此时其重数等于 $-(Z^2)$, 而切 Zariski 空间的维数比它大 1([1]). 椭圆奇点 (即使得 $p(Z) = 1$ 的奇点) 也已得到研究 ([7]).

参考文献

[1] Artin, M.. On isolated rational singularities of surfaces, *Amer. J. Math.*, **88** (1966), 129 – 136.

[2] Grothendieck, A. et al. (eds.), Groupes de monodromie en géometrie algébrique (SGA 7), Lecture notes in math., 288, Springer, 1972.

[3] Kempf, G., On the collapsing of homogeneous bundles. *Invent. Math.*, **37** (1976), 229 – 239.

[4] Schlessinger, M., Rigidity of quotient singularities, *Invent. Math.*, **14** (1971), 17 – 26.

[5] Pinkham, H., Resolution simultanee de points doubles rationnels, 载于 M. Demazure, et al. (ed.), Séminaire sur les singularités des surfaces, Lecture notes in math., Vol. 777, Springer, 1980, 179 – 203.

[6] Kempf, G., et al. (eds.), Toroidal embeddings, Lecture notes in math., 339, Springer, 1973.

[7] Yau, S. S-T., On maximally elliptic singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257** (1980), 269 – 329.

[8] Zariski, O., Studies in equisingularity Ⅲ, Saturation of local rings and equisingularity, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 961 – 1023.

[9] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, **30** (1975), 5, 3 – 65 (英译本: Arnol'd, V. I., Critical points of smooth functions and their normal forms, *Russian Math. Surveys*, **30** (1975), 5, 1 – 75).

[10] Golubitskii, M., Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer, 1973.

[11] Griffiths, Ph., Harris, J., Principles of algebraic geometry, 1 – 2, Wiley, 1978.

[12] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968.

[13] Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ⅰ, Ⅱ. *Ann. of Math.*, **79** (1964), 109 – 326.

В. И. Данилов 撰

【补注】 设 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中的超曲面 X 由 $f(x_0, \cdots, x_n)=0$ 定义且 0 是一个孤立奇点．具有纤维 $X_\varepsilon=\{(x_0, \cdots, x_n): f(x_0, \cdots, x_n)=\varepsilon\}$ 的纤维化 $f: \mathbf{C}^{n+1} \to D(\varepsilon)$ ($D(\varepsilon)$ 是围绕0、半径为 ε 的小圆盘)，称为 Milnor 纤维化 (Milnor fibration).

环 $\mathbf{C}\{x_0, \cdots, x_n\}$ 是 $x_0, \cdots, x_n$ 的收敛幂级数环 (ring of convergent power series).

曲线上奇点 x 的不变量 δ_x 直观地算出集中于 x 处的二重点数 ([A9]).

设 f 是在 $0\in\mathbf{C}^{n+1}$ 处具有孤立临界点的多项式．f 的一个 Morse 化 (Morsification) 是一个多项式映射 $F: \mathbf{C}^{n+2} \to \mathbf{C}$，满足 $F(z, 0)=f(z)$ (即 F 是 f 的一个 1 维形变) 且对充分小的 λ，每个 $f_\lambda(z)=F(z, \lambda)$ 在 $0\in\mathbf{C}^{n+1}$ 的一个邻域内只有非退化临界点．这样的映射恒存在．某些例子 (对于 $n=2$) 如下 ([A6], sect. 7)．令

$$\Phi_\mu(x, \lambda)=\begin{cases}(x+\lambda)^2\cdots(x+k\lambda)^2, & 若\ \mu=2k,\\ (x+\lambda)^2\cdots(x+k\lambda)^2(x+(k+1)\lambda)^2, & 若\ \mu=2k+1,\end{cases}$$

$$A_\mu: f(x, y)=x^{\mu+1}-y^2,$$
$$F(x, y, \lambda)=\Phi_{\mu+1}(x, \lambda)-y^2;$$
$$D_\mu: f(x, y)=x^{\mu+1}-xy^2=x(x^{\mu-2}-y^2),$$
$$F(x, y, \lambda)=x\Phi_{\mu-2}(x, \lambda)-xy^2;$$
$$E_6: f(x, y)=x^3+y^4,$$
$$F(x, y, \lambda)=(x-\mu)(x^2-\lambda y^2)+y^4;$$
$$E_7: f(x, y)=x^3+xy^3,$$
$$F(x, y, \lambda)=(x-\mu)(x^2+y^3+\lambda y^2-6\lambda xy);$$

在最后两例中，μ 作为 λ 的函数取得充分小．对于 E_8 见 [A6].

单超曲面奇点接受 **Дынкин** 图形 (Dynkin diagram) 标号 A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8 当然不是偶然的．在上面所给例子中，Morse 化的分界线图形事实上是对应的 Дынкин 图形 (但并非对每个 Morse 化都必须如此)．此处 $F(x, y, \lambda)$ 的分界线图形 (separatrix diagram) 由对于某个固定的 $\lambda\neq 0$, $F(x, y, \lambda)$ 的临界点所组成 (还有一些连接这些点 (顶点) 的线，这里两个临界点有一条线相连，当且仅当存在梯度向量场

$$\left(\frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial x}, \frac{\partial F(x, y, \lambda)}{\partial y}\right)$$

的连接这些点的积分曲线).

关于 Дынкин 图形与奇点之间的内在联系以及关于出现 Дынкин 图形的其他情形 (*ADE* 问题 (*ADE* problem)) 的细节，见 [8], [A1]－[A7], [A10], [A11].

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Critical points of smooth functions, 载于 Proc. Internat. Congress Mathematicians Vancouver, 1974, Vol. 1, Canad. Math. Congress, 1975, 19－39.

[A2] Brieskorn, E., Singular elements of semisimple algebraic groups, 载于 Proc. Internat. Congress Mathematicians Nice, 1970, Vol. 2, Gauthier-Villars, 1971, 279－284.

[A3] Brieskorn, E., Singularitäten, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, **78** (1976), 93－112.

[A4] Гусейн-Заде, С. М., 《Функци. анал. и прилож》, **8** (1974), 4, 23－30 (英译本: Gusein-Zade, S. M., Dynkin diagrams for singularities of functions of two variables, *Funct. Anal. Appl*, **8** (1974), 4, 295－300)

[A5] Гусейн-Заде, С. М., 《Успехи матем. наук》, **32** (1977), 2, 23－65.

[A6] Hazewinkel, M., Hesselink, W., Siersma, D., Veldkamp, F. D., The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams, Nieuw Archief voor Wiskunde, **25** (1977), 257－307

[A7] Gawedzki, K., Conformal field theory, 载于 Sém Bourbaki 1988/1989, Vol. Exp. 704, Soc. Math. France, 1989, 95－126.

[A8] Brieskorn, E., Knörrer, H., Plane algebraic curves, Birkhäuser, 1986 (译自德文).

[A9] Serre, J.-P., Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, 1959, 65.

[A10] Slodowy, P., Simple singularities and simple algebraic groups, Springer, 1980.

[A11] Arnol'd, V. I., Singularities of caustics and wave fronts, Kluwer, 1990.

沈永欢 译

3) 向量场 X 的奇点 (singular point of a vector field) a 是使 $X(a)=0$ 的点．此奇点称为孤立的 (isolated)，如果在 a 的一个充分小邻域内，X 在除 a 外的点处不成为零向量．一个奇点称为非退化的 (non-degenerate)，如果

$$\det\left\|\frac{\partial x^i}{\partial a^j}\right\|\neq 0.$$

非退化奇点总是孤立的． М. И. Войцеховский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Singularities of caustics and wave fronts, Kluwer, 1990.

沈永欢 译

4) 微分方程

$$X(x, y)dy=Y(x, y)dx \tag{1}$$

的奇点 (singular point of a differential equation) 是满足条件

$$X(x_0, y_0)=Y(x_0, y_0)=0 \tag{2}$$

的任一点 $(x_0, y_0)\in G$；这里 $X, Y: G\to\mathbf{R}$ 是某

个区域 $G\subset\mathbf{R}^2$ 内的连续函数. G 中不满足条件 (2) 的点称为方程 (1) 的寻常点 (ordinary point). 有时点 $(x_0, y_0)\in G$ 也称为方程 (1) 的奇点, 如果条件 (2) 虽不满足, 但方程 (1) 连同初始数据 (x_0, y_0) 的 **Cauchy 问题** (Cauchy problem) 具有多于一个的解.

方程 (1) 是写为对称形式的微分方程组

$$\frac{dx_1}{X_1(x)}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n(x)} \tag{3}$$

的特殊情形, 其中 $n\geqslant 2$, $x=(x_1, \cdots, x_n)$, 函数 $X_i: G\to\mathbf{R}(i=1, \cdots, n)$ 在区域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 内连续. 点 $x_0\in G$ 称为方程组 (3) 的奇点 (singular point of the system), 如果 $X_i(x_0)=0$ $(i=1, \cdots, n)$. 在相反的情形下, x_0 是该方程组的寻常点.

设 H 是方程组 (3) 在区域 G 中的奇点的集合, 如果 $x_0\in G\setminus H$, 则存在下标 $i_0\in\{1, \cdots, n\}$ 和点 x_0 的一个邻域 U, 使得方程组 (3) 在 U 内可表示为正规形式

$$\frac{dx_i}{dx_{i_0}}=f_i(x), f_i\in C(U), i\neq i_0.$$

于是, 方程组 (3) 的积分曲线在寻常点的一个邻域内的性态可由常微分方程一般理论中的定理来描述. 特别是, 下述可平行化定理 (parallelizability theorem) 成立: 如果只有方程组 (3) 的唯一一条积分曲线通过集合 $G\setminus H$ 的每个点 x_0, 则该集合的每个点有一邻域 V, 使得方程组 (3) 的填满 V 的积分曲线弧族同胚于 (当 $X_i\in C^1(G)$ $(i=1, \cdots, n)$ 时, 微分同胚于) 一个平行直线族.

如果 $x_0\in H$, 则不存在具有上述性质的偶 (i_0, U), 从而方程组 (3) 的积分曲线族围绕 x_0 可形成不同的格局. 例如, 对于方程

$$(ax+by)dy=(cx+ey)dx,$$

其中 $a, b, c, e\in\mathbf{R}$, 矩阵

$$A=\begin{Vmatrix} a & b\\ c & e\end{Vmatrix}$$

非退化, 其积分曲线在点 (0, 0) 的一个邻域内的配置可以是鞍点 (saddle)、结点 (node)、中心 (centre) 或焦点 (focus) 型的. 此时对点 (0, 0) 也赋予同样的名称.

方程组 (3) 可以看作由微分方程**自治系统** (autonomous system)

$$\dot{x}=X(x), x\in\mathbf{R}^n, X=(X_1, \cdots, X_n) \tag{4}$$

消去时间 t 而得.

如果 (4) 在 G 内是 (C, 唯一) 类系统, 即 $X\in C(G)$, 且有该系统的唯一一条轨道通过区域 G 的每个点, 则集合 H 的点对于此轨道是平稳点 (见**平衡位置** (equilibrium position)). 常称这些点为此系统的奇点, 因为它们 (按定义) 是向量场 X 的奇点. 方程组 (3) 的位于 $G\setminus H$ 内的积分曲线是系统 (4) 除平稳位置外的轨道.

这样, 方程组 (3) 的积分曲线族在奇点的一个邻域内的性态问题与系统 (4) 的轨道族在平衡位置的一个邻域内的配置问题是等价的. 对这些问题的研究遵循两个主要方向.

第一条研究途径源于 H. Poincaré 的工作 ([1]), 目的在于阐明系统 (4) 的轨道怎样位于孤立平稳点 (它总可看作重合于坐标原点 $O(x=0)$) 的一个邻域内可能的拓扑类型并发现区别这些类型的解析准则. 对于方程组 (4) 可表示为形式

$$\dot{x}=Ax+f(x) \tag{5}$$

(其中 A 是非退化数值矩阵, f 满足当 $\|x\|\to 0$ 时 $f(x)=o(\|x\|)$) 的情形, 已取得最完全的结果. 在这种情形下, 点 O 称为方程组 (4) 的单奇点 (simple singular point) 或非退化奇点 (non-degenerate singular point). 对方程组 (5) 已建立下述 Grobman-Hartman 定理 (Grobman-Hartman theorem): 如果矩阵 A 没有纯虚本征值而函数 $f\in C^1(G)$, 则存在点 O 的一个邻域 U 到同一点的一个邻域 V 上的同胚 h, 它把方程组 (5) 的轨道变换为线性微分方程组

$$\dot{x}=Ax \tag{6}$$

的轨道. 一般地说, 实现方程组 (5) 与 (6) 的轨道之间的拓扑对应的同胚 $h: U\to V$ 不是 (也不能代替) 微分同胚.

在上述定理的条件下, 方程组 (5) 的平稳点 O 与方程组 (6) 的平稳点 O 具有相同的拓扑类型. 特别地, 对于 2 阶方程组, 点 O 是鞍点 (saddle), 如果矩阵 A 的本征值 λ_1, λ_2 满足条件 $\lambda_1\lambda_2<0$; 它是拓扑结点 (topological node) (结点 (node) 或焦点 (focus)), 如果 $\lambda_1\lambda_2>0$ (当 λ_1, λ_2 为纯虚数时, 点 O 对于方程组 (6) 是中心 (centre), 但对于方程组 (5) 它或是中心, 或是焦点, 或是中心-焦点; 见**中心-焦点** (centre-focus); **中心和焦点问题** (centre and focus problem); **鞍结点** (saddle-node); **结点** (node); **焦点** (focus)).

如果矩阵 A 具有纯虚或零本征值, 则一般地在点 O 的一个邻域内没有方程组 (5) 与 (6) 之间的拓扑等价性. 在此条件下, 对于矩阵 A 至多有 2 个具有零实部的本征值而函数 f 为解析的情形, 方程组 (5) 的轨道在点 O 的邻域内的性态已得到详尽研究. 特别地, 对于具有非零矩阵 A 的 2 阶方程组, 其轨道在

点 O 邻域内分布的所有可能的拓扑类型均已得到分类，并已给出为区分它们（但不能区别中心与焦点）所必须的用系数表达的准则（[9]）．这里除了鞍点、拓扑结点或中心外，点 O 可以是具有两条分界线的鞍点，或是鞍结点（saddle-node）（点 O 的一个邻域 U 被在 O 处相连的 3 条轨道（分界线）划分为 3 个扇形：2 个双曲扇形，它们为两端离开 U 的轨道所填满，1 个抛物扇形，它为一端离开 U 而另一端走近 O 的轨道所填满），或是具有椭圆扇形的点（该点的一个邻域划分为 4 个扇形：1 个双曲的，2 个抛物的，还有 1 个椭圆的，它为两端都走近 O 的轨道所填满）．对于具有零矩阵 A 的 2 阶方程组，也已制订奇点分解的算法（例如，见 **Frommer 法**（Frommer method）或[12]中的局部方法），它借助有限步分解过程，给出点 O 的拓扑类型的分类，精确到区别中心与焦点问题的解．对于形如（5）的 2 阶方程组，当矩阵 A 具有纯虚本征值时，会出现这个问题（见**中心和焦点问题**（centre and focus problem）)，在矩阵 A 有 2 个零本征值情形，也会出现这个问题．对一些特殊的这类方程组它已得到解决（见，例如[14]）．

方程组（4）的孤立平稳点 O 的一个重要特征是其 Poincaré 指标（Poincaré index）．对于 $n=2$，它定义为向量场 $\dot{X}$ 围绕点 O 沿半径 ρ 充分小的圆周 $\|x\|=\rho$ 以一个完全转动为单位计量的正向转动数（见**向量场的旋度**（rotation of a vector field））．例如，单鞍点的指标等于 -1，结点、焦点或中心的指标等于 1．当 n 为任意时，点 O 的指标定义为半径 ρ 充分小的球面 $\|x\|=\rho$ 到它自身上由公式

$$h(x)=\frac{\rho X(x)}{\|X(x)\|}$$

定义的映射 h 的度（见**映射度**（degree of a mapping））．

这条研究途径导向一般的**微分方程定性理论**（qualitative theory of differential equations），而研究的重点从局部问题转向整体问题——研究系统（4）的轨道在整个区域 G 中的性态，而且 G 越来越经常地取某类光滑流形．

另一条研究途径则基于 А. М. Ляпунов 的工作（[2]），研究形如（4）的方程组以及非自治微分方程组的解（尤其是其平衡位置）的稳定性．这项研究是运动**稳定性理论**（stability theory）的分支之一．

在复分析中，对微分方程

$$\frac{d^n w}{dz^n}=P\left(z, w, \frac{dw}{dz}, \cdots, \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}\right), \quad (7)$$

也对微分方程组

$$\frac{dw}{dz}=P(z, w) \quad (8)$$

引进奇点概念，这里 z 是复变量，P 是关于 $w, w', \cdots, w^{(n-1)}$ 或关于向量 w 的分量 $w_1, \cdots, w_n (n\geqslant 1)$ 的有理函数，其系数为 z 的已知解析函数．复平面的任一至少是函数 P 的系数之一的奇点的点 z_0，称为方程（7）或方程组（8）的奇点（见解析函数的**奇点**（singular point））．一个方程或方程组的奇点，一般地说，对它们的作为 z 的解析函数的解，也是奇异的．它们称为这些解的**不动奇点**（fixed singular point）．此外，方程（7）（方程组（8））的解可以有**流动奇点**（movable singular point），其位置取决于解的初始数据．目的在于阐明方程的解在奇点邻域内的解析性态或阐明何时出现这些方程的解的各种类型的流动奇点而研究种种不同类型的形如（7）的方程或形如（8）的方程组，是**微分方程解析理论**（analytic theory of differential equations）的主题．

参考文献

[1A] Poincaré, H.. Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*. 7 (1881). 375 – 422.

[1B] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 8 (1882). 251 – 296.

[1C] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 1 (1885). 167 – 244.

[1D] Poincaré, H., Mémoire sur les courbes définiés par une équation differentielle, *J. de Math.*, 2 (1886), 151 – 217.

[2] Ляпунов, А., Общая задача об устойчивости движения, М.-Л., 1950(英译本：Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966).

[3] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949(中译本：B. B. 涅梅茨基，B. B. 斯捷巴诺夫，微分方程定性论，科学出版社，1956).

[4] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[5] Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory, Interscience, 1957 (中译本：S. 莱夫谢茨，微分方程几何理论，上海科学技术出版社，1965).

[6] Sausone, G., Conti, R., Non-linear differential equations, Pergamon, 1964 (译自意大利文).

[7] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

[8] Арнольд, В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971 (中译本：В. И. 阿诺尔德，常微分方程，科学出版社，1985).

[9] Баутин, Н. Н., Леонтович, Е. А., Методы и

приемы качественного исследования динамических систем на плоскости, М., 1976.

[10] Голубев, В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: В. В. 戈鲁别夫, 微分方程解析理论讲义, 高等教育出版社, 1956)

[11] Еругин, Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 2 изд., Минск, 1972.

[12] Брюно, А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979 (英译本: Bruno, A. D., Local methods in nonlinear differential equations, Springer, 1989).

[13] Андреев, А. Ф., Особые точки дифференциальных уравнений, Минск, 1979.

[14] Амелькин, В. В., Лукашевич, Н. А., Садовский, А. П., Нелинейные колебания в системах второго порядка, Минск, 1982.

А. Ф. Андреев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Krasnosel'skii, M. A., Perow [Perov], A. I. Powolzki [Povoloskii], A. I., Sabrejko [Zabreiko], P. P., Vektorfelder in der Ebene, Akad. Verlag, 1966 (译自俄文).

【译注】

参考文献

[B1] 秦元勋, 运动稳定性理论与应用, 科学出版社, 1981.

沈永欢 译

5) 可微映射 f 的奇点 (singular point of a differentiable mapping) 是对于 f 同时为非正则 (临界) 和非正常的点. 更精确地说, 设 M^m 和 N^n 是两个维数分别为 m 和 n 的微分流形, $f: M^m \to N^n$ 是 M^m 到 N^n 上的可微映射, x^i 和 $y^j = f(x^i)$ 是两个流形中的局部坐标. 如果矩阵 $\| \partial y^j / \partial x^i \|$ 在点 $a \in M^m$ 处的秩等于 m, 则称映射 f 在点 a 处是正则的 (regular). 如果矩阵 $\| \partial y^j / \partial x^i \|$ 在点 $a \in M^m$ 处的秩等于 n, 则称映射 f 在 a 处是正常的 (proper). 在 f 的奇点处, 上述矩阵的秩不等于 m 或 n. 亦见**可微映射的奇点** (singularities of differentiable mappings).

М. И. Войцеховский 撰 沈永欢 译

6) 实曲线 $F(x, y) = 0$ 的奇点 (singular point of a real curve) 是使得 F 的一阶偏导数等于零的点 (x_0, y_0): $F'_x(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) = 0$. 一个奇点称为二重点 (double point), 如果函数 $F(x, y)$ 在该点处的二阶偏导数至少有一个不等于零. 在研究曲线在奇点邻域内的结构时, 考察表达式

$$\Delta = (F''_{xx})_0 (F''_{yy})_0 - (F''_{xy})_0^2$$

的符号. 如果 $\Delta > 0$, 则此奇点是孤立点 (isolated point) (图 a); 如果 $\Delta < 0$, 则它是结点 (node) (或自交点 (point of self-intersection)) (图 b); 如果 $\Delta = 0$, 则它或是孤立点, 或由下述事实刻画: 所给曲线的不同分支在该点处有公切线. 如果曲线诸分支位于公切线的不同侧, 又位于公法线的同一侧, 则此奇点称为第一类尖点 (cusp of the first kind) (图 c); 如果曲线诸分支位于公切线的同一侧, 也位于公法线的同一侧, 则此奇点称为第二类尖点 (cusp of the second kind) (图 d); 如果诸分支位于公法线的不同侧, 也位于公切线的不同侧 (图 e), 或位于公切线的同一侧, 但位于公法线的不同侧 (图 f), 则此奇点称为密切点 (point of osculation). 亦见**二重点** (double point).

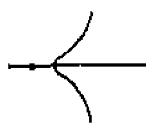


图 a



图 b

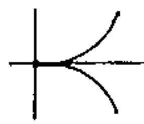


图 c

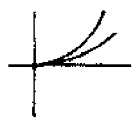


图 d

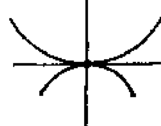


图 e

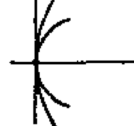


图 f

如果函数 $F(x, y)$ 的所有直到 $k-1$ 阶的偏导数在某个点都等于零但至少有一个 k 阶偏导数异于零, 则该点称为 k 阶奇点 (singular point of order k) (重点 (multiple point)).

当曲线的某种性质在某点处不同于其余点时, 有时也称这样的点为奇点; 例如, 见**拐点** (point of inflection); **终止点** (point of cessation); **折点** (breaking point); **平直点** (point of rectification); **平坦点** (flat point).

由方程 $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ 定义的空间曲线的奇点 (singular point of a spatial curve) 是曲线上满足下述条件的点: 在该点的一个邻域内, 矩阵

$$\begin{Vmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{Vmatrix}$$

的秩小于 2.

参考文献

[1] Рашевский, П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956 (中译本: П. К. 拉舍夫斯基, 微分几何教程, 人民教育出版社, 1955).

[2] Бюшгенс, С. С., Дифференциальная геометрия, т. 1, М.-Л., 1940.

[3] Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 1, М.-

Л., 1969 (中译本 Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第一卷第一、二分册，高等教育出版社，1959).

А. Б. Иванов 撰 沈永欢 译

7) 实曲面的奇点 (singular point of a real surface) 是曲面 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ 上使矩阵

$$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix}$$

的秩小于 2 的点. 如果曲面定义为坐标满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的点的集合，则此曲面上使函数 $F(x,y,z)$ 的一阶偏导数都等于零，即使得

$$(F'_x)_0=0,\ (F'_y)_0=0,\ (F'_z)_0=0$$

的点 (x_0,y_0,z_0)，称为它的奇点.

如果函数 $F(x,y,z)$ 的二阶偏导数在奇点处不全为零，则曲面在此奇点处的诸切线构成一个锥面. 如果此切锥面是非退化的，则该奇点称为锥点 (conic point)；如果此锥面退化为两张实平面，则此奇点称为所给曲面的自交点 (point of self-intersection)；如果此锥面是虚的，则此奇点是所给曲面的孤立点 (isolated point).

奇点可以形成曲面的所谓奇曲线 (singular curve)：脊线 (edge of regression)，自交线，密切线，等等.

参考文献

[1] Погорелов, А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969 (英译本: Pogorelov, A. V., Differential geometry, Noordhoff, 1959).
[2] Норден, А. П., Краткий курс дифференциальной геометрии, 2 изд., М., 1958.
[3] Ильин, В. А., Позняк, Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980 (英译本: Il'in, V. A., Poznyak, E. G., Fundamentals of mathematical analysis, 1 – 2, Mir, 1982).

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bishop, R. L., Goldberg, S. I., Tensor analysis on manifolds, Dover, reprint, 1980.
[A2] Guillemin, V., Pollack, A., Differential topology, Prentice-Hall, 1974.
[A3] Spivak, M., A comprehensive introduction to differential geometry, 1979, Publish or Perish, 1 – 5.

沈永欢 译

奇点的指标 [singular point, index of a; особой точки индекс]

向量场的孤立奇点 (singular point) 的基本特征之一. 设 X 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的向量场，Q 是围绕奇点 x_0 的一个小半径球面，使得 $X|_Q \neq 0$. 映射

$$f: Q \to S^{n-1},\ f(x)=\frac{X(z)}{\|X(x)\|}$$

的度 (见映射度 degree of a mapping) 称为向量场 X 的奇点 x_0 的指标 $\operatorname{ind}_{x_0}(X)$，即

$$\operatorname{ind}_{x_0}(X)=\deg f_{x_0}.$$

若 x_0 是非退化的，则

$$\operatorname{ind}_{x_0}(X)=\operatorname{sign}\det\left\|\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right\|.$$

向量场的指标与场的指向无关.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 亦见 **Poincaré 定理** (Poincaré theorem)；**向量场的旋转** (rotation of a vector field).

参考文献

[A1] Berger, M. and Gostiaux, B., Differential Geometry: manifolds, curves, and surfaces, Springer, 1987 (译自法文).
[A2] Thorpe, J. A., Elementary topics in differential geometry, Springer, 1979.
[A3] Conley, C. and Zehnder, E., Morse type index theory for flows and periodic solutions of Hamiltonian equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37 (1984), 207 – 253.
[A4] Rybakovskiĭ, K. P., The homotopy index and partial differential equations, Springer, 1987 (译自俄文).

陈维桓 译

奇异解 [singular solution; особое решение]，常微分方程的

Cauchy 问题 (Cauchy problem) 的解之唯一性在每一点都被破坏的解. 例如，对一阶方程

$$y'=f(x,y), \tag{*}$$

设其右方为连续且在各点均有有限或无限的对 y 的偏导数，它的奇异解就只能位于集合

$$M=\{(x,y): |f'_y(x,y)|=\infty\}$$

中. 若一曲线 $\gamma\subset M$ 是方程 (*) 的**积分曲线** (integral curve)，而且过 γ 之每一点至少有 (*) 的多于一条积分曲线通过，则 γ 就是奇异解. 设方程 (*) 在区域 G 中有**通积分** (general integral) $\varphi(x,y,c)=0$；若此曲线族有**包络** (envelope)，则包络是方程 (*) 的奇异解. 对于微分方程

$$F(x,y,y')=0,$$

可以由检验判别曲线 (discriminant curve) 来求奇异解.

参考文献

[1] Степанов, В. В., Курс дифференциальных уравнений, 7 изд., М., 1958 (中译本: В. В. 斯捷巴诺夫，微分方程教程，高等教育出版社，1955).
[2] Sansone, G., Ordinary differential equations, 2, Zanichelli, 1948 (意大利文).

Н. Х. Розов 撰

【补注】“微分方程的奇异解”也可理解为不能由指定通解中积分常数之值而得出的特殊解．这两个概念彼此并不完全相同，但有密切关系(见[A1])．

参考文献

[A1] Ince, E. L., Ordinary differential equations, Dover, reprint, 1956, §§3.6, 3.51, 4.7, A.5.
齐民友 译

可微映射的奇点[singularities of differentiable mappings; особенности дифференцируемых отображений]

数学分析和微分几何学的一个分支，其中研究映射的这样的性质，它们在映射的原象和象的坐标改变(或者改变的同时仍保持某些附加的结构)时保持不变；提出了一种一般的途径以解决映射、函数、向量场等等退化时的种种问题；给出了最常见到的退化之分类及其范式；也给出了化为范式的算法．

一个可微映射(即 C^k 类映射，见**微分流形**(differentiable manifold))定义域中的一点称为正则点(regular point)，如果 Jacobi 矩阵在此点有最大秩，相反的情况称为临界点(critical point)．

经典的**隐函数**(implicit function)定理描述了映射在正则点附近的构造；在此点的一个邻域以及在此点的象的一个邻域中，存在坐标使此映射成为线性的．

把研究领域限制于只研究正则点在许多情况下是不够的；所以自然要考虑以下问题：

a) 在临界点的邻域中描述一个映射；

b) 描述临界点集合的构造．

对于一般的映射，由于两个原因，问题 a) 和 b) 是没有答案的：要想处理所有的映射，就没有机会得出显示的结果(例如，临界点的集合局部地可以是任意的闭集)；而对于实际应用、只需对映射的一个相当大的集合知道答案就够了．

问题 a) 和 b) 以及奇点理论中许多其他问题都是沿着以下路线来研究的：

1) 把“非典型的”和“病态的”映射的集合排除在考虑之外；

2) 决定映射的“典型性”的一个判别法；

3) 确定每个映射都能用“典型”映射去逼近；

4) 研究“典型的”映射．

典型映射集合的选法视要解决的问题而定而不是唯一的；典型映射越少，研究起来越方便，然而 2) 与 3) 又要求典型映射的集合充分大而且是充分构造地定义的．

可以用 Whitney 定理(Whitney theorem)来说明这种格式：每一个可微映射 $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 都可用这样一个映射 f 来逼近；对于任一点 $a\in\mathbf{R}^2$，在 a 和 $f(a)$ 的邻域中都可以找到这样的坐标，使映射 f 具有以下三种典范形式之一：

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

(典型性的判别法见[3]与[4])．H. Whitney 的工作(1955)，其中证明了这个定理，被认为是可微映射的奇点理论的开始，虽然更早一些就已有了许多个别的结果(函数临界点的 **Morse 理论**(Morse theory)，关于嵌入的奇点的 Whitney 定理，Л. С. Понтрягин 关于奇点和示性类的关系的工作)．

可微映射奇点理论的基本概念．

可微映射的芽(germ of differentiable mappings)．令 X 和 Y 为光滑流形，$p\in X$, $q\in Y$．(以下“光滑”一词用作无穷可微的同义语．)在点 p 的某一邻域内重合的映射 $X \to Y$ 成一等价类，称为在 p 点的芽(germ at the point p)；映 p 为 q 的映射芽的集合记作 $C^\infty(X, Y)_{p,q}$．X 中保持 p 不变的光滑的变量变换之芽的群记作 $\mathrm{Diff}^\infty(X)_p$．

可微映射的奇点理论的一个重要的局部问题是研究群 $\mathrm{Diff}^\infty(X)_p \times \mathrm{Diff}^\infty(Y)_q$ 在 $C^\infty(X, Y)_{p,q}$ 上的自然作用．这个问题和许多类似问题的解决通常首先是将函数空间和作用于其上的无穷维群用有限维流形和作用于其上的 Lie 群来逼近．再把这样得到的结果转移到原来的无穷维情况上去．

节丛(jet bundle)．令 $f, g: X \to Y$ 为光滑映射且 $f(p) = g(p) = q$；如果映射 f 和 g 在 p 点的 **Taylor 级数**(Taylor series)直到 k 次项都相同，就定义它们在 p 点有 k 阶切触(contact of order k)．在 p 点 k 阶接触的映射成一等价类称为一个 k 节(k-jet)．所有映 p 为 q 的映射之 k 节的集合有自然的光滑流形的结构，并记作 $J^k(X, Y)_{p,q}$．有一个适当定义的自然的投射

$$C^\infty(X, Y)_{p,q} \to J^k(X, Y)_{p,q}.$$

X 的保持 p 点不变且在此点具有 k 阶接触的光滑变量变换的等价类称为 p 点处的可逆 k 节(invertible k-jet)．可逆 k 节成一 Lie 群 $L^k(X)_p$．Lie 群 $L^k(X)_p \times L^k(Y)_q$ 作用在 $J^k(X, Y)_{p,q}$ 上而且逼近 $\mathrm{Diff}^\infty(X)_p \times \mathrm{Diff}^\infty(Y)_q$ 在 $C^\infty(X, Y)_{p,q}$ 上的作用．令 $J^k(X, Y) = \{J^k(X, Y)_{p,q}$ 对一切 $(p, q) \in X\times Y$ 的不相交并$\}$．集合 $J^k(X, Y)$ 有 $X\times Y$ 上的光滑丛的自然结构，而其纤维为

$$J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)_{0,0} = J^k(m, n),$$

结构群则是

$$L^k(\mathbf{R}^m)_0 \times L^k(\mathbf{R}^n)_0 = L^k(m, n),$$

其中 $m = \dim X$, $n = \dim Y$.

奇点和奇点的类（singularities and classes of singularities）．$L^k(m, n)$ 在 $J^k(m, n)$ 上作用的轨道称为一个 k 奇点（k-singularity）；$J^k(m, n)$ 在 $L^k(m, n)$ 之作用下不变的任一子集称为一个 k 奇点的类（class of k-singularities）．令 S 为这样一个类．因为 $J^k(m, n)$ 可以与 $J^k(X, Y)_{p,q}$ 相等同，就可以在 $J^k(X, Y)_{p,q}$ 中定义子集 $S(X, Y)_{p,q}$ 而不问等同的方法如何．集合 $S(X, Y)=\{S(X, Y)_{p,q}$ 对一切 $(p, q)\in X\times Y$ 之并$\}$称为万有奇点的类（universal class of singularity）．（当 S 为一奇点时则称为万有奇点（universal singularity）．）万有奇点 $S(X, Y)$ 是 $J^k(X, Y)$ 的子流形，其余维数等于 S 在 $J^k(m, n)$ 中的余维数．

令 $f:X\to Y$ 为一光滑映射．则对每一点 $p\in X$，取 f 在 p 的 k 节，即得一光滑映射 $j^kf:X\to J^k(X, Y)$ 称为 f 的 k 节扩张（k-jet extension）．根据定义，映射 $f:X\to Y$ 在 p 点有 S 型奇点（singularity of type S），如果 $j^kf(p)\in S(X, Y)$．使 f 在某点有 S 型奇点的一切点的集合 $S(f)$ 正是 $(j^kf)^{-1}S(X, Y)$．于是集合 $S(f)$ 的研究可以分两个阶段进行：先研究 $J^k(X, Y)$ 中的万有集 $S(X, Y)$，这可以归结为在 $J^k(m, n)$ 中研究 S，再研究 $S(X, Y)$ 和 $j^kf(X)$ 的相对位置．在第二阶段，通常都要用到 Thom 的横截性定理．

横截性（transversality）．光滑流形间的光滑映射 $f:A\to B$ 横截于子流形 $C\subset B$（记作 $f\perp C$），如果对任一点 $a\in A$，或者 $f(a)\notin C$，或者 $(df)_a(T_aA)\oplus T_{f(a)}C=T_{f(a)}B$．若 $f\perp C$，则 $f^{-1}(C)$ 或为空集，或为 A 的一个子流形，其余维数等于 C 在 B 中的余维数．

Thom 的横截定理（Thom transversality theorem）：令 X，Y 为光滑流形，C 是 $J^k(X, Y)$ 的子流形，则使得 $j^kf\perp C$ 的 f 之集合是 $C^\infty(X, Y)$ 在 Whitney C^∞ 拓扑下的沉重子集．（集合称为大(脱殊)的（massive (generic)），如果它是可数多个开稠密子集之交．一个性质称为脱殊的（generic），如果一个脱殊子集中的所有 f 都具有它）．

Whitney 拓扑（Whitney topology）．令 $k\geqslant 0$ 而 U 是 $J^k(X, Y)$ 中的开集．令

$$M(U)=\{f\in C^\infty(X, Y), j^kf(X)\in U\}.$$

集合 $M(U)$ 构成 $C^\infty(X, Y)$ 上某一拓扑的基，称为 Whitney C^∞ 拓扑（Whitney C^∞-topology）．$C^\infty(X, Y)$ 在此拓扑下是一个 **Baire** 空间（Baire space），即每一沉重子集均为稠密的．

多节（multi-jets）．在研究一光滑映射的象的自相交时，要用到多节的概念．令 $\alpha:J^k(X, Y)\to X$ 为自然投射．令

$$X^{(s)}=\{(x_1, \cdots, x_s)\in X\times\cdots\times X:x_j\neq x_i, j\neq i\}$$

而 $\alpha^s=\alpha\times\cdots\times\alpha$（$s$ 次）．对于集合 $J^k_s(X, Y)=(\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$ 可以赋于自然的光滑流形结构，称为 k 节之 s 重丛（s-fold bundle of k-jets.）．对于 s 重丛，映射 f 之 k 节扩张，k 奇性、万有奇性等概念都可以定义，也已证明与 Thom 横截性定理类似的结果．

稳定的可微映射（stable differentiable mappings）．可微映射奇点理论早期的一个中心问题是研究稳定的可微映射．

光滑流形的光滑映射 $f:X^m\to Y^n$ 称为稳定的（stable），如果对任一充分接近于 f 的映射 $\widetilde{f}$，都存在微分同胚 $h:X^m\to X^m$ 和 $k:Y^n\to Y^n$ 使 $\widetilde{f}=k\circ f\circ h$．

对于小的 $m, n(m, n\leqslant 4)$，以及对于 $n=1$ 和任意 m，稳定可微映射都在一切逆紧可微映射所成的空间中稠密（[3]）．在映射 $X^9\to Y^9$ 的空间中，稳定映射就不是处处稠密的（见[1]）．对有些对流形（例如 $X=\mathbf{R}P^{19}$，$Y=\mathbf{R}^{19}$）根本就没有由 X 到 Y 中的稳定映射．在[14]，[15]中找到了所有的"稳定维数"(m, n)：对任意光滑流形 X^m 和 Y^n，由 X^m 到 Y^n 中的稳定映射在逆紧可微映射 $X^m\to Y^n$ 的空间中（此空间赋有 Whitney C^∞ 拓扑）为稠密，当且仅当数对 (m, n) 至少满足以下条件之一（$q=n-m$）：a) $n<7q+8$ 而 $q\geqslant 4$；b) $n<7q+9$ 而 $3\geqslant q\geqslant 0$；c) $n<8$ 而 $q=-1$；d) $n<6$ 而 $q=-2$；e) $n<7$ 而 $q\leqslant 3$．

在证明这个定理时，以及在许多其他问题中，下面两个概念证明是很有用的：映射 $f_0:X^m\to Y^n$ 称为同伦稳定的（homotopy stable），如果对映射 f_0 的任意光滑同伦 f_t，都有 X^m 和 Y^n 的恒等微分同胚的光滑同伦 h_t 和 k_t，使得 $f_t=k_t\circ f_0\circ h_t$ 对充分小的 t 成立．映射 $f:X^m\to Y^n$ 称为无穷小稳定的（infinitesimal stable），如果每一个无限接近于 f_0 的映射 $\widetilde{f}$ 都可以从 f_0 用 X^m 和 Y^n 的"无限接近于恒等映射"的微分同胚得出．对于逆紧映射，稳定性、同伦稳定性和无穷小稳定性这三个概念彼此重合（[3]）．寻求稳定映射的局部正规形式问题化为某些有限维局部代数的分类问题（[14]，[15]）．对于固定的 m 和 n，这种正规形式为数有限．

若在稳定映射的定义中采用同胚 h 和 k 而不用微分同胚，就得到拓扑稳定映射（topologically stable mapping）的定义．拓扑稳定映射的集合在映任意紧流形 X^m 到任意流形 Y^n（对任意 m 和 n）的集合中之稠密性定理也已证明（见[8]）．

有限决定芽（finitely defined germs）．令～表示集

合 $C^{\infty}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)_{0,0}$（即映 0 为 0 的 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^n$ 中的光滑映射之芽的集合）中的一种等价关系．任一个这类芽的 k 节即其 Taylor 级数直到 k 次项在内的一段．芽 f 称为 k 决定的（k-defined），如果任意具有相同的 k 节的芽 g 均与 f 等价：$f \sim g$．一个芽如果对于某个 k 为 k 决定的，就说它是有限决定的（finitely defined）．如果一个 k 节 σ 使得任意两个以 σ 为 k 节的芽 f、g 都是等价的：$f \sim g$，就说 σ 是充分的（sufficient）．最常见的等价关系具有特殊的名称：

r 等价（r-equivalence），即属于"正确的"坐标变换之群 $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbf{R}^m)_0$ 的同一轨道．

rl 等价（rl-equivalence），即属于群 $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbf{R}^m)_0 \times \mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbf{R}^n)_0$ 之同一轨道．

拓扑等价（topological equivalence），即属于群 $\mathrm{Diff}^0(\mathbf{R}^m)_0 \times \mathrm{Diff}^0(\mathbf{R}^n)_0$ 之同一轨道．

k 决定芽的研究归结为由次数 $\leqslant k$ 的多项式所定义的映射之研究．

芽是否对于 rl 等价为 k 决定的这个问题，可归结为有限多个线性方程所组成的一个显式方程组的可解性问题．

对于 rl 等价性为有限决定的芽之集合在 $C^{\infty}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)_{0,0}$ 中是开的，但对任意 m 和 n 均不稠密．于是自然要考虑较粗糙的拓扑等价性关系．$C^{\infty}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)_{0,0}$ 中除去一个有限余维数的子集后，余下的是可数多个拓扑等价类，其每一个都是一个半代数集．由此可知，其芽拓扑等价于多项式映射的映射构成 $C^{\infty}(X, Y)$ 中的开稠密集（X^m 为紧）（[13]）．

形变（deformation）．若一映射依赖于参数，就说定义了一族映射．如果局部地研究这一族映射，则当参数在固定值的一个邻域中稍有改变时，就说相应于参数的这些固定值的映射发生了形变．在许多情况下，研究一切可能的形变可归结为研究单独一个自然的形变，而由它可以得出所有其他的形变．这个形变，在一定意义下是最大的，包含了已知映射的所有本质上不同的形变．它称为遍有形变（versal deformation）．（见[11]，[12]，[13]）．

函数的临界点．若一函数的临界点处的二次微分是非退化的二次型，就称此临界点为非退化的（non-degenerate）．一般位置的函数只有非退化临界点，而在每一个非退化临界点附近，该函数都可以化为标准形式．当这些函数依赖于参数时，就需要研究退化临界点，参数个数越多，所遇到的对参数的某些值不可去（不能用参数的小平移消去）的临界点就越复杂．

含任意多个参数的一族函数都能用参数的小平移化为这样一族函数，使得当参数取任意值时，所得函数在其定义域的每一点的邻域中均可表示为某个局部坐标系中的多项式．这就表示，在函数的局部研究中，可以只讨论多项式，并且使用复分析．

分类（classification）．自然从 $\mathbf{C}^n$ 中在 0 处的全纯函数芽的分类开始，并把两个可以用保持 0 不变的全纯的 $\mathbf{C}^n$ 坐标变换芽互变的两个函数芽称为等价的（equivalent）．一个 0 处的全纯函数的节（即 Taylor 多项式）称为充分的，如果它能决定该全纯函数，而最多相差一个等价关系．若一个芽的临界点 0 是孤立的，则必有一个充分的节，从而等价于一个多项式．当函数在稍作平移时临界点 0 分裂成的非退化临界点的个数称为临界点 0 的重数（multiplicity）（或 Milnor 数（Milnor number））μ．若函数 f 的临界点重数为 μ，则其 $(\mu+1)$ 节为充分的，因为当 f 有微小变化时，其重数 μ 不会增加．接近于具有一个孤立临界点的函数之分类归结为研究变量变换的 k 节之 Lie 群在 k 节空间上的作用，这里 k 充分大．在适合 $f(0)=0$，$df(0)=0$ 的函数 f 之 k 节空间中，f 的轨道的余维数为 $\mu-1$；所以，在含 $(\mu-1)$ 个参数的函数族中，重数 μ 的临界点是不可去的．重数 $\mu \leqslant 16$ 的全部临界点的分类以及将这样的函数化为正规形式的算法都已得到（见[10]）．临界点的复杂性不仅要视其重数 μ，还要视其模态（modality）（即模的个数）m 来决定．一个临界点称为简单的（simple）（或 0 模的（0-modal）），如果在接近它的临界点中最多有有限多个彼此都不等价的临界点．若把两个函数芽都直接加上具有适当多个变数的非退化二次型后，可以成为互相等价的，则说这两个函数芽是稳定等价的（stably equivalent）（如果这两个函数芽的变量个数相同，稳定等价性与通常的等价性就是一样的）．

稳定等价的简单芽只有如下表所列：

$$A_k: f(x)=x^{k+1},\ k \geqslant 1;$$

$$D_k: f(x, y)=x^2 y+y^{k-1},\ k \geqslant 4;$$

$$E_6: f(x, y)=x^3+y^4;$$

$$E_7: f(x, y)=x^3+x y^3;$$

$$E_8: f(x, y)=x^3+y^5.$$

点 $x \in X$ 在流形 X 上的 Lie 群 G 之作用下的模态，就是最小的数 m，使 x 的充分小邻域可以用有限多个 m 参数轨道族来覆盖．

模态 1 和模态 2 的函数芽之分类也已经得到（见[10]）．简单奇点和小模态奇点的分类与以下的理论都有联系：Lie 群，Coxeter 和 Weyl 系列 A，D，E，Artin 的辫群理论，三维空间中正则多面体的分类，退化椭圆曲线的小平邦彦（Kodaira）分类以及 Лобачевский 平面上的三角形之分类（见[10][11]）．

边界奇点（boundary singularity）．一系列几何问题都需要研究一个有边流形上函数的临界点．

在复情况下，这个情形就相应于研究定义在空间

$\mathbf{C}^n$（且此空间有一个特定子空间 $\mathbf{C}^{n-1}$）上的函数芽．对这些函数芽的研究允许相差 $\mathbf{C}^n$ 中的一变量变换，而此变换将 $\mathbf{C}^{n-1}$ 变为其自身．这时也得到了所有简单芽以及模态 1 和 2 的芽的分类．简单边界奇点的分类证实了与单 Lie 代数 B、C 和 F_4 有关．

全纯函数芽的拓扑特性．令 $f:(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ 是在零附近全纯的函数而以零为重数 μ 的临界点．令 η，ε 为正数，$B \subset \mathbf{C}^n$ 为球 $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqslant \varepsilon^2$，$S$ 为其边缘，$T \subset \mathbf{C}$ 为圆盘 $|t| < \eta$，T' 是挖去中心的圆盘 $T \setminus 0$．令 $X(t) = f^{-1}(t) \cap B$，$X = f^{-1}(T') \cap B$．对适当的 ε 和 η（ε 为充分小，η 是与 ε 相关的充分小量），映射 $f: X \to T'$ 是一光滑的局部平凡的纤维化．这个纤维化的纤维 $X(t)$ 是一个 $(2n-2)$ 维有边流形，而同伦等价于一束 μ 个 $(n-1)$ 维球面．$X(t)$ 的边缘是一个 $(2n-3)$ 维流形而微分同胚于 $f^{-1}(0) \cap S$．甚至对相对简单的 f，这个流形也可能是非平凡的．例如，以下的 28 个流形

$$x_1^{6k-1} + x_2^3 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$
$$|x_1|^2 + \cdots + |x_5|^2 = \varepsilon^2,$$
$$k = 1, 2, \cdots, 28$$

正是 28 个 Milnor 球面（它们都同胚于通常的 7 维球面，而彼此不微分同胚）．约化同调群 $H_{n-1}(X(t), *, \mathbf{Z})$ 同构于 $\mathbf{Z}^\mu$．相交指数定义了一个在 H_{n-1} 上的整数值双线性型．纤维化 $f: X \to T'$ 的纤维沿 T' 中的曲线的转移定义了基本群 $\pi_1(T')$ 在纤维的 $(n-1)$ 维同调空间中的作用．对应于 $\pi_1(T')$ 之生成元的同调群之自同构称为单值算子（monodromy operator）．单值算子保持相交形式．单值算子的本征值包含了与函数 f 有关的许多积分的渐近性的信息．

参考文献

[1] Арнольд, В. И., Варченко, А. Н., Гусейн-Заде, С. М., Особенности дифференцируемых отображений, М., 1982（英译本：Arnol'd, V. I., Gusein-Zade, S. M. and Varchenko, A. N., Singularities of differentiable maps, 1-2, Birkhäuser, 1985-1988）.

[2] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, М. 1974（中译本：阿诺尔德，经典力学的数学方法，高等教育出版社，1992）.

[3] Golubitskiĭ, M. and Guillemin, V., Stable mappings and their singularities, Springer, 1973.

[4] Bröcker, P. and Lander, L., Differentiable germs and catastrophes, Cambridge Univ. Press, 1975.

[5] Poston, T. and Stewart, I., Catastrophe theory and its applications, Pitman, 1978.

[6] Milnor, J., Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, 1968.

[7] Особенности дифференцируемых отображений, Сб. ст., пер. с англ. и франц., М. 1968（论文集，原文译自英文、法文）.

[8] Gibson, C. G., et al. (eds.), Topological stability of smooth mappings, Lecture Notes in math., 552, Springer, 1976.

[9] Thom, R., Structural stability and morphogenesis, Benjamin, 1966（译自法文）.

[10] Арнольд, В. И., 《Функц. анализ и его приложения》, 6 (1972), 4, 3-25.

[11A] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, 27 (1972), 5, 119-184.

[11B] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, 28 (1973), 5, 17-44.

[11C] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, 29 (1974), 2, 11-49.

[11D] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, 30 (1975), 5, 3-65.

[12] Thom, R., The bifurcation subspace of a set of maps in N. H. Kuiper (ed.): Manifolds (Amsterdam, 1970), Lecture notes in math., Vol. 197, Springer, 1971, 202-208.

[13A] Варченко, А. Н., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 38 (1974), 5, 1037-1090.

[13B] Варченко, А. Н., 《Изв. АН СССР Сер. матем.》, 39 (1975), 2, 294-314.

[14] Mather, J., Stability of C^∞-mappings III, *Publ Math. IHES*, 35 (1969), 127-156, 279-308.

[15A] Mather, J., Stability of C^∞-mappings IV, *Publ Math. IHES*, 37 (1970), 223-248.

[15B] Mather, J., Stability of C^∞-mappings V, *Adv. math.*, 4 (1970), 301-335.

[15C] Mather, J., Stability of C^∞-mappings VI, in C. T. C. Wall (ed.): Proc. Liverpool Conf. Singularities 1, Lecture notes in math., Vol. 192, Springer, 1971, 207-253.

А. Н. Варченко、А. Г. Кушниренко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Singularities of caustics and wave fronts, Kluwer, 1990.

齐民友 译

奇性集［**singularity**；**особенность**］，解析函数的

1）复变量 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ $(n \geqslant 1)$ 的解析函数 $f(z)$ 的**奇点**（singular point）的一个由某些补充条件定义的集合；特别是，**孤立奇点**（isolated singular point）有时称为孤立奇性集．

2）一个集合 $K \subset \mathbf{C}^n$，使得在与 K 相连的一个区域 D 内定义了一个单值解析函数 $f(z)$，并且对于这个函数出现了 $f(z)$ 到 K 的**解析延拓**（analytic continuation）的可能性问题．例如，设 D 是空间 $\mathbf{C}^n$ 中的一个区域，K 是包含于 D 内的紧统，并设 $f(z)$ 在 $D \setminus K$ 内全纯，于是 K 是 $f(z)$ 的一个可能的奇性

集，并出现了 $f(z)$ 到整个区域 D 上解析延拓（或许在某些补充条件下）的问题，换言之，出现了"消除"或"移去"奇性集 K 的问题．

亦见**可去集**（removable set）．

Е Д Соломенцев 撰

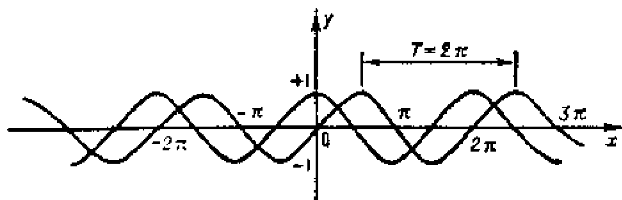
【补注】 关于参考文献，亦见解析函数的**奇点**（singular point）和**延拓定理（解析几何学中的）**（extension theorems (in analytic geometry)）．亦见 **Hartogs 定理**（Hartogs theorem）．

沈永欢 译

正弦曲线［sinusoid；синусоида］

函数 $y=\sin x$ 的图形（见图）．正弦曲线是周期为 $T=2\pi$ 的连续曲线．它在点 $(k\pi, 0)$ 处与 x 轴相交．这些点也是拐点，与 x 轴相交成角 $\pm\pi/4$．极值在点 $((k+1/2)\pi, (-1)^k)$ 处．

$y=\cos x=\sin(x+\pi/2)$ 的图形是余弦曲线（cosinusoid），通过把正弦曲线往左移距离 $\pi/2$ 而得到．余弦曲线在点 $((k+1/2)\pi, 0)$ 处与 x 轴相交，它的极值在点 $(k\pi, (-1)^k)$ 处．



许多振动过程能用形如 $y=a\sin(bx+c)$ 的周期函数描述，这里 a, b 和 c 是常数，且 $b>0$．这个函数的图形（称为**一般正弦曲线**（general sinusoid））由 $y=\sin x$ 的图形（称为**普通正弦曲线**（ordinary sinusoid））得出如下：在 y 轴的方向上扩大因子 $|a|$ 倍，在 x 轴方向上缩小因子 b（即缩小到 $1/b$），向左平移距离 c/b，当 $a<0$ 时，相对 x 轴镜像反射．它的周期是 $T=2\pi/b$，且与 x 轴相交于点 $((k\pi-c)/b, 0)$．它的极值在点 $(((k+1/2)\pi-c)/b, (-1)^k a)$ 处．

Ю. А. Горьков 撰

【补注】 这里取 $k\in\mathbf{Z}$．

亦见**正弦**（sine），**三角函数**（trigonometric functions）．

杜小杨 译

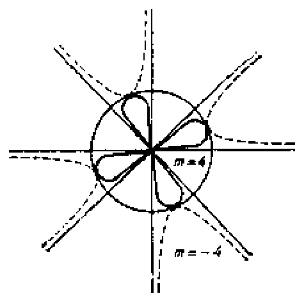
正弦螺线［sinusoidal spiral；синусоидальная спираль］

在极坐标下方程为

$$\rho^m=a^m\cos m\varphi$$

的平面曲线．当 m 为有理数时，它是**代数曲线**（algebraic curve）．特别，当 $m=1$ 时，它是一个圆；当 $m=-1$ 时，为等轴双曲线；而当 $m=1/2$ 时，为心脏线（cardioid）；$m=-1/2$ 时，则为抛物线．

对一般的 $m>0$，正弦螺线过极点，且全部位于半径为 a 的一个圆内．若 m 是负的，则曲线的向径可以取任意大的值，且曲线不过极点．正弦螺线关于极轴对称，且当 $m=p/q$ 为有理数时（其中 p 与 q 为互素的数），它有 p 条过极点的对称轴．假若 m 为正整数，则曲线的向径是以 $2\pi/m$ 为周期的周期函数，当 φ 从 0 变到 2π 时，曲线由 m 个分支组成，每支含于 π/m 的张角内．此时，极点为一重点（见图）．假若 $m=p/q$ 为正有理数，那么曲线由 p 支相交的分支组成．如 m 为负整数，则曲线由 $|m|$ 个无穷分支组成，后者可通过 $m'=-m$ 的螺线的反演变换而得到．



图

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

[2] Lawrence, J. D, A catalog of special plane curves, Dover, reprint, 1972.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lockwood, E. H., A book of curves, Cambridge Univ. Press, 1967.

王斯雷 译

景［site；синус］，拓扑化范畴（topologized category）

【补注】 一个具有 **Grothendieck 拓扑**（Grothendieck topology）的范畴，即有一个"覆盖结构"，使得可以定义范畴上的层（sheaf）．以拓扑空间 X 的开集格 $\mathcal{O}(X)$ 作为底范畴可以得到一个富有启发性的例子，这个范畴的对象是开集，态射是它们之间的包含映射．X 上（集合的）预层（pre-sheaf）恰为从 $\mathcal{O}(X)^{op}$ 到集合范畴 **Ens** 的函子；一个预层 F 是层，是指对开集 U 的由小开集 $U_i (i\in I)$ 构成的任何覆盖，图形

$$F(U)\to\prod_{i\in I}F(U_i)\rightrightarrows\prod_{(i,j)\in I\times I}F(U_i\cap U_j)$$

是一个等化子（此处的箭头都是用显见方式由限制映射诱导的，即由 F 在 $\mathcal{O}$ 的态射上的作用所诱导）．较初等的说法是 $F(U)$ 的元素可以由 $F(U_i)$ 的相容元素族唯一地"修补在一起"．

将上述定义进行抽象，可以定义任意范畴 C 上的预层为一个函子 $C^{op}\to\mathbf{Ens}$. 为了定义 C 上的层，需要一个称为 Grothendieck 拓扑 (Grothendieck topology) 的结构 τ，它对每一个 C 的对象 U 给出 U 的一个覆盖(covering)集 $\mathrm{Cov}(U)$，即一族有公共值域 U 的态射 $(f_i: U_i\to U)_{i\in I}$. $U\to\mathrm{Cov}\,U$ 要求满足一定的条件，其中最重要的是下面的"拉回稳定性"条件：

a) 若 $(f_i: U_i\to U)_{i\in I}\in\mathrm{Cov}(U)$ 且 $g: V\to U$ 是任意态射，则存在 $(h_j: V_j\to V)_{j\in J}\in\mathrm{Cov}(V)$，使得对每个 $j\in J$，合成 $gh_j: V_j\to U$ 通过某个 f_i 分解.

将其他通用的附加条件列举如下，尽管它们对定义层范畴不那么重要：

b) 对 C 的每个对象 U，单元族 $(1_U: U\to U)$ 在 $\mathrm{Cov}(U)$ 中；

c) 若 $(f_i: U_i\to U)_{i\in I}\in\mathrm{Cov}(U)$，且对任意 i，$(g_{ij}: U_{ij}\to U_i)_{j\in J}\in\mathrm{Cov}(U_i)$，则全体合成 $f_ig_j: U_{ij}\to U(i\in I, j\in J)$ 的族在 $\mathrm{Cov}(U)$ 中；

d) 任意包有 $\mathrm{Cov}(U)$ 的一个族的族在 $\mathrm{Cov}(U)$ 中.

在 Grothendieck 拓扑的定义中，许多作者要求底范畴 C 有拉回，这时条件 a) 可以被阐述得更加简炼，但是这一限制不是本质的.

给定 C 上的一个 Grothendieck 拓扑 τ，C 上的预层 F 叫作一个 τ 层 (τ-sheaf)(或简称为层)，意指对每个族 $R=(f_i: U_i\to U)_{i\in I}\in\mathrm{Cov}(U)$，$F(f_i)$ 诱导的典范映射 $F(U)\to F(R)$ 是一一映射，此处 $F(R)$ 表示族 $(s_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}F(U_i)$ 的集合，它们是相容的，即当映射 $g: V\to U_i$ 和 $h: V\to U_j$ 满足 $f_ig=f_jh$ 时，$F(g)(s_i)=F(h)(s_j)$.（若在 C 中存在拉回 $U_i\times_U U_j$，则上述定义可以叙述得更加简单，但这也不是本质的.）Abel 群，环，和其他结构的层可类似定义.

(对给定的拓扑 τ) 以层为对象的函子范畴的满子范畴 $\hat{C}=[C^{op},\mathrm{Ens}]$ 记作 $Sh(C,\tau)$ 或 $\widetilde{C}$. 如果景 (C,τ) 满足适当的小性条件，$Sh(C,\tau)$ 是一个拓扑斯 (topos)，且是 $[C^{op},\mathrm{Ens}]$ 的**自反子范畴** (reflective subcategory)，反射保存有限极限. 反之，反射保存有限极限的任意 $[C^{op},\mathrm{Ens}]$ 的自反子范畴可被表示为对 C 上适当的 Grothendieck 拓扑 τ 的 $Sh(C,\tau)$ (Giraud 小定理 (Giraud little theorem)). 等价于某个 $Sh(C,\tau)$ 形式的范畴通常叫作 Grothendieck 拓扑斯 (Grothendieck toposes) (见**拓扑斯**)；它们可被刻画为具有下述性质的范畴 E(Giraud 大定理 (Giraud big theorem))：

1) E 有有限极限；

2) E 有任意的小余积，它们不相交且有泛性(即在拉回下稳定)；

3) E 中的等价关系是有效的，并且有泛余等化子；

4) E 有小态射集和小生成元集.

换言之，Grothendieck 拓扑斯可以被刻画为一个带有生成元集的范畴，当它有典范拓扑时 (即使全部可表示函子是层的最大的拓扑，见**可表示函子** (representable functor))，等价于自身上的层范畴.

在 Grothendick 拓扑斯中的 Abel 群范畴 (或等价地，景上的 Abel 群的层范畴) 是一个 **Grothendieck 范畴** (Grothendieck category)，它使得可以定义景上的层的上同调；上同调群 $H^1(C,F)$ 是取值于 F 的整体截面函子 $F\to F(1)$(1 是 C 的终对象) 的导出函子，此处 F 是 C 上的 Abel 群的层.

景的概念最初是在代数几何中引入的，它与概形的**艾达尔拓扑** (étale topology) 以及其他用于定义代数几何学家所研究的上同调理论的类似拓扑有关 ([A1], [A2]).

随后发现它们在其他问题中亦有用，特别是用于构造**综合微分几何** (synthetic differential geometry) 的模型 [A3], [A4].

参考文献

[A1] Giraud, J., Analysis, situs, in Sém. Bourbaki, 1963, Exp. 256.

[A2] Artin, M., Grothendick, A. and Verdier., J. L., Théorie des topos et cohomology étale des schémas, in SGA 4, Lecture Notes in Math., Vol. 269; 270; 305, Springer, 1972.

[A3] Kock, A., Synthetic differential geometry, Gambridge Univ. Press, 1981.

[A4] Moerdijk, I. and Reyes, G. E., Models for smooth infinitesimal analysis, Springer, 1990.

[A5] Johnstone, P. T., Topos theory, Acad. Press, 1977.

P. T. Johnstone 撰 张英伯 译

范畴的骨架 [skeleton of a category; скелет категории]

与所给范畴等价的一个极小**满子范畴** (full subcategory). 一般来说，一个范畴 $\mathfrak{K}$ 包有许多骨架. 任意骨架均可建立如下. 在 $\mathfrak{K}$ 中对象的每个同构类中选择一个代表. 这时 $\mathfrak{K}$ 中由这些对象生成的满子范畴是 $\mathfrak{K}$ 的一个骨架.

两个范畴等价，当且仅当其骨架同构. 范畴的骨架继承了范畴自身的许多性质：局部小性，双范畴结构的存在性，各种形式的完全性等等.

M. Ш. Цаленко 撰

【补注】 称一个范畴是骨架的 (skeletal)，是指它是自身的一个骨架，即任意两个不同的对象不同构. 范畴 $\mathfrak{K}$ 的骨架亦可定义为一个满骨架子范畴，它与 $\mathfrak{K}$ 中的对象的每个同构类的交不空. 上述刻画的骨架结构给出了**选择公理** (axiom of choice) 的一个明显应用；

事实上，断言"每个范畴有骨架"和"给定范畴的任意两个骨架同构"均等价于选择公理．

参考文献

[A1] Freyd, P. J., Scedrov, A., Categories, allegories, North-Holland, 1990 张英伯 译

除环 [skew-field; тело]

一个环，当 $a \neq 0$ 时方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 在环中有唯一解．在结合环的情形（见**结合环与结合代数**(associative rings and algebras)），只要求存在单位元 1，以及对任何 $a \neq 0$，方程 $ax=1$ 和 $ya=1$ 存在唯一解．交换结合除环称为域(field)．非交换的结合除环的一个例子是四元数除环(skew-field of quaternions)，定义为复数域上形如

$$\begin{bmatrix} a & \bar{b} \\ -b & \bar{a} \end{bmatrix}$$

矩阵的集合，运算是通常的．见**四元数**(quaternion)．非结合除环的一个例子是 **Cayley-Dickson 代数**(Cayley-Dickson algebra)，由四元数除环上的具有上述形式的所有矩阵组成．这个除环是交错的．见**交错环与交错代数**(alternative rings and algebras)．任何除环是一个可除代数(division algebra)，或者是有理数域上的，或者是剩余域 $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/(p)$ 上的．四元数除环是实数域上的 4 维代数，而 Cayley-Dickson 代数是 8 维的．实数域上任何可除代数的维数等于 1，2，4、或 8(见[1]，亦见**拓扑环**(topological ring))．实数域和复数域以及四元数除环，是仅有的连通的局部紧的结合除环(见[5])．任何无零因子的有限维代数是一个除环．任何有限结合除环是交换的(见[6]，[8])．结合除环可以被任意非零模是自由模这一性质所刻画．任何非结合除环是有限维的([3])．类似结果适用于 Мальцев 除环([7])(见 **Мальцев 代数**(Mal'tsev algebra))和 Jordan 除环([4])(见 **Jordan 代数**(Jordan algebra))．与交换情形不同，并非每个无零因子结合环都可以嵌入到一个除环内．见**环的嵌入**(imbedding of rings)．

参考文献

[1] Adams, J. F., On the nonexistence of elements of Hopf invariant one, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 5, 279 – 282.

[2] Waerden, B. L., van der: Algebra, 1 – 2, Springer-Verlag, 1955 – 1959 (中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，1 – 2，科学出版社，1963 – 1976).

[3] Жевлаков, К. А. и др., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978.

[4] Zel'manov, E. I., Jordan division algebras, *Algebra and Logic*, **18** (1979), 3, 175 – 190. (*Algebra i Logika*, **18** (1979), 3, 286 – 310)

[5] Понтрягин, Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973 (英译本．Pontryagin, L. S., Topological groups, Princeton Univ. Press, 1958).

[6] Скорняков, Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983.

[7] Filippov, V. T., Central simple Mal'tsev algebras, *Algebra and Logic*, **15** (1976), 2, 147 – 151. (*Algebra i Logika* **15** (1976), 2, 235 – 242)

[8] Herstein, I., Noncommutative rings, Math. Assoc. Amer., 1968. Л. А. Скорняков 撰

【补注】 结合除环，尤其是在其中心上有限维的结合除环，亦称为除环(division rings)．有关嵌入问题见[A1]．

R 上仅有的结合可除代数是 **R**，**C** 和 **H**，即四元数代数．这一事实作为 Frobenius 定理(Frobenius theorem)而众所周知的．

参考文献

[A1] Cohn, P. M., Skew field constructions, Cambridge Univ. Press, 1977.

[A2] Cohn, P. M., Algebra, 3, Wiley, 1991, Chapt. 7. 蔡传仁 译

相错直线 [skew lines; скрещивающиеся прямые]

空间中不位于同一平面上的两条直线．相错直线的夹角(angle between two skew lines)定义为任何两条分别平行于所给相错直线且通过空间中同一点的直线之间的夹角．如果 **a**，**b** 是两相错直线的方向向量，则此两直线夹角的余弦由

$$\cos \varphi_{12} = \pm \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

给定．

相错直线的公垂线(common perpendicular of two skew lines)是与所给两直线相交且交角均为直角的直线．任何两条相错直线都有唯一的公垂线．相错直线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t_1$，$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}t_2$ 的公垂线(作为两平面的交线)的方程为

$$((\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0,$$
$$((\mathbf{r} - \mathbf{r}_2), \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0.$$

相错直线之间的距离(distance between two skew lines)是其公垂线上端点位于所给直线上的线段的长度(或分别包含所给直线的两平行平面之间的距离)．相错直线之间的距离由

$$d = \frac{|((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|}$$

给定． А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Pedoe, D., Geometry. A comprehensive introduction, Dover, reprint, 1988. 沈永欢 译

斜积 [skew product; косое произведение]

1) 向量的斜积(skew product of vectors)就是向量的**伪标量积**(pseudo-scalar product).

2) 遍历理论中的斜积(skew product in ergodic theory)是**测度空间**(measure space)E 的一个**自同构**(automorphism)T(以及由此生成的瀑布 $\{T^n\}$)使得 E 是两个测度空间 X 和 Y 的直积 $X\times Y$,而且 T 在 E 上的作用与 E 上的这种直积结构有某种关系.特别,

$$T(x, y)=(R(x), S(x, y)),$$

其中 R 是("底")X 的自同构而 $S(x, \cdot)$,当 x 固定时,是("纤维")Y 的自同构.斜积的概念可以很容易地推广到自同态、流以及更一般的变换群或变换半群的情形.

在许多有代数背景或几何背景的例子中,相空间 E 可自然地定义为拓扑意义下的斜积(即**纤维空间**(fibre space)).但是,将上述斜积推广到拓扑情形却是不必要的,因为从度量的观点,也就是说在测度论意义下,空间的直积和斜积之间没有区别.

Д. В. Аносов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. and Sinaĭ, Yu. G., Ergodic theory, Springer, 1982, Chapt. 10, § 1(译自俄文).

[A2] Krengel, U., Ergodic theorems, de Gruyter, 1985, p. 261.

3) 拓扑中的斜积(skew product in topology),也称为**扭转积**(twisted product)曾用来表示带有结构群的**纤维空间**(fibre space).

潘建中 译 沈信耀 校

斜对称双线性型 [skew-symmetric bilinear form; кососимметрическая билинейная форма], **反对称双线性型**(anti-symmetric bilinear form)

幺 A 模 V 上一个**双线性型**(bilinear form)f(其中 A 是含单位元的交换环),使得

$$f(v_1, v_2)=-f(v_2, v_1),\ 对所有的\ v_1, v_2\in V.$$

特征 $\neq 2$ 的域上有限维向量空间 V 上的任意斜对称双线性型 f 的结构,由它的 Witt 指数 $w(f)$ 唯一确定(见 **Witt 定理**(Witt theorem);**Witt 分解**(Witt decomposition)).意指:V 是 f 的核 $V^\perp$ 与一个维数为 $2w(f)$ 的子空间的正交(关于 f)直和,而 f 在这个子空间上的限制是一个标准型.V 上两个斜对称双线性型等距同构,当且仅当它们的 Witt 指数相等.尤其,一个非退化的斜对称双线性型是标准的,在这种情况下,V 的维数是偶数.

对于 V 上任意斜对称双线性型 f,存在一个基 $e_1, \cdots, e_n$,f 关于这个基的矩阵形式为

$$\left\|\begin{matrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad (*)$$

其中 $m=w(f)$,E_m 是 m 阶单位矩阵.斜对称双线性型关于任意基的矩阵都是斜对称的.所以,斜对称双线性型的上述性质可以表达如下:对于特征 $\neq 2$ 的域上任意斜对称矩阵 M,存在一个非奇异的矩阵 P,使得 P^TMP 形如 $(*)$.特别是,M 的秩为偶数,一个奇数阶斜对称矩阵的行列式等于 0.

如果把双线性型 f 是斜对称的条件换成 f 是交错的:$f(v, v)=0$,对任意 $v\in V$,那么上述结论对特征为 2 的域仍然有效(对于特征 $\neq 2$ 的域,这两个条件是等价的).

这些结果可以推广到这种情况,其中 A 是一个交换的主理想环,V 是有限维自由 A 模,f 是 V 上一个交错双线性型.确切地说:在这些假设下,存在模 V 的一个基 $e_1, \cdots, e_n$ 和一个非负整数 $m\leqslant \frac{n}{2}$,使得

$$0\neq f(e_i, e_{i+m})=\alpha_i\in A,\ i=1, \cdots, m,$$

且 α_i 整除 α_{i+1},对于 $i=1, \cdots, m-1$;在其他情况下 $f(e_i, e_j)=0$.理想 $A\alpha_i$ 均由这些条件唯一确定,模 $V^\perp$ 由 $e_{2m+1}, \cdots, e_n$ 生成.

任意含单位元的交换环 A 上一个奇数阶的交错矩阵的行列式等于零.假如 A 上的交错矩阵 M 的阶是偶数,则元素 $\det M\in A$ 是 A 中一个平方元素(见 **Pfaff 式**(Pfaffian)).

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algébre, Eléments de mathématiques, Hermann, 1970, Chapt. II. Algébre linéaire(英译本:Bourbaki, N., Elements of mathematics, Algebra I, Springer, 1989, Chapts. I – III).

[2] Lang, S., Algebra, Addison-Wesley, 1984.

[3] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

В. Л. Попов 撰

【补注】 **斜对称双线性型的核**(kernel of a skew-symmetric bilinear form)是对应的**双线性映射**(bilinear mapping)的左核,由斜对称性知,其左核等于右核.

参考文献

[A1] Milnor, J. and Husemoller, D., Symmetric bilinear forms, Springer, 1973.

蒋滋梅 译

斜对称矩阵 [skew-symmetric matrix; кососимметрическая матрица]

特征 $\neq 2$ 的域上一个正方**矩阵**(matrix)A,使

得 $A^T=-A$. 斜对称矩阵的秩是一个偶数. 特征 $\neq 2$ 的域上任意方阵 B 是一个对称矩阵与一个斜对称矩阵的和:

$$B=\frac{1}{2}(B+B^T)+\frac{1}{2}(B-B^T).$$

实斜对称矩阵的特征多项式的非零根是纯虚数. 一个实斜对称矩阵相似于矩阵

$$\operatorname{diag}[a_1, \cdots, a_t, 0, \cdots, 0],$$

其中

$$a_j=\alpha_j\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix},$$

α_j 是实数, $j=1, \cdots, t$. 复斜对称矩阵的 Jordan 形 J 具有以下性质: 1) 初等因子是 $(x-\lambda)^m$ 的 Jordan 块 $J_m(\lambda)$, 其中 $\lambda\neq 0$, 在 J 中重复的次数与 Jordan 块 $J_m(-\lambda)$ 的重复次数相同; 2) 如果 m 是偶数, 那么初等因子是 x^m 的 Jordan 块 $J_m(0)$ 在 J 中重复偶数次. 具有性质 1) 和 2) 的任意复 Jordan 矩阵相似于某个斜对称矩阵.

域 k 上所有 n 阶斜对称矩阵的集合, 关于矩阵的加法与换位子 $(AB-BA)$ 构成 k 上一个 **Lie 代数** (Lie algebra).

参考文献

[1] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967 (中译本: 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955).

Д. А. Супруненко 撰

【补注】 域 k 上所有 $n\times n$ 斜对称矩阵构成的 k 上 Lie 代数记作 $\mathfrak{so}(n, k)$. 复 Lie 代数 $\mathfrak{so}(2n, \mathbf{C})$ $(n\geqslant 4)$ 与 $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbf{C})$ $(n\geqslant 2)$ 分别是 D_n 型单的和 B_n 型单的.

参考文献

[A1] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad Press, 1978, Chapt. X.

蒋滋梅 译

斜对称张量 [skew-symmetric tensor; кососимметрический тензор]

n 维向量空间 E 上的一个张量, 它在关于其一组指标的**交错** (alternation) 运算下是不变的. 一个斜对称张量的分量关于相应的指标组是斜对称的, 亦即在交换两个指标时, 分量改变符号 (在 E 所据以定义的域 K 的加法规则意义下), 当两个指标相等时分量为零.

最重要的斜对称张量是关于全体协变指标或全体反变指标的交错运算下保持不变的张量. r 阶斜对称反变 (共变) 张量是 E 上的 (对应地, 在 E 的对偶空间 E^* 上的) r **向量** (r-vector) 或**多重向量** (multi-vector); 它们是向量空间 E 的外代数的元素. E^* 上的外代数通常称为外形式代数, 把 r 阶斜对称协变张量和 r 形式等同起来.

参考文献见**外代数** (exterior algebra).

И. Х. Сабитов 撰 陈维桓 译

Skolem 函数 [Skolem function; Сколема функция]

一个谓词逻辑中的概念. 如果 $A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 是一个具有**个体变元** (individual variable) $x_1, \cdots, x_n, y$ 的谓词公式, 其中 $x_1, \cdots, x_n, y$ 的定义域分别是 $X_1, \cdots, X_n, Y$, 则满足下列条件的函数 $f: X_1\times\cdots\times X_n\to Y$ 称为 Skolem 函数 (Skolem function) 或分解函数 (resolving function): 对于公式 $\exists yA(x_1, \cdots, x_n, y)$, 如果对每个 $x_1\in X_1, \cdots, x_n\in X_n$ 都有

$$\exists yA(x_1, \cdots, x_n, y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)).$$

Skolem 函数是由 T. Skolem 在 19 世纪 20 年代引入的, 从此以后就被广泛的应用于数理逻辑的文献中. 这是由于应用 Skolem 函数可以消去交错的量词 $\forall$ 和 $\exists$. 例如, 对每个狭义谓词演算语言的公式 A, 可以构造一个形如 $\exists x_1, \cdots, x_n\forall y_1, \cdots, y_m C$ 的公式 (称为 A 的 Skolem 范式 (Skolem normal form)), 这里 C 不包含新的量词, 但是包含新的函数符号, 使得 A 在谓词演算中可判定, 当且仅当它的 Skolem 范式是可判定的.

在数理逻辑的基本定理, 例如 Herbrand 定理的证明中, Skolem 函数被用来将谓词演算中的谓词公式的判定问题转化为命题演算中的命题公式的一个无限序列的判定问题. 这样的方法在 Löwenheim-Skolem 定理 (见 **Gödel 完全性定理** (Gödel completeness theorem)) 和其他地方同样被应用.

当涉及具有附加结构的定义域上的公式时, 可以要求其相应的 Skolem 函数有与这个结构相联系的定义. 例如, 如果定义域属于 **Gödel 构造集** (Gödel constructive set) 的分层, 则可以要求 Skolem 函数也属于这个分层的一个定义水平. 具有附加性质的 Skolem 函数并不总是存在的, 但是当它存在时, 它们的作用是非常重要的.

作为说明上述事实的例证: 由 Godel 可构造公理可以得到 Jensen 关于张 (辰中) 双基数猜想 (Chang two-cardinals conjecture) 的结论 (见 [5]) 和 **Suslin 假设** (Suslin hypothesis) 的否定 (见 [6]). **描述集合论** (descriptive set theory) 中 Новиков-Kondo 关于 $\prod_1^1$ 关系的一致性定理进一步验证了某种类型的 Skolem 函数的存在性 (见 [2]).

参考文献

[1] Новиков, П. С., Элементы математической ло-

гики, 2 изд., М., 1973 (英译本: Novikov, P. S., Elements of mathematical logic, Oliver & Boyd and Acad. Press, 1964).

[2] Shoenfield, J. R., Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

[3] Chang, C. C. and Keisler, H. J., Model theory, North-Holland, 1973.

[4] Ершов, Ю. Л., Палютин, Е. А., Математическая логика, М., 1979.

[5] Devlin, K., Constructibility, in J. Barwise (ed.): Handbook of mathematical logic, North-Holland, 1977, 453－489.

[6] Devlin, K. J., Aspects of constructibility, Springer, 1973. В. Н. Гришин 撰 何 青 译 罗里波 校

Skolem 悖论 [Skolem paradox; Сколема парадокс]

Löwenheim-Skolem 定理(见 **Gödel 完全性定理** (Gödel completeness theorem))的一个推论, 表述为"由可数多条公理定义的相容的形式理论有可数的模型". 特别地, 如果假设 Zermelo-Fraenkel 集合论公理系统或型的初等理论(见**公理集合论** (axiomatic set theory))的相容性, 则存在这些理论的具有可数定义域的模型(见**解释** (interpretation)). 无法使人轻视的是这些理论是用来描述朴素集合论的, 在这些理论中可以证明存在非常大的不可数基数的集合, 因此在这些理论的模型中一定存在不可数集合.

必须指出的是: Skolem 悖论并不是严格意义上的悖论, 也就是说, 由它并不能导出理论的不相容性(亦见**悖论** (antinomy)). 例如, 在 ZF 的可数模型中, 从外部(external)观点看每个集合都是可数的. 然而, 在集合论中可以证明不可数集合的存在性; 于是在模型中包含一个从内部(internal)观点来看是不可数的集合 S, 这是因为在模型中没有集合 S 的枚举.

参考文献

[1] Kleene, S. C., Introduction to metamathematics, North-Holland, 1951.

А. Г. Драгалин 撰 何 青 译 罗里波 校

斯拉夫数字 [Slavic numerals; Славянские цифры]

古俄罗斯数字系统, 其中从 1 到 9 的每个整数以及几十和几百, 都以上方写着记号(斯拉夫语略语符号)的斯拉夫字母表示. 直至 999 的整数通过把斯拉夫数字置于邻接位置来写出. 千以上的数则通过把某个记号置于表达几千的数之前来表示.

【补注】 这样, 斯拉夫数字系统是例如希腊数字系统的改进, 亦见**数的表示** (numbers, representations of).

参考文献

[A1] Danzig, T., Number, the language of science, Allyn & Unwin, 1930.

[A2] Faulmann, C., Das Buch der Schrift, Wien, 1980 (Reprint: Nordlingen, 1985).

[A3] Ifrah, G., From one to zero: a universal history of numbers, Penguin, 1987 (译自法文). 沈永欢 译

滑动向量 [sliding vector; скользящий вектор]

见**向量** (vector).

小范畴 [small category; малая категория]

态射类 Mor $\mathfrak{K}$ 是一个集合的**范畴** (category) $\mathfrak{K}$. 一个小范畴 $\mathfrak{K}$ 叫作 U 范畴(U-category), 若 Mor $\mathfrak{K} \subset U$, U 是一个全域. 对于一个小范畴 $\mathfrak{K}$ 和任意局部小范畴 $\mathfrak{C}$, 从 $\mathfrak{K}$ 到 $\mathfrak{C}$ 的共变(反变)函子(见**函子** (functor))的范畴是局部小的. 特别地, 这些小范畴构成小范畴的**闭范畴** (closed category) Cat, 数学中的基本范畴之一([1]).

参考文献

[1] Lawvere, F. W., The category of categories as a foundation for mathematics, in Proc. Conf. Categorial Algebra, La Jolla, 1965, Springer, 1966, 1－20.

М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 一个范畴称为局部小的(locally small), 是指任取对象 A 和 B, 从 A 到 B 的态射类是一个集合. (有些作者将此作为范畴的定义条件之一.) 一个局部小范畴是小的, 当且仅当其对象类是一个集合.

亦见**全域** (universe). 张英伯 译

小分母 [small denominators; малые знаменатели], 小除数 (small divisors)

形如下式的除数

$$i\langle P, \Omega\rangle + \langle Q, \Lambda\rangle \equiv$$

$$\equiv ip_1\omega_1 + \cdots + ip_m\omega_m + q_1\lambda_1 + \cdots + q_n\lambda_n, \quad (1)$$

它出现在应用 Taylor 级数, Fourier 级数或 Poisson 级数对微分方程积分时得到的级数的系数中; 其中 $P = (p_1, \cdots, p_m)$, $Q = (q_1, \cdots, q_n)$ 是整向量, $\Omega = (\omega_1, \cdots, \omega_m)$ 是实向量, $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 是复向量, 而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积. 解的存在性及其性质, 例如解析性, 光滑性等, 本质上是依赖于数 ω_j, λ_k 的运算性质和微分方程同样的性质(解析性、光滑性等). 下面给出的条件保证了与解析问题相对应的解的解析性. 对线性问题和非线性问题, 这些条件是不同的.

1. **线性问题**

a) Taylor 级数 (Taylor series). 给定一个方程

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_k} \lambda_k x_k = \varphi(X) \equiv \sum_{\substack{\langle Q, \Lambda\rangle \neq 0 \\ q_k \geq 0}} \varphi_Q x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n},$$

其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)$、φ 在 $X=0$ 时解析（其中 $\varphi(0)=0$）且由给定的 Taylor 级数表示，则这个方程的解 ξ 由 Taylor 级数给出

$$\xi=\sum\frac{\varphi_Q}{\langle Q,\Lambda\rangle}x_1^{q_1}\cdots x_n^{q_n}.$$

如果存在 $\varepsilon,\nu>0$，使得对所有整数值 $Q\geqslant 0$，$\langle Q,\Lambda\rangle\neq 0$、不等式

$$|\langle Q,\Lambda\rangle|\geqslant\varepsilon e^{-\nu|Q|},\ |Q|=|q_1|+\cdots+|q_n|,\quad(2)$$

成立，则在零的邻域，上述级数收敛．在所有解析函数类 φ 里，这个条件是最优的：它是级数 ξ 收敛的必要条件．

b) Fourier 级数（Fourier series）．给定一个方程

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\eta}{\partial y_j}\omega_j=\psi(Y)\equiv\sum_{\langle P,\Omega\rangle\neq 0}\psi_P\exp i\langle P,Y\rangle,\quad(3)$$

其中 $Y=(y_1,\cdots,y_m)$，而且右端表示为 Fourier 级数，则这个方程的解 η 由 Fourier 级数给出

$$\eta=\sum\frac{\psi_P}{i\langle P,\Omega\rangle}\exp i\langle P,Y\rangle,$$

当 ψ 解析，而且当

$$\lim_{|P|\to\infty}\frac{\ln|\langle P,\Omega\rangle|}{|P|}\geqslant 0\quad(4)$$

时，上式的极限是对一切整数值 P 取的，$\langle P,\Omega\rangle\neq 0$，则在带 $|\mathrm{Im}\,Y|<\varepsilon_0$ 中上面的级数收敛．在形如（3）的所有解析函数类 ψ 中，这个条件是最优的．

方程（3）是对在环面上的常微分方程（见**环面上的微分方程**（differential equations on a torus））组的约化中得到的（见[1]；那里（2）错误地代替了（4））．当条件周期函数 $\psi(\Omega t)$ 对 t 积分时，情况是类似的．在对非线性问题迭代求解时，它的每次逼近导出了类似的线性问题（见**扰动理论**（perturbation theory））．

如果（2）或（4）不满足，则对应问题的非形式解不需要解析，光滑或甚至完全不需要存在（取决于 Λ 和 Ω 的运算性质），虽然形式解，即级数 ξ 和 η，总是存在的（见[1]）．

2．**非线性问题**．在这些问题中，小除数（1）不单独出现，而是以积的形式出现．

a) Taylor 级数（Taylor series）．在一个固定点 $X=0$ 附近，考虑方程组

$$\dot{x}_j=\lambda_j x_j+x_j\varphi_j(X),\ j=1,\cdots,n.\quad(5)$$

其中 φ_j 是一个没有自由项的收敛的 Taylor 级数．令对整值 $Q\geqslant 0$，$Q\neq 0$ 时，$\langle Q,\Lambda\rangle\neq 0$，则有一个形式上可逆的坐标变换

$$x_j=u_j+u_j\xi_j(U),\ j=1,\cdots,n,$$

其中 ξ_j 也是没有自由项的 Taylor 级数，它把（5）变成标准形式

$$\dot{u}_j=\lambda_j u_j,\ j=1,\cdots,n.\quad(5')$$

如果

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\ln\beta_l}{2^l}>-\infty\quad(6)$$

成立，其中当 $|Q|<2^l$，$\langle Q,\Lambda\rangle\neq 0$，$Q\geqslant 0$ 时，$\beta_l=\min|\langle Q,\Lambda\rangle|$，则级数 ξ_j 在零的邻域收敛（见[2]）．

在更严格的条件

$$|\langle Q,\Lambda\rangle|\geqslant\varepsilon|Q|^{-\nu}\quad(7)$$

下，首先由 C. L. Siegel (1942；见[2]，[3]) 求解了这种形式的非线性问题．在这个条件下，$\ln\beta_l\geqslant\ln\varepsilon-l\nu\ln 2$，且（6）收敛．条件（2）与有界性条件（6）等价：对任意的解析函数 φ_j，它是 ξ_j 收敛的必要条件（在[8]中，当 $n=2$ 时，必要条件是（6）；当 $n>2$ 时，在条件（2）和（6）之间的间隙中，不知道会发生什么情况（对更复杂的共振情况，见[2]））．如果（2）不满足，则（5）和它的标准形式（5′）的解之间，不需要解析、光滑或者甚至拓扑对应．

b) Poisson 级数（Poisson series）．假定有一个解析组

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_j=\lambda_j x_j+x_j\sum\varphi_{jPQ}X^Q\exp i\langle P,Y\rangle,\\&\dot{y}_k=\omega_k+\sum\psi_{kPQ}X^Q\exp i\langle P,Y\rangle,\\&X^Q=x_1^{q_1}\cdots x_n^{q_n},\ j=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m,\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

在不变环面 $X=0$ 附近，上式右端展成 Poisson 级数（即，关于 X 的 Taylor 级数和关于 Y 的 Fourier 级数）．有一个形式积分流形

$$x_j=\eta_j(x_{r+1},\cdots,x_n,Y),\ j=1,\cdots,r,\quad(9)$$

其中 η_j 也是一个 Poisson 级数．正是当流形解析时（即，对充分小的 $|X|$ 和 $|\mathrm{Im}\,Y|$，η_j 绝对收敛时），才提出了这个问题．这里，在 x_j 中可能有小参数；对这些小参数，$\lambda_j=0$．这个问题首先是由 A. H. Колмогоров ([4]) 求解的，他解的是具有 m 个自由度和一个小参数 x_n 的 Hamilton 系统（8）（即 $m+1=n$，$\Lambda=0$）：当条件

$$|\langle P,\Omega\rangle|\geqslant\varepsilon|P|^{-\nu}\quad(10)$$

满足时，证明了当 $r=m$ 时由不变环面组成的流形（9）的解析性．同时，他首先提出了"Newton 法"，它是研究非线性问题的基础，被用来证明 Poisson 级数 η_j 的收敛性．条件（10）和它的类似形式

$$|i\langle P,\Omega\rangle+\langle Q,\Lambda\rangle|\geqslant\varepsilon(|P|+|Q|)^{-\nu}$$

则用在同样类型的问题中(见[5]-[7]). 条件(2)和(4)也是(9)收敛的必要条件(对更复杂的退化情况,见[7]). 如果这些条件不满足,不需要是一形式为(9)的解析(或者甚至连续)不变流形.

限制条件(2)、(6),(7)中最严格的条件(7),当 $\nu > n-1$ 时,几乎对所有的(与 Lebesgue 测度有关)向量 Λ 都满足. 在 **Diophantus 逼近**(Diophantine approximations)理论中研究了向量 Λ 的(2),(6),(7)这种类型的性质. 二维情况已经得到了相当好的研究. 令 q_l 是 $\lambda=\lambda_2/\lambda_1<0$ 的第 l 个收敛**连分式**(continued fraction)的分母,则(6)与级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\ln q_{l+1}}{q_l}$$

的收敛性等价,(2)与它的各项的有界性等价(亦见[9],[10]).

已经讨论了带有变量 Ω 和 Λ 的小除数(1)(见[6]).

小除数最初是在天体力学中遇到的,而基本的线性问题是在 1884 年由 H. Bruns 解决的. 一般来说,在太阳系中,频率之间有许多可公度性的点,它的一个结果是小除数(1). 例如,小除数 $2\omega_1-5\omega_2=0.007\cdots$,其中 ω_1 和 ω_2 分别是木星和土星的运动频率,在这些行星运动中,它引起了大的互逆扰动. 另一个例子是:在小行星区和土星环中的间隙对应着具有扰动体(分别为木星和土卫一)频率的谐振.

参考文献

[1] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, 93 (1953), 5, 763-766.

[2] Брюно, А. Д., 《Тр. Моск. Матем. об-ва》, 25 (1971), 119-262; 26 (1972), 199-239.

[3] Siegel, C. L., Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer, 1956.

[4] Колмогоров, А. Н., 《Докл. АН СССР》, 98 (1954), 4, 527-530.

[5] Moser, J., Lectures on Hamiltonian systems, Amer. Math. Soc., 1968.

[6] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, 18 (1963), 6, 91-192.

[7] Брюно, А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979 (英译本: Bryuno, A. D., Local methods in nonlinear differential equations, Springer, 1989).

[8] Yoccoz, J. Z., Linearisation des germs de diffeomorphismes holomorphes de $(C, 0)$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **306** (1988), 55-58.

[9] Bruno, A. D. [A. D. Bryuno], On small divisors, *Banach Center Publications*, **23** (1989), 355-359.

[10] Bruno, A. D. [A. D. Bryuno], A Comparison of conditions on small divisors, Preprint *IHES*., 36 (1990).

А. Д. Брюно 撰

【补注】

参考文献

[A1] Arnol'd, V. I., Mathematical methods of classical mechanics, Springer, 1978 (译自俄文).

[A2] Arnol'd, V. I. and Avez, V., Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968 (译自俄文).

袁国兴 张宝琳 译

小象 [**small image**; **малый образ**], 集合 $A\subset X$ 在映射 $f:X\to Y$ 下的

满足 $f^{-1}y\subset A$ 的所有 $y\in Y$ 的集合 $f^{\#}A$. 等价的定义是 $f^{\#}A=Y\setminus f(X\setminus A)$. 闭的不可约映射可以用小象来刻画. **连续映射**(continuous mapping) $f:X\to Y$ 是闭的(见**闭映射**(closed mapping)),当且仅当每个开集 $U\subset X$ 的小象 $f^{\#}U$ 都是开的. 映到 Y 上的连续映射 $f:X\to Y$ 是闭且不可约的(见**不可约映射**(irreducible mapping)),当且仅当每个非空开集 $U\subset X$ 的小象都是非空开集.

В. В. Федорчук 撰 白苏华 胡师度 译

小对象 [**small object**; **малый объект**]

范畴(category)中具有有限多个生成元这一内在数学性质的对象(有限维线性空间,有限生成的群,等等). 令 $\mathfrak{N}$ 是一个有余积的范畴. 对象 $U\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{N}$ 叫作小的(small),是指对任意态射,

$$\varphi: U\to\sum_{i\in I}U_i$$

存在有限标集 $1,\cdots,n$,使得 φ 可以通过由 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 诱导的态射

$$U_1+\cdots+U_n\to\sum_{i\in I}U_i$$

分解,此处 $U_i=U$, $i\in I$, σ_i 是第 i 个和项在余积中的嵌人. 有时不要求余积 $\sum_{i\in I}U_i$ 的所有和项与 U 重合,这就给出了一个较强的定义.

在有限性泛代数簇中,代数 A 的下列条件等价:a) A 是范畴的一个小对象,b) A 有有限个生成元;c) 共变 hom 函子 $H_A(X)=H(A,X)$ 与单射正向族的上极限(正向极限)可换. 通常将 c) 作为在任意范畴中有限生成对象的定义. М. Ш. Цаленко 撰

【补注】 在**加性范畴**(additive category)中,一个对象 U 是小的,当且仅当 Abel 群值函子 $H(U,-)$ 保存余积. 有些作者将它作为非加性范畴中小性的定义;这种定义的条件比上述定义限制性强,它等价于要求从 U 到余积的每个态射通过唯一的直和项分解. 在实际应用中极少超出加性范畴. 张英伯 译

小参数方法 [**small parameter, method of the**; **малого параметра, метод**], *微分方程理论中的*

构造依赖于一参数的微分方程或方程组的近似解的一种方法.

1. 常微分方程的小参数方法. 来自应用问题的常微分方程通常都含有一个或多个参数, 参数也可能出现在初始数据或边值条件中. 因为只有在极特殊的个别情况下才能找到微分方程的准确解, 这就产生了构造近似解的问题. 一个典型的情况如下: 方程以及初值(边值)条件中含有参数 λ, 而当 $\lambda=\lambda_0$ 时解是已知的(或假设为已知的); 要求对接近于 λ_0 的 λ 值作出近似解, 即作一个 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近解, 这里 $\varepsilon=\lambda-\lambda_0$ 就是一个"小"参数. 例如, 天体力学的**三体问题**(three-body problem)中就有小参数方法, 它可以追溯到 J. d'Alembert, 在 19 世纪末就有了很大的发展.

后面采用以下的符号: t 是一个自变量, $\varepsilon>0$ 是一个小参数, I 是区间 $0\leqslant t\leqslant T$, 记号 $\sim$ 则表示渐近相等、出现在方程和边值条件中的所有向量和矩阵函数, 都假设为对其各个变量在其各自的区域中(对 ε 在 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 中或在 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 中)为(C^∞ 类)光滑的.

1. n 阶方程组的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem):

$$\dot{x}=f(t,x,\varepsilon),\quad x(0)=x_0(\varepsilon). \tag{1}$$

设极限问题(即 $\varepsilon=0$ 时的问题(1))的解 $\varphi_0(t)$ 在 $t\in I$ 时存在且为唯一的. 于是(1)的解 $x(t,\varepsilon)$ 有当 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近展开式

$$x(t,\varepsilon)\sim\varphi_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\varphi_j(t) \tag{2}$$

对于 $t\in I$ 一致地成立. 这可由常微分方程组的解对参数的光滑依赖性定理得出. 若向量函数 f 和向量 x_0 当 $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $x=\varphi_0(t)$, $t\in I$ 时为全纯的, 则(2)中级数当 $|\varepsilon|$ 充分小时, 对 $t\in I$ 一致地收敛于(1)之解 $x(t,\varepsilon)$(Poincaré 定理(Poincaré theorem)). 对于形如(1)的方程组的边值问题, 只要相应的极限问题的解存在且为唯一的, 类似的结果也是成立的.

要区别方程(或方程组)对小参数的两种不同的依赖性——正则的(regular)或奇异的(singular). 若一个范式的方程组的右方当 $\varepsilon\geqslant 0$ 很小时是 ε 的光滑函数, 就说此方程正则地依赖于 ε; 否则就说它奇异地依赖于 ε. 若方程组正则依赖于 ε, 则含参数的问题之解当 $\varepsilon\to 0$ 时, 一般说来, 会在有限 t 区间上一致收敛于极限问题之解.

2. 在线性理论中, 要考虑奇异依赖于 ε 的 n 阶方程组

$$\varepsilon\dot{x}=A(t,\varepsilon)x+f(t,\varepsilon),$$

这里 $(n\times n)$ 矩阵 A 的元素和向量 f 的分量都是复值函数. 线性理论的中心问题是构造齐次方程组(即对于 $f\equiv 0$ 的情况)的**基本解组**(fundamental system of solutions), 且其在整个区间 I 上当 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近性态是已知的.

线性理论的基本结果是如下的 Birkhoff 定理(theorem of Birkhoff). 令: 1) 当 $t\in I$ 时, $A(t,0)$ 之本征值 $\lambda_j(t,0)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 各异; 2) 量

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(t,0)-\lambda_k(t,0)),\ 1\leqslant j,k\leqslant n,\ j\neq k$$

符号不变. 这时, 对于齐次方程组

$$\varepsilon\dot{x}=A(t,\varepsilon)x$$

的一基本解组 $x_1(t,\varepsilon),\cdots,x_n(t,\varepsilon)$, 存在下述渐近展开式: 当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$x_j(t,\varepsilon)\sim\exp\left[\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda_j(\tau,\varepsilon)d\tau\right]\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\varphi_{kj}(t), \tag{3}$$

$$1\leqslant j\leqslant n.$$

这个展开式对 $t\in I$ 是一致的, 而且可以对 t 和 ε 逐项求导任意多次. 若 A 中不含 ε, 即 $A=A(t)$, 则

$$\varphi_{0j}(t)=\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\left(e_j^*(\tau),\ \frac{de_j(\tau)}{d\tau}\right)d\tau\right]e_j(\tau),$$

这里 e_j^* 和 e_j 分别是 $A(t)$ 的左、右本征向量, 且已规范化如下:

$$(e_j^*(t),e_j(t))\equiv 1,\ t\in I.$$

具有(3)那样的渐近性态的解称为 WKB 解(WKB solution)(见 **WKB 方法**(WKB method)). 这些解的定性构造如下. 若

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t)<0\ [\operatorname{Re}\lambda_j(t)>0],\ t\in I,$$

则 x_j 是关于 $t_0=0$ $(t_0=T)$ 处的边界层型向量函数, 即只在 $t=0$ $(t=T)$ 的 ε 邻域中显著地异于零. 然而若 $\operatorname{Re}\lambda_j(t)\equiv 0$, $t\in I$, 则 x_j 当 $\varepsilon\to+0$ 时强烈地振动, 且在整个区间 I 上阶为 $O(1)$.

若 $A(t,\varepsilon)$ 在 $|t|\leqslant t_0$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ 时是全纯矩阵函数, 且条件 1) 成立, 则当 $\varepsilon\to+0$, $0\leqslant t\leqslant t_1$ ($t_1>0$ 为充分小)时, (3)式成立. 在 I 上有转向点(turning point), 即有使得 $A(t,0)$ 有重本征值的点出现时, 构造基本解系的渐近式是一个困难的问题. 这个问题只对于特殊的转向点得到了完全的解决(见[1]). 在转向点的邻域中有一个过渡区域, 解在其中的情况是很复杂的, 最简单的情况可以用 Airy 函数(Airy functions)来表示.

类似的结果对以下形状的标量方程

$$\varepsilon^n x^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon^j a_j(t,\varepsilon)x^{(j)}=0$$

也成立（见[1]，[17]），这里 $a_j(t,\varepsilon)$ 是复值函数；特征方程

$$\lambda^n+\sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j a_j(t,\varepsilon)=0$$

的根则起上述的函数 $\lambda_j(t,\varepsilon)$ 的作用. WKB 解也在非线性方程组

$$\varepsilon\dot{x}=f(t,x,\varepsilon),\quad x\in\mathbf{R}^n$$

中出现. 在 Birkhoff 定理的条件下，只要 $A(t,\varepsilon)$ 当 $t\to+\infty$ 时性态足够好，例如快速地趋向一个具有相异本征值的常数矩阵，则 WKB 渐近展开式（3）在无穷区间 $0\leqslant t<\infty$ 上都适用（即是说，（3）既是当 $\varepsilon\to 0$ 时的，也是当 $t\to\infty$ 时的渐近式）（见[2]）. 谱分析（见[3]）和数学物理中的许多问题都可化为具有小参数的奇异问题.

3. 研究下列形式的非线性方程组具有特别的意义：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\dot{x}=f(x,y),\quad x(0)=x_0,\ x\in\mathbf{R}^n,\\&\dot{y}=g(x,y),\quad y(0)=y_0,\ y\in\mathbf{R}^m,\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

这里 $\varepsilon>0$ 是一个小参数. 第一个方程描述快运动（fast motions），而第二个方程则描述慢运动（slow motions）. 例如，**van der Pol 方程**（van der Pol equation）经过变换

$$y=\int_0^x(x^2-1)dx+\frac{1}{\lambda}\frac{dx}{dt},\ t_1=\frac{t}{\lambda},\ \varepsilon=\frac{1}{\lambda^2},$$

当 λ 很大时，就化为方程组

$$\varepsilon\dot{x}=y-\frac{1}{3}x^3+x,\quad \dot{y}=-x,$$

这就是形式（4）的方程组.

当 $\varepsilon=0$ 时，快运动方程退化为方程 $f(x,y)=0$. 设此方程在变量 y 的某个闭有界域 D 内有孤立的稳定连续根 $x=\varphi(y)$（即设 Jacobi 矩阵 $\partial f/\partial x$ 的各本征值之实部当 $x=\varphi(y)$，$y\in D'$ 时均为负）；设（4）和退化问题

$$x=\varphi(y),\ \dot{y}=g(x,y),\ y(0)=y_0\tag{5}$$

之解当 $t\in I$ 时均存在且为唯一的，又设（5）之解 $\bar{y}$ 当 $t\in I$ 时适合 $\bar{y}(t)\in D$. 若 (x_0,y_0) 在根 $x=\varphi(y)$ 的影响区域内，则当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$x(t,\varepsilon)\to\bar{x}(t),\ 0<t\leqslant T,$$

$$y(t,\varepsilon)\to\bar{y}(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,$$

这里 $(\bar{x},\bar{y})$ 是退化问题之解（**Тихонов 定理**（Tikhonov theorem））. 在接近 $t=0$ 处，极限过程 $x(t,\varepsilon)\to\bar{x}(t)$ 是不一致的——出现一个**边界层**（boundary layer）. 问题（4）之解有以下的渐近展开式：

$$x(t,\varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Pi_k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).\tag{6}$$

$y(t,\varepsilon)$ 的渐近展式形状类似.（6）中的第一个和是正则部分（regular part），而第二个和则是边界层（boundary layer）. 渐近展开式的正则部分可以用标准的方法来计算：把形如（2）的级数代入（4）中，把右方展开为 ε 的幂级数，并令 ε 的同次幂的系数相等. 为了计算渐近展开式的边界层部分，在 $t=0$ 的一个邻域中引入一个新变量 $\tau=t/\varepsilon$（快时间（fast time）），再按上法进行. 在 t 轴上有一个区间，在其中正则展开式（外（outer）展开式）与边界层展开式（内（inner）展开式）都有用. 函数 x_k 和 Π_k 就是由这些展开式相同来决定的（所谓匹配法（method of matching），见[4]，[5]）.

当（4）的右方显含 t 时，对于形如

$$\varepsilon x^{(n)}=f(t,x,\dot{x},\cdots,x^{(n-1)})\tag{7}$$

的标量方程，对于这种方程组和方程的边值问题，也有类似的结果成立（见**带小参数的微分方程**（differential equations with small parameter），[6]，[7]）.

为了在折点（break point）（即失去稳定性的点（例如 $x=\varphi(y)$ 的 Jacobi 矩阵 $\partial f/\partial x$ 有一本征值为 0 的点））附近逼近（4）之解，形如（5）的级数失去其渐近特性. 在折点的邻域中，渐近展开式的特性颇不相同（见[8]）. 为了建立**松弛振动**（relaxation oscillation）的渐近理论，研究折点的邻域特别重要.

4. 天体力学和非线性振动理论中的问题，特别使得有必要不仅在有限区间中研究（1）之解的性态，而且要在与 ε^{-1} 或其更高次幂同阶的 t 的大区间中去研究它们的性态. 在这些问题中广泛地使用了一种平均方法（见 **Крылов-Боголюбов 平均方法**（Krylov-Bogolyubov method of averaging）；**小分母**（small denominator），[9]－[11]）.

5. 形如（7）的方程的解的渐近性态，特别可用多重尺度法（method of multiple scales）来研究（见[4]，[5]）；这方法是 WKB 方法的一种推广. 现用具有周期解的标量方程

$$\varepsilon^2x^2+f(t,x)=0\tag{8}$$

作为这种方法的一个例子（见[12]）. 求方程以下形式的解：

$$x=\varphi(T,t,\varepsilon)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\varphi_j(T,t),\ T=\frac{s(t)}{\varepsilon}.\tag{9}$$

（函数 T 和 t 称为尺度（scales）. 若（8）是线性的，则 $\varphi_j=e^T\psi_j(t)$，而（9）就是 WKB 解. 在非线性

情况下，前两次近似的方程是

$$\dot{S}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T^2} + f(t, \varphi_0) = 0,$$

$$\dot{S}^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T^2} + \frac{\partial f(t, \varphi_0)}{\partial x} \varphi_1 = $$

$$= -2\dot{S} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial T} - \dot{S} \frac{\partial \varphi_0}{\partial T},$$

第一个方程含两个未知函数 S 与 φ_0. 令此方程有一个对 t 为周期的解 $\varphi_0 = \varphi_0(t, T)$，则由 φ_1 对 t 的周期性可以找到所缺少的关于 S 的方程如下：

$$\dot{S} \oint \left(\frac{\partial \varphi_0(t, T)}{\partial T}\right)^2 dT = E \equiv \text{常数},$$

这里在 φ 的一个周期上求积分.

参考文献

[1] Wasov, W., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965.

[2] Федорюк, М. В., 《Матем сб.》, 79 (1969), 4, 477 – 516.

[3] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969 (英译本：Naĭmark, M. A., Linear differential operators, Harrap, 1968).

[4] Cole, J. D., Perturbation methods in applied mathematics, Blaisdell, 1968.

[5] Nayfeh, A. H., Perturbation methods, Wiley, 1973.

[6] Васильева, А. Б., Бутузов, В. Ф., Асимптотические разложенмя рецений сингулярно возмущенные уравнений, М., 1973.

[7] Васильева, А. Б., Бутузов, В. Ф., Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях, М., 1978.

[8] Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975 (英译本：Mishchenko, E. F., Rozov, N. Kh., Differential equations with small parameters and relaxation oscillations, Plenum Press, 1980).

[9] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974 (英译本：Bogolyubov, N. N. and Mitropol'skiĭ, Yu. A., Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Hindushtan Publ. Comp., Delhi, 1961).

[10] Волосов, В. М., Моргунов, Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., 1971.

[11] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, 18 (1963), 6, 91 – 192.

[12] Кузмак, Г. Е., 《Прикл матем. и мех.》, 23 (1959), 3, 515 – 526.

[13] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959 (英译本：Andronov, A. A., Vitt, A. A. and Khaĭkin S. E., The theory of oscillations, Dover reprint, 1987).

[14] Giacaglia, G. E., Perturbation methods in non-linear systems, Springer, 1972.

[15] Моисеев, Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, М., 1969.

[16] Бутузов, В. Ф., Васильева, А. Б., Федорюк, М. В., в кн., Итоги науки, Математический анализ, 1967, М., 1969, 5 – 73.

[17] Wasow, W., Linear turning point theory, Springer, 1985

Н. Х. Розов, М. В. Федорюк 撰

2. 偏微分方程中的小参数方法. 与常微分方程一样，偏微分方程的解也可以正则地或奇异地依赖于小参数 ε (设 $\varepsilon > 0$). 粗略地说，如果微分算子的首项系数不依赖于 ε，而以后诸项当 ε 很小时是 ε 的光滑函数，就得到正则的依赖关系. 这时解也是 ε 的光滑函数. 但是若首项中有某一项当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零，则解一般地说将奇异地依赖于 ε. 这时时常就说是"在首项导数前有小参数"的偏微分方程. 这种分类多少有些随意性，因为如何选取首项并不总是明显的；而且参数也可能出现在边值条件中. 此外，也可能由于区域是无界的而出现奇异性，尽管小参数只出现在低阶导数上 (低阶导数在无穷远处可能与首项起同样的，甚至更重要的作用).

例如，考虑有界区域 $G \subset \mathbf{R}^n$ 中的一个二阶椭圆型方程. 对于问题

$$\Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x, \varepsilon) u = f(x, \varepsilon),$$

$$u|_{\partial G} = \varphi(x, \varepsilon),$$

如果边界是光滑的，而 a_j, b, f, φ 又都是 x 和 ε 的光滑函数，而且极限边值问题

$$\Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x, 0) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x, 0) u = f(x, 0),$$

$$u|_{\partial G} = \varphi(x, 0),$$

对任意的光滑函数 $f(x, 0)$ 和 $\varphi(x, 0)$ 都是唯一可解，则此问题的解当 ε 很小时，是 ε 的光滑函数. 解可以展开为 ε 的幂的渐近级数：

$$u(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \tag{1}$$

其系数是同类型边值问题的解，用**扰动理论** (perturbation theory) 容易算出.

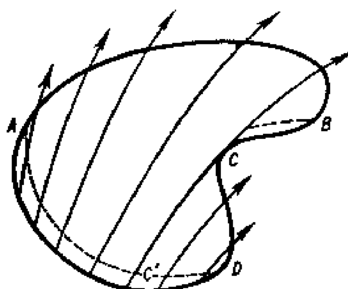
然而对于例如下面的边值问题

$$\left.\begin{aligned} L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x) u = f(x), \\ u|_{\partial G} = \varphi(x), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

情况就很不一样，因为 $\varepsilon=0$ 时，方程的阶下降．极限问题是

$$\left.\begin{aligned} L_0 u \equiv \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b(x)u=f(x),\\ u|_{\partial G}=\varphi(x), \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

它通常是不可解的．令 $n=2$ 且极限问题之特征曲线如图所示，特征曲线上的指向是由向量场 $\{a_j(x)\}$ 决定的．



若在某点已知极限问题之解，则在过该点的所有特征曲线上，这个解也是已知的；所以对于任意的 $\varphi(x)$，边值问题(3)是不可解的．当 $\varepsilon\to0$ 时，(2)的解收敛于极限方程 $L_0u_0=f$ 的这样一个解 u_0．它在边界 ∂G 的曲线段 AB 和 CD 上等于 $\varphi(x)$．在边界的其余部分上，失去了边值条件．在边界的曲线段 AB 和 CD 的一个称为**边界层**(boundary layer)的邻域中，此邻域的典型的宽度是 ε^2 阶的，(2)的解接近于和式

$$u_0(x)+v_0(\rho\varepsilon^{-2},\ x').$$

x' 是沿边界 $AD(BC)$ 的坐标，ρ 是由边界沿法线所量的距离，$\rho\varepsilon^{-2}$ 就称为内变量(inner variable)．(2)的解除了在边界层以及特殊的特征线上(即图中的 CC')以外，都可以展开成(1)那样的渐近级数．在 G 中除去曲线 AD，BC 和 CC' 的固定的邻域后，在所得的区域中，渐近级数的部分和一致逼近(2)的解．在边界层中，在点 A，B，C，D，C' 固定的邻域以外，对渐近级数(1)还要加上渐近级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}v_{2k}(\rho\varepsilon^{-2},\ x').$$

函数 $v_{2k}(\xi,\ x')$ 当 $\xi\to\infty$ 时按指数下降．第一个渐近级数常称为外渐近级数(outer asymptotic series)，而第二个称为内渐近级数(inner asymptotic sereis)，函数 $v_{2k}(\xi,\ x')$ 则称为边界层函数(boundary-layer function)．这个名词，乃至这个问题本身，都来自小粘度流体绕物体流动的问题(见**流体力学中的数学问题**(hydrodynamics, mathematical problems in)，亦见[1]－[4])．这个方法称为边界层方法(method of the boundary layer)，本质上和用于常微分方程的这一方法相同．

在点 A，B、C、D(即 L_0 之特征切触于边界处)之邻域以及在接近于 CC' 处，解的渐近性态更为复杂．复杂性来源于边界不再是处处光滑(有角点，当 $n>2$ 时边界有棱)．在有些简单的情况下，可以作出附加的依赖于更多变量的边界层函数而得到渐近公式，但这些函数和前面一样，在无穷远处按指数趋于零．然而，情况一般说来是更复杂了：外展开的系数 $u_k(x)$ 和内展开的系数 $v_{2k}(\xi,\ x')$ 在奇点(即图上的 A，B，C，D 点)处都有很强的奇异性．在闭区域 $\overline{G}$ 上一致适用的解的渐近展开式可用多重尺度法(在[5]中则用匹配渐近级数法)作出．偏微分方程的某些问题可以用多重尺度法的另一个变体(升维法)来研究：即把解看作基本的自变量和辅助的"快"变量的函数．结果是原问题的维数增加了，但对参数的依赖性简化了(见[6])．

若极限算子 L_0 的特征方向场有平稳点，则问题大为复杂化了．举例来说，若 $f(x)\equiv0$，$b(x)\equiv0$，而且所有特征方向均指向区域之内，则当 $\varepsilon\to0$ 时，(2)的解趋于一常数．求此常数且作出其渐近级数，是一个只部分解决了的困难问题(见[7])．方程(2)描述动力系统 $\dot{x}=a(x)$ 的随机扰动．这个领域中的问题也是偏微分方程理论中小参数方法发展的源泉之一(见[8])．

若(2)中的 $a_j(x)\equiv0$ 而 $b(x)<0$，则渐近级数很容易找到；在远离边界处有(1)那样的级数，而在接近于边界的边界层内，则要加上渐近级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k}v_k(\xi,\ x'),$$

现在 $\xi=\rho\varepsilon^{-2}$．

若 $a_j(x)\equiv0$，但 $b(x)>0$，问题就真正复杂了．这时解会强烈地振动；而 **WKB 方法**(WKB method)；**半经典近似**(semi-classical approximation)；**抛物方程方法**(parabolic-equation method)等都是渐近方法．

有一类问题中，区域的边界当 $\varepsilon\to0$ 时退化．为确定起见，考虑问题

$$(\Delta+k^2)u(x)=0,\ x\in G_\varepsilon,\ u|_{\partial G_\varepsilon}=\varphi(x),\quad(4)$$

G_ε 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界区域 D_ε 之外域，$k>0$；在无穷远处则加上**辐射条件**(radiation condition)．例如，令 $D_\varepsilon=\varepsilon D$，而 D 是一个包含 $x=0$ 的固定区域；这时 D_ε 缩为 $x=0$ 一点而(4)没有极限．量 $\lambda=2\pi/k$ 具有波长的特性：这时 $\lambda\gg d_\varepsilon$ 而 d_ε 是 D_ε 的直径，就说长波在障碍 D_ε 上发生色散(或者说有**流体力

学近似(hydrodynamic approximation)或 Rayleigh 近似).有两个互相重迭的区域,一个是包含 ∂G_ε 的近场,其大小随 $\varepsilon\to 0$ 而趋于零,一个是远场,即区域的外域,当 $\varepsilon\to 0$ 时,它缩为点 $x=0$.在这两个区域中解的渐近级数形状不同,结果是 $n=2$ 时的第一边值问题最难:内渐近展开式形如

$$u(x,\varepsilon)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{N}\varepsilon^k\mu^l v_{kl}(\xi),$$

这里 $\xi=\varepsilon^{-1}x$,$\mu=(\ln\varepsilon+\alpha)^{-1}$,而 α 是一常数(见[9]).长波近似主要是对 Helmholtz 方程和 Maxwell 方程组研究过(见[10],[11]).

若当 $\varepsilon\to 0$ 时 D_ε 缩为一个区间 L,就出现了另一种变体;这时,若 $n=2$ 就有一个极限问题,但若 $n>2$ 就没有.这种类型的问题(包括对于 Laplace 方程,对于线性双曲型方程以及对于非线性偏微分方程)来自流体动力学和空气动力学,以及波的绕射理论(液体或气体对薄的物体的绕流问题).问题(4)在 $n=2$ 时研究过(见[12]),$n=3$ 时,它对 $k=0$ 且 D_ε 是一个旋转体的情况研究过(见[13]).

含小参数的偏微分方程也自然地出现于研究非线性振动时,这里扰动与 ε 同阶,但是要求在一个长度与 ε^{-1} 同阶的长时间区间上研究解.如果考虑的是连续介质而不是质点系,这时就出现偏微分方程,而平均化方法的推广适用于它(见[14]).

参考文献

[1] Schlichting, H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, 1955(译自德文).

[2] Dyke, M. van, Perturbation methods in fluid mechanics, Parabolic Press, 1975.

[3] Вишик, М. И., Люстерник, Л. А.《Успехи матем. наук》, 12 (1957), 5, 3 – 122.

[4] Треногин, В. А.,《Успехи матем. наук》, 25 (1970), 4, 123 – 156.

[5] Nayfeh, A. H., Perturbation methods, Wiley, 1973.

[6] Ломов, С. А.,《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, 36 (1972), 3, 635 – 651.

[7] Вентцель, Л. Д., Фрейдлин, М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979(英译本: Venttsel', L. D. and Freidlin, M. I., Random perturbations of dynamical systems, Springer, 1984).

[8] Понтрягин, Л. С., Андронов, А. А., Витт, А. А.,《Ж. эксперимент. и теоретич. физики》, 3 (1933), 3, 165 – 180.

[9] Ильин, А. М.,《Матем. сб.》, 103 (1977), 2, 265 – 284.

[10] Höni, H., Mane, A. W. and Westpfahl, K., Theorie der Beugung, in Handbuch der Physik, Vol. 25/1, Springer, 1961, 218 – 573.

[11] Morse, P. M. and Feshbach, H., Methods of theoretical physics, 2, McGraw-Hill, 1953.

[12] Ильин, А. М.,《Матем. сб.》, 99 (1976), 4, 514 – 537.

[13] Cole, J. D., Perturbation methods in applied mathematics, Blaisdell, 1968.

[14] Митропольский, Ю. А., Моисеенков, Б. И., Асимптотические решения уравнений в частных производных, К., 1976.

А. М. Ильин, М. В. Федорюк 撰

【补注】 从关于奇异扰动(它是一类特殊的奇异的小参数方程)这个大题目的大量西方文献中,选出了参考文献[A1]–[A4];亦见**扰动理论**(perturbation theory)(它的补注中标题为"奇异扰动"的一段).在同一领域中,另一个有趣的特别主题是 Hamilton-Jacobi 方程作为具有小参数的抛物型方程的极限([A5]).

参考文献

[A1] O'Malley, R. E., Introduction to singular perturbations, Acad. Press, 1974.

[A2] Kevorkian, J. and Cole, J. D., Perturbation methods in applied mathematics, Springer, 1981.

[A3] Murray, J. D., Asymptotic analysis, Springer, 1984.

[A4] Lagerstrom, P. A., Matched asymptotic expansions, Springer, 1988.

[A5] Aronson, D. G. and Vazquez, J. L., The porous medium equation as a finite-speed approximation to a Hamiltonian-Jacobi equation, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 4 (1987), 203 – 230.

齐民友 译

Смирнов 类[Smirnov class; Смирнова класс]

在有可求长 Jordan 边界 Γ 的单连通域 $G\subset\mathbf{C}$ 内全纯且满足以下条件的全体函数 $f(z)$ 的集合 $E_p(G)$:对其中每一函数存在一闭可求长 Jordan 曲线的序列 $\Gamma_n(f)\subset G$,$n=1,2,\cdots$,具有下面的性质:

1) 当 $n\to\infty$,$\Gamma_n(f)$ 按以下意义趋于 Γ:如果 $G_n(f)$ 是有边界 $\Gamma_n(f)$ 的有界域,则

$$G_1(f)\subset\cdots\subset G_n(f)\text{ 且 }\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n(f)=G;$$

$$2)\ \sup_n\left\{\int_{\Gamma_n(f)}|f(z)|^p|dz|\right\}<\infty\ (p>0\text{ 给定}).$$

这定义是 М. В. Келдыш 和 М. А. Лаврентьев([2])提出的,且等价于 В. И. Смирнов 的定义([1]),[1]中用曲线族 $\gamma(\rho)$ 代替 $\Gamma_n(f)$.这些曲线 $\gamma(\rho)$ 是圆周 $|w|=\rho<1$ 在从圆盘 $|w|<1$ 到区域 G 上某个单叶共形映射(conformal mapping)$z=\varphi(w)$ 下的象,且上确界是对所有 $\rho\in(0,1)$ 取的.

类 $E_p(G)$ 是 **Hardy 类**(Hardy classes)H_p 的最为熟知和研究得最透彻的推广,且用以下关系与它们相联系:$f\in E_p(G)$,当且仅当

$$f(\varphi(w))(\varphi'(w))^{1/p}\in H_p.$$

当 G 是 **Смирнов 区域**(Smirnov domain)的情形，类 $E_p(G)$ 的性质最接近于 H_p 的性质. 它们已被推广到具有有限 Hausdorff 长度的边界的区域 G. 亦见**解析函数的边界性质**(boundary properties of analytic functions).

参考文献

[1] Смирнов, В. И., 《Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. наук》, 1932, 3, 337 – 372.

[2] Келдыш, М. В., Лаврентьев, М. А., Sur la réprésentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 54 (1937), 1 – 38.

[3] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[4] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

[5] Duren, P. L., Theory of H^p spaces, Acad. Press, 1970.

Е. П. Долженко 撰 苟显良 译 鲁世杰 校

Смирнов 区域[Smirnov domain; Смирнова область], C 型区域(domain of type C), S 型区域(domain of type S)

复平面 **C** 内具有可求长 Jordan 边界且有如下性质的单连通区域 G: 存在从圆盘 $|w|<1$ 到 G 上的单叶共形映射(conformal mapping) $z=\varphi(w)$, 使得对于 $|w|<1$, 调和函数 $\ln|\varphi'(w)|$ 可用其非切边界值 $\ln|\varphi'(e^{i\theta})|$ 的 Poisson 积分表示:

$$\ln|\varphi'(re^{i\theta})|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(t-\theta)}\ln|\varphi'(e^{it})|dt.$$

这些区域是 В. И. Смирнов 于 1928 年在研究 **Смирнов 类**(Smirnov class) $E_2(G)$ 中多项式系的完全性的过程中引入的. 具有可求长 Jordan 边界的非 Смирнов 区域的存在性问题是由 М. В. Келдыш 与 М. А. Лаврентьев([2]) 解决的, 他们给出这种区域及相应的映射函数 φ 的一种复杂而高明的构造方法, 该映射函数满足附加条件: 对几乎所有的 $e^{i\theta}$ 有 $|\varphi'(e^{i\theta})|=1$. 圆盘内解析函数的那些基本的边界性质(见**解析函数的边界性质**(boundary properties of analytic functions))对 Смирнов 区域内的解析函数也成立, 并且其中许多性质只对 Смирнов 区域才成立. 边界为 Ляпунов 曲线或交角非零的逐段 Ляпунов 曲线的 Jordan 区域, 便是 Смирнов 区域的例子(见 **Ляпунов 曲面和曲线**(Lyapunov surfaces and curves)).

参考文献

[1] Смирнов, В. И., 《Ж. Ленингр. физ.-матем. обва》, 2 (1928), 1, 155 – 179.

[2] Keldysh, M. V. and Lavrent'ev, M. A., Sur la répresentation conforme des domaines limités, *Ann. Sci. École Normale Sup.*, 54 (1937), 1 – 38.

[3] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950.

[4] Ловатер, А., в кн: Итоги науки, Матем. анализ. М., 10 (1973), 99 – 259.

[5] Тумаркин, Г. Ц., 《Вестн. Ленингр. ун-та》, 17 (1962), 13, 47 – 55.

Е. П. Долженко 撰

【补注】 Привалов 的书[3]的德文译本[A1]是关于 Смирнов 类和区域的最详尽的西文参考文献. 用英文写的参考文献有[A2].

参考文献

[A1] Privalov, I. I., Rundeigenschaften analytischer Funktionen, Deutsch. Verlag Wissenschaft, 1956

[A2] Duren, P. L., Theory of H^p spaces, Acad. Press, 1970.

杨维奇 译

Смирнов 检验[Smirnov test; Смирнова критерий], Смирнов 双样本检验(Smirnov 2-samples test)

检定两个样本齐一性假设的非参数(或分布自由)检验.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,\cdots,Y_m$ 是相互独立的随机变量, 并且每个样本由服从同一连续型分布的元素组成. 需要检定关于"两个样本来自同一总体"的假设. 如果

$$X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)} \text{ 和 } Y_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant Y_{(m)}$$

是对应于所给样本的顺序统计量, 而 $F_n(x)$ 和 $G_n(x)$ 是基于这些统计量的经验分布函数, 那么 H_0 可表示为恒等式的形式:

$$H_0:\mathrm{E}F_n(x)\equiv\mathrm{E}G_m(x).$$

此外, 考虑 H_0 可能的备选假设

$$H_1^+:\sup_{|x|<\infty}\mathrm{E}[G_m(x)-F_n(x)]>0,$$

$$H_1^-:\inf_{|x|<\infty}\mathrm{E}[G_m(x)-F_n(x)]<0,$$

$$H_1:\sup_{|x|<\infty}|\mathrm{E}[G_m(x)-F_n(x)]|>0.$$

为检定假设 H_0 对单边备选假设 H_1^+ 和 H_1^-, 以及 H_0 对双边备选假设 H_1, Н. В. Смирнов 提出基

于如下统计量的统计检验:

$$D^{+}_{m,n}=\sup_{|x|<\infty}\left[G_m(x)-F_n(x)\right]=$$

$$=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\left[\frac{k}{m}-F_n(Y_{(k)})\right]=$$

$$=\max_{1\leqslant s\leqslant n}\left[G_m(X_{(s)})-\frac{s-1}{n}\right],$$

$$D^{-}_{m,n}=-\inf_{|x|<\infty}\left[G_m(x)-F_n(x)\right]=$$

$$=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\left[F_n(Y_{(k)})-\frac{k-1}{m}\right]=$$

$$=\max_{1\leqslant s\leqslant n}\left[\frac{s}{n}-G_m(X_{(s)})\right],$$

$$D_{m,n}=\sup_{|x|<\infty}|G_m(x)-F_n(x)|=\max(D^{+}_{m,n},\ D^{-}_{m,n});$$

由 $D^{+}_{m,n}$ 和 $D^{-}_{m,n}$ 的定义知，当被检定假设 H_0 成立时，统计量 $D^{+}_{m,n}$ 和 $D^{-}_{m,n}$ 同分布．渐近检验基于如下定理：如果 $\min(m,n)\to\infty$ 且比值 m/n 保持不变，则在假设 H_0 成立的情形下，对于任意 $y>0$，有

$$\lim_{m\to\infty}\mathrm{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\,D^{+}_{m,n}<y\right\}=1-e^{-2y^2},\ y>0,$$

$$\lim_{m\to\infty}\mathrm{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\,D_{m,n}<y\right\}=K(y),\ y>0,$$

其中 $K(y)$ 是 Колмогоров 分布函数（见 **Смирнов 估计量**（Smirnov estimator））．已得到了统计量 $D^{+}_{m,n}$ 和 $D_{m,n}$ 的分布函数的渐近展开式（见[4]－[6]）．

根据水平 α 的 Смирнов 检验，如果统计量 $D^{+}_{m,n}$，$D^{-}_{m,n}$ 和 $D_{m,n}$ 超出检验的水平 α 临界值，则否定 H_0 相应地接受备选假设 H^{+}_1，H^{-}_1 或 H_1．临界值的计算可以利用 Л．Н．Большев（[2]）基于 Pearson 渐近变换得到的渐近式．

亦见 **Колмогоров 检验**（Kolmogorov test）；**Колмогоров-Смирнов 检验**（Kolmogorov-Smirnov test）．

参考文献

[1] Смирнов，Н．В．，《Бюлл．МГУ》，2（1939），2，3－14．

[2] Большев，Л．Н．，《Теор．вероятн．и её прим-мен.》，8（1963），2，129－155．

[3] Большев，Л．Н．，Смирнов，Н．В．，Таблицы математической статистики，2 изд，М．，1983．

[4] Королюк，В．С．，《Теор．вероятн．и её применен.》，4（1959），4，369－397．

[5] Чжан Ли-цянь，《Математика》，4（1960），2，135－159．

[6] Боровков，А．А．，《Изв．АН СССР сер．матем.》，26（1962），4，605－624．

М．С．Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Owen，D．B．，A handbook of statistical tables，Addison-Wesley，1962．

[A2] Pearson，E．S．and Hartley，H．O．，Biometrika tables for statisticians，2，Cambridge Univ．Press，1972．

周概容　王健 译

光滑连续统［smooth continuum；гладкий континуум］，*在点 p 的*

一个连续统（continuum）X，使得对 X 中每个收敛于点 x 的点序列 $x_1,\cdots,x_n,\cdots$ 和包含 p 和 x 的每个子连续统 $K\subset X$，都存在一个收敛于 K 的 X 的子连续统序列 $\{K_n\}$，p，$x_n\in K_n$．在每个点都光滑的连续统称为光滑的（smooth）．　　A．A．Мальцев 撰

【补注】 在唯一弧连通连续统（uniquely arcwise-connected continuum）或树形（dendroid）的类中，光滑性的定义略有不同（连续统 X 是唯一弧连通的，如果对 X 中每个 x 和 y，存在 X 中连接 x 和 y 的唯一的弧 $[x,y]$）．唯一弧连通连续统称为光滑的（smooth），如果存在 $p\in X$，使得在 X 中当 $x_n\to x$ 时 $[p,x_n]\to[p,x]$．这样的点 p 称为 X 的起始点（initial point）．

参考文献

[A1] Charatonik，J．J．and Eberhart，C．，On smooth dendroids，*Fund．Math*．，67（1970），297－322．

白苏华　胡师度 译

光滑函数［smooth function；гладкая функция］

每个自变量值均为光滑点（见**函数的光滑点**（smooth point of a function））的函数．光滑函数可以不连续．若光滑函数在某区间上连续，则它的可微点的集合在该区间上是稠密的，且有连续统的势．存在实轴上非几乎处处可微的连续光滑函数．光滑函数在它的每个局部极值点都有导数；由此可知，微分学中的基本定理，Rolle 定理，Lagrange 定理，Cauchy 定理，Darboux 定理等对于光滑的连续函数都是正确的．

В．И．Емельянов 撰

【补注】 注意，任何加性函数（additive function）f（即 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对一切 x，y）是光滑的．存在处处不连续的加性函数．

上述光滑函数概念不大常用．"光滑函数"通常指的是"充分可微的函数"，甚至理解为 C^{∞} 函数（无穷次可微的函数）；它也可理解为"光滑模满足某种增长条件"的函数（亦见**光滑模**（smoothness，modulus of））．

王斯雷 译

光滑态射［smooth morphism；гладкий морфизм］，*概形的*

非奇异代数簇（algebraic variety）的族的概念到

概形情形的推广．在复代数簇的态射的经典情形下，这个概念归结为复流形的正则映射（浸没）的概念．概形的有限可表（局部）态射 $f: X \to Y$ 称为光滑态射（smooth morphism），如果 f 是平坦态射（flat morphism），并且对任意的 $y \in Y$ 纤维 $f^{-1}(y)$ 是（域 $k(y)$ 上的）**光滑概形**（smooth scheme）．如果结构态射 $f: X \to Y$ 是光滑态射，则称概形 X 是概形 Y 上的光滑概形（smooth scheme over a scheme），或光滑 Y 概形（smooth Y-scheme）．

光滑 Y 概形的一个例子是仿射空间 A_Y^n．光滑态射的一个特殊情形是**艾达尔态射**（étale morphism）．反之，任何光滑态射 $f: X \to Y$ 都能关于 X 局部地分解为艾达尔态射 $X \to A_Y^n$ 和射影 $A_Y^n \to Y$ 的复合．

光滑态射的复合仍是光滑态射．这对换基也正确．光滑态射可由它的微分性质来判别：一个有限可表平坦态射 $f: X \to Y$ 是光滑态射，当且仅当相对微分层是局部自由层，在点 x 处的秩为 $\dim_x f$．

光滑态射的概念类似于拓扑学中 **Serre 纤维化**（Serre fibration）的概念．例如复代数簇的光滑态射是一个局部平凡可微纤维化．在一般情形里下述类似于覆叠同伦公理的陈述是正确的：对于任何**仿射概形**（affine scheme）Y'，它的可由幂零理想定义的闭子概形 Y'_0 以及任何态射 $Y' \to Y$，典范映射 $\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(Y'_0; X)$ 是满的．

如果 $f: X \to Y$ 是光滑态射，且点 $y \in Y$ 处的**局部环**（local ring）$\mathcal{O}_{Y,y}$ 是正则的（相应地：正规的或约化的），则使 $f(x) = y$ 的点 $x \in X$ 处的局部环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 也具有相同性质．

参考文献

[1] Grothendieck, A., Eléments de géométrie algébrique Ⅳ, Etude locale des schémas et des morphismes des schémas, *Publ. Math. IHES*, 1967, 32.

[2] Grothendieck, A., et al. (eds.): Revêtements étales et groupe fondamental, SGA. 1, Springer, 1971.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

函数的光滑点 [smooth point of a function; гладкая точка функции]

函数 f 的自变量的值 x，在该点满足条件

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|}{|h|} = 0.$$

函数的可微点是光滑点；一般地说，其逆不真．如果一个单侧导数在光滑点存在，那么在该点也存在通常的导数．

В. Ф. Емельянов 撰

【补注】 注意，任何奇函数，不论连续与否，$x=0$ 总是它的光滑点．对任意的加性函数 f（即 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 对一切 x, y），所有点都是光滑的．

亦见**光滑函数**（smooth function）． 王斯雷 译

光滑概形 [smooth scheme; гладкая схема]

非奇异代数簇（algebraic variety）概念的推广．域 k 上（局部）有限型概形（scheme）称为（k 上的）光滑概形（smooth scheme），如果把常数域 k 换成它的代数闭包 $\bar{k}$ 后从 X 得到的概形是**正则概形**（regular scheme），即它的所有局部环均正则．对于完满域 k，k 上光滑概形与 k 上正则概形的概念是相同的．特别地，代数闭域上有限型光滑概形是非奇异代数簇．在复数域的情形下，非奇异代数簇具有复**解析流形**（analytic manifold）的结构．

概形是光滑的，当且仅当它可被光滑邻域覆盖．如果概形 X 的某个点有一个邻域，X 在这个邻域里是光滑的，则称此点为简单点（simple point），否则称为奇点（singular point）．连通光滑概形是不可约的．光滑概形的积是光滑概形．一般地，如果 Y 是 k 上光滑概形，$f: X \to Y$ 是**光滑态射**（smooth morphism），则 X 是 k 上光滑概形．

仿射空间 A_k^n 和射影空间 $\mathbf{P}_k^n$ 是 k 上光滑概形．完满域上的代数群（即约化代数群概形）是光滑概形．代数闭域上的约化概形在一个到处稠密的开集上光滑．

如果概形 X 是在仿射空间 A_k^m 里由方程

$$F_i(X_1, \cdots, X_m) = 0,\ i = 1, \cdots, n,$$

所定义，则点 $x \in X$ 是简单的，当且仅当 Jacobi 矩阵 $\| \partial F_i / \partial X_j(x) \|$ 的秩等于 $m - d$，这里 d 是 X 在 x 的维数（Jacobi 准则（Jacobi criterion））．在更一般的情形下，由理想层 I 定义的光滑簇 Y 的闭子概形 X 在点 x 的一个邻域里光滑，当且仅当存在理想 I_x 在环 $\mathcal{O}_{X,x}$ 里的生成元系 $g_1, \cdots, g_n$，使得 $dg_1, \cdots, dg_n$ 成为微分层 $\Omega_{X/k,x}$ 自由 $\mathcal{O}_{X,x}$ 模的基的一部分．

参考文献

[1] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972（英译本：Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977）.

[2] Grothendieck, A., Eléments de géométrie algébrique Ⅳ, Etude locale des schémas et des morphismes des schémas, *Publ. Math. IHES*, 32 (1967).

[3] Zariski, O., The concept of a simple point of an abstract algebraic variety, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 62 (1947), 1–52.

В. И. Данилов, И. В. Долгачев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

光滑空间 [smooth space; гладкое пространство]

一种赋范空间 (normed space) 其中对 $\|x\|=1$ 的任意点 x 存在唯一的泛函 $f\in X^*$ 使得 $f(x)=\|f\|=1$. 空间 X 是光滑的, 当且仅当它的范数在 $\|x\|=1$ 的所有点 x 有 **Gâteaux 微分** (Gâteaux differential).

Л. П. Власов 撰

【补注】 设 A 是实线性拓扑空间中的一个立体的 (即 A 有非空的内部) 凸集. 点 $a\in A$ 是一个**支撑点** (support point), 如果存在通过 a 的超平面 H 使得 A 整个地包含于 H 决定的两个半空间之一. 一个支撑点 $a\in A$ 是光滑的 (smooth) (且称为 A 的**光滑点** (smooth point)), 如果只存在一个闭超平面**支撑** A 于 a. 集合 A 是光滑的, 如果每一边界点是光滑的. 空间是**光滑的**或**光滑赋范的** (smoothly normal), 如果其单位球是光滑的. 每一可分 Banach 空间可光滑地重新赋范, 即存在一个等价的光滑范数.

"光滑"的对偶性质是**严格凸** (strictly convex): 任何不恒为零的连续线性泛函在闭单位球上至多在一个点上取得最大值, 或等价地, 闭单位球上不同的边界点有不同的支撑超平面. 对线性赋范空间 X, 如果对偶空间 X^* 是光滑的 (分别地, 严格凸), 则 X 是严格凸的 (分别地, 光滑的).

参考文献

[A1] Holmes, R. B., Geometric functional analysis and its applications, Springer, 1975.

[A2] Barbu, V. and precupanu, Th., Cenvexity and optimization in Banach space, Reidel, 1986.

葛显良 译 鲁世杰 校

光滑模 [smoothness, modulus of; гладкости модуль]

定义在 Banach 空间 X 上函数 f 的任意 $m(m\geqslant 1)$ 阶连续模, 即表达式

$$\omega_m(f,\delta,X)=$$

$$=\sup_{\substack{h,x\in X\\ \|h\|_X\leqslant\delta}}\left\|\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}f\left(x+(m-2i)\frac{h}{2}\right)\right\|_X,$$

其中 $(x\pm mh/2)\in X$. 若 $m=1$, 光滑模就是函数 f 通常的**连续模** (continuity, modulus of). (当 $X=C$, 连续函数空间情形) 光滑模的基本性质有:

$$\omega_m(f,0,C)=0;$$

$\omega_m(f,\delta,C)$ 为 δ 的不减函数;

若 $k\geqslant 1$ 为整数, 则

$$\omega_m(f,k\delta,C)\leqslant k^m\omega_m(f,\delta,C);$$

对任意 $\lambda>0$,

$$\omega_m(f,\lambda\delta,C)\leqslant(\lambda+1)^m\omega_m(f,\delta,C);$$

若 $\nu>m$, 则

$$\omega_\nu(f,\delta,C)\leqslant 2^{\nu-m}\omega_m(f,\delta,C);$$

若 $\nu>m$, 则

$$\omega_m(f,\delta,C)\leqslant$$

$$\leqslant A_{\nu,m}\delta^\nu\int_\delta^a\frac{\omega_m(f,u,C)}{u^{\nu+1}}\,du+O(\delta^\nu),$$

其中 $A_{\nu,m}$ 与 a 均为与 f 无关的常数.

函数逼近论中的某些问题, 只有利用阶数 $\geqslant 2$ 的光滑模才能得到彻底的解决. 在函数逼近论中, 以 2π 为周期且二阶光滑模满足条件

$$\omega_2(f,\delta,C_{2\pi})\leqslant\delta$$

的连续周期函数, 是一个重要的函数类. 这类函数的连续模有如下的估计:

$$\omega_1(f,\delta,C_{2\pi})\leqslant\left[\frac{1}{\ln(\sqrt{2}+1)}\right]\delta\ln\frac{\pi}{\delta}+O(\delta),$$

$0<\delta\leqslant\pi$, 其中常数 $1/\ln(\sqrt{2}+1)$ 不能再改进 ([4]).

参考文献

[1] Бернштейн, С. Н., Собр. сочинений, т. 1, с. 37, М., 1952.

[2] Marchaud, A., Sur la dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles, *J. Math. Pures Appl.*, 6 (1972), 337 – 425.

[3] Zygmund, A., Smooth functions, *Duke Math. J.*, 12 (1945), 47 – 76.

[4] Ефимов, А. В., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», 21 (1957), 2, 283 – 288.

А. В. Ефимов 撰

【补注】 光滑模 $\omega_m(f,\delta)$ 也可以利用对称差分写成

$$\omega_m(f,\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\|\Delta_h^m f\|,$$

其中

$$\Delta_h^1 f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

且

$$\Delta_h^m f(x)=\Delta_h(\Delta_h^{m-1}f(x))=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}f\left(x+(m-2i)\frac{h}{2}\right).$$

这就给出了计算它的(逼近值的)递归方法.

为了克服这种(经典)光滑模的某些不足(特别是想要刻画函数 $f \in L_p[-1,1]$ 的最佳多项式逼近 $E_n(f)$ 的阶),已经引入了一种新的光滑模. 它们通过所谓的阶梯权函数 $\varphi(x)$ 定义为

$$\omega_\varphi^m(f,\delta)_p = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|\Delta_{h\varphi}^m f\|_{L_p}$$

函数 $\varphi(x)$ 可根据研究的问题来选取. 注意这里的增量 $h\varphi(x)$ 随 x 而变化. 一个基本结果是, $E_n(f)_p = O(n^{-\alpha})$, 当且仅当 $\omega_\varphi^m(f,\delta)_p = O(t^\alpha)$. (此处 $0<\alpha<m$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\varphi(x) = (1-x^2)^{1/2}$, $f \in L_p[-1,1]$, 且逼近在 $L_p[-1,1]$ 中考虑.) 关于这种光滑模, 以及它们在 L_p 逼近问题与空间的插值等方面的应用, 见[A1].

参考文献

[A1] Ditzian, Z. and Totik, V., Moduli of smoothness, Springer, 1987.

[A2] Lorentz, G. G., Approximation of functions, Holt, Rinehart & Winston, 1966 (中译本: G. G. 洛伦茨, 函数逼近论, 上海科学技术出版社, 1981).

王斯雷 译

蛇形连续统 [**snake-like continuum**; **змеевидный континуум**]

一个连续统(continuum), 使得对任意 $\varepsilon>0$, 容许一个其神经(见**集族的神经**(nerve of a family of sets))是有限线性复形的开覆盖. 换句话说, 对任意 $\varepsilon>0$, 此连续统必被满足下列条件的有限开集系 $G_n(n=1,\cdots,p)$ 覆盖: 每个 G_n 的直径都小于 ε, 且 $G_i \cap G_j \neq \varnothing$ 的充要条件是 $|i-j|=1$(这样的系称为 ε 链(ε-chain)). 每个蛇形连续统在其任意点对之间都是不可约的(见**不可约连续统**(irreducible continuum)). 蛇形连续统的所有子连续统都是蛇形的. 不止含一个点的两个遗传不可分解蛇形连续统(见**不可分解连续统**(indecomposable continuum))是同胚的; 这些事实对伪弧(pseudo arc)是已知的. 所有蛇形连续统都可拓扑嵌入平面. 任何齐次蛇形连续统都是伪弧. 每个蛇形连续统都是伪弧的连续象和弧的逆谱的极限.

参考文献

[1] Kuratowski, K., Topology, 2, Acad. Press, 1968(译自法文).

A. A. Мальцев 撰

【补注】 蛇形连续统也称为链形连续统(chainable continuum).

白苏华 胡师度 译

Snedecor 分布 [**Snedecor distribution**; **Снедекора распределение**]

见 **Fisher *F* 分布**(Fisher *F*-distribution).

Snobol 语言 [**Snobol**; **Снобол**]

为处理符号信息的程序设计问题而设计的**算法语言**(algorithmic language), 数据用某个字母表上的字表示. 在程序设计的文献中, 这种字称为(字符)串(string), 组成它们的符号称为字母(letter)或记号(token). 基于 20 世纪 60 年代早期开发的 Snobol 语言的原始形式, 创立了语言的几个版本, 其中最稳定的是 Snobol-4 语言. 如在 **Refal 语言**(Refal)的情况一样, Snobol 有它自己的理论前提: Марков 正规算法(见**正规算法**(normal algorithm)), 基本的计算操作是在 A 中发现给定的子串 B, 随后由另一个串 C 代替它.

Snobol 中程序的一般结构在算法语言中有典型性. 程序有授与, 与模型比较, 代入, 控制传输, 输入, 演绎和暂停等一系列操作符(指令(instruction))的形式. 在这种表达式中使用的初等操作是谓词和函数, 也有由程序员定义的函数(包括递归函数). 任何指令能加标号. Snobol 语言中标号能被作为行变量处理, 它的值是由此标号所标的指令. 基本数据类型是行、整数、实数、名字和模型. 最基本的类型是行, 所有其他数据在程序中有一个与标记它们的方法相符合的行表示. 同类数据能组合在组和表中, 任意数据可以组合在给定长度的集合中, 对集合的每个位置(字段(field))有规定的名字. 名字表示变量, 标号, 形式参数和函数. Snobol 语言中的行能有任意长度, 变量没有一个固定属于它们的类型, 虽然每个操作或初等函数的操作数(见**运算对象**(operand))期望(expect)特定类型的数据, 变换变元到期望的类型或发出出错信息.

Snobol 语言中最典型的操作是行与模型的比较. 在 Snobol 语言中, 模型(model)是一个专门术语, 它按某种顺序创建一组控制行(control line)和沿着称为主体(subject)的规定行从左到右移动(扫描(scanning))的专门动作. 比较是一系列基本检验. 基本检验确立下一控制行是否主体剩余部分(扫描点的右部)的子行. 依据基本检验的成功或失败, 或者精心制作有关整个比较成功或失败的信息, 或者转移到模型的下一控制行并转移扫描点. 作为成功比较的结果, 主体中有一系列子行被选择. 这些子行能被上述变量授予或由其他子行代替.

原始的模型是表达式, 它的值是行, 比较的成功由该行在主体中出现所组成. 两个模型 A 和 B 的毗连(concatenation) AB 创建一个模型, 与它成功的比较要求与 A 比较成功, 接着主体的剩余部分与 B 比较成功. 两个模型 A 和 B 的交替(alternation) $A|B$ 创建一个模型, 与它成功的比较意味着与 A 或 B 比较成功. 如果 A 是模型, X 是变量, 则构造 A, X

表示这样一个模型，它的成功比较维持 X 的值为一个控制行，该控制行在主体中的出现导致成功.

与模型比较的指令有形式 VA，其中 V 是变量-主体（variable-subject），A 是模型. 条件控制转移由指令 VA: $F(M_1)S(M_2)$ 表示，其中 M_1 和 M_2 分别是比较失败和成功情况时的转移标号. 替换指令有形式 $VA=E$，其中 E 是行表达式，它的值在一个成功的比较中代替 V 中选择的子行.

Snobol 语言有一个颇具规模的初等函数库，与拼接操作和交替操作组合在一起，使人们能创建大量的模型，并紧凑地用代替指令的形式编写行分析和变换的很复杂的规则. Snobol 语言中的程序通过解释型的程序设计处理程序来开发. 程序被翻译成中间形式，借助于解释器而执行它. Snobol 语言已经在所有主要的当代计算机体系结构上实现. 这个语言的实现帮助了在计算机存储器中操纵变长行的有效算法的开发.

参考文献

[1] Farber, D. J., Griswold, R. E. and Polonsky, I. P., SNOBOL, a string manipulation language, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 11 (1964), 1, 21-30.

[2] Griswold, R. E., String and list processing in SNOBOL 4. Techniques and applications, Prentice-Hall, 1975.

[3] Griswold, R., Poage, J. and Polonsky, I., The SNOBOL-4 programming language, Prentice-Hall, 1968.

А. П. Ершов 撰 程 虎 译 刘椿年 校

Соболев 函数类 [Sobolev classes (of functions); Соболева класс функций]

Соболев 空间 (Sobolev space) 的另一名称.

Соболев 广义导数 [Sobolev generalized derivative; Соболева обобщенная производная]

局部可积函数的局部可积广义导数（见广义函数 (generalized function)).

确切地说，假设 Ω 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的开集，F 和 f 都是 Ω 上局部可积函数，那么 f 是 F 在 Ω 上关于 x_j 的 Соболев 广义偏导数，记为

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)=f(x),\ x\in\Omega,\ j=1,\cdots,n,$$

是指对 Ω 上所有具紧支集的无限次可微函数 φ，等式

$$\int_\Omega F(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx=-\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

成立. Соболев 广义导数在 Ω 上仅对几乎处处的 x 有定义.

一个等价的定义如下. 假设 Ω 上局部可积函数 F 能在某个 n 维零测度集上改变它的值成为这样一个函数，使后者对几乎所有（依 $n-1$ 维测度）的点 $(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n)$ 关于 x_j 是一元局部绝对连续的. 于是 F 对几乎所有的 $x\in\Omega$，存在关于 x_j 的通常偏导数. 如果后者局部可积，则称它为 Соболев 广义导数.

第三种等价的定义是：给定两个函数 F 与 f，若在 Ω 上存在连续可微函数列 $\{F_k\}$，使对其闭包含于 Ω 的任意区域 ω 都有

$$\int_\omega|F_k(x)-F(x)|dx\to 0,$$

$$\int_\omega\left|\frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j}-f(x)\right|dx\to 0,\ k\to\infty,$$

则 f 就是 F 在 Ω 上的 Соболев 广义导数.

F 在 Ω 上的高阶广义导数（若存在）

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j},\quad\frac{\partial^3 F}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k},\cdots$$

可由归纳法定义. 它们与微分的次序无关；例如在 Ω 上几乎处处有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_i}.$$

参考文献

[1] Соболев, С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 2 изд, Новосиб., 1962（中译本：С. Л. 索伯列夫. 泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959).

[2] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975（中译本：С. М. 尼科尔斯基. 数学分析教程，第二卷一分册，高等教育出版社，1992).

С. М. Никольский 撰

【补注】 在西方文献中，Соболев 广义导数称为**弱导数** (weak derivative) 或**分布导数** (distributional derivative).

参考文献

[A1] Schwartz, L., Théorie des distributions, Hermann, 1973.

[A2] Yosida, K., Functional analysis, Springer, 1980（中译本：吉田耕作，泛函分析，人民教育出版社，1981).

王斯雷 译

Соболев 空间 [Sobolev space; Соболева пространство]

定义在集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$（通常是开集）上且函数本身及其直到 l 阶的广义导数 (generalized derivative) 的绝对值的 p 次幂可积的函数 $f=f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 的空间 $W_p^l(\Omega)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

函数 $f\in W_p^l(\Omega)$ 的范数由

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)}=\sum_{|k|\leqslant l}\|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)}\qquad(1)$$

给出．这里

$$f^{(k)}=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\ f^{(0)}=f,$$

是 f 的次数为 $|k|=\sum_{j=1}^{n}k_j$ 的广义偏导数，且

$$\|\psi\|_{L_p(\Omega)}=\left[\int_\Omega|\psi(x)|^p dx\right]^{1/p}\qquad(1\leqslant p\leqslant\infty).$$

当 $p=\infty$ 时，这范数等于本质上确界：

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}=\operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega}|\psi(x)|\quad(p=\infty),$$

即等于使得在一零测集上使 $A<|\psi(x)|$ 的所有 A 的集合的最大下界．

空间 $W_p^l(\Omega)$ 是由 С. Л. Соболев 定义并且首先应用于数学物理的边值问题理论（见[1]，[2]）．

由于其定义中包含广义导数而非普通导数，它是完全的，即是 **Banach 空间**（Banach space）．

$W_p^l(\Omega)$ 是与在 Ω 上有一致连续的 l 阶偏导数的函数组成的线性子空间 $W_{pc}^l(\Omega)$ 联系起来考虑的．$W_{pc}^l(\Omega)$ 有优于 $W_p^l(\Omega)$ 之处，虽然它按 $W_p^l(\Omega)$ 的度量不闭且不是完全空间．然而，对广泛的一类区域（有 Lipschitz 边界的区域，见下面）对所有的 p，$1\leqslant p<\infty$，空间 $W_{pc}^l(\Omega)$ 在 $W_p^l(\Omega)$ 中稠密，即对这种区域空间 $W_p^l(\Omega)$ 除了完全性之外还具有一个新性质，即属于它的每个函数可按 $W_p^l(\Omega)$ 的度量用 $W_{pc}^l(\Omega)$ 中函数来任意好地逼近．

有时对 $f\in W_p^l(\Omega)$ 的范数，取代表达式（1）而用下式是方便的：

$$\|f\|'_{W_p^l(\Omega)}=\left[\int_\Omega\sum_{|k|\leqslant l}|f^{(k)}(x)|^p dx\right]^{1/p}\qquad(1')$$

$$(1\leqslant p<\infty).$$

范数（1′）等价于范数（1），即 $c_1\|f\|\leqslant\|f\|'\leqslant c_2\|f\|$，其中 $c_1,c_2>0$ 不依赖于 f．当 $p=2$ 时，（1′）是一个 Hilbert 范数，且这事实在应用中广泛地用到．

有界区域 Ω 的边界 Γ 称为 Lipschitz 的，如果对任何 $x^0\in\Gamma$ 存在一个以 x^0 为原点的直角坐标系 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，使得方体

$$\Delta=\{\xi:|\xi_j|<\delta,j=1,\cdots,n\}$$

与 Γ 的交 $\Gamma\cap\Delta$ 可用函数 $\xi_n=\psi(\xi')$ 描述，其中

$$\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in\Delta'=$$
$$=\{|\xi_j|<\delta,j=1,\cdots,n-1\},$$

ξ' 在 Δ'（Δ 在平面 $\xi_n=0$ 上的投影）上满足 Lipschitz 条件

$$|\psi(\xi_1')-\psi(\xi_2')|\leqslant M|\xi_1'-\xi_2'|,$$
$$\xi_1',\ \xi_2'\in\Delta',$$

这里常数 M 不依赖于点 ξ_1'，ξ_2'，且 $|\xi|^2=\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2$．所有光滑的和许多分片光滑的边界是 Lipschitz 边界．

对带 Lipschitz 边界的区域，（1）等价于下式：

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)}=\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|f\|'_{W_p^l(\Omega)},$$

其中

$$\|f\|'_{W_p^l(\Omega)}=\sum_{|k|=l}\|f^{(k)}\|_{L_p(\Omega)}.$$

可以考虑更一般的非迷向空间类 $W_p^{\mathbf{l}}(\Omega)$，其中 $\mathbf{l}=(l_1,\cdots,l_n)$ 是一正向量（见**嵌入定理**（imbedding theorems））．对每一个这样的向量 $\mathbf{l}$，可以有效地且在已知范围内是穷竭地定义一个区域类 $\mathfrak{M}^{(\mathbf{l})}$ 具有这样的性质：如果 $\Omega\in\mathfrak{M}^{(\mathbf{l})}$，则任何函数 $f\in W_p^{\mathbf{l}}(\Omega)$ 可延拓到 $\mathbf{R}^n$ 且保持在同一类中．更确切地说，可以定义一个 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $\bar f$ 具有性质

$$\bar f(x)=f(x),\ x\in\Omega,\ \|\bar f\|_{W_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)}\leqslant c\|f\|_{W_p^{\mathbf{l}}(\Omega)},$$

其中 c 不依赖于 f（见[3]）．

由于这个性质，在关于函数 $f\in W_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)$ 的嵌入定理中发现的这类型的不等式可自动地转移到函数 $f\in W_p^{\mathbf{l}}(\Omega)$，$\Omega\in\mathfrak{M}^{(\mathbf{l})}$．

对向量 $\mathbf{l}=(l,\cdots,l)$，区域 $\Omega\in\mathfrak{M}^{(\mathbf{l})}$ 有 Lipschitz 边界且 $W_p^{\mathbf{l}}(\Omega)=W_p^l(\Omega)$．

空间（类）$W_p^{\mathbf{l}}(\Omega)$（$\Omega\in\mathfrak{M}^{(\mathbf{l})}$）的研究是基于对属于这些类的函数的特殊的积分表示．第一个这样的表示是关于某个球的星形区域 Ω 上的迷向空间 $W_p^l(\Omega)$ 得到的（见[1]，[2]）．这方法的进一步发展，可见例如[3]．

类 W_p^l 和 $W_p^{\mathbf{l}}$ 可推广到分数 l 或带有分数分量 l_j 的向量 $\mathbf{l}=(l_1,\cdots,l_n)$．

空间 $W_p^l(\Omega)$ 也可对负整数 l 定义．其元素通常是广义函数，即 Ω 中具有紧支集的无穷次可微函数 φ 上的线性泛函 (f,φ)．

按定义一个**广义函数**（generalized function）f 属于类 $W_p^{-l}(\Omega)$（$l=1,2,\cdots$），如果

$$\|f\|_{W_p^{-l}(\Omega)}=\sup(f,\varphi)$$

是有限的，其中上确界是对所有其范数最多为 1 的函数 $\varphi\in W_q^l(\Omega)$ 取的（$1/p+1/q=1$）．函数 $f\in W_p^{-l}(\Omega)$ 构成对偶于 Banach 空间 $W_q^l(\Omega)$ 的空间．

参考文献

[1] Соболев，С. Л.，《Матем. сб.》，4（1938），471－497．

[2] Соболев，С. Л.，Некоторые применения функционального анализа в математической физике，2 изд.，Новосиб.，1962（中译本：С. Л. 索伯列夫，

泛函分析在数学物理中的应用，科学出版社，1959).

[3] Бесов, О. В., Ильин, В. П., Никольский, С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1974(英译本: Besov, O. V., Il'in, V. P. and Nikol'skii, S. M., Integral representations of functions and imbedding theorems, 1–2, Winston, 1978).

[4] Никольский, С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969 (英译本: Nikol'skii, S. M., Approximation of functions of several variables and imbedding theorems, Springer, 1975). С. М. Никольский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Mažja, V. G., Sobolev spaces, Springer, 1985.

[A2] Trèves, F., Basic linear partial differential equations, Acad. Press, 1975, Sects. 24–26.

[A3] Adams, R. A., Sobolev spaces, Acad. Press, 1975 (中译本: R. A. Adams, 索伯列夫空间，人民教育出版社，1983). 葛显良 译

基座[socle; цоколь]，模的

模的所有单子模的和．当其不存在时，基座取作0．与这个定义相应，可在环中考虑环的左基座(left socle)及右基座(right socle)．其中每一个都是一个双侧理想，并且在环的所有自同态下不变．基座可以表示成单模的直和．**完全可约模**(completely-reducible modules)(半单模(semi-simple modules))可以刻画成与其基座重合的模． Л. А. Скорняков 撰

【补注】 模 M 的子模 N 称为大的(large)，或本质的(essential)，如果对 M 的每个非零子模 N'，有 $N\cap N'\neq 0$. N 在 M 中的补(complement)(以及本质补(essential complement))是一个子模 N'，使得 $N\cap N'=0$ 且 $N+N'=M$(以及 $N\cap N'=0$，$N+N'$ 是大的)．模称为有补的(complemented)，如果每个子模有一个补．每个子模总有一个(不必唯一)本质补．一个模是有补的，当且仅当模是完全可约的．因而当且仅当模与其基座重合．M 的基座也可以定义为 M 的所有本质子模的交．基座是最大的半单子模．

更一般地，对模格 $\mathscr{L}$，一个元素 $a\in\mathscr{L}$ 是大的，或本质的，如果对所有 $b\neq 0$，有 $a\wedge b\neq 0$．模格的基座(socle of a modular lattice)定义为 $\wedge\{\mathscr{L}$ 的大元$\}$．区间 $[0, \mathrm{soc}(\mathscr{L})]$ 是一个有补格．

参考文献

[A1] Rowen, L. H., Ring theory, 1, Acad. Press, 1988, § 2.4.

[A2] Faith, C., Algebra: rings, modules, and categories, 1, Springer, 1973, p. 367. 蔡传仁 译

软层[soft sheaf; мягкий пучок]

拓扑空间 X 上集合的层(sheaf) $\mathscr{F}$，它在 X 内闭子集上的截面都可扩张为 $\mathscr{F}$ 在整个 X 上的截面．软层的例子是：X 上任意一个集合层的不连续截面的芽层；**仿紧空间**(paracompact space) X 上的**松弛层**(flabby sheaf)；仿紧空间 X 上 Abel 群的**优层**(fine sheaf)．仿紧空间 X 上层 $\mathscr{F}$ 的软性是局部的：层 $\mathscr{F}$ 是软的，当且仅当任意的 $x\in X$ 都有一个开邻域 U，使得 $\mathscr{F}|_U$ 是 U 上软层．仿紧空间上的软层在任意闭子空间(当 X 可度量时，在任意局部闭子空间)上诱导一个软层．环的软层上的模层是软层．

如果

$$0\to\mathscr{F}^0\to\mathscr{F}^1\to\cdots$$

是仿紧空间 X 上 Abel 群的软层的正合列，则截面群的相应序列

$$0\to\mathscr{F}^0(X)\to\mathscr{F}^1(X)\to\cdots$$

也正合．仿紧空间 X 上 Abel 群的软层 $\mathscr{F}$ 的上同调群 $H^p(X,\mathscr{F})$ 当 $p>0$ 时是平凡的．

参考文献

[1] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[2] Wells, jr., R. O., Differential analysis on complex manifolds, Springer, 1980. А. Л. Онищик 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bredon, G., Sheaf theory, McGraw-Hill, 1967, §9. 陈志杰 译

软件[software; математическое обеспечение]，计算机软件(computer software)

程序和程序复合体的集合，它们的作用是：用高级算法语言编写成的用户程序中的算法，被转换成计算机理解的一串指令；组织用户作业在计算机中的自动执行；提供计算机设备的有效使用(见[1]–[4])．

软件的出现是由于使用计算机的程序员和专家需要提高生产率．从能写算法的观点来看，计算机指令是很基本的操作，把算法写成一串指令是艰苦的工作．这就激励创建**自动程序设计**(automatic programming)的功能．已有计算机能理解的增强的操作，但这还不能解决问题．一般说来，即使在现代计算机，指令只表示基本操作．在产生软件工具方面已有重大进展，它使编程更容易．第一步是软件生产允许用自动代码(autocode)编程．事实上，自动代码的程序表示同一串计算机指令，但是是用助忆符号编写．程序的助忆码变换到机器指令是由一个专门程序，即汇编程序(assembler)来执行．下一步，出现宏汇编程序(macro-assembler)，它给出使用宏操作符的机会，提

供在程序正文中实现一组机器指令.

程序设计自动化的下一步是创建高级**算法语言**(algorithmic language). 有上千种语言用于各种目的, 使用它们大大降低开发和生产程序的代价. 首先广泛使用的是 **Fortran 语言**(Fortran). 然后出现 **Algol 语言**(Algol), **Algams 语言**(Algams), 和前苏联的 **Al'fa 语言**(Al'fa), 主要用于科技计算. 为了编写用于处理经济信息的算法, 创建了 **Cobol 语言**(Cobol). 类 Algol 语言 Pascal 有描述数据结构的机制. 企图用于正文信息工作的是 **Lisp 语言**(Lisp), **Snobol 语言**(Snobol), Ambit 语言, Sdl 语言和其他语言. 为了描述由计算机执行解析变换的算法 Reduce 系统被广泛应用, 而前苏联则广泛使用 Analytic 语言([5]). 作为 Fortran 语言, Algol 语言和 Cobol 语言的发展和推广, 出现 **PL/I 语言**(PL/I)和 **Algol-68 语言**(Algol-68).

与开发语言功能相平行的是创建标准过程库(见**标准程序**(standard program)). 有成千上万个过程, 程序和程序复合体, 使用计算数学方法实现通用和专用算法. 它们包括: 初等函数和特殊函数的计算, 线性代数, 积分计算, 常和偏微分方程的数值解, 最小二乘法, 等等. 用过程库的形式组织标准过程, 写在磁带或磁盘上, 使它们容易访问. 在程序中放上过程的操作符名字就足以调用过程. 最经常使用的过程用接近机器码的语言的标准装入模块形式来保存. 通常,算法语言翻译程序给出的工作结果是一系列不同的程序和过程, 它们作为标准装入模块在翻译后直接写入临时库中. 不同过程用机器码混合在一个工作程序中之后, 通过适当调正, 装入程序或者在程序执行前执行(静态装入), 或者在运行时具体调用过程时执行(动态装入). 在有些系统中, 程序以前翻译的各个部分混合在一单个程序中的工作由所谓连接编辑程序来执行, 装入程序只是简单地把已准备好的程序放入机器存储中.

与形成标准过程库相并行的, 产生应用程序包的实践变得更普遍, 它设计成不仅解决一个问题, 而是整个一类问题. 程序包是在主程序控制下操作的一组过程. 程序包的工作条件是由专门的**面向问题的语言**(problem-oriented language)提供的, 它经常是一般专业语言或行话的子集.

现代计算机, 除了具有容易编写和调试程序的功能外, 还装备有程序复合体, 通过组织自动作业流(作业控制), 数据管理, 动态存储分配和外围设备的资源控制来提供计算机本身的有效使用. 这些程序的集合称为计算机的**操作系统**(operating system)([1]-[4], [6]). 操作系统已经变成任何计算系统的一个组成部分. 没有操作系统, 计算机就不能起作用, 因为外围设备的控制, 信息的交换, 计算机各部件交互的组织, 在很大程度上都是由操作系统中的程序实现的. 操作系统控制下的功能包括算法语言的翻译程序, 有助于编程和调试(包括用对话方式)的程序系统, 也包括提供图形信息的工作程序. 操作系统为作业提供大量数据, 用于制造文件(通常具有同样结构的一系列数据组), 创建数据库和不同种类的信息检索系统. 操作系统提供作为多机复合体、计算机网络一部分的计算机的使用. 除了实现程序的语言功能外, 也通过控制伪指令给用户以控制操作系统工作的机会, 该伪指令与程序一起输入计算机.

按照操作系统提供的操作方式, 把使用计算机分成三种类型:

1) 程序的**成批处理**(batch processing), 组成计算机中作业流的**自动流程**(运行), 包括多道程序设计方式. 提供这种操作方式的操作系统的例子是用于 ES 机和 IBM 机的系统 OS ES 和 DOS ES([1], [8]); 用于 BESM-6([9])的系统 OS DUBNA 和 OS DISPAK; 用于控制数据公司(CDC)机器的系统 NOS/BE.

2) **分时**(time sharing)给连接计算机终端上的几个用户同时使用计算机的机会, 包括某些离开机器很远的用户. 提供这种方式的操作系统的例子是较早的实验系统 MULTICS 和用于 IBM 机的 TSS/360. 通常, 在大规模系统中, 操作系统提供分时, 同时重视批处理方式. 这里与操作系统的相互作用是由在操作系统控制下的专门的子系统实现的. 在 NOS/BE, 是系统 INTERCOM; 在 OS DUBNA, 是 MULTITYPE; 在 OS DISPAK, 是 DIMON 系统([10]); 在 OS ES 是 DUUVZ 和 SRV([11]).

当在连接到有批处理方式的计算机的终端上工作时, 对分时方式的用户只给提供登录, 编辑和运行程序. 程序的翻译和执行运行用通常的批处理方式,且通常具有较高优先级. 用户有机会考虑作业运行结果, 必要时再次编辑和运行. 程序甚至可以实时地涉及终端作为一个外围设备, 用于对话方式的信息的输入输出.

系统在分时方式常常提供解释方式的翻译程序操作, 在那里每条指令(语言的一个操作符)一旦从终端上键入, 就变换成机器代码并立即实现.

3) **实时操作系统**(real-time operating systems)提供计算机**联机**外围设备的功能, 在任何时候可以送信息到计算机, 它在当时要求操作处理. 这类操作系统用于控制实验和工程的过程, 与计算机联机操作([12], [13], [14], [15]). 实时操作系统的角色常常由高度发展的批处理方式操作系统以合适的方式执行. 用于和设备联机工作的计算机(控制计算机)

有技术和软件工具提供用于处理程序和它们的实时操作.

在软件和系统程序设计领域中的概念和术语还没有清楚地建立. 早期, 在形成操作系统时, 包括翻译程序, 现在多数研究者把它们看作在操作系统控制下运行的应用程序. 在各种研究中, 操作系统各部件的名字, 甚至操作系统分成它的各种部件的分法都是不一样的. 这主要是由于这个科学领域的快速发展和新概念的连续出现.

除了上述通用计算机软件 (通用操作系统和应用程序包) 之外, 还在积极产生瞄准解决科学、工程和经济各分支具体问题的软件. 面向问题的程序复合体已经创建, 它使用语言功能和由计算机操作系统提供的其他可能性. 这种软件的数量远远超过通用软件的数目.

在大的核物理和高能物理研究所, 数十台 (有时甚至上百台) 不同类的计算机基本上用于实验装置的控制和信息检索. 对每个这种装置已产生专门的实时或分时操作系统 ([16]). 这些专门的操作系统不仅保证计算机而且也保证复杂机电系统的正常运行. 由操作系统控制的大多数程序复合体控制装置工作的精度, 信息的检索, 它的处理, 数据压缩和存储. 实验人员获得丰富的与系统的通信和图形交互的手段.

一部分系统用自动标识事件和它们的表示的方式运行. 除了专门的操作系统之外, 在形成用于实验的软件时, 还有大量程序复合体用于处理实验信息. 一个用于处理胶卷信息的程序系统有几万条 Fortran 语句, 用模块程序设计系统 Hydra 创建 ([17]). Hydra 系统提供许多用户功能, 用于编辑, 用于组织各种版本程序的存储, 用于创建具体跟踪照相机, 实验和各类容易访问的电子机器的程序版本. 在该系统中, 人们发现所有现代程序设计成就的体现: 模块化原理, 结构化程序设计, 自动文档、操作存储的动态分配和生成的方便方法. 为了创建一个程序具体版本, 只需描述一系列指示行, 这些指示行指出度量装置的类型、信息输出的处理阶段和形式、数值信息的赋值, 描述跟踪照相机的参数 (光学系统的常数, 磁场映象), 要研究的事件的拓扑结构. 系统运作的结果是从存储在系统中的或由用户引入的模块生成的一个 Fortran 程序.

已经创建许多面向问题的程序复合体, 不仅用于核物理学, 也用于科学和技术的许多其他分支 ([18]). 它们中有用于分子生物学和晶体物理学 ([19])、电子的 (EPAK) 和地震的 (SEISPAK) 勘探有用矿物 ([20]) 的处理信息的程序复合体, 用于设计自动化 ([21])、经济学和许多其他领域中的控制系统自动化的程序复合体. 通常, 为了使用面向问题系统来创建解决某些问题的程序, 只需用一个语言描述该问题, 该语言是系统的控制输入语言, 它是在用于给定科学和工程领域使用的定义和概念基础上构造的.

这样, 计算机软件呈现两个层次.

第一层由操作系统或它的直接控制下操作的程序复合体, 它是附在计算机系统一起的通用软件. 除了严格地在操作系统中的程序外, 通用软件还包括上述所有翻译程序, 从面向计算机的和广泛的面向过程的语言到标准通用过程库.

第二层是由面向问题的程序复合体表示的. 通常它们有在第一层通用软件之上的超结构, 它们是用语言功能和由第一级软件提供的其他可能性创建的. 面向问题的软件, 按其一般组织和作用, 可以分为两类. 第一类是由软件提供的功能在通用计算机上创建的程序复合体, 它们用于解决一定类的数据处理问题. 从与计算机操作系统相连接的观点, 这些程序复合体是通常的应用程序. 第二类是由专门的实时操作系统或控制程序表示的, 它们既有使用计算机标准操作系统提供的功能也有不使用这两种方式创建的. 这种软件控制复杂的电子的和机电的系统, 其中计算机只是系统整个设备中的一部分.

参考文献

[1] Королев, Л. Н., Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение, 2 изд., М., 1978.

[2] Криницкий, Н. А., Миронов, Г. А., Фролов, Г. Д., Программирование и алгоритмические языки, 2 изд., М., 1979.

[3] Flores, I., Computer software, Prentice-Hall, 1965.

[4] Donovan, J., System programming, McGraw-Hill, 1972.

[5] Глушков, В. М. [и др.], 《Кибернетика》, 1971, 3, 102 – 134.

[6] Katzan, jr., H., Operating systems, a pragmatic approach, v. Nostrand Reinhold, 1973.

[7] Вельбицкий, И. В., Технология производства программ на базе R-метаязыка, в кн.: Системное и теоретическое программирование, т. 1, Киш., 1974.

[8] Система математического обеспечения ЕС ЭВМ, М., 1974.

[9] Мазный, Г. Л., Программирование на БЭСМ-6 в системе 《Дубна》, М., 1978.

[10] Усов, С. А., Диалоговый монитор Димон, М., 1979.

[11] Пеледов, Г. В., Райков, Л. Д., в кн.: Вычислительная техника социалистических стран, в. 2, М., 1977, 78 – 82.

[12] Глушков, В. М., Автоматизированные системы управления, в кн.: Тр Всесоюзной конференции

по программированию《ВКП-2》, Новосиб, 1970.

[13] Виленкин, С. К., Трахтенгерц, Э. А., Математическое обеспечение управляющих вычислительных машин, М., 1972.

[14] Martin, J., Programming real-time computer-systems, Prentice-Hall, 1965.

[15] Тезисы докладов [1-го Всесоюзного симпозиума по математическому обеспечению вычислительных систем, работающих в реальном масштабе времени], К., 1972.

[16] Говорун, Н. Н., Иванченко, З. М., 《Программирование》, 1976, 4, 52-65.

[17] Говорун, Н. Н.,[и др.], 《Физика элементарных частиц и атомного ядра》, 6 (1975), 3, 742-775.

[18] Сергиенко, И. В., Парасюк, И. Н., Тукалевская, Н. И., Автоматизированные системы обработки данных, К., 1976.

[19] Рентгеновский структурный анализ, в кн.: БСЭ, 3 изд., т. 22, с. 23-27.

[20] Безрук, И. А., Сафонов, А. С., в кн.: Прикладная геофизика, в. 98, М., 1980.

[21] Глушков, В. М., Капитонова, Ю. В., Летичевский, А. А., 《Кибернетика》, 1970, 4, 1-6.

Н. Н. Говорун 撰 程 虎 译 刘椿年 校

Сохоцкий 公式 [Sokhotskiĭ formulas; Сохоцкого формулы]

由 Ю. В. Сохоцкий 最早发现([1])的表示 Cauchy 型积分边界值的公式. 很晚以后, 这些公式为 J. Plemelj 独立得到([2]), 其证明比较完整.

设 $\Gamma: t=t(s)$ $(0\leqslant s\leqslant l,\ t(0)=t(l))$ 是复 z 平面中的光滑闭 Jordan 曲线, $\varphi(t)$ 是沿 Γ 的 Cauchy型积分的复密度, $\varphi(t)$ 在 Γ 上满足 Hölder 条件:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqslant C|t_1-t_2|^{\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1;$$

设 D^+ 是 Γ 所围的内部区域, D^- 是相应的外部区域. 并设

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)dt}{t-z},\ z\notin\Gamma \tag{1}$$

是一个 Cauchy 型积分, 则对任一点 $t_0\in\Gamma$, 极限

$$\Phi^+(t_0)=\lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in D^+}}\Phi(z),$$

$$\Phi^-(t_0)=\lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in D^-}}\Phi(z)$$

存在并由Сохоцкий公式(Sokhotskiĭ formulas)给出:

$$\left.\begin{aligned}\Phi^+(t_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\frac{1}{2}\varphi(t_0),\\ \Phi^-(t_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}-\frac{1}{2}\varphi(t_0);\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

(2) 等价于

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0},$$

$$\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=\varphi(t_0).$$

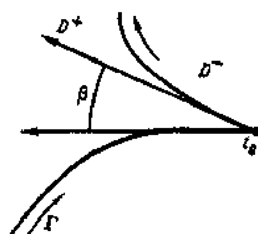
这些公式右端沿 Γ 的积分理解为 Cauchy 主值意义, 从而是所谓奇异积分(singular integral). 在上述条件下, 取 $\Phi^+(t)$(或 $\Phi^-(t)$)为积分 $\Phi(z)$ 在 Γ 上的值, 就得到在闭域 $\overline{D^+}=D^+\cup\Gamma$(相应地 $\overline{D^-}=D^-\cup\Gamma$)上连续的函数 $\Phi(z)$. 在整体上有时称 $\Phi(z)$ 为分片解析函数.

如果 $\alpha<1$, 则 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$在 Γ 上也以同一指数 α 为 Hölder 连续, 而当 $\alpha=1$ 时, 以任一指数 $\alpha'<1$ 为 Hölder 连续. 对分段光滑曲线 Γ 的角点 t_0(见图), Сохоцкий 公式形如

$$\Phi^+(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\left(1-\frac{\beta}{2\pi}\right)\varphi(t_0),$$

$$\Phi^-(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}-\frac{\beta}{2\pi}\varphi(t_0),$$

$$0\leqslant\beta\leqslant 2\pi. \tag{3}$$



在非闭分段光滑曲线 Γ 的情形, Сохоцкий 公式(2)和(3)对弧 Γ 的内点仍然成立.

Сохоцкий 公式在解函数论边值问题和奇异积分方程理论(见[3],[5])以及解函数论的各种应用问题(见[4])中起着基本作用.

自然提出放宽围道 Γ 和密度 $\varphi(t)$ 的条件而使 Сохоцкий 公式仍然成立(可能附加某些限制)的可能性问题. 这方面最有意义的结果属于 В. В. Голубев 和 И. И. Привалов (见[6],[8]). 例如, 设 Γ 是可求长 Jordan 曲线, 并设密度 $\varphi(t)$ 仍在 Γ 上 Hölder 连续, 则 Сохоцкий 公式(2)在 Γ 上几乎处处成立, 其中 $\Phi^+(t_0)$ 和 $\Phi^-(t_0)$ 分别理解为所给 Cauchy 型积分从 Γ 内部和外部的非切向边界值, 但它们一般在闭域 $\overline{D^+}$, $\overline{D^-}$ 上并不连续.

关于 Сохоцкий 公式的空间推广, 见[7].

参考文献

[1] Сохоцкий, Ю. В., Об определенных интегралах и функциях употребляемых при разложениях в ряды, СПБ, 1873.

[2A] Plemelj, J., Ein Ergänzungssatz zur Chuchyschen In-

tegraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, *Monatsh. Math. Phys.*, 19 (1908), 205 – 210.

[2B] Plemelj, J., Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe, *Monatsh. Math. Phys.*, 19 (1908), 211 – 245.

[3] Мусхелишвили, Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里, 奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966).

[4] Мусхелишвили, Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966 (中译本: Н. И. 穆斯赫利什维里, 数学弹性力学的几个基本问题, 科学出版社, 1958).

[5] Гахов, Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977 (英译本: Gakhov, F. D., Boundary value problems, Pergamon, 1966).

[6] Привалов, И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.-Л., 1950 (中译本: И. И. 普里瓦洛夫, 解析函数的边界性质, 科学出版社, 1956).

[7] Бицадзе, А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972.

[8] Хведелидзе, Б. В., 载于 Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики, т. 7, М., 1975, 5 – 162 (英译本: Khvedelidze, B. V., The method of Cauchy-type integrals in the discontinuous boundary value problems of the theory of holomorphic functions of a complex variable, *J. Soviet Math.*, 7 (1977), 309 – 415).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 西方文献中通常称为 Plemelj 公式 (Plemelj formulas), 有时也出现联名的 Sokhotskii-Plemelj 公式 (Sokhotskii-Plemelj formulas).

近年来关于 Cauchy 型积分有很多工作. 例如 A. P. Calderón ([A1]) 证明了在较弱条件下非切向边界值的几乎处处存在性, 他还研究了 (2) 中的主值积分或 Cauchy 变换 (Cauchy transform) 作为适当的 L_p 空间上的有界线性算子. 关于进一步信息见 [A2].

把一条简单闭曲线上的一个函数表示为一个解析函数沿该曲线的跳跃这一想法已得到广泛推广. 单位圆周上的每个广义函数和 **R** 上的每个缓增广义函数可在适当意义下表示为这种跳跃, 见 [A3]. 这方面的顶峰是佐藤超函数 (见 [A5] 和**超函数** (hyperfunction)).

参考文献

[A1] Calderón, A. P., Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 74 (1977), 4, 1324 – 1327.

[A2] Khavin, V. P., Khrushchev, S. V., Nikol'skiĭ, N. K. (eds.), Linear and complex analysis problem book, Lecture notes in math. 1043, Springer, 1984, Chapt. 6.

[A3] Tillmann, H. G., Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytischer Funktionen, *Math. Z.*, 77 (1961), 106 – 124.

[A4] Sato, M., Theory of hyperfunctions I, II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 8 (1959 – 1960), 139 – 193; 387 – 437.

[A5] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators I, Springer, 1983.

沈永欢 译

Сохоцкий 定理 [**Sokhotskii theorem**; **Сохоцкого теорема**], Weierstrass 定理 (Weierstrass theorem), Weierstrass-Сохоцкий-Casorati 定理 (Weierstrass-Sokhotskii-Casorati theorem)

设 a 是复变量 z 的解析函数 $f(z)$ 的**本质奇点** (essential singular point), 则给定任一复数 w (包括 $w=\infty$), 存在收敛于 a 的序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

本定理是刻画解析函数 f 在其本质奇点 a 处的**聚值集** (cluster set) $C(f, a)$ 的最早结果. 由此定理得知 $C(f, a)$ 是全的, 即它相同于变量 w 的扩充平面 $\overline{\mathbf{C}}_w$. 本定理为 Ю. В. Сохоцкий 所证明 ([1], 亦见 [2]). K. Weierstrass 于 1876 年陈述了这条定理 (见 [3]). 解析函数在其本质奇点邻域内性态的进一步信息包含于 **Picard 定理** (Picard theorem) 之中.

本定理没有到解析映射 $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ $(n>1)$ 的直接推广 (见 [5]).

参考文献

[1] Сохоцкий, Ю. В., Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями, СПБ, 1868.

[2] Casorati, F., Teoria delle funzioni di variabili complesse, Pavia, 1868.

[3] Weierstrass, K., Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, 载于其 Math. Werke, Vol. 2, Mayer & Müller, 1895, 77 – 124.

[4] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций 2 изд., т. 1, М., 1967 (中译本: А. И. 马库雪维奇, 解析函数论, 高等教育出版社, 1957).

[5] Шабат, Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976 (英译本: Shabat, B. V., Introduction to complex analysis, Part II Functions of several variables, Amer. Math. Soc., 1992).

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】本定理在西方通常称为 Casorati-Weierstrass 定理 (Casorati-Weierstrass theorem), 然而它更早为 C. Briot 和 C. Bouquet 所证明并出现于他们关于椭圆函数的论著 [A1] (1859) 中, 虽然此书第二版删去了这一定理; 见 [A2] pp. 4 – 5 中的讨论.

参考文献

[A1] Briot, C., Bouquet, C., Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques, Mallet-Bachelier, 1859.

[A2] Collingwood, E. F., Lohwater, A. J., The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

沈永欢 译

螺线管 [solenoid; соленоид]

【补注】 令 $n = \langle n_i \rangle$，是一个正整数序列．由 n 如下地构造一个拓扑空间．

令 T_0 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个环面；在 T_0 内取一个环面 T_1 以光滑而不折回的方式纵向绕 n_1 次；在 T_1 内取一个环面 T_2 按同样方式绕 n_2 次．无限地继续这个步骤，就得到一个环面的下降序列，它们的交称为 n 进螺线管（n-adic solenoid）Σ_n．

Σ_n 的基本性质是它是一个一维连续统，而且是不可分解的（见**不可分解连续统**（indecomposable continuum））．

Σ_n 也是一个**拓扑群**（topological group）；如果考虑 Σ_n 作为以下逆序列

$$\cdots S_3 \xrightarrow{f_3} S_2 \xrightarrow{f_2} S_1 \xrightarrow{f_1} S_0$$

的反极限的交错构造即可以看出这一点，这里每一个 S_i 是单位圆而 $f_i: S_i \to S_{i-1}$ 由 $f_i(z) = z^{n_i}$ 所定义．有许多其他方法可以构造螺线管，见 [A3]．

螺线管首先是由 L. Vietoris ([A2])（对序列 $\langle 2, 2, \cdots, 2 \rangle$ 和 D. van Dantzig ([A1])（对一切常值序列）定义的．

螺线管在**拓扑动力学**（topological dynamics）中也是重要的，在它们上面可以定义一个**流**（**连续时间动力系统**）（flow (continuous-time dynamical system)）结构（[A4]），它有一个局部不连通殆周期运动的极小集．

关于螺线管有完全的刻画：首先，不失一般性，可以假定数 n_i 都是素数．两个素数序列 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 称为等价的，如果可以从每个序列中删除有限项使得在约化的序列 $\mathbf{p}'$ 和 $\mathbf{q}'$ 中每一个素数都计算同样多次．于是可以证明，$\Sigma_{\mathbf{p}}$ 与 $\Sigma_{\mathbf{q}}$ 是同胚的，当且仅当 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{q}$ 是等价的．见 [A5] 和 [A6]．

最后，可以将螺线管刻画为这样的度量连续统，它们是齐次的，并且每个真子连续统都是一个弧（arc）．见 [A7]．

参考文献

[A1] Dantzig, D. van, Über topologisch homogene Kontinua, *Fund. Math.*, **15** (1930), 102 – 125.

[A2] Vietoris, L., Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, *Math. Ann.*, **97** (1927), 454 – 472.

[A3] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis. I, Springer, 1979.

[A4] Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V., Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, 1960（译自俄文）.

[A5] Bing, R. H., A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc, *Canad. Math. J.*, 12 (1960), 209 – 230.

[A6] McCord, M. C., Inverse limit sequences with covering maps, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 197 – 209

[A7] Hagopian, C. L., A characterization of solenoids, *Pacific J. Math.*, **68** (1977), 425 – 435.

郝钢新 译

螺线管场 [solenoidal field; соленоидальное поле]，管状场（tubular field）

$\mathbf{R}^3$ 中既无源也无吸收点的**向量场**（vector field），即它的**散度**（divergence）处处为 0．螺线管场通过任何区域的任何闭的逐片光滑的定向边界的流量为零．螺线管场由它的所谓向量位势所刻画，后者是指满足条件 $\mathbf{a} = \operatorname{curl} A$ 的向量场 A．不可压缩流体的速度场以及在无限长螺线管内的磁场都是螺线管场的例子．

А. Б. Иванов 撰

【补注】 螺线管（solenoid）是一个长的螺旋形线圈，通常是圆柱形的，通电后即有磁场产生．更抽象地说，设 $\mathbf{a}$ 为 $(\mathbf{R}^3)$ 上的向量场，满足条件 $\operatorname{div}(\mathbf{a}) = 0$．考虑由沿向量场流线的圆柱面以及两端与流线垂直的底面所组成的曲面．这样的管子称为螺线管．

参考文献

[A1] Hylleras, E. A., Mathematical and theoretical physics, 1, Wiley, 1970, p. 70 ff.

[A2] Levich, B. G., Theoretical physics, 1. Theory of the electromagnetic field, North-Holland, 1970, p. 6; 364; 366.

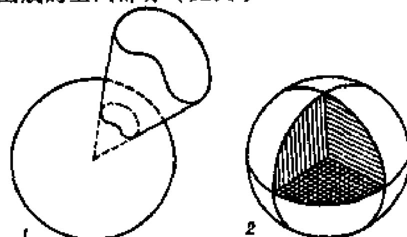
[A3] Batchelor, G. K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge Univ. Press, 1974, p. 75; 167.

[A4] Rektorys, K., Applicable mathematics, Iliffe, 1969, p. 272.

王斯雷 译

立体角 [solid angle; телесный угол]

从一点（顶点）出发通过一条闭曲线上的点的所有射线围成的空间部分（见图）．



立体角的一种特殊情况是**多面角**(polyhedral angle).可以取一立体角在以其顶点为球心所作的球面上截出的部分面积与球面半径的平方之比作为对该立体角的度量.例如,包含 1/8 空间(一个挂限)的立体角由数 $4\pi^2R^2/8R^2=\pi/2$ 来度量.立体角的度量单位是**立体弧度**(steradian). БСЭ-3

【补注】 立体角表示由顶点看闭曲线时的视角.

杜小杨 译

球体函数[**solid spherical function**; **шаровая функция**],球体调和函数(solid harmonic function)

n 次**球面函数**(spherical functions),具有乘子 r^n.

【补注】 亦见**球面调和函数**(spherical harmonics)中关于空间球面调和函数(spatial spherical harmonics)的讨论.

杜小杨 译

孤立子[**soliton**; **солитон**]

非线性发展方程的解,它在每一时刻都被局部化在空间的有界域中,使得区域的大小对时间保持有界,而区域中心的运动可以解释为质点的运动. KdV(Korteweg-de Vries)方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0$$

的孤立子解

$$u_s(x,t)=\frac{3v}{\cosh^2\frac{1}{2}\left[v^{1/2}(x-vt-x_0)\right]}$$

就描述这样的孤波,且由下面两个参数所唯一确定:速度 $v>0$ 和在固定时刻 $t=0$ 的最大的位置 $x=x_0$.这个方程还有 n 孤立子解(n-soliton solutions),对很大的 $t(t\to\pm\infty)$ 它们可以近似地写成 n 项 $u_{s,i}(x,t)$ 之和,其中每一个是由它的速度 v_i 和它的中心位置 $x_{0i}^{\pm}$ 所刻画的.对一个 n 孤立子解,速度的集合在碰撞前($t\to-\infty$)和碰撞后($t\to+\infty$)是保持一样的;仅仅发生孤立子解中心的改变 $x_{0i}^{+}\neq x_{0i}^{-}$.许多两个自变量的非线性发展方程都发现具有上述性质的解.这样,非线性 **Schrödinger 方程**(Schrödinger equation)

$$i\psi_t=-\psi_{xx}-|\psi|^2\psi,\ \psi\in\mathbf{C}$$

的孤立子解由四个参数唯一确定,而**正弦 Gordon 方程**(sine-Gordon equation)

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi=0$$

的孤立子解由两个参数 v,x_0 唯一确定:

$$\varphi_s=4\operatorname{Arc}\tan\exp\pm\frac{(x-vt-x_0)}{\sqrt{1-v^2}}$$

且有二重孤立子(呼吸子),它由四个参数定义.

对 Boussinesq 方程

$$\varphi_{xx}-\varphi_{tt}+(\varphi^2)_{xx}+\varphi_{xxxx}=0,$$

Hirota 方程

$$\varphi_t+i3\alpha|\varphi|^2\varphi_x+\beta\varphi_{xx}+i\sigma\varphi_{xxx}+\delta|\varphi|^2\varphi=0,$$
$$\alpha\beta=\sigma\delta,$$

及其他方程有类似的状况.还有物理上感兴趣的具有很多自变量的方程,它们亦有上述性质的孤立子解.例如,Кадомцев-Петвиашвили 方程(两个空间变量)

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x=u_{yy}$$

的孤立子,对 x 和 y 局部化,等于

$$u(x,y,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\left[\frac{1}{v^2}+|x+ivy-3v^2t|^2\right],$$
$$v\in\mathbf{R}.$$

在物理文献中,术语"孤立子"是指经典场论的非线性方程的像质点那样的解,对这个解,在任一时刻,能量密度和动量密度保持局部化在空间某个点的邻域中.有时,局部化可以发生在线和曲面的附近.这些局部化解亦称作纹结(kinks)或单极(monopoles).对这种类型解的研究包含着拓扑学的考虑.特别地,对一些模型可以成功地构造电流 $J_\mu(x)$,它的散度等于零,而与运动方程无关,且对应的运动积分(拓扑电荷)$Q=\int J_0(x)d^3x$ 给出能量泛函的下界.

参考文献

[1] Scott, A. C., Chu, F. Y. F. and Mclaughlin, D. W., The soliton: a new concept in applied science, *Proc. IEEE*, 61(1973), 1443-1483.

[2] Карпман, В. И., Нелинейные волны в диспергирующих средах, М. 1973.

[3] Дубровин, Б. А., Матвеев, В. Б., Новиков, С. П., 《Успехи матем. наук》, 31(1976), 1, 55-136.

[4] Ablowitz, M. J. and Segur, H., Solitons and inverse scattering transform, SIAM, 1981.

[5] Calogero, F. and Degasperis, T., Spectral transform and solitons, North-Holland, 1982.

[6] Faddeev, L. D. and Takhtadzyan, L. A., Hamiltonian methods in the theory of solitons, Springer, 1987

(译自俄文). П. П. Кулиш 撰

【补注】 术语"孤立子"是由 C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, 和 R. M. Miura 创造的([A3]),他们是反散射方法的创始人,他们用此术语来描述 KdV 方程的、具有如下述像质点性质的孤立波解:它们中以不同速度前进的两个波相遇时,经某个混乱的相互作用模式之后,二者相互通过对方,显露出形状和速度都不变(但是相位转移了).

在解析函数论的边值问题(boundary value problems of analytic function theory)和孤立子方程(soliton equations)之间有着一些基本的联系. 这样的联系之一是由所谓的 Zakharov-Shabat 整形法(Zakharov-Shabat dressing method)提供的([A5], 亦见[A4], [A6]), 它将一个新的解("装饰起来"的解)与由原来解(它可以是平凡的)所定义的一族 Riemann-Hilbert 边值问题的解相联系.

参考文献

[A1] Newell, A. C., Solitons in mathematics and physics, SIAM, 1985.

[A2] Toda, M., Nonlinear waves and solitons, Kluwer, 1989.

[A3] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M., Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095 – 1097

[A4] Zakharov, V. E. and Manakov, S. V., Soliton theory, *Soviet Sci. Rev. Sect. A: Phys. Rev.*, **1** (1979), 133 – 190.

[A5] Zakharov, V. E. and Shabat, A. B., Integration of the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem II, *Funct. Anal. Appl.*, **13** (1979), 3, 166 – 174. (*Funkts. Anal. i Prilozh.*, **13** (1979), 3, 13 – 22.)

[A6] Rebbi, C. and Soliani, G. (eds.), Solitons and particles, World Scientific, 1984.

[A7] Novikov, S., Manakov, S. V., Pitaevskii, L. P. and Zakharov, V. E., Theory of solitons, Plenum, 1984(译自俄文).

[A8] Chudnovsky, D. and Chudnovsky, G. (eds.), The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications, Springer, 1982.

[A9] Dodd, R. K., Eilbeck, J. C., Gibbon, J. D. and Morris, H. C., Solitons and nonlinear wave equations, Acad. Press, 1982.

[A10] Davydov, A. S., Solitons in molecular systems, Kluwer, 1991(译自俄文).

[A11] Makhankov, V. G., Soliton phenomenology, Kluwer, 1991(译自俄文).

孙和生 译 陆柱家 校

对策论中的解[solution in game theory; решение в теории игр]

满足在给定的模型中所接受的最优性原理的一种结局(或结局的集合). 要区分下列几种基本类型的解: 1) Nash 解(Nash solution)(见**非合作对策**(non-cooperative game)), 特别是, 在**二人零和对策**(two-person zero-sum game)中的支付函数的**对策论中的鞍点**(saddle point in game theory); 2) Neumann-Morgenstern 解(Neumann-Morgenstern solution), 它是一个分配集, 其中没有两个分配使一个分配优于另一个分配, 而对于每个不属于这个集合的**分配**(sharing), 存在一个该集合中的分配优于它(见**优势**(domination)); 3) 在一个**裁决方案**(arbitration scheme)中的 Nash 解(Nash solution).

参考文献

[1] Neumann, J. von and Morgenstern, O., Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1947 (中译本: 约翰·冯·诺依曼, 奥斯卡·摩根斯特恩, 竞赛论与经济行为, 科学出版社, 1963).

[2] Owen, G., Game theory, Acad. Press, 1982.

A. H. Лапунов 撰

【补注】 Neumann-Morgenstern 解也被引用为 Pareto 解(Pareto solution). 还有另外的解的概念是所谓 Stackelberg 解(Stackelberg solution). 如果对策中的一个局中人在其他局中人作出决策以前, 通过宣告它的策略, 把它的策略强加给其他局中人, 那么 Stackelberg 解是合适的概念. 它也与经济学中的激励理论(theory of incentives)有关. 见[A1], [A2].

参考文献

[A1] Basar, T. and Olsder, G. L., Dynamic noncooperative game theory, Acad. Press, 1989.

[A2] Ho, Y. C., Luh, P. B. and Olsder, G. J., A control-theoretical view on incentives, *Automatica*, **18** (1982), 2, 167 – 179.

史树中 译

可解流形[solv manifold 或 solvmanifold, solvable manifold; солвмногообразие]

连通可解 Lie 群 G 的齐性空间 M(见**可解 Lie 群**(Lie group, solvable)). 它可被等同于陪集空间 G/H, 这里 H 是流形 M 的某个点的稳定子群.

例: $\mathbf{R}^n$, 环面 T^n, 岩沢流形 N/I(这里 N 是 $GL(3, \mathbf{R})$ 内主对角线元素为 1 的所有上三角矩阵的群, I 是 N 内所有整点的子群), K^2(Klein 瓶), Mb(Möbius 带).

首先被研究的可解流形是较狭义的**幂零流形**(Nil manifold)的族, 即幂零 Lie 群的齐性空间(如 $\mathbf{R}^n$, T^n, N/I, 但不是 K^2 和 Mb). 以下结果属于 A. И. Мальцев(见[5]). 1) 每个幂零流形 $M=G/H$ 微分同胚于 $M^*\times\mathbf{R}^n$, 这里 M^* 是一个紧幂零流形. 2) 如果 M 紧且 G 有效地作用在 M 上, 则稳定子群 H 是**离散子群**(discrete subgroup). 3) **幂零 Lie 群**(Lie group, nilpotent)可迁地且局部有效地作用在某个紧流形上, 当且仅当它的 Lie 代数 G 有一个 Q 形式. 如果 G 又是单连通的, 则它同构于定义在 Q 上的幺幂代数群并且 H 是 G 的一个算术子群. 4) 紧幂零流形 M 的**基本群**(fundamental group) $\pi_1(M)$(当 G 为单连通时它同构于 H, 它在 M 上的作用是

局部有效的）把它确定到差一个微分同胚．这里可能出现的群 $\pi_1(M)$ 只可能是有限生成幂零无挠群．

这些结果允许部分推广到任意可解流形．因此，对任意可解流形 M 存在一个可解流形 M'，它是 M 的有限叶覆叠并且微分同胚于 $M^* \times \mathbf{R}^n$，这里 M^* 是某个紧可解流形．任意的可解流形并不总能分解为直积 $M^* \times \mathbf{R}^n$，但它微分同胚于（见[1]，[4]）某个紧可解流形上向量丛的空间（对于 Mb，相应的丛是 S^1 上非平凡线丛）．可解流形 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 是**多循环群**（polycyclic group），且若 M 是紧的，则它在相差一个微分同胚的意义下唯一地确定 M．群 π 同构于某个紧可解流形 M 的 $\pi_1(M)$，当且仅当它包含在形如

$$\{e\} \to \Delta \to \pi \to \mathbf{Z}^s \to \{e\}$$

的正合列中，这里 Δ 是有限生成幂零无挠群．每个多循环群有一个有限指数的子群，它同构于某个紧可解流形 M 的 $\pi_1(M)$．如果一个可解 Lie 群 G 可迁地且局部有效地作用在紧可解流形 $M = G/H$ 上，则 M 是环面上的纤维化，其纤维为 $N/(H \cap N)$，这里 N 是 G 的幂零根基．可解流形 $M = G/H$ 是紧的，当且仅当存在 M 上的 G 不变测度，M 关于此测度的体积是有限的．

每个可解流形 M 是**非球面的**（aspherical）（即对 $i \geq 2$，同伦群 $\pi_i(M) = 0$）．在所有的紧齐性空间中，紧可解流形是以非球面性和 $\pi_1(M)$ 的可解性为特征的（见[3]）．

参考文献

[1] Auslander, L., An exposition of the structure of solvmanifolds, Ⅰ, Ⅱ, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 2, 227 – 261; 262 – 285.

[2] Auslander, L. and Szczarba, R., Vector bundles over tori and noncompact solvmanifolds, *Amer. J. Math.*, 97 (1975), 1, 260 – 281.

[3] Горбацевич, В. В., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, 41 (1977), 2, 285 – 307.

[4] Mostow, G., Some applications of representative functions to solvmanifolds, *Amer. J. Math.*, 93 (1971), 1, 11 – 32.

[5] Raghunatan, M., Discrete subgroups of Lie groups, Springer, 1972.

В. В. Горбацевич 撰　陈志杰 译

紧可解流形[solv manifold, compact 或 compact solvmanifold; разрешимое многообразие]

连通可解 Lie 群的一个紧的商空间（见**可解 Lie 群**（Lie group, solvable）；然而，有时紧性不是必须的）．一个特殊的情形是**诣零流形**（nil manifold）．与后者相比，一般情况可考虑得更复杂，但对它也存在完全结构理论．

参考文献

[1] Auslander, L., An exposition of the structure of solvmanifolds, Part Ⅰ: Algebraic theory, Bull. Amer. Math. Soc., 79 (1973), 2, 227 – 261.

Д. В. Аносов 撰

【补注】　也见**可解流形**（solv mainfold）．

参考文献

[A1] Mostow, G. D., Cohomology of topological groups and solvmanifolds, *Ann. of Math.*, 73 (1961), 20 – 48.

[A2] Johnson, R. W., Presentations of solvmanifolds, *Ann. of Math.*, 94 (1972), 82 – 102.

徐森林 译

可解流[solvable flow; разрешимый поток]

由可解 Lie 群 G 的某个单参数子群 g_t 在 M 上的作用所决定的**可解流形**（solv manifold）$M = G/H$ 上的流．如果 M 由陪集 gH 组成，则在可解流的作用之下，这一陪集在时刻 t 变成陪集 $g_t gH$．可解流有一特例为**诣零流**（nil-flow）；在一般情况下，可解流的性质可以很不相同．

参考文献

[1] Auslander L., Green, L., Hahn, F., Flows on homogeneous spaces, Princeton Univ. Press, 1963.

[2] Степин, А. М., 《Успехи матем. наук》, 24 (1969), 5, 241 – 242.

[3] Auslander, L., An exposition of the structure of solvmanifolds, Part Ⅱ: G-induced flows, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 2, 262 – 285.

[4] Сафонов, А. В., 《Функциональный анализ и его приложения》, 14 (1980), 4, 81 – 82.

[5] Auslander, L., Green, L., G-induced flows and solvmanifolds, *Amer. J. Math.*, 88 (1966), 43 – 60.

Д. В. Аносов 撰

【补注】　在许多情况下，流的动力性质，例如**遍历性**（ergodicity），都可以由 G 与 H 的代数性质得出．**Kronecker 定理**（Kronecker theorem）蕴含了 $G = \mathbf{R}^n$，$H = \mathbf{Z}^n$ 即整数格点情况下的遍历性，流由 $g_t(x + \mathbf{Z}^n) = x + ta + \mathbf{Z}^n$ 给出（用加法表出），这里 $x + \mathbf{Z}^n$ 是 $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 的一个陪集，$a \in \mathbf{R}^n$ 是一固定的向量，而其分量在有理数域上线性无关．当 $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ 而 H 是一离散子群时，G 的某些单参数子群对应于常负曲率曲面（见**常曲率空间**（constant curvature, space of））之单位切丛上的**测地流**（geodesic flow）和**极限圈流**（horocycle flow）．

参考文献

[A1] Brezin, J. and Moore, C. C., Flows on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, 103 (1981), 571 – 613.

齐民友 译

可解群[solvable group 或 soluble group; разрешимая группа]

具有其商群均为 Abel 群的有限次正规列的

群(group).(见**子群列**(subgroup series).)它也具有有 Abel 商群的**正规列**(normal series)(这样的列称为可解(solvable)列).群的最短的可解列的长度称为导出长度(derived length)或可解性度(degree of solvability).这些序列中最重要的是换位子列或导列(见群的**换位子群**(commutator subgroup)).术语"可解群"产生于与代数方程的根式可解性相联系的 **Galois 理论**(Galois theory)中.

有限可解群具有素数阶商群的次正规列.这种群由 Lagrange 定理的下述逆定理所刻画:对群阶 n 的任意分解 $n = n_1 \cdot n_2$,其中 n_1、n_2 是互素的,必存在阶为 n_1 的子群,且任意两个阶为 n_1 的子群共轭.若有限群的阶仅可被两个素数除尽,它就是可解群.在可解群类中有限群是以有限生成的周期群为特色的.

可解群的特殊情形有**幂零群**(nilpotent group),**多循环群**(polycyclic group)及**亚 Abel 群**(meta-Abelian group).用 Abel 正规子群通过多循环商群的扩张而得的有限生成群形成了重要的子类.它们满足正规子群的极大条件(见**链条件**(chain condition))且是剩余有限的(见**剩余有限群**(residually-finite group)).每个连通的可解 **Lie 群**(Lie group)(以及每个可解矩阵群,它在 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)下是连通的)有幂零的换位子群.代数闭域上的每个可解矩阵群有一个有有限指数的子群,它共轭于三角形矩阵群的一个子群(见 **Lie-Kolchin 定理**(Lie-Kolchin theorem)).

长度不超过 l 的全部可解群的集合形成簇(见群簇(variety of groups)).这样的簇的自由群称为自由可解群(free solvable groups).

参考文献

[1] Курош, А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967 (中译本:阿·库洛什,群论,上、下册,高等教育出版社,1982,1987).

[2] Каргаполов, М. И., Мерзляков, Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977(英译本:Kargapolov, M. I. and Merzljakov, J. I., Fundamentals of the theory of groups, Springer, 1979).

А. Л. Шмелькин 撰

【补注】 亦见 **Burnside 问题**(Burnside problem)1).

参考文献

[A1] Robinson, D. J. S., Finiteness conditions and generalized soluble groups, 1-2, Springer, 1972.

石生明 译 王 杰 校

Sommerfeld 积分 [Sommerfeld integral; Зоммерфельда интеграл]

柱函数(cylinder functions)的一种围道积分表示式:第一类 **Hankel 函数**(Hankel functions)由

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{iz\cos t} e^{i\nu(t - \pi/2)}\,dt$$

给出,其中 C_1 是一条从 $-\eta + i\infty$ 到 $\eta - i\infty$ $(0 \leq \eta \leq \pi)$ 的曲线;第二类 Hankel 函数由

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{iz\cos t} e^{i\nu(t - \pi/2)}\,dt$$

给出,其中 C_2 是一条从 $\eta - i\infty$ 到 $2\pi - \eta + i\infty$ $(0 \leq \eta \leq \pi)$ 的曲线;第一类 **Bessel 函数**(Bessel functions)由

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_3} e^{iz\cos t} e^{i\nu(t - \pi/2)}\,dt$$

给出,其中 C_3 是一条从 $-\eta + i\infty$ 到 $2\pi - \eta + i\infty$ $(0 \leq \eta \leq \pi)$ 的曲线.这种表示式在区域 $-\eta < \arg z < \pi - \eta$ 中成立,并因 A. Sommerfeld([1])而得名.

参考文献

[1] Sommerfeld, A., Mathematische Theorie der Diffraction. Math. Ann., 47 (1896), 317-374.

[2] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945 (译自德文).

[3] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1952.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 Hankel 函数也称为第三类 Bessel 函数(Bessel functions of the third kind).

杜小杨 译

Sommerfeld 辐射条件 [Sommerfeld radiation conditions; Зоммерфельда условия излучения]

见**辐射条件**(radiation conditions).

Сонин 积分 [Sonin integral; Сонина интеграл]

柱函数(cylinder function)的一种围道积分表示式

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{z(t^2 - t)/2t}\, t^{-\nu-1}\,dt,$$

其中 ν 是任意数,而 $\mathrm{Re}\, z > 0$ 或 $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$.这种类型的积分为 Н. Я. Сонин(1870)所研究.

下列形式的积分有时也称为 Сонин 积分:

$$J_{m+n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{2^n\Gamma(n+1)}\int_0^{\pi/2} J_m(x\sin t)\sin^{m+1} t\cos^{2n+1} t\,dt,$$

$$\mathrm{Re}\, m,\ \mathrm{Re}\, n > -1.$$

参考文献

[1] Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973 (中译本: М. А. 拉甫伦捷夫, Б. В. 沙巴特, 复变函数论方法, 高等教育出版社, 上册 1956, 下册 1957).

[2] Jahnke, E., Emde, F. and Lösch, F., Tafeln höheren Funktionen, Teubner, 1966.

А. Б. Иванов 撰

【补注】 在西方实用中通常也写出 Сонин 积分. L. Schläfli (1873) 独立地得到上述围道积分的一些变形, 因而这种类型的积分也称为 Schläfli 积分 (Schläfli integrals). 上面提到的第二个积分称为 Сонин 第一有限积分 (Sonine first finite integral).

参考文献

[A1] Watson, G. N., The theory of Bessel functions, Cambridge, Univ. Press, 1944. Formulas 6.2 (2), 12. 11 (1).

杜小杨 译

可靠法则 [**sound rule**; **допустимое правило**], 容许法则 (admissible rule)

一种**推导法则** (derivation rule), 在一个**演算** (calculus) 中加入该法则不改变其中可推导公式集. 在演算中引入可靠法则是缩短证明有力的和经常使用的方法, 而且通常有益于改进确立可推导性的算法. 数理逻辑中最重要的结果之一是断言消去法则 (cut rule) 是可靠的 (见 **Gentzen 形式系统** (Gentzen formal system)). 见**可推断法则** (deducible rule); **导出法则** (derived rule).

С. Ю. Маслов 撰

【补注】 (逻辑) 理论是可靠的, 如果其中可证结论为真. 可靠理论 (sound theory) 的概念和有关数学原理诸如相容性、ω 相容性、完全性和反射原理的讨论见 [A2]、[A3].

参考文献

[A1] Wojcicki, R., Theory of logical calculi, Kluwer, 1988, Chapt. 2.

[A2] Smorynski, C., The incompleteness theorems, in J. Barwise (ed.): Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977, 821 – 865.

[A3] Hodges, W., Elementary predicate logic, in D. Gabbay and F. Guenther (eds.): Handbook of Philosophical Logic, Vol. 1, Reidel, 1983, 1 – 132.

别荣芳 译 罗里波 校

空间 [**space**; **пространство**]

一个逻辑的概念的形式 (或结构), 用作实现别的形式或某种结构的载体. 例如, 在平面几何学中, 平面或空间作为构作各种图形的载体. 在绝大多数情形下, 在空间中固定一些关系, 它们和通常的空间关系 (点之间的距离, 图形的相等, 等等) 在形式性质上是相容的, 使得这样的空间能说成是代表了类似于空间的逻辑概念形式.

首要的、也是最重要的数学空间是三维 **Euclid 空间** (Euclidean space), 它代表了现实空间形式的逼真的抽象. 在数学中 "空间" 的一般概念是复杂的, 这是 Euclid 空间几何学概念的推广和演变的结果. 与三维 Euclid 空间不同的第一批空间是在 19 世纪上半叶引进的. 它们是 **Лобачевский 空间** (Lobachevskiĭ space) 和任意维的 Euclid 空间 (见**非 Euclid 几何学** (non-Euclidean geometries); **高维几何学** (higher-dimensional geometry)). 数学空间作为 "多重延伸", 或 "流形" 的一般概念是 1854 年由 B. Riemann 引进的. 它已被推广, 公理化, 并且沿各种不同的方向具体化了: 例如 **Riemann 空间** (Riemannian space); **Finsler 空间** (Finsler space); **Hilbert 空间** (Hilbert space); **度量空间** (metric space), 和**拓扑空间** (topological space). 在现代数学中, 空间被定义为对象的某个集合, 每个对象称为空间中的点; 它们可以是几何对象、函数, 物理系统的状态, 等等. 把这样的一个集合看作一个空间, 人们能抽象出它的元素的性质, 只考虑它们的总体的能由所关注的、或由定义所引进的关系所确定的性质. 点之间和某些图形 (即点的集合) 之间的关系决定了空间的 "几何". 在公理化构造中, 这些关系的基本性质被表述为相应的公理.

作为空间的例子有: 1) 度量空间, 在其中定义了点之间的距离; 譬如区间 $[a, b]$ 上连续函数的空间, 在这里 $[a, b]$ 上的连续函数 f 被取作点, 两个函数 f_1, f_2 之间的距离定义为它们之差的模的最大值:

$$d = \max_x |f_1(x) - f_2(x)|.$$

2) "事件的空间", 它在相对论的几何解释中起重要作用. 每个事件由它的位置, 坐标 x, y, z, 和时间 t 来表征, 因而所有可能事件的集合是一个四维空间, 其中的 "点" 是有四个坐标 x, y, z, t 的事件.

3) 在理论物理和力学中所考虑的相空间. 物理系统中的相空间是该系统的所有可能状态 (看作该空间的点) 的集合.

А. Д. Александров 撰

【补注】 见 **Banach 空间** (Banach space); **Minkowski 空间** (Minkowski space); **连续函数空间** (continuous functions, space of); **拓扑映射空间** (space of mappings, topological).

参考文献

[A1] Senechal, H. and Fleck, G., Shaping space, Birkhäuser, 1988.

[A2] Weyl, H., Space-time-matter, Dover, reprint, 1950 (译自德文).

[A3] Weyl, H., Philosophy of mathematics and natural science, Princeton Univ. Press, 1949.

陈维桓 译

空间形式 [space forms; **пространственные формы**], 亦称空间型

连通的、完全的常曲率 Riemann 空间(见完全 **Riemann 空间**(complete Riemannian space)). 将任意常曲率的 n 维 Riemann 空间进行分类的问题是 W. Killing 在 1891 年陈述的, 他称之为空间形式的 Clifford-Klein 问题(Clifford-Klein problem of space forms). 现代所陈述的这个问题归功于 H. Hopf (1925 年).

空间形式的例. n 维 Euclid 空间 E^n 是零曲率的空间形式(所谓的平坦空间); E^{n+1} 中半径为 $r>0$ 的球面 S^n 是正曲率 $1/r^2$ 的空间形式; Лобачевский 空间 Λ^n(双曲空间)是负曲率的空间形式, 平环 $T^n=E^n/\Gamma$, 其中 Γ 是 E^n 中一个 n 维的格, 是零曲率的空间形式(平坦空间).

曲率 σ 的任何空间形式能够从有相同曲率的单连通空间形式 $\widetilde{M}^n$ 关于在 $\widetilde{M}^n$ 上自由作用(即其作用没有不动点)的一个离散的运动群 Γ 的商得到. 而且, 两个空间 $M^n=\widetilde{M}^n/\Gamma$ 和 $M_1^n=\widetilde{M}^n/\Gamma_1$ 是等距的, 当且仅当 Γ 和 Γ_1 在 $\widetilde{M}^n$ 的运动群中是彼此共轭的. 这样, 把空间形式的分类问题转化为如何描述 S^n, E^n, Λ^n 的全体有自由作用的非共轭运动群的问题. 如果 $M^n=S^n/\Gamma$, 则称 M^n 为球空间形式 (spherical space form); 若 $M^n=E^n/\Gamma$, 则称 M^n 为 Euclid 空间形式(Euclidean space form); 若 $M^n=\Lambda^n/\Gamma$, 则称 M^n 为双曲空间形式(hyperbolic space form); M^n 的基本群同构于 Γ. 在非零曲率 σ 的空间形式分类问题的研究中, 只有 σ 的符号有意义, 所以通常置 $|\sigma|=1$.

若 n 是偶数, 球面 S^n 的无不动点的运动只有中心对称, 它把 S^n 的每一点映到它的对径点. 由这些运动生成的群 Γ 的商空间 S^n/Γ 是一个椭圆空间. 偶数维球空间形式或者等距于 S^n, 或者等距于 P^n. 三维球空间形式已被分类了(见[2]). 在对球空间形式进行分类的方向上的下一个阶段是解该问题的一般性程序, 以及它对于 $4k+1$ 维球空间形式分类的应用(参见[4]). 因为 S^n 是紧的, S^n 的离散运动群是有限的. 为了将 n 维球空间形式分类, 只要描述正交群 $O(n+1)$ 的所有非共轭的自由作用在 S^n 上的有限子群. 有限群 G 在 E^{n+1} 中的一个正交表示称作是无不动点的 (fixed-point free), 如果对于所有的 $g\in G\setminus\{1\}$, 球面 S^n 的变换 $\pi(g)$ 是无不动点的, 特别地 π 是一个**忠实表示**(faithful representation). 根据[4]所发展的一般性程序, 球空间形式的 Clifford-Klein 问题的解可以分成若干步骤. 首先, 必须找出一个抽象子群 G 是一个球空间形式的**基本群**(fundamental group)的充分必要条件, 并且对这样的群进行分类; 获得某族群 $\{G_\lambda\}$. 其次, 必须描述 $\{G_\lambda\}$ 中每个群的所有非等价的不可约正交表示, 并且从中区分出那些无不动点的表示. 最后必须决定 $\{G_\lambda\}$ 中的群的所有自同构, 并且弄清楚所找到的表示的哪一些关于对应的群的自同构是等价的. 上述程序已在[5]中被完全地实现了, 且导致球空间形式的详尽的分类. 任何有限循环群属于群族 $\{G_\lambda\}$; 阶为 N 的非循环群当(而非仅当) N 与 $n+1$ 互素, 且它能被一个整数的平方可除时是 n 维球空间形式的基本群.

Euclid 空间形式的整体理论是作为几何结晶学(见**数学结晶学**(crystallography, mathematical))中某些结果的应用而产生的. 在[3]中, 19 世纪末已经知道的 E^3 中晶体群名录被用来得到三维 Euclid 空间形式的拓扑分类(在紧的情形下是仿射分类). E^3 中晶体群的 Bieberbach 定理导致任意维数的紧 Euclid 空间形式的结构理论. 特别是, 对于任意的 $n\geqslant 2$, 只存在有限多个 n 维紧 Euclid 空间形式的不同的等价类; 而且两个紧 Euclid 空间形式 $M^n=E^n/\Gamma$ 和 $M_1^n=E^n/\Gamma_1$ 是仿射等价的, 当且仅当它们的基本群 Γ 和 Γ_1 是同构的. 例如, 任何二维紧 Euclid 空间形式同胚于(因而仿射等价于)一个平环或 Klein 瓶. 一个抽象群 Γ 是紧 Euclid 空间形式 M^n 的基本群, 当且仅当: a) Γ 有一个有限指标的、同构于 $\mathbf{Z}^n$ 的正规 Abel 子群 Γ^*; b) Γ^* 与 Γ 中的中心化子群重合; c) Γ 没有有限阶元素. 若这样的一个群 Γ 实现为 E^n 的运动群的离散子群, 则 Γ^* 和属于 Γ 的平移的集合重合, 存在平环 $T^n=E^n/\Gamma^*$ 在 $M^n=E^n/\Gamma$ 上的正规覆叠 p, 定义为 $p(\Gamma^*(x))=\Gamma(x), \forall x\in E^n$. 有限群 Γ/Γ^* 同构于 p 的覆叠变换群, 进而同构于 M^n 的**和乐群**(holonomy group). 紧 Euclid 空间形式是总是有一个有限的和乐群. 逆命题也成立: 其和乐群有限的紧 Riemann 空间是平坦的. 已经证明每个有限群同构于一个紧 Euclid 空间形式的和乐群. 给定维数 n 的紧 Euclid 空间形式的仿射分类只对于 $n\leqslant 4$ 是已知的(1983 年). 对于 $n=3$, 存在 6 个可定向的、4 个不可定向的紧 Euclid 空间形式的仿射等价类. 有素数阶循环和乐群的紧 Euclid 空间形式已被分类了. 非等距的平环 T^n 的集合能够用

$$SL(n,\mathbf{Z})\backslash GL^+(n,\mathbf{R})/SO(n)$$

的元素参数化. 这里, $GL^+(n,\mathbf{R})$ 是 $GL(n,\mathbf{R})$ 中单位元素的连通分支. n 维紧 Euclid 空间形式的等距分类根据它们的仿射分类和环面 T^n 的等距分类得到. 非紧 Euclid 空间形式只在二维和三维情形已被分类(差一个等距). 特别是, 一个不同于 E^2 的二维非紧 Euclid 空间形式或者同胚于柱面, 或者同胚于 Mobius 带. 任何非紧 Euclid 空间形式容许到它的一个紧全测地平坦子流形上的实解析收缩; 非紧 Euclid

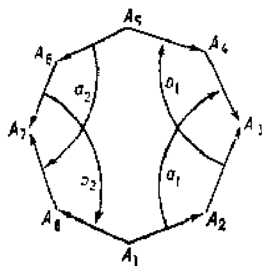
空间形式的基本群的类与紧 Euclid 空间形式的基本群的类相重合.

二维双曲空间形式的研究在实质上始于 1888 年，其时 H. Poincaré ([1]) 研究复平面的上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 的离散的分式线性变换群 (见 **Fuchs 群** (Fuchsian group)), 并指出它们能作为双曲平面 Λ^2 的运动群来处理. 设 $\mathscr{S}$ 是 Λ^2 的保持定向的运动群; $A_1\cdots A_{4m}(m\geqslant 2)$ 是 Λ^2 中其边为两两合同的测地线段

$$A_{4i-3}A_{4i-2}=A_{4i-1}A_{4i},$$

$$A_{4i-2}A_{4i-1}=A_{4i}A_{4i+1},$$

其中 $i=1,\cdots,m$, $A_{4m+1}=A_1$ 的凸 $4m$ 角形，它的角和是 2π. $\mathscr{S}$ 中的元素 a_i, b_i 分别把 $A_{4i-3}A_{4i-2}$ 映到 $A_{4i}A_{4i-1}$, 把 $A_{4i-2}A_{4i-1}$ 映到 $A_{4i+1}A_{4i}$ ($m=2$ 的情形如图所示).



由 a_i, b_i 生成的子群 $\Gamma\subset\mathscr{S}$ 在 Λ^2 上的作用无不动点，给定的 $4m$ 角形是 Γ 的基本域，而且 Γ 有唯一的定义关系

$$\prod_{i=1}^{m}[a_i,b_i]=1.$$

商空间 Λ^2/Γ 是亏格为 m 的可定向紧双曲空间形式，且每一个二维可定向紧双曲空间形式能够以这种方式获得. 现在假定 Γ 是同构于亏格为 m 的可定向闭曲面的基本群的抽象群，则存在连续映射 $\varphi:\Gamma\times\mathbf{R}^{6m-6}\to\mathscr{S}$, 满足条件: a) 对所有的 $x\in\mathbf{R}^{6m-6}$, 映射 $\varphi_x:g\mapsto\varphi(g,x)$ 是从 Γ 到 $\mathscr{S}$ 内的单同态; b) 子群 $\Gamma_x=\varphi_x(\Gamma)$ 和 $\Gamma_y=\varphi_y(\Gamma)$ 在 $\mathscr{S}$ 中是共轭的，当且仅当 $x=y$; c) 若离散子群 $\Gamma_1\subset\mathscr{S}$ 同构于 Γ, 则有某个 $x\in\mathbf{R}^{6m-6}$, 使得它共轭于 Γ_x. 这样，非同构的亏格为 m 的二维紧双曲空间形式依赖于 $6m-6$ 个实参数. 二维紧双曲空间形式能自然地装备 **Riemann 曲面** (Riemann surface) 的结构，刚才所叙述的命题原来是以一致化理论为工具得以证明的; 几何证明由 [7] 给出. 已知结果能推广到与带有有限多个环柄和空洞的球面同胚的非紧双曲空间形式，以及二维不可定向的双曲空间形式. 与二维情形不同，当维数超过 2 时不存在非等距紧双曲空间形式的连续族. 更确切地说，维数 $n\geqslant 3$ 的有同构的基本群的紧双曲空间形式是等距的. 不存在与 n 维双曲空间形式的分类直接相关的其他结果 (1983 年); 维数 $\geqslant 3$ 的双曲空间形式的例子已由 [6]、[8] 给出.

除了 Riemann 空间形式之外，还研究过它们的推广: 伪 Riemann 空间形式，仿射空间形式，复空间形式，以及对称空间的空间形式 (例如，参见 [9]).

参考文献

[1] Poincaré, H., Oeuvres, 3, Gauthier-Villars, 1934.

[2] Threlfall, W. and Seifert, H., Topologische Untersuchungen der Diskontinuitatsbereiche endlicher Bewegungsgruppen der dreidimensionalen sphärischen Raumes, *Math. Ann.*, **104** (1931), 1–70.

[3] Nowacki, W., Euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen, *Comm. Math. Helvetica*, 7 (1934), 81–93.

[4] Vincent, G., Les groupes linéaires finis sans points fixes, *Comm. Math. Helvetica*, **20** (1947), 117–171.

[5] Wolff, J., Spaces of constant curvature, Publish or Perish, 1984.

[6] Винберг, Э. Б., 《Матем. сб.》, **78** (1969), 4, 633–639.

[7] Натанзон, С. М., 《Успехи матем. наук》, **27** (1972), 4, 145–160.

[8] Millson, J. J., On the first Betti number of a constant negatively curved manifold, *Ann. of Math.*, **104** (1976), 235–247.

[9] Borel, A., Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, *Topology*, **2** (1963), 111–122.

Н. Р. Камышанский 撰

【补注】 一个群称为 Bieberbach 群 (Bieberbach group), 如果它满足作为一个紧 Euclid 空间形式的基本群的如上三个条件 a), b), c).

设 $\mathscr{R}_n$ 是 Euclid 空间 E^n 的刚体运动群，即由变换 $(m,s)x=mx+s$ 构成的群，其中 $m\in O_n$ (正交群 (orthogonal group)), $s\in E^n$ 是平移. 存在正合序列

$$0\to T_n\to\mathscr{R}_n\xrightarrow{r}O_n\to 0,$$

其中 T_n 是纯平移的子群; $r(m,s)=m$. 这是一个半直积. $\mathscr{R}_n$ 的迷向子群 (isotropic subgroup) 是子群 π, 使得 $\pi\cap T_n$ 张成整个 E^n. 一致子群 (uniform subgroup) π 是使轨道空间 E^n/π 为紧的子群; 最后，一个直接子群 (direct subgroup) 就是作为 $\mathscr{R}_n$ 的子空间是离散的子群. 晶体子群 (crystallographic subgroup) 是 $\mathscr{R}_n$ 的离散的一致子群. $\mathscr{R}_n$ 的 Bieberbach 子群 (Bieberbach subgroup) 是无挠的晶体子群. $\mathscr{R}_3$ 的晶体子群也称为空间群 (space group). 亦见**晶体群** (crystallographic group). 抽象晶体群 (crystallographic group) 是含有一个有限指标的有限生成的无挠 Abel 子群的群. 抽象 Bieberbach 群 (Bieberbach group) 是无挠的晶体子群. Auslander-库西定理 (Auslander-

Kuranishi theorem）指出，每个晶体群都可以作为一个 $\mathscr{A}_n$ 的晶体子群，因此每个 Bieberbach 群都是 Bieberbach 子群．Auslander - 仓西第二定理（second Auslander - Kuranishi theorem）指出，对于任意一个有限群 π'，存在一个 Bieberbach 群 π，使得 $r(\pi)=\pi'$，并且任意一个有限群都可以作为一个紧空间形式的和乐群（参看前文）．关于晶体子群的三个 Bieberbach 定理（Bieberbach theorems on crystallographic subgroups）是：i）若 π 是 $\mathscr{A}_n$ 的晶体子群，则 $r(\pi)$ 是有限的，π 是迷向的；ii）$\mathscr{A}_n$ 的晶体子群的任何一个同构能够实现为坐标的仿射变换：$\beta\mapsto\alpha\beta\alpha^{-1}$，$\alpha=(m,s)$，$m\in \mathrm{GL}_n(R)$，$s\in E^n$；iii）在至多差一个仿射坐标变换的意义下，只存在 $\mathscr{A}_n$ 的有限多个晶体子群．这两个断言很容易导致如正文所说的关于 Euclid 空间形式的对应命题．

前几个维数的晶体子群和 Bieberbach 子群（不计同构者）的个数如下

维 数	1	2	3	4
#晶体子群	1	17	219	4783
#Bieberbach子群	1	2	10	74

如果考虑 $\mathscr{A}_3$ 中至多差一个保持定向的仿射共轭的晶体群，则得更熟悉的 230 个等价类（230 个空间群）．

参考文献

[A1] Charlap, L. S., Bieberbach groups and flat manifolds, Springer, 1986.

[A2] Auslander, L. and Kuranishi, M., On the holonomy groups of locally Euclidean spaces, *Ann. of Math.*, 65 (1957), 411.

[A3] Schwarzenberger, R. L. E., *N*-dimensional crystallography, Pitman, 1980.

陈维桓 译

拓扑映射空间 [space of mappings, topological; прос-транство отображений топологическое]

集合 X 到**拓扑空间**（topological space）Y 的映射的集合 F，F 具有某种自然拓扑．对于固定的 X 和 Y 可得到不同的映射空间，这取决于 F 所含的是何种映射及赋予 F 的是何种自然拓扑．F 的选择与 X 和 Y 上的附加结构和被研究对象的性质有关．于是，我们可以选择 F 为：所有连续映射 $X\to Y$ 的集合，所有映射 $X\to Y$ 的集合，拓扑向量空间 X 到拓扑向量空间 Y 的所有连续线性映射的集合，拓扑群 X 到拓扑群 Y 的所有连续同态的集合，区间到直线的所有光滑映射的集合，等等．

在某种程度上，研究映射空间的重要性在于：映射是比较数学对象的最普遍的方法．

自然拓扑（F 上的）通常以下列方式确定．X 的子集族 S 是固定的，F 上拓扑 T 的**准基**（pre-base）由形为

$$V(A,V)=\{f\in F:f(A)\subset V\}$$

的集合组成，其中 $A\in S$，V 是 Y 中的开集．如果 S 是 X 的有限（或单点）的子集族，则 T 称为 X 上的点态收敛拓扑（topology of pointwise convergence）．如果 S 由 X 的全体紧子集构成，则 T 称为紧开拓扑（compact-open topology）．如果 $X\in S$，则 T 称为（X 上）一致收敛拓扑（topology of uniform convergence）．而且，用这种方式得到的 F 上的每个拓扑 T 都称为在 S 的元素上一致收敛的拓扑．

与数学分支有关，某些映射空间特别重要．泛函分析的主要研究对象中，最有价值的是具范拓扑（norm topology）和弱拓扑（weak topology）的紧统上的连续函数 Banach 空间，范数拓扑即一致收敛拓扑，弱拓扑可用点态收敛来描述．在同伦论中，拓扑空间的道路空间，即闭区间到该拓扑空间的连续映射空间，起着重要作用．用映射空间的一条道路表示一个映射与另一映射同伦．把球面映入球面的映射空间产生了同伦群和上同伦群的定义．

把一个 k 空间映入另一个 k 空间的映射集合上的紧开拓扑是特别自然的．一致收敛（在整个空间）拓扑的优点是其可度量化性质．此拓扑是映射空间上一大类自然拓扑中最强的．不过，点态收敛拓扑也有它的优点——在这类拓扑中它是最弱的．首先，此拓扑最佳地反映了紧性，而紧性是函数集合的最有用的性质之一．其次，長田潤一（J. Nagata）的重要结果把对任意 **Тихонов 空间**（Tikhonov space）的研究和对拓扑环的研究直接联系起来．更确切地说，两个 Тихонов 空间是同胚的，当且仅当 X 和 Y 上的连续函数的拓扑环 $C_p(X)$ 和 $C_p(Y)$ 是同构的，这里，X 和 Y 分别具有点态收敛拓扑．

关于映射空间的拓扑性质的研究对证明具有某些性质的映射的存在性定理有用．借助压缩映射原理，紧统上的连续实值函数的度量空间的完全性被用于证明在某些假设下微分方程解的基本的存在性定理．函数度量空间完全性的一个推论是 **Baire 性质**（Baire property）．例如，可以用它证明在一区间上连续的无处可微函数的存在性．在**一般位置**（general position）定理的证明中，在著名的关于每个具有可数基的 n 维紧统都可嵌入（$2n+1$）维 Euclid 空间的可嵌入性定理的证明中，等等，函数空间的 Baire 性质都起着重要作用．

在下列的一般特性问题中，一般拓扑上实值连续函数空间的影响很清楚：如果在两个空间 X 和 Y 上

的连续实值函数空间(按点态收敛拓扑、按紧开拓扑)是同胚的(线性同胚的),那么这两个空间的性质是怎样联系的?熟知,例如线性同胚保持紧性和维数.

拓扑空间的性质与在它上面的具有点态收敛拓扑的函数空间的拓扑性质之间的遗传对偶性特别有意义.在这方面,下列定理可作为一例很有用的结论:空间的任一有限幂是 Lindelöf 的充要条件是,在它上面的函数空间具有可数的紧度.特别地,此结论被用于研究 Eberlein 紧统(Eberlein compactum)的结构,该紧统是 Banach 空间中赋予弱拓扑的紧统.

参考文献

[1] Kelley, J. L., General topology, Springer, 1975 (中译本:J. L. 凯莱,一般拓扑学,科学出版社,1982)

А. В. Архангельский 撰

【补注】 亦见**紧开拓扑**(compact-open topology); **Eberlein 紧统**(Eberlein compactum); **正规空间**(normal space); **道路空间**(path space); **点态收敛拓扑**(pointwise convergence, topology of); **紧收敛拓扑**(topology of compact convergence); **一致收敛拓扑**(topology of uniform convergence); **弱拓扑**(weak topology).

寻找(足够大的)Descartes 闭的拓扑空间范畴(见**闭范畴**(closed category))的问题受到相当大的关注,粗略地讲,即是使得 $\mathrm{Mor}(X, Y)$ 也是同类空间且其他的许多好性质成立的问题.

特别地,这导致 k 空间类或紧生成空间(compactly-generated space)类([A7]).一个空间是 k 空间("k"代表 Kelley,[1] 的作者),如果此空间的一个集合为闭集的充要条件是它与每个紧子空间的交集都是闭的.严格地讲,k 空间是局部紧空间的商.对于每个拓扑空间,存在一个在其诸紧子空间上与原有拓扑一致的较强的拓扑,使得此空间为 k 空间([1]).

寻求具有好的范畴性质(如 Descartes 闭性)的拓扑空间范畴,导致另外一些获得"近性"概念的途径(在分析,几何及其他邻域),并且促成了范畴拓扑和**拓扑结构**(topological structure)理论的问世([A5]).

参考文献

[A1] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989

[A2] Arkhangel'skiĭ, A. V., Topological function spaces, Kluwer, 1991(译自俄文).

[A3] Gillman, L. and Jenson, M., Rings of continuous functions, v. Nostrand, 1960.

[A4] McCoy, R. A. and Ntantu, I., Topological properties of spaces of continuous functions, Springer, 1988.

[A5] Preuss, G., Theory of topological structure, Kluwer, 1988.

【译注】 空间 X 在点 x 处的紧度(tightness)$t(x, X)$ 是满足下列条件的最小基数 τ. 若 $A \subset X$ 且 $x \in [A]$ ([ ]表示闭包),则存在 $A' \subset A$,使 $|A'| \leqslant \tau$ 且 $x \in [A']$.

参考文献

[B1] Arkhangel'skiĭ, A. V. and Ponomarev, V. I., Fundementals of general topology: Problems and exercises, Reidel, 1984(译自俄文), P. 43.

白苏华 胡师度 译

代数上的空间[**space over an algebra**; **пространство над алгеброй**]

带有一个**微分几何结构**(differential-geometric structure)的空间,它的点可以由某个代数提供坐标.在大多数情形,这个代数总假定是有单位元的结合代数,有时是有单位元的交错代数(见**结合环和结合代数**(associative rings and algebras); **交错环和交错代数**(alternative rings and algebras)).

在一个代数上构造一大类空间,可以首先取这个代数上一个模,它的定义可以从一个除环上向量空间的定义里将除环换成一个有单位元的结合代数而得到(见[1],[3]).与这个模的元素,称为向量,相联系的新元素,称为点,按照一个仿射空间的点与其向量相关联的公理与向量关联,就得到一个有单位元的结合代数上的仿射空间.在一个代数上的仿射空间里的仿射变换有坐标表示

$$x'^{i} = \sum_{j=1}^{n} A^{i}_{j} f(x^{j}) + a^{i},$$

这里 f 是一个连续代数自同构.某一域上秩为 r 的代数上 n 维仿射空间在同一域上的 nr 维仿射空间里有唯一的模型(表示).在这个模型里,代数上仿射空间的每一点 x 都映到这个域上 nr 维仿射空间的点,它的坐标被看成 x 在这个代数的基元素内的坐标的展开式系数.如果代数的基元素 ε_A, $A = 1, \cdots, r$,由构造方程

$$\varepsilon_A \varepsilon_B = \gamma^{C}_{AB} \varepsilon_C$$

关联着,这里 γ^{C}_{AB} 是代数的构造常数,则每一个基元素 ε_A 在这个模型里对应于矩阵为

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \gamma_A \end{matrix} \right\| \qquad (*)$$

的线性变换,这里 n 个相同的 r 维块 $\gamma_A = \| \gamma^{C}_{AB} \|$ 在主对角线上.在代数上的仿射空间里,可以指定一个 Hermite 度量(Euclid 和伪 Euclid 的),而在交换代数的情形甚至可以给出一个二次(Euclid 和伪 Euclid)度量.为此可在一个么模中定义向量的标量积 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,在第一个情形具有性质

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})^I,$$

这里 I 是这个代数的一个对合反自同构，在第二个情形具有性质

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

一个向量 $\overrightarrow{AB}$ 的标量平方确定一对点 A，B 的度量不变量. Euclid 空间和伪 Euclid 空间的运动是保持向量的标量积的仿射变换. 在代数上的椭圆和双曲空间的定义里将向量的标量积换成这样一个标量积 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，它具有性质 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})^I$ 或 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{y}, \mathbf{x})$，就得到代数上的 Hermite 空间（Hermitian space）或二次辛空间（quadratic symplectic space）.

代数 K 上一个 $(n+1)$ 维幺模的一维子模簇称为 K 上 n 维射影空间（projective space）；它的点就是这些一维子模，而一点的射影坐标是任意一个生成这个对应的一维子模的向量的坐标. 在一个代数上的射影空间里，可以像在域上射影空间那样定义**直射变换**（collineation）和**对射变换**（correlation）. 在射影坐标里，直射变换有形式

$$x^{\prime i} = \sum_{j=1}^{n+1} A^i_j f(x^j),$$

这里 f 是一个连续代数自同构，而对射变换有形式

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} f(x^j) A_{ij},$$

这里 f 是一个连续代数反自同构，而 u_i 是射影超平面坐标. 在一个酉模里引进向量的标量积就使得可以在由这个模所构造的射影空间里定义 Hermite 度量，或者，在交换代数的情形，定义二次椭圆和双曲度量. 对应的子模的向量的标量积 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 藉助于交比

$$W = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

确定这些空间的点的度量不变量. 如果 W 是一个实数，则不变量 ω，其中 $W = \cos^2\omega$，称为对应的点之间的距离（见[2]）. 一个实单代数（例如，实，复或四元数矩阵代数）上的射影，椭圆，双曲，和辛空间具有这样的性质，它们的基本群是无穷级数的单 Lie 群. 同一代数上的 Euclid，伪 Euclid，拟椭圆，拟双曲和拟辛空间具有这样的性质，它们的基本群是同一级数的拟单 Lie 群（见[2]）；半单代数上的射影，椭圆，双曲，和辛空间也具有同样的性质，这些性质也属于对偶数代数.

交错代数上射影和 Hermite（椭圆和抛物）平面的定义要复杂一些，它们的基本群是某些例外型单或拟单 Lie 群.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Elements of mathematics. Algebra: Algebraic structures. Linear algebra. 1, Addison-Wesley, 1974, Chapt. 1; 2(译自法文).

[2] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

[3] Benz, W. Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Springer, 1973.

Б. А. Розенфельд, А. П. Широков 撰

【补注】 关于稳定秩 2 的环（这一类环包含了有限维代数）上的射影平面和空间的一般理论见[A1]－[A3]. 特别，关于全阵环上的射影空间，见[A4].

参考文献

[A1] Veldkamp, F. D., Projective planes over rings of stable rank 2, *Geom. Dedicata*, **11** (1981), 285－308.

[A2] Veldkamp, F. D., Projective ring planes and their homomorphisms, in R. Kaya, et al. (ed.): Rings and Geometry, Nato Adv. Study Inst., Istanbul, 1984, Reidel, 289－350.

[A3] Veldkamp, F. D., Projective Barbilian spaces, *Resultate Math.*, **12** (1987), 222－240; 434－449.

[A4] Thas, J. A., The m-dimensional projective space $S_m(M_n(\mathrm{GF}(q)))$ over the total matrix algebra $M_n(\mathrm{GF}(q))$ of the $n\times n$-matrices with elements in the Galois field GF(q), *Rend. Math.*, **4** (1971), 459－532.

郝锅新 译

时空[space-time; пространство-время]

表示一种几何结构的术语，它描述那样一些物理理论中的空间和时间关系，在其中这些关系被认为是相互依存的（这些理论通常称为相对论性的）. 时空的最初概念是在**相对论**（relativity theory）基本假设的表述和系统化中产生的. 相对论的时空是四维**伪 Euclid 空间**（pseudo-Euclidean space）$E^4_{(1,3)}$，具有线元

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

其中 x，y，z 是空间坐标，t 是时间坐标，而 c 是光速. 这个坐标系在物理学中称为 Lorentz 坐标系（Lorentz coordinate system）（见 **Galileo 坐标系**（Galilean coordinate system））并对应于一个**惯性系**（inertial system）. 两个不同 Lorentz 坐标系之间的转换，对应于在相对于另一个惯性系作匀速运动的惯性系中观察，借助于 **Lorentz 变换**（Lorentz transformation）予以实现. 新坐标系中的时间坐标原来是要用旧坐标系中的时间坐标以及空间坐标两者来表达这个事实，反映了狭义相对论中时间和空间关系的相互依存性. 狭义相对论的时空亦称为 Minkowski 时空（Minkowski space-time）或 Lorentz 时空（Lorentz space-time）.

广义相对论中使用各种具正负号 (1，3) 的四维伪 Riemann 空间作为时空. 这种时空的度规与狭义相对

论时空的平直度规之间的差异描述引力场(见引力(gravitation)). 而时空的度规本身又通过 **Einstein 方程**(Einstein equations)与引力体和引力场的分布及性质相联系.

时空概念的出现在克服将空间作为物体的绝对位置和将时间作为绝对期间而与真实物理过程不相联系的处理方法方面起了重要作用.

现今研究物理理论中的相对论效应时, 总有一种时空概念形式进入物理理论的结构(相对论量子力学, 量子场论, 等等). 广义相对论中, 作为对 Einstein 方程的解, 曾经研究过许多时空类型.

按照相对论性物理学的观点, 时间和空间关系之间的基本差异, 表现在在时空中存在各种本质的向量: 类时、类空和类光向量, 在切空间中形成锥面. 相应地, 时空的度规是不定的, 而类空、类时和类光向量给出标量平方的不同符号. 类空向量和类时向量之间的边界形成一个迷向锥面, 其向量(见**迷向向量**(isotropic vector))具有标量平方为零和对应于光及其他静质量为零的粒子的运动.

相对论中的许多特殊效应是与时空度规的不定性以及与时空中存在迷向锥结构相联系的. 例如, Lorentz 时间延缓是具有不定度规空间中相反的三角不等式的结果, 据此在二维伪 Euclid 空间中类光曲线总是比其在(非平行)时间轴上的投影为短.

在许多情况下, 对时空度规的具体结构作一定程度的抽象, 并且仅考虑时空中迷向锥结构的性质, 即考虑各种所谓运动学类型的广义空间或类时空间, 结果原来是有用的.

按照相对论的观点对以往理论的回顾分析, 曾构造出各种类时空可以有条件地使之符合于 Newton 力学(**Galileo 空间**(Galilean space)), 甚至符合于 Aristotle 的物理概念(见[5]). 这些时空是具有退化迷向(光)锥的不同空间(例如, 半 Riemann 空间). 正是迷向锥的退化容许人们将这些空间认为是相对论时空的极限情形.

参考文献

[1] Einstein, A., Die Relativitätstheorie, in E. Lechner (ed.), *Die Physik*, Vol. 3. 3. 1, Teubner, 1915, 703 – 713.

[2] Minkowski, H., Raum und Zeit, *Phys. Z.*, **10** (1909), 104.

[3] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973 (Теоретич. физика, т. 2)(中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗西兹, 场论, 人民教育出版社, 1959).

[4] Рашевский, П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд. М., 1967.

[5] Penrose, R., Structure of space-time, in C. M. DeWitt and J. A. Wheeler (eds.), Battelle Rencontres 1967 Lectures in Math. Physics, Benjamin, 1968

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Einstein, A., The meaning of relativity, Princeton Univ. Press, 1974.

[A2] Anderson, J. L., Principles of relativity physics, Acad. Press, 1967.

徐锡申 译

不定度规空间[space with an indefinite metric; **пространство с индефинитной метрикой**], G 空间(G-space)

一对对象(E, G), 其中第一个是复数域上的向量向量 E, 而第二个是 E 上的一个双线性(或更确切地, 半双线性)型; 此型也称为 G 度规(G-metric). 如果 G 是正定(所谓定的)型, 则它是 E 中的标量积, 且能利用它对 E 的元素典范地引入(例如, 见**带不定度规的 Hilbert 空间**(Hilbert space with an indefinite metric))范数和距离(即普通的度量). 在一般的半双线性型 G 的情形, 既无范数也无度量典范地关联着 G, 而"G 度规"这用语只是使人想起向量空间中定半双线性型与某些度量的紧密关系.

关于有限维不定度规空间(finite-dimensional spaces with an indefinite metric), 更通常称为双线性度规空间(spaces with a bilinear metric), 其理论已被 G. Frobenius 所发展, 且在关于线性代数的教科书中作了阐述(见[1]).

不定度规空间的一般理论的主要目的是分划出几类比较简单但应用上重要的 Hilbert 空间中的**非自伴算子**(non-self-adjoint operator)并对它们作研究. 不定度规空间首先是由 Л. С. Понтрягин ([2])引进的(更详细情形, 见 **Понтрягин 空间**(Pontryagin space)).

不定度规空间理论在两个方向已有所发展——它们的几何学及其上的线性算子.

不定度规空间几何学中主要研究: a) E 上 G 度规与各种拓扑之间的关系; b) E 中向量子空间(线性流形)相对于 G 度规的分类(特别是所谓定子空间. 见下文); c) G 投影的性质以及 d) G 空间的基.

在 Hermite G 度规(Hermitian G-metric)(G^H 度规(G^H-metric))的情形, 即对所有 $x, y \in E$, $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$, 不定度规空间几何学的最重要结果和概念如下. 设每一向量 $y \in E$ 对应于一个线性泛函 G_y: $x \to G(x, y)$, $x \in E$. E 上一个拓扑(topology) τ 称为从属于(subordinate)该 G 度规, 如果对所有 $y \in E$, G_y 关于 τ 连续; τ 称为与该 G 度规相容的(compatible), 如果它从属于 G 且每一个 τ 连续泛函有形式 G_y, $y \in E$. 在一个不定度规空间 E 中不可能具体指

定多于一个 Fréchet 拓扑从属于 G，且不是每一个 G 度规容许有这样一个拓扑（见[4]）．如果从属于 G 度规的一个拓扑是 E 上准 Hilbert 拓扑且由 E 中一个标量积 $H(\cdot,\cdot)$ 给出，则 H 称为 G 的一个 Hermite 非负强型（Hermitian non-negative majorant）；在这情形

$$|G(x,y)|^2 \leqslant CH(x,x)H(y,y),\ C=\text{常数},\quad x,y\in E.$$

按此 H 范数完全化后得到一个带不定度规的 Hilbert 空间 $(\widetilde{E},\widetilde{G})$，其中 $\widetilde{G}$ 是 G 到整个空间 $\widetilde{E}$ 上的连续扩张．这里 $\widetilde{G}$ 可以成为退化度规，即使 G 是非退化度规．如果 G 是非退化度规且 E 的正子空间的最大维数 κ 是有限的，这种退化性不可能发生．在后面这种情形下得到 Понтрягин 空间 Π_κ．

不定度规空间 (E,G) 中的子空间 L 称为正子空间（positive subspace），负子空间（negative subspace）（更一般的名称是定子空间（definite subspace））或中性子空间（neutral subspace），依赖于对所有的 $x\in L$，$G(x,x)>0$，$G(x,x)<0$ 或 $G(x,x)=0$．一个子空间称为极大正的（maximally positive），如果它是正的且不能再扩张而同时保持此性质．每一个上述类型的子空间包含在一个同类型的极大子空间中．

在不定度规空间的子空间分类中，典范分解（canonical decomposition）和 G 正交投影（G-orthogonal projection）的概念起重要作用．

向量 $x\in E$ 称为 G 正交于子空间（G-orthogonal to subspace）$L\subset E$（关于 L 是迷向的（isotropic）），如果对所有 $y\in L$，$G(x,y)=0$．一个子空间 L 称为退化的，如果它至少包含一个关于 L 是迷向的非零向量．

如果 L 是不定度规空间 E 的一个子空间，则 $L'=\{y: G(x,y)=0$ 对所有的 $x\in L\}$ 是它的 G 正交补（G-orthogonal complement）．总是有 $L''=L^{\tau}$，其中 τ 是任何与 G 相容的拓扑．退化的向量子空间 L 的 G 正交补是退化的向量子空间且按照与 G 相容的拓扑是闭的，又 $L\cap L'$ 是迷向元素的向量子空间．一个子空间 L 称为投影完全的（projection complete），如果每一个 $y\in E$ 有 L 上一个 G 投影（G-projection），即存在一个 $y_0\in L$ 使得对每一个 $x\in L$，$G(x, y-y_0)=0$．L 上 G 投影的唯一性等价于 L 是非退化子空间，而其存在性依赖于泛函 G_y 按 L 上与 G 相容的拓扑的连续性．如果 N 和 M 是 G 正交子空间且 $M+N=E$，则 M 和 N 是投影完全的；如果 L 是一个投影完全的子空间，则 $L+L'=E$；如果 E 是非退化的不定度规空间，则这个和是直和．

设 L 是不定度规空间 E 的一个定子空间．它称为正则的（regular），如果对每一个 $y\in E$，泛函 G_y 在 E 上按范数 $\|x\|_G=|G(x,x)|^{1/2}$ 是连续的．否则它称为奇异的（singular）．每一个非退化无穷维不定度规空间包含奇异子空间．一个定子空间是投影完全的，当且仅当它是正则的且对每一个 $y\in E$ 存在元素 $x\in L$ 使得

$$\|x\|_G^2=\|G_y\|_G^2=G(x,y).$$

不定度量空间中的线性算子主要在带不定度规的 Hilbert 空间中已经作了研究．关于与 Banach 空间中类似的结果在[8]中有一综述．

如同带不定度规的 Hilbert 空间的情形，在研究不定度规空间的几何学及赋予某个与 G 相容的拓扑的空间 (E,G) 中的线性算子时，一个重要工具是 E 中的所谓 G 正交基，即拓扑向量空间 E 的基 $\{e_n\}$ 且使得 $G(e_k,e_n)=\pm\delta_{k,n}$，$k,n=1,2,\cdots$（见[4]）．

参考文献

[1] Мальцев, А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970（中译本：马力茨夫，线代数基础，高等教育出版社，1959）．
[2] Понтрягин, Л. С., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 8 (1944), 243 – 280.
[3] Иохвидов, И. С., Крейн, М. Г., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 5 (1956), 367 – 432.
[4] Гинзбург, Ю. П., Иохвидов, И. С., 《Успехи матем. наук》, 17 (1962), 4, 3 – 56.
[5] Крейн, М. Г., в кн., Вторая летняя матем. школа, ч. I, К., 1965, 15 – 92.
[6] Азизов, Т. Я., Иохвидов, И. С., 《Успехи матем. наук》, 26 (1971), 4, 43 – 92.
[7] Nagy, K. L., State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory, Noordhoff, 1966
[8] Иохвидов, И. С., 《Изв. АН Молд. ССР》, 1968, No. 1, 60 – 80.

Н. К. Никольский, Б. С. Павлов 撰

【补注】 与 G 度规相容的拓扑 τ 也称为容许拓扑（admissible topology）．对容许拓扑 τ，L^{τ} 表示 L 在 E 中的 τ 闭包．在[A2]中 G 正交补称为正交伴（orthogonal companion）．G 空间 E 上的弱拓扑是由半范数（semi-norm）族

$$p_y(x)=|G(x,y)|$$

定义的局部凸拓扑．它是一个容许拓扑，且是最弱的容许拓扑．作为二重正交补定理（double orthogonal complement theorem），$L''=L^{\tau}$ 的一个推论，得到 $L''=L$，当且仅当 L 是弱闭的．

关于不定度规空间的另外信息，见 **Крейн 空间**（Kreĭn space）和[A1]－[A4]．

参考文献

[A1] Azizov, T. Ya and Iohvidov, I. S., Linear operators in spaces with an indefinite metric, Wiley, 1989.

[A2] Bognár, J., Indefinite inner product spaces, Springer, 1974.

[A3] Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., Matrices and indefinite scalar products, Birkhäuser, 1983.

[A4] Iohvidov, I. S., Krein, M. G. and Langer, H., Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric, Akademie-Verlag, 1982(译自俄文) 葛显良 译 鲁世杰 校

稀疏矩阵 [sparse matrix; разреженная матрица]

一个只含有很少的非零元素的矩阵．特别，具有这样矩阵的线性方程组出现在用有限差分方程或变分差分方程逼近的微分方程中（见**微分方程的差分方程逼近**(approximation of a differential equation by difference equations)）． Н. С. Бахвалов 撰

【补注】矩阵的稀疏性可以有效地用于数值线性代数中．[A1] 里有一个概述．

参考文献

[A1] Zlatev, Z., Iterative improvement of direct solutions of large and sparse problems, Kluwer, 1991(译自俄文)． 郝钢新 译

Spearman 等级相关系数 [Spearman coefficient of rank correlation; Спирмена коэффициент ранговой корреляции]

两个随机变量 X 和 Y 相依性的度量，基于 X_i 和 Y_i 在独立观测值偶 $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ 中的等级或秩．设观测值 X 的秩(rank)等于 i 的数偶 (X, Y) 中，观测值 Y 的秩为 R_i，则 Spearman 等级相关系数 r_s 定义为:

$$r_s = \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right);$$

该式等价于

$$r_s = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} d_i^2,$$

其中 d_i 是观测值 X_i 和 Y_i 的秩之差．r_s 的值介于 -1 和 $+1$ 之间，且当两个秩的序列完全重合，即 $i = R_i (i = 1, \cdots, n)$ 时 $r_s = +1$；而当两个秩的序列顺序恰好相反，即 $i = (n+1) - R_i (i = 1, \cdots, n)$ 时 $r_s = -1$．Spearman 等级相关系数，同任何其他**秩统计量**(rank statistic)一样，用于检定关于两个变量独立的假设．假如变量独立，则 $\mathrm{E} r_s = 0, \mathrm{D} r_s = 1/(n-1)$．因此，根据 r_s 对 0 的离差值可以判断变量是否独立．为建立相应的检验准则，对于独立变量 X 和 Y 计算 r_s 的分布．当 $4 \leqslant n \leqslant 10$ 时利用精确分布的数值表(见[2]，[4])；当 $n > 10$ 时，例如可以利用下面的结果：当 $n \to \infty$ 时，随机变量 $\sqrt{n-1}\, r_s$ 的极限分布是标准正态分布．在后一种情形下，否定独立性假设，如果 $|r_s| > u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n-1}$，其中 $u_{1-\alpha/2}$ 是方程 $\Phi(u) = 1 - \alpha/2$ 的根，而 $\Phi(u)$ 是标准正态分布(normal distribution)函数．

在 X 和 Y 有联合正态分布的条件下，其**相关系数**(correlation coefficient)为(普通)相关系数，记作 ρ，则当 $n \to \infty$ 时，

$$\mathrm{E} r_s \sim \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2},$$

从而变量 $2\sin(\pi r_s/6)$ 可作为 ρ 的估计量．

Spearman 等级相关系数以心理学家 C. Spearman 的名字命名(1904)，他在心理学的研究中用此相关系数代替普通相关系数．基于 Spearman 等级相关系数的检验与基于 **Kendall 等级相关系数**(Kendall coefficient of rank correlation)的检验是渐近等价的(当 $n = 2$ 时相应的秩统计量重合)．

参考文献

[1] Spearman, C., The proof and measurement of association between two rings, *Amer. J. Psychol.*, 15(1904), 72 − 101.

[2] Kendall, M., Rank correlation methods, Griffin, 1962.

[3] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[4] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

A. B. Прохоров 撰

【补注】

[A1] Hájek, J and Sidak, Z., Theory of rank test, Acad. Press, 1967.

[A2] Hollander, M. and Wolf, D., Nonparametric statistical methods, Wiley, 1973. 周概容 王健 译

特殊自同构 [special automorphism; специальный автоморфизм]，由测度空间 (X, ν) 的自同构 S 和(定义于 X 上且取正整数值的)函数 f 构造的

由下述方式构造的某个新测度空间 (M, μ) 的一个自同构 T: M 的点是偶 (x, n)，其中 $x \in X$，n 是整数且 $0 \leqslant n < f(x)$；M 赋予显然测度 μ：如果 $A \subset X$ 且对所有 $x \in A$ 有 $f(x) > n$，则 $\mu(A \times \{n\}) = \nu(A)$；如果 $\mu(M) = \int_X f d\nu < \infty$，则通常使此测度规范化．设 T 是这样的变换：当 $n + 1 < f(x)$ 时使点 (x, n) 的第二坐标加 1(所给条件意味着变换后的点仍在 M 内)，否则令 $T(x, n) = (Sx, 0)$．可证变换 T 是测度空间 (M, μ) 的一个自同构．

上述构造常在**遍历理论**(ergodic theory)中用于制作各种例子．另一方面，下述情形清楚显示了特殊

自同构的作用．使每个点 $x\in X$ 等同于点 $(x,0)$，就可假定 $X\subset M$，于是 $f(x)$ 是一个点从 X 中出发在瀑布 $\{T^n\}$ 作用下运动再次返回到 X 中所需的时间，而 S 是诱导自同构（induced automorphism）T_X．这样，只需观察动点通过集合 X 的路程，就可用特殊自同构在整个相空间中重现一个动力系统的轨道族．

Д. В. Аносов 撰

【补注】 也用"自同构 S 的本原（primitive）"代替"由 S 构造的特殊自同构"．（此时上述"诱导自同构"称为 S 的派生（derivative）．见 [A2]．）所述观念源自角谷静夫；见 [A1]．

参考文献

[A1] Kakutani, S., Induced measure preserving transformations, *Proc. Japan Acad.*, 19 (1943), 635 – 641.

[A2] Petersen, K., Ergodic theory. Cambridge Univ. Press, 1983.

[A3] Корнфельд, И. П., Синай, Я. Г., Фомин, С. В., Эргодическая теория, М., 1980（英译本：Cornfel'd [Kornfel'd], I. P., Fomin, S. V., Sinaĭ, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1985, Chapt. 1, §5）.

沈永欢 译

特殊流 [**special flow; специальный поток**]，由一测度空间（measure space）(X,ν) 的自同构 S 和（定义在 X 上并取正值的）可测函数 f 构成的

在某一个新的测度空间 (M,μ) 上按以下方式构成的一个**可测流**（measurable flow）．M 中的点是偶 (x,s)，这里 $x\in X$ 而 $0\leq s<f(x)$，M 看作是 $X\times[0,\infty)$ 的子集，μ 则是 X 上的测度 ν 和 $[0,\infty)$ 上的 Lebesgue 测度之直积在 M 上的限制．若 $\mu(M)=\int_X f d\nu<\infty$，则通常将此测度规范化．运动是这样进行的，即 (x,s) 的第二个坐标以单位速度增加以达到值 $f(x)$，然后此点跳到 $(Sx,0)$．

特殊流在**遍历理论**（ergodic theory）中的作用类似于截面和 **Poincaré 回归映射**（Poincaré return map）在光滑动力系统的研究中的作用：X 起着截面的作用，S 是映射的作用．但是在拓扑理论中，通常只能局部地构造出形如一个流形的截面．但在遍历理论中则可以在很一般的条件下作出整体截面，因为这里没有与该拓扑有关的限制．（即令初始流是光滑的，也允许截面不连续．）所以，在很广泛的条件下，可测流度量地同构于某个特殊流，甚至对 f 还有外加的条件（见 [1]）．一个相关的概念是**特殊自同构**（special automorphism）．

参考文献

[1] Корнфельд, И. П., Синай, Я. Г., Фомин, С. В., Эргодическая теория, М., 1980（英译本：Cornfeld, I. P., Fomin, S. V. and Sinaĭ, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982）.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 Lebesgue 空间上的每一个无不动点的可测流都度量同构于一特殊流，见 [1], Chapt. 11, §2．关于这个"特殊表示"以及对 f 的外加条件（Rudolph 定理（Rudolph theorem）），见 [1], Chapt. 11, §4．特殊表示例如可用于分析 K 流的谱（见 K 系统（K-system））．

齐民友 译

特殊函数 [**special functions; специальные функции**]

广义地说，特殊函数是在求解不同数学分支的理论和应用问题时产生的各类函数．

狭义地说，特殊函数是在用**分离变量法**（separation of variables, method of）解偏微分方程时产生的数学物理特殊函数．

特殊函数可以通过幂级数、母函数、无穷积、累次微分、积分表示、微分方程、差分方程、积分方程、函数方程、三角级数以及其他正交函数的级数来定义．

最重要的特殊函数类是以下这些：**Γ 函数**（gamma-function）和 **B 函数**（beta-function）；**超几何函数**（hypergeometric function）和**汇合型超几何函数**（confluent hypergeometric function）；**Bessel 函数**（Bessel functions）；**Legendre 函数**（Legendre functions）；**抛物柱函数**（parabolic cylinder function）；**积分正弦**（integral sine）和**积分余弦**（integral cosine）函数；**不完全 Γ 函数**（incomplete gamma-function）和**不完全 B 函数**（incomplete beta-function）；**概率积分**（probability integral）；各种单变量和多变量的**正交多项式**（orthogonal polynomials）；**椭圆函数**（elliptic function）和**椭圆积分**（elliptic integral）；**Lamé 函数**（Lamé function）和 **Mathieu 函数**（Mathieu functions）；**Riemann ζ 函数**（Riemann zeta-function）；**自守函数**（automorphic function）；以及某些离散变量的特殊函数．

特殊函数理论同群的表示（见**表示论**（representation theory））、基于经典正交多项式的 **Rodrigues 公式**（Rodrigues formula）推广的积分表示方法、以及**概率论**（probability theory）方法都有关系．

有各种特殊函数的数值表，以及积分和级数表．

参考文献

[1] Bateman, H., Higher transcendental functions, 1 – 3, McGraw-Hill, 1953 – 1955.

[2] Abramowitz, M. and Stegun, A. (eds.), Handbook of mathematical functions, Dover, reprint, 1970.

[3] Jahnke, E., Emde, F. and Lösch, F., Tafeln höheren Funktionen, Teubner, 1966.

[4] Лебедев, Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.-Л., 1963（英译本：Lebedev, N. N., Special functions and their applications, Prentice-Hall, 1965.

[5] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[6] Krazer, A. and Franz, W., Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960.

[7] Watson, G. N., A treatise on the theory of Bessel functions, 1-2, Cambridge Univ. Press, 1952.

[8] Hobson, E. W., The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge Univ. Press, 1931.

[9] Виленкин, Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965(英译本: Vilenkin, N. Ya., Special functions and the theory of group representations, Amer. Math. Soc., 1968).

[10] Никифоров, А. Ф., Уваров, В. Б., Специальные функции математической физики, М., 1978 (英译本: Nikiforov, A. F. and Ufarov, V. B., Special functions of mathematical physics, Birkhäuser, 1988).

[11] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[12] Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, 1-2, Wiley, 1957-1971 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用, 科学出版社, 上册1964, 下册1979).

[13] Градштейн, И. С., Рыжик, И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М., 1971 (英译本: Gradshtein, I. S. and Ryzhik, I. M., Table of integrals, series and products, Acad. Press, 1980).

[14] Прудников, А. П., Брычков, Ю. А., Маричев, О. И., Интегралы и ряды. Элементарные функции, М., 1981 (英译本: Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I., Integrals and series. Elementary functions, Gordon & Breach, 1986).

[15] Прудников, А. П., Брычков, Ю. А., Маричев, О. И., Интегралы и ряды. Специальные функции, М., 1983 (英译本: Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I., Integrals and series. Special functions, Gordon & Breach, 1986).

[16] Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I., Integrals and series. Additional chapters, Gorden & Breach, 1987 (译自俄文).

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】 给定一个 Lie 群 G 及其(矩阵)表示 ρ, 可以把 ρ 的矩阵系数看作 G 上的函数. 许多特殊函数都可认为实质上是这样产生的. 详见[9], [A1], [A4], 以及全面论述[A2]第一卷.

许多特殊函数都具有所谓 q 类比——q 特殊函数(q-special functions). 简略地说, 这意味着, 可以引入参数 q 而得到一族特殊函数, 使得特殊函数的许多特性都能保持. 这些 q 特殊函数对应于**量子群**(quantum groups), 这同特殊函数与 Lie 群之间的关系一样. 更详细的情况, 见近期评述[A3]和[A2]第二、三卷.

参考文献

[A1] Miller, W. jr., Lie theory and special functions, Acad. Press, 1968.

[A2] Vilenkin, N. Ya. and Klimyk, A. U., Representations of Lie groups, special functions and integral transforms, 1-3, Kluwer, 1991- (译自俄文).

[A3] Koornwinder, T. H., Orthogonal polynomials in connection with quantum groups, in P. Nevai (ed.), Orthogonal Polynomials, Kluwer, 1990, 257-292.

[A4] Wawrzyńczyk, A., Group representations and special functions, Reidel, 1984.

[A5] Srivastava, H. M. and Kashyap, B. R. K., Special functions in queuing theory, Acad. Press, 1982.

杜小杨 张鸿林 译

特殊线性群 [special linear group; специальная линейная группа], 环 R 上的 n 阶的

一般线性群(general linear group) $GL(n,R)$ 的子群 $SL(n,R)$, 是行列式同态 $\det_n$ 的核. $SL(n,R)$ 的结构取决于 R, n 及定义在 $GL(n,R)$ 上的行列式的类型. 有三种主要的行列类型: 当 R 是交换环时的通常行列式, 当 R 是除环时的非交换 Dieudonné 行列式(见**行列式**(determinant))(见[1]), 对一个在其中心上维数有限的除环 R 的简化范同态, (见[2]).

$SL(n,R)$ 有下列值得注意的子群: 由初等矩阵 e_{ij}^{λ} 生成的群 $E(n,R)$(见**代数 K 理论**(algebraic K-theory)), 对 R 的每一个双边理想 q, 同余子群 $SL(n,R,q)$ 以及 $E(n,R)$ 中由矩阵 e_{ij}^{λ} 生成的正规子群 $E(n,R,q)$, 此处 $\lambda\in q$, 令 $A\in E(n,R,q)$, 且

$$A\mapsto\left\|\begin{matrix}A & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|$$

是 $E(n,R,q)$ 到 $E(n+1,R,q)$ 的嵌入. 则正向极限给出群 $E(R,q)$. 群 $SL(R,q)$ 可类似定义. 当 $q=R$ 时, 用 $E(R)$ 和 $SL(R)$ 分别代替 $E(R,R)$ 和 $SL(R,R)$. 后者叫作环 R 的稳定特殊线性群(stable special linear group of the ring). $SL(R)$ 的正规子群结构与群 $SL(n,R)$ 的结构密切相关: H 是 $SL(R)$ 的正规子群, 当且仅当对 R 的某个(唯一的)双边理想 q, 下述包含关系成立:

$$E(R,q)\subset H\subset SL(R,q).$$

这样, Abel 群 $SK_1(R,q)=SL(R,q)/E(R,q)$ 将 $SL(R)$ 的正规子群进行了分类. 群 $SK_1(R)=SK_1(R,R)$ 叫作 R 的约化 Whitehead 群(reduced Whitehead group). 对任意环 R, 用理想 q 的稳定秩(stable rank)(st. r. q) 的一个条件可以得到关于

$SL(N,R)$ 的正规子群的令人满意的刻画．事实上，若 $n \geq \mathrm{st.r.}q+1$，则有同构

$$SL(n,R,q)/E(n,R,q) \simeq SK_1(R,q).$$

进一步地，若条件 $n \geq \mathrm{st.r.}R+1$，$n \geq 3$ 成立，则对 $SL(n,R)$ 的每一个正规子群 H，存在一个适当的 q，使得包含关系

$$E(n,R,q) \subset H \subset SL'(n,R,q)$$

成立，此处 $SL'(n,R,q) = GL'(n,R,q) \cap SL(n,R)$，且 $GL'(n,R,q)$ 是 $GL(n,R/q)$ 的中心在 $GL(n,R)$ 内的原象．对于某些特殊的环，已得到一些明确的结果（例如见[2]，[4]）．

在非交换 Dieudonné 行列式的情况下（此时 R 是除环），结果是详尽的．群 $SL(n,R)$ 和 $E(n,R)$ 重合．除 $SL(2,\mathbf{F}_2)$ 之外（此处 $\mathbf{F}_q$ 记 q 元域），$SL(n,R)$ 是 $GL(n,R)$ 的换位子群．$SL(n,R)$ 的中心 Z_n 由标量矩阵 $\mathrm{diag}(\alpha,\cdots,\alpha)$ 组成，此处 α 是 R 的中心的元素，$\alpha^n \in [R^*,R^*]$，$[R^*,R^*]$ 是除环 R 的乘法群 R^* 的换位子群．除 $n=2$ 且 $R=\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3$ 的情况外，$SL(n,R)/Z_n$ 都是单的．当 $n=2$ 时，$SL(2,\mathbf{F}_2) = SL(2,\mathbf{F}_2)/Z_2$，且 $SL(2,\mathbf{F}_2)$ 同构于 3 次**对称群**（symmetric group）S_3，而 $SL(2,\mathbf{F}_3)/Z_2$ 同构于 4 次**交错群**（alternating group）A_4．

若 $\det_n$ 是简化范同态，则

$$SL(n,R)/E(n,R) \simeq SK_1(R),$$

而且

$$SK_1(R) \simeq SL(1,R)/[R^*,R^*].$$

这样，当 R 是域时，群 $SK_1(R)$ 是平凡的．当 R 是除环时，很长时期曾猜想 $SK_1(R)=\{0\}$．但在 1975 年证明了这是不对的（见[5]）．群 $SK_1(R)$ 在代数几何中至关重要（见[6]，[7]）．此外简化范同态的推广激发了对特殊线性群的一系列新的研究．

参考文献

[1] Artin, E., Geometric algebra, Interscience, 1957.

[2] Bass, H., Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

[3] Milnor, J., Introduction to algebraic K-theory, Princeton Univ. Press, 1971.

[4] Суслин, А. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》. 41(1977), 2, 235－252.

[5] Платонов, В. П., 《Докл. АН СССР》, 222(1975), 6, 1299－1302.

[6] Платонов, В. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем》, 40(1976), 2, 227－261.

[7] Платонов, В. П., В. сб.: 《Proc. Intern. Congr. Math.》, 1(1980), 311－323.

В. И. Янчевский 撰

【补注】 简化范同态见**简化范**（reduced norm）．

参考文献

[A1] Hahn, A. J., O'Meara, O. T., The classical groups and K-theory. Springer, 1989.

张英伯 译

点 x 的特殊化 [specialization of a point x; специализация точки x]，拓扑空间 X 的

具有包含关系 $y \in \overline{\{x\}}$ 的点 $y \in X$（这等价于包含 $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$）．点 x 称为泛的（generic），如果 X 的任何点都是它的特殊化，即 $\overline{\{x\}} = X$．另一个极端情形是闭点（closed point）：具有唯一的特殊化的点，即这个点本身．

对于环 A 的**仿射概形**（affine scheme）$\mathrm{Spec}(A)$，点 y 是点 x 的特殊化，如果 A 中相应的素理想包含有关系 $p_x \subset p_y$．当 A 是无零因子的环时，点 $\{0\} \in \mathrm{Spec}(A)$ 是泛点，特殊化关系可分成许多级，最高级的是闭点，下一级就是特殊化为闭点的点，i 级的点就是其特殊化属于 $\leq i-1$ 级的点．例如对 $\mathrm{Spec}(\mathrm{C}[T_1,\cdots,T_n])$，有 $n+1$ 个级：闭点，曲线的泛点，曲面的泛点，……，n 维仿射空间的泛点．

参考文献

[1] Манин, Ю. И., Лекции по алгебраической геометрии, М., 1970.

[2] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., Elément de géométrie algébrique, 1, Springer, 1971.

В. В. Шокуров 撰

【补注】 当然 $\overline{\{x\}}$ 表示集 $\{x\}$ 的闭包．一个点的闭包是 X 的不可约子集．反之，X 的每个不可约子集有一个泛点．

参考文献

[A1] Hartshorne, R., Algebraic geometry, Springer, 1977.

陈志杰 译

种类 [species; вид]，逻辑中的

在直觉主义中相当于集合的概念；一个精确地形成的用以从一个已经定义了的事物的群体中分离出某些事物的判断法则．要特别注意，定义种类的条件要放在直觉主义的意义上来理解，所以，例如一个条件的双重否定不一定等价于原来的条件．种类上定义的运算自然地类似于集合上定义的运算，譬如并、交和其他运算，但由于它们被理解为是在直觉主义的意义上的（见**直觉主义**（intuitionism）），所以这些运算的性质往往与相应的古典的性质有所不同．因此论断余种类的余种类等同于原来的种类是不适用于直觉主义的种类理论的．

在构造种类的理论时，通常的悖论可以由规定种类的成员的定义独立于种类本身的定义来避免．直觉主义的理论诸如直觉主义算术或直觉主义数学分析可以一点也不涉及种类的概念地构造出来，但在更为抽

象的数学领域中（直觉主义的证明论，语义学，泛函分析）开发种类的理论是一个根本的理论部分.

参考文献

[1] Heyting, A., Intuitionism an introduction, North-Holland, 1970.

А Г Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dragalin, A. G., Mathematical intuitionism. Introduction to proof theory, Amer. Math. Soc., 1988（译自俄文）.

[A2] Troelstra, A. S. and Dalen, D. van, Constructivism in mathematics, 1 – 2, North-Holland, 1989.

罗里波 译 王世强 校

Specker 序列 [Specker sequence; Шпеккерова последовательность] 一个递归、单调、有界的有理数序列，它不是构造（算法）意义下的 **Cauchy 序列**（cauchy sequence）.

这种序列的第一个例子是由 E. Specker（[1]）提出的. 更准确的说，对一个 Specker 序列 α，不存在一个**广义递归函数**（general recursive function）β，使得对任意满足 $i, j \geqslant \beta(n)$ 的 i, j, n，下列不等式成立：

$$|\alpha(i)-\alpha(j)|<\frac{1}{2^n}$$

Specker 序列的存在性对于构造数学和传统数学分析都是基本的. 因为 Specker 序列不收敛于任何可构造（可计算）的实数，而且也不能从中选出一个子序列具有这种性质. 从构造连续统的自然的算法观点来看，Specker 序列可以认为是一个反例，它矛盾于下列基本原理：关于有界单调序列的极限存在性的 Weierstrass 定理，关于选择收敛子序列的 Bolzano-Weierstrass 定理，和关于有界数集的上确界存在性定理. 从传统数学的观点来看，Specker 的结果说明上述基本定理所断言的存在的对象具有非常复杂的性质，即使最初的情况是非常简单的. 这些对象的计算复杂性和描述复杂性的研究中，Specker 定理可以认为是第一个本质的进展.

亦见**构造数学**（constructive mathematics）；**构造分析**（constructive analysis）.

参考文献

[1] Specker, E., Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis, *J. Symbol. Logic*, **14** (1949), 145 – 158.

[2] Кушнер, Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу. М., 1973.（英译本：Kushner, B. A., Lectures on constructive mathematical analysis. Amer. Math. Soc., 1984）.

Б. А. Кушнер 撰

【补注】

参考文献

[A1] Calude, C., theories of computational complexity. North-Holland, 1988.

[A2] Hermes, H., Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, Springer, 1978.

何青 译 罗里波 校

谱分析 [spectral analysis; спектральный анализ]

线性算子（linear operator）谱性质的研究，诸如谱及其主要部分的几何学，谱重数及本征值的渐近性质.

对有限维空间的算子，决定谱的问题等价于确定特征方程 $\det(A-\lambda I)=0$ 的根的位置. 对无穷维空间情况复杂得多得多，即使行列式工具可以建立并成功地用于某些无穷维算子的谱分析. 算子谱分析的许多情形是基于函数演算的一种显式构造（分别地，用函数空间上乘法算子，其他的模型算子，以及它们的限制或商）. 关于一个算子或多算子函数的谱映射的各种定理在谱分析中找到广泛的应用. 这些可以很简单（一个算子的多项式的谱由这多项式在该算子的谱上的值组成，两个交换算子的和的谱包含于它们的谱的代数和之中）或很深奥（描述非交换算子的函数的谱，在其谱的边界点上有不连续性的算子的函数的谱，多值映射的象的联合谱、近似谱、点谱或亏损谱的映射，等等）. 关于算子的谱的有用信息可取之于它的拓扑特征（例如，连续算子的谱是紧的，而紧算子的谱至多可数且其非零点是孤立的本征值），取之于关于该空间中一个特殊锥的性态（正算子的主本征值），或取之于标量积（自伴算子的谱是实的，正 Hermite 算子的谱是非负的，耗散算子的谱位于上半平面中，以及酉算子的谱位于单位圆周上）. 如果该标量积不是定号的，但其不定性指标 κ 是有限的，则保持这标量积的算子（称为 J 酉算子（J-unitary operator）的谱在单位圆周外至多有 2κ 个点. 对 J 自伴和 J 耗散算子，情况是相似的（见[5]）.

谱特征可以有特殊的稳定（连续）性质且这些在**谱扰动理论**（spectral perturbation theory）（一般的**扰动理论**（perturbation theory）的一个分支）中作研究. 这样，谱是算子的上半连续函数：一个有界算子的谱的任一邻域包含与它充分接近的所有算子的谱（在无界算子的情形需要作小的修正）. 这使得可以追踪在小扰动下谱的孤立点的变化，且可以解析地表示（用参数 μ 的幂级数形式）位于 A 的有限重孤立本征值的邻域内的算子 $A+B\mu$ 的本征值. 在某些情形，可以估计给定区域中一个算子在按范数不必是小的但有固定（有限）阶的扰动作用下其本征值数目的变化. 同样的主题范围内还包括关于紧扰动下自伴算

子(self-adjoint operator)的凝聚谱(condensation spectrum)(有限重孤立本征值集合在谱中的补)不变性的 Weyl 定理(H. Weyl, 1909). 由此推出自伴算子 A 的凝聚谱与其本质谱.

$$\sigma_e(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ A-\lambda I \text{ 不是 Fredholm 算子 }\}$$

重合, 且方程 $\sigma_e(A+K)=\sigma_e(A)$ 成立只要 A 是闭的而 K 是紧的. 由 Weyl 的定理也推出具有有限(且相等)亏数的一个对称算子的所有自伴扩张有相同的本质谱. Weyl 的定理也可推广到相对紧扰动的情形(K 称为相对于 A 的紧算子(compact operator relative to A), 如果它把每一个具有有界 A 象的有界集映入紧集中), 它蕴涵广大的一类对称多维微分算子的自伴扩张的本质谱重合. Weyl 的定理有一逆定理(J. von Neumann, 1935): 如果两个自伴算子有相同的本质谱, 则其中之一酉等价于另一个受任意小范数的紧算子(甚至是 Hilbert-Schmidt 类的算子)的扰动. 这个结果被推广到正规和本质正规算子的情形, 以及非交换 C^* 代数(C^*-algebra)的情形.

Weyl-von Neumann 定理表明本质谱是自伴算子在紧扰动下稳定的唯一的谱特征, 而连续谱和点谱是极不稳定的. 同时, 绝对连续谱(absolutely-continuous spectrum) $\sigma_{ac}(A)$(它是 A 到子空间 $H_{ac}(A)$ 的限制的谱, 其中 $H_{ac}(A)$ 是使得函数 $\lambda\mapsto(E_A(\lambda)x, x)$ 绝对连续的所有向量 $x\in H$ 的子空间)也有某种稳定性: 它在核型扰动下是不变的. 这是波算子理论的基本结果之一, 与量子力学的散射理论紧密联系(见[2]). 关于一对自伴算子 A, B 的波动算子(wave operator) $W(A, B)$ 是等距线性映射

$$x\mapsto\lim_{t\to\infty}\exp(itB)\exp(-itA)x,$$

它定义在使此极限存在的所有向量 $x\in H$ 的闭子空间 $\Sigma(A, B)$ 上. 关系式 $W(A, B)A=BW(A, B)$ 和 $W(A, B)\Sigma(A, B)=\Sigma(B, A)$ 表明 $W(A, B)$ 实现了一个 A 和 B 的酉等价, 如果 $\Sigma(A, B)=\Sigma(B, A)=H$. $B-A$ 的核型性条件蕴涵包含关系 $H_{ac}(A)\subset\Sigma(A, B)$ 和 $H_{ac}(B)\subset\Sigma(B, A)$, 且从而推出 A 和 B 的绝对连续部分的酉等价性, 它反过来保证了它们的谱特征是同样的.

有另外一种方法证明一个受扰动算子和一个未受扰动算子的酉等价性(或者, 在非自伴算子的情况, 相似性). 在这方法中把两个算子 A 和 $A+K$ 的相似性条件写成线性算子方程 $AV-VA=VK$ 的形式. 然后寻找一个线性算子 Γ, 它是乘法算子 $X\mapsto AX-XA$ 的左逆(即 $A\Gamma(X)-\Gamma(X)A=X$)且对它而言 $\Gamma_K: X\mapsto\Gamma(XK)$ 是算子空间中的一个压缩. 如果继续寻找这样一个算子 Γ, 则可取算子 $(I+\Gamma_K)^{-1}I$ 作为 V, 已经预先验证了其可逆性. 用这方法可以成功地研究大的一类具有离散谱和连续谱的正规算子, 拟幂零算子, 带权的移位算子, 和对应用特别重要的多维积分微分算子.

由函数空间上解析运算生成的算子(诸如微分、积分和差分算子)的谱分析假设它们的谱可借助于对应运算的参数(系数)来描述. 扰动理论在这样一些问题中的广泛可应用性用以下事实来解释, 常常可以顺利地在同样的项中(用重新分配系数)分离出主要部分和扰动部分. 例如, 设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个区域, 设 q 是一个实位势, 即 G 上一个数值函数, 又设 $A_q(G)$ 是用微分运算 $l_q(u)=-\Delta u+qu$ 和最刚性的边界条件在 $L_2(G)$ 定义的 Schrödinger 算子(极小算子). 这时 $A_q(G)$ 是对称的. 自然地假设 $-\Delta$(或更确切地, $A_0(G)$)是一个未受扰动算子, 而用 q 相乘是一个扰动. 当势在某种意义小时, 这样的一种表示有有用的推论. 例如, 如果当 $G\ni M\to\infty$ 时 $q(M)\to 0$, 则 Weyl 的定理保证 A_q 和 A_0 的本质谱重合(且与它们的自伴扩张的本质谱重合). 如果 G"充分大"且该势是平方可积的, 则 $\sigma_e(A_q)\supset[0, \infty)$, 此外如果

$$\sum_{|j|\leqslant n+1}\int_G(1+r^2)|\partial^j q|dV$$

充分小, 则 A_q 和 A_0 是酉等价的. 在其他情形, 取 $A\tilde{q}$ 作为未受扰动算子, 其中势 $\tilde{q}$"接近"于 q, 但是有一个较简单的结构. 这使得可以证明, 例如, 如果当 $M\to\infty$ 时, $\liminf q(M)\to a$, 则在区间 $(-\infty, a)$ 中 A_q 的自伴扩张的谱是有限的(特别地, A_q 是半有界的且有离散谱, 如果 $G\ni M\to\infty$ 时 $q(M)\to\infty$).

在对称微分算子(特别是一维的这样的算子)的谱分析中, 另外一种方法已被采用, 它不是根据谱扰动理论, 而是根据谱分解定理的一种特殊形式. 产生一个微分算子的谱表示的一个酉变换可以用积分算子

$$Uf(\lambda)=\int_G u(x, \lambda)f(x)dx$$

来实现(在具有循环向量的算子的最简单的情况中), 其中的核 $u(x, \lambda)$ 在任何 λ 处是微分方程 $l(y)=\lambda y$ 的解, l 是原来的微分运算. 这使得可对微分算子的谱分析应用微分方程定性理论, 且不但导致谱的几何学的一种描述(这里, 这方法的结果对应于扰动理论的结果, 而在多维情形甚至产生出扰动理论的结果), 而且导致对谱特征的方便的解析表示, 导致关于谱分解收敛性的精细结果, 等等.

在连续谱的情形, 包含在微分算子谱分解中的函数 $u(x, \lambda)$ 不是其本征函数, 因为它们不属于 $L_2(G)$. 关于"广义本征函数"分解的抽象变形可在装备 Hilbert

空间理论范围内构造（见[4]）．一个装备 Hilbert空间（rigged Hilbert space）是个三元系 $\Phi\subset H\subset\Phi'$，其中 H 是一个 Hilbert 空间，Φ 是连续地嵌入在 H 中的一个拓扑向量空间而 Φ' 是 Φ 的对偶．一个元素 $f\in\Phi'$ 称为 H 上算子 A 广义本征向量（generalized eigenvector），如果 $A\Phi\subset\Phi$ 且 $f(Ax-\lambda x)=0$ 对所有的 $x\in\Phi$（这里 λ 是对应的本征值）．对每个自伴算子 A 可选取一个装备使得 A 的广义本征向量的集合 $\{f_\lambda:\lambda\in\sigma(A)\}$ 在以下意义下是完全的：对任何 $x\in\Phi$,

$$\|x\|^2=\int_{\sigma(A)}|f_\lambda(x)|^2d\rho(\lambda),$$

其中 ρ 是 $\sigma(A)$ 上某个测度．如果 A 有循环向量 x_0，则可取 ρ 为 $(E_A(\cdot)x_0,x_0)$，其中 E_A 是 A 的谱测度，这里 $f_\lambda=(dP_\lambda x)/(d\rho(-\infty,\lambda))$，且极限是在 Φ' 的拓扑中取的．

对具有点谱的算子，本征值的渐近问题是最重要的．在自伴算子的情形，描述函数 $N(\lambda)$ 的渐近性状比较简单一些，其中 $N(\lambda)$ 等于比 λ 小的本征值的个数，或等价地，等于对应于区间 $(-\infty,\lambda)$ 的谱子空间的维数．经典的 Weyl 定理表述：对区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 中带有 Dirichlet 边界条件的 Laplace 算子，$N(\lambda)$ 是渐近地等于 $r_n(2\pi)^{-n}|\Omega|\lambda^{n/2}$，其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的体积而 r_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球的体积．

参考文献

[1A] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral operators, 3, Interscience, 1971.

[1B] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[2] Kato, T., Perturbation theory of linear operators, Springer, 1976.

[3] Глазман, И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963（英译本：Glazman, I. M., Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators, Israel Progr. Sci. Transl. 1965).

[4] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965（英译本：Berezanskiĭ, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

[5] Иохвидов, И. С., Крейн, М. Г., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 5 (1956), 367－432.

[6] Бирман, М. Ш., Соломяк, М., 3., Итоги науки и техники. Математич. анализ, т. 14, М., 1977, 5－58.

В. С. Шульман 撰

【补注】 Weyl 的定理的一个改进在[A1]中给出．

参考文献

[A1] Ivrii, V. Ya, Second term of spectral asympototics of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary, *Funct. Anal. Appl.*, **14** (1980), 98－106.（*Funkts. Anal. Prilozhen.*, **14** (1980), 25－34).

葛显良 译 吴绍平 校

平稳随机过程的谱分析[spectral analysis of a stationary stochastic process; спектральный анализ стационарных случайных процессов]，时间序列的谱分析（spectral analysis of a time series）

1）与**平稳随机过程**（stationary stochastic process）的谱分解相同（见**随机函数的谱分解**（spectral decomposition of a random function））.

2）从一平稳随机过程的一个（或多个）实现的观测数据估计该过程的谱密度值的统计方法（见[1]－[5]）．亦见**随机过程论中的统计问题**（statistical problems in the theory of stochastic processes）；**周期图**（periodogram）；**谱密度估计量**（spectral density, estimator of the）；**极大熵谱估计量**（maximum-entropy spectral estimator）；**参数谱估计量**（spectral estimator, parametric）.

参考文献

[1] Jenkins, G. M., Watts, D. G., Spectral analysis and its applications, 1－2, Holden-Day, 1968.

[2] Childers, D. G., Modern spectrum analysis, IEEE Press, 1978.

[3] Haykin, S. S. (ed.), Nonlinear methods of spectral analysis, Springer, 1983.

[4] Kay, S. M., Marple, S. L., Spectrum analysis-A modern perspective, in *Proc. IEEE*, **69** (1981), 1380－1419. Erratum: **70** (1982), 120; Comments: **71** (1983), 776－779; 1324－1325.

[5] Spectral estimation, *Proc. IEEE*, **70** (1982), 9, (Special Issue).

[6] Kay, S. M., Modern spectral estimation, Prentice-Hall, 1987.

[7] Marple, S. L., Digital spectral analysis with applications, Prentice-Hall, 1987.

А. М. Яглом 撰 潘一民 译

线性算子的谱分解[spectral decomposition of a linear operator; спектральное разложение линейного оператора]

一个线性算子的关于**谱测度**（spectral measure）（**谱分解**（spectral resolution））的一个积分形式的表示．对 Hilbert 空间 H 上任何**自伴算子**（self-adjoint operator）T 有一个谱分解 $P(\cdot)$，使得

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,dP(t).$$

这是指对所有 $x\in D_T$, $y\in H$,

$$D_T=\left\{x\in H:\int_{-\infty}^{+\infty}t^2d(P(t)x,x)<\infty\right\},$$

$$(Tx,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}td(P(t)x,y).$$

一个自伴算子 T 的谱分解可以从它的**预解式**(resolvent) $R(\lambda,T)$(在连续点)由公式

$$P(b)-P(a)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{a+\delta}^{b-\delta}(R(\lambda-i\varepsilon,T)-R(\lambda+i\varepsilon,T))d\lambda$$

计算．从对自伴算子的谱分解定理推出算子可用乘法算子来实现，且存在 Borel 函数上的函数演算．

利用自伴算子的谱分解和扩张到较大空间的理论(见[2])，可得到**对称算子**(symmetric operator)用广义谱分解的积分表示．**等距算子**(isometric operator)的积分表示按相似方式来构造．以自伴和酉算子的谱分解为一方，以对称和等距算子的积分表示为另一方，其中的类似是远不完全的(由于没有广义谱分解的唯一性，没有积分的强收敛性，函数演算的比较狭窄性，等等)．

对 Hilbert 空间 H 上任何有界**正规算子**(normal operator) T 有一个自伴谱测度 $E(\cdot)$，在复平面的 Borel 子集的 σ 代数上按强算子拓扑是可数加性的，且使得

$$T=\int_C zE(dz),$$

其中 $\operatorname{supp}E(\cdot)=\sigma(T)$ (T 的谱)(见**算子的谱**(spectrum of an operator))，$TE(\alpha)=E(\alpha)T$，且 $\sigma(T|_{E(\alpha)H})\subset\overline{\alpha}$．把这定理重新表述如下是方便的：每个有界正规算子酉等价于用空间 $L_2(S,\Sigma,\mu)$ 中某个本质有界函数相乘的算子，其中 μ 可选取为一个有限测度如果空间是可分的．

从这谱分解定理推出有对正规算子的一个函数演算(functional calculus)，即有一个从 $\sigma(T)$ 上本质有界 Borel 函数的代数到满足条件 $\mathrm{id}(T)=T$ 的有界算子的代数中的同态 $f\mapsto f(T)$，且它把每一有界的逐点收敛的函数序列映射到一个强收敛算子序列中．这个同态的象(即算子 T 的所有函数的集合)与同 T 可交换的每个算子可交换的所有算子的集合一致．由于函数演算的存在性反过来蕴涵该谱分解定理，这结果可看成谱定理的一种形式．谱分解定理也可以推广到无界正规算子(见[2])．

在作为正规算子特殊情况的酉算子的谱分解的情形，其谱测度是给定在单位圆周上．一个酉算子的谱分解有时写成形式

$$U=\int_0^{2\pi}e^{i\theta}dE(\theta),$$

其中 $E(\cdot)$ 是集中在区间 $[0,2\pi]$ 上的谱分解．这样，谱分解使得可以把一个酉算子表成形式 $\exp(iA)$，其中 A 是一个自伴算子．这个结果被 Stone 定理(Stone theorem)所推广：每一个酉算子的强连续单参数群可写成形式

$$U(t)=\exp itA,$$

其中 A 是自伴(可能无界)算子．

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[2] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966(英译本：Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., The theory of linear operators in Hilbert space, Pitman, 1981).

В. С. Шульман 撰 葛显良 译 吴绍平 校

随机函数的谱分解[**spectral decomposition of a random function**; **спектральное разложение случайной функции**]，随机函数的谱表示(spectral representation of a random function)

1) 一个**随机函数**(random function)(特别是一个**随机过程**(stochastic process))用关于某个特殊函数系的级数或积分的表示，使得这展开式中的系数是两两不相关的随机变量．具有零均值(即使得 $\mathsf{E}X(t)=0$)的复值随机函数 $X(t)$ ($t\in T$) 的很广一类的谱表示可写成形式

$$X(t)=\int_\Lambda\varphi(t;\lambda)Z(d\lambda),\qquad(1)$$

其中 Λ 是具有给定的"可测子集"系的某个集合(即是可测空间)；$\varphi(t;\lambda)$，$t\in T$，$\lambda\in\Lambda$，是 $t\in T$ 的一个复值函数系，依赖于参数 $\lambda\in\Lambda$；$Z(d\lambda)$ 是 Λ 上一个正交的随机测度(具有不相关的值，所以对任何两个不相交可测子集 Δ_1 和 Δ_2，$\mathsf{E}Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}=0$)；且右边的积分或者可以定义为对应积分 Cauchy 和序列的均方极限([1])，或者更一般地定义为"对于测度 $Z(d\lambda)$ 的 Lebesgue 积分"(例如，见[2])．按照一般的 Karhunen 谱表示定理(Karhunen spectral representation theorem)，对一个随机函数 $X(t)$ 谱表示(1)存在，当且仅当对应的相关函数 $B(t,s)=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$ 可写成形式

$$B(t,s)=\int_\Lambda\varphi(t;\lambda)\overline{\varphi(s;\lambda)}F(d\lambda),$$

其中 $F(d\lambda)=\mathsf{E}|Z(d\lambda)|^2$ 是 Λ 上一个非负测度．

随机函数的最熟知的谱表示类是平稳随机过程 $X(t)$ 的作为 Fourier-Stieltjes 积分的表示，

$$X(t)=\int_\Lambda e^{it\lambda}dZ(\lambda), \qquad (2)$$

其中 $Z(\lambda)$ 是具有不相关增量的 λ 的随机函数而 Λ 或者是实直线 $(-\infty,\infty)$，当时间 t 是连续时；或者是区间 $[-\pi,\pi]$，当 t 是离散时（且取整数值）．这样一种谱分解的存在性由关于相关函数 $B(s)=\mathsf{E}(t+s)X(t)$ 的积分表示的一般的 Хинчин 定理（或 Wiener-Хинчин 定理）推出（见**平稳随机过程**（stationary stochastic process））．这表明任何平稳随机过程可看成各种频率的且具有随机相和振幅的相互不相关的调和振动的叠加．用 n 维平面波取代调和振动，对定义在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 上或定义在 $\mathbf{R}^n$ 的整数点的格 $\mathbf{Z}^n$ 上齐性随机场，一个相似形式的谱分解也存在．在广义平稳随机过程的情形，考虑定义在有紧支集的无穷可微函数 $\varphi(t)$ 的空间 D 上且对所有实数 a 满足条件

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi)=\mathsf{E}X(\varphi),$$

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi_1)\overline{X(V_a\varphi_2)}=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$$

的一个线性泛函 $X(\varphi)$，上式中 $V_a\varphi(t)=\varphi(t+a)$．泛函 $X(\varphi)$ 可写成形式

$$X(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(\lambda)dZ(\lambda), \qquad (3)$$

其中

$$\widetilde{\varphi}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\varphi(t)dt$$

是 $\varphi(t)$ 的 Fourier 变换．公式 (3) 从以下这个事实推出，即

$$B(\varphi_1,\varphi_2)=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$$

可写成形式

$$B(\varphi_1,\varphi_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}_1(\lambda)\overline{\widetilde{\varphi}_2(\lambda)}dF(\lambda),$$

其中函数 $F(\lambda)=\mathsf{E}|Z(\lambda)-Z(-\infty)|^2$ 是一个单调非减谱分布函数，使得对某个非负整数 m

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+\lambda^2)^{-m}dF(\lambda)<\infty$$

（见[3]）．如果取函数 $\varphi(t)$ 的空间是整解析函数的某个特殊空间，则可得到具有指数增长的谱函数 $F(\lambda)$ 的广义平稳随机过程 $X(\varphi)$（见[4]）．

特殊形式的谱分解也对群 G 上和齐性空间 S 上的齐性随机场存在．这是 Karhunen 的谱分解定理连同关于集合 G 和 S 上正定函数（或核，它们是两个变量的函数）的一般形式的某些熟知结果的推论．特别地，对任意局部紧 Abel 群 G 上的一个齐性场 $X(g)$，$X(g)$ 的谱表示有形式 (1)，其中函数 $\varphi(t;\lambda)$ 的作用被 G 的特征标 $\chi^{(\lambda)}(g)$ 所取代，且积分区域 Λ 是对应的特征标群 $\hat{G}$（例如，见[5]，[6]）．在相当一般条件下对非交换拓扑群的齐性场，更复杂形式的谱表示也存在（见[5]）．最后，在齐性空间 $S=\{s\}$ 上齐性场的情形，一个场 $X(s)$ 的谱分解包含空间 S 上的球面函数（球面调和函数），而相关函数 $B(s_1,s_2)=\mathsf{E}X(s_1)\overline{X(s_2)}$ 的对应谱表示包含球带函数（见[5]，[6]）．特别地，三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中球面 S_2 上一个一般齐性场 $X(\theta,\varphi)$ 有一个形式为

$$X(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{l,m}(\theta,\varphi)Z_{l,m} \qquad (4)$$

的谱表示，其中

$$Y_{l,m}=e^{-im\varphi}P_l^m(\cos\theta)$$

是普通的**球面调和函数**（spherical harmonics）而随机变量 $Z_{l,m}$ 满足 $\mathsf{E}Z_{l,m}\overline{Z}_{j,n}=\delta_{lj}\delta_{mn}f_l$，其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号 δ．对应于公式 (4) 有一个形如

$$\mathsf{E}X(\theta_1,\varphi_1)\overline{X(\theta_2,\varphi_2)}=B(\theta_{12})$$

的相关函数的表示式，其中 θ_{12} 是点 (θ_1,φ_1) 和 (θ_2,φ_2) 之间的角距离，且

$$B(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}f_lP_l(\cos\theta),$$

其中 P_l 是 **Legendre 多项式**（Legendre polynomials）．类似地，如果 $X(r,\varphi)$（其中 (r,φ) 是极坐标）是平面 $\mathbf{R}^2$ 中的齐性和迷向场（所以 $\mathsf{E}X(r_1,\varphi_1)\overline{X(r_2,\varphi_2)}=B(r_{12})$，这里 r_{12} 是点 (r_1,φ_1) 和 (r_2,φ_2) 之间的 Euclid 距离），则 $X(r,\varphi)$ 的谱表示可写成形式

$$X(r,\varphi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\varphi}\int_0^{\infty}J_k(\lambda r)dZ_k(\lambda), \qquad (5)$$

其中 $J_k(x)$ 是 k 阶 **Bessel 函数**（Bessel functions）．这里 $Z_k(\lambda)$ 是具有不相关增量的随机函数，使得

$$\mathsf{E}Z_k(\Delta_1)\overline{Z_m(\Delta_2)}=\delta_{km}F(\Delta_1\cap\Delta_2),$$

其中

$$Z_k(\Delta)=\int_\Delta dZ_k(\lambda)$$

且 $F(\Delta)$ 是半轴 $[0,\infty)$ 上的一个非负测度．对应于

谱表示（5），有以下的相关函数 $B(r)$ 的表示式

$$B(r)=\int_0^{\infty} J_0(\lambda r)\,dF(\lambda).$$

齐次场的谱表示的进一步的例子见[5]－[8].

随机函数的谱表示不只是对平稳随机过程和齐性场存在. 例如，如果 $X(t)$ 是在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上具有对两个自变量连续的相关函数

$$B(t,s)=\mathsf{E}\,X(t)\overline{X(s)}$$

的任意一个随机过程，则由积分方程理论中的 Mercer 定理（Mercer theorem）和 Karhunen 的谱分解定理，$X(t)$ 有以下形式的谱表示

$$X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)Z_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \qquad (6)$$

其中 $\varphi_k(t)$ 和 λ_k，$k=1,2,\cdots$，是函数空间上具有核 $B(t,s)$ 的积分算子的本征函数和本征值且 $\mathsf{E}\,Z_k\bar{Z}_l=\delta_{kl}$. 定义在有限区间上的一个随机过程 $X(t)$ 的谱表示（6）是随机向量分解成主分量的分解式的连续类似，它常用于多元统计分析中. 它独立地由很多科学家得到（例如，见[5]，[8]）且最经常地被称为 Karhunen-Loève 展开式（Karhunen-Loève expansion）. 在许多应用中，形式（6）的谱表示被广泛地使用，特别用在自动控制理论中，其中（6）和某些有关表示常称为随机过程的典型表示（canonical representations of stochastic process）（见[9]），以及用在气象学和地球物理学中，其中常用"经验正交函数法"（method of empirical orthogonal functions）这名词，因为在实践中本征函数 $\varphi_k(t)$ 必须用经验数据近似地确定（见[8]，[10]）.

2）一个随机函数 $X(t)$，$t\in T$，的谱表示也可以指形式（1）的按某种标准的（充分简单的）函数 $\varphi(t;\lambda)$ 的完全系的一般表示（不要求 $Z(dt)$ 是具有不相关值的随机测度）. 在具有连续时间的随机过程 $X(t)$ 按函数 $\varphi(t;\lambda)=e^{it\lambda}$ 的分解情形，这是最普通的，所以（1）化成（2）. 一般地，由（2）推出 $B(t,s)=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$ 可写成形式

$$B(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda t-\mu s)}F(d\lambda\times d\mu), \qquad (7)$$

其中 $F(d\lambda\times d\mu)$ 是 (λ,μ) 平面上由关系式

$$F(\Delta_1,\Delta_2)=\mathsf{E}\,Z(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)}$$

定义的复值测度. 反之，容易证明 $B(t,s)$ 可以写成（7）式这一事实蕴涵存在一个谱表示（2）（例如，见[2]）. 容许有一个谱表示（2）且其中 $Z(\lambda)$ 不必有不相关增量的随机过程称为可调和化随机过程（harmonizable stochastic processes）. 在这种情形，复测度 $F(d\lambda\times d\mu)$ 称为 $X(t)$ 的谱测度（spectral measure），且 (λ,μ) 平面上没有谱测度为零的邻域的点的集合称为过程 $X(t)$ 的谱（spectrum of the process）. 一个平稳过程 $X(t)$ 的谱是集中在直线 $\lambda=\mu$ 上. 在相当一般的条件下，周期相关的（periodically correlated）（或周期非平稳的（periodically non-stationary））随机过程 $X(t)$（它有性质

$$\mathsf{E}X(t+mT)=\mathsf{E}\,X(t),$$

$$\mathsf{E}X(t+mT)\overline{X(s+mT)}=\mathsf{E}X(t)\overline{X(s)}$$

对某个 $T>0$ 和任何整数 m）也是可调和化的. 这样一些过程的谱是集中在直线 $\lambda=\mu+2\pi k/T$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，的集合上（见[8]或[11]）.

参考文献

[1] Karhunen, K., Ueber linear Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechung, *Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A. Math-Phys.* (*I*), 37 (1947), 3－79.

[2] Розанов, Ю. А., 《*Теория вероятн. и ее примен.*》, 4 (1959), 3, 291－310.

[3] Гельфанд, И. М., Виленкин, Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа, Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961 (中译本: И. М. 盖尔芳特等, 广义函数Ⅳ, 调和分析的某些应用、装备希尔伯特空间, 科学出版社, 1984).

[4] Onoyama, T., Note on random distributions, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 13 (1959), 208－213.

[5A] Yaglom, A. M., Second-order homogeneous random fields, in Proc. 4-th Berkerley Symp. Math. Stat. Probab. Vol. 2, Univ. California Press, 1961, 593－622.

[5B] Яглом, А. М., в кн., Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда, Ленинград, 1961, Л., 1963, 250－273.

[6] Hannan, E. J., Group representations and applied probability, Methuen, 1965.

[7] Ядренко, М. И., Спектральная теории случайных полей, К., 1980 (英译本: Yadrenko, M. I., Spectral theory of random fields, Optim. Software, 1983).

[8] Yaglom, A. M., Correlation theory of stationary and related random functions, 1-2, Springer, 1986 (译自俄文).

[9] Пугачев, В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962 (英译本: Pugachev, V. S., Theory of random functions and its application to control problems, Pergamon, 1965).

[10A] Фортус, М. И., 《Метсорол. и гидрология》,

1980, 4, 113 - 119.

[10B] Stroch, H. von and Hannoschöck, G., Statistical aspects of estimated principle components (Eofs) based on small sample sizes, *Climate Appl. Meteor.*, **24** (1985), 716 - 724.

[11] Рытов, С. М., Случайные процессы, М., 1976 (Введение в статистическую радиофизику, 2 изд., ч 1) (英译本: Rytov, S. M., Introduction of statistical radiophysics, 1. Random processes. Springer, 1988).

A. M. Яглом 撰

【补注】 不必平稳的随机函数的谱分解在[A1]中给出.

参考文献

[A1] Ramm, A. G., Radom fields estimation theory, Longman & Wiley, 1990.

[A2] Ivanov, A. V. and Leonenko, N. N., Statistical analysis of random fields, Kluwer, 1989 (译自俄文).

[A3] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.

[A4] Cox, D. R. and Miller, H. D., The theory of stochastic processes, Methuen, 1965.

[A5] Bartlett, M. S., An introduction to stochastic processes, Cambridge Univ. Press, 1978.

葛显良 译 吴绍平 校

谱密度 [**spectral density**; **спектральная плотность**], n 维空间中平稳随机过程或齐次随机场的

宽平稳随机过程或宽齐次随机场的协方差函数的 **Fourier 变换** (Fourier transform) (见**平稳随机过程** (stationary stochastic process); **齐次随机场** (random field, homogeneous)). 协方差函数的 Fourier 变换存在的平稳随机过程和齐次随机场称为有谱密度的过程.

设

$$X(t)=\{X_k(t)\}_{k=1}^n$$

为一 n 维平稳随机过程, 且设

$$X(t)=\int e^{it\lambda}\Phi(d\lambda),\ \Phi=\{\Phi_k\}_{k=1}^n$$

为其谱表示 (Φ_k 是对应于多维随机过程 $X(t)$ 的第 k 个分量 $X_k(t)$ 的**谱测度** (spectral measure)). 积分的范围在离散时间 t 情形为 $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$, 而在连续时间 t 情形为 $-\infty<\lambda<+\infty$. 过程 $X(t)$ 有谱密度

$$f(\lambda)=\{f_{k,l}(\lambda)\}_{k,l=1}^n,$$

如果其谱测度 $F=\{F_{k,l}\}_{k,l=1}^n$ 的所有元

$$F_{k,l}(\Delta)=\mathsf{E}\Phi_k(\Delta)\overline{\Phi_l(\Delta)},\ k,\ l=1,\ \cdots,\ n$$

都是绝对连续的, 且

$$f_{k,l}(\lambda)=\frac{F_{k,l}(d\lambda)}{d\lambda}.$$

特别地, 如果对于过程 $X(t)$ $(t=0,\ \pm1,\ \cdots)$, 关系式

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty}|B_{k,l}(t)|<\infty,\ k,\ l=1,\ \cdots,\ n$$

成立, 其中

$$B(t)=\{B_{k,l}(t)\}_{k,l=1}^n=\{\mathsf{E}X_k(t+s)\overline{X_l(s)}\}_{k,l=1}^n$$

是 $X(t)$ 的协方差函数 (covariance function), 那么 $X(t)$ 有谱密度, 且

$$f_{k,l}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\sum_{t=-\infty}^{\infty}B_{k,l}(t)\exp\{-it\lambda t\},$$

$$-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi,\ k,\ l=1,\ \cdots,\ n.$$

对于过程 $X(t)$ 为连续时间 t 的情形, 情况是类似的. 谱密度 $f(\lambda)$ 有时称为二阶谱密度 (second-order spectral density), 以区别于高阶谱密度 (见**谱半不变量** (spectral semi-invariant)).

一齐次 n 维随机场 $X(t_1,\ \cdots,\ t_n)$ 有谱密度 $f(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$, 如果它的**谱分解** (spectral resolution) $F(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)$ 具有以下性质: 混合导数 $\partial^nF/\partial\lambda_1\cdots\partial\lambda_n$ 几乎处处存在, 记

$$f(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)=\frac{\partial^nF}{\partial\lambda_1\cdots\partial\lambda_n},$$

且

$$F(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n)=$$

$$=\int_{\lambda_{01}}^{\lambda_1}\cdots\int_{\lambda_{0n}}^{\lambda_n}f(\mu_1,\ \cdots,\ \mu_n)d\mu_1\cdots d\mu_n+\text{常数}.$$

成立.

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prokhorov, Yu. V., Razanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[2] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本: Rozanov, Yu. A., Stationary random processes, Holden-Day, 1967).

И. Г. Журбенко 撰 潘一民 译

谱密度估计量 [**spectral density, estimator of the**; **спектральной плотности оценка**]

离散时间**平稳随机过程** (stationary stochastic process) 观测值 $X(1),\ \cdots,\ X(N)$ 的函数, 用于**谱密度** (spectral density) $f(\lambda)$ 的估计量. 作为谱密度的估计量常采用二次型:

$$\sum_{s,t=1}^{N}b_{s,t}^{(N)}X(s)X(t),$$

其中 $b_{s,t}^{(N)}$ 是 (依赖于 λ) 的复系数. 可以证明, 当 $N\to\infty$ 时谱密度估计量前两阶矩的渐近性质总的说不会变坏, 如果只考虑满足如下条件的二次型的子

类. 当 $s_1 - t_1 = s_2 - t_2$ 时 $b_{s_1 t_1}^{(N)} = b_{s_2 t_2}^{(N)}$; 则可将谱密度估计量局限于如下形式:

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-N+1}^{N-1} e^{it\lambda} b_N(t) B_N(t),$$

其中

$$B_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N-|t|} X(s) X(s+|t|)$$

是平稳过程 $X(t)$ 的协方差函数的样本估计量, $b_N(t)$ 是适当选定的权函数. 估计量 $\hat{f}_N(\lambda)$ 亦可表示为

$$\hat{f}_N(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x) I_N(x+\lambda) dx,$$

其中 $I_N(x)$ 是**周期图** (periodogram); $\Phi_N(x)$ 是某个连续偶函数, 决定于它的 $2N-1$ 个 Fourier 系数:

$$b_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x) e^{itx} dx,\ t = -N+1, \cdots, N-1.$$

函数 $\Phi_N(x)$ 称为**谱窗** (spectral window); 通常考虑形如

$$\Phi_N(x) = A_N \Phi(A_N x)$$

的谱窗, 其中 $\Phi(x)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的某个连续函数, 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = 1,$$

而当 $N \to \infty$ 时 $A_N \to \infty$, 但 $A_N N^{-1} \to 0$. 类似地可以考虑形如

$$b_N(t) = K(A_N^{-1} t)$$

的系数 $b_N(t)$ 和称为滞后窗 (lag window) 或协方差窗 (covariance window) 的函数 $K(x)$. 在谱密度 $f(\lambda)$ 为弱光滑的约束下, 或假设随机过程 $X(t)$ 满足混合条件, 则对于广泛的一类谱窗或协方差窗, 可以证明, $\hat{f}_N(\lambda)$ 是渐近无偏的和相合的估计量.

对于多维随机过程, 可由相应的周期图 $I_N^{(k,l)}(\lambda)$ 用类似的方法估计谱密度矩阵的元素 $f_{k,l}(\lambda)$. 除利用观测结果的二次型表示谱密度估计外, 还常假设谱密度具有某种给定的形状, 其中包括有限个参数, 然后根据观测结果估计谱密度表达式中的参数. 参见**最大熵谱估计量** (maximum-entropy spectral estimator); **参数谱估计量** (spectral estimator, parametric).

参考文献

[1] Brillinger, D., Time series. Data analysis and theory, Holt, Rinehart & Winston, 1975.

[2] Hannan, E. J., Multiple time series, Wiley, 1972.

[3] Anderson, T., Statistical analysis of time series, Wiley, 1971.

И. Г. Журбенко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Box, G. E. P. and Genkins, G. M., Time series analysis, Holden-Day, 1976.

[A2] Caines, P. E., Linear stochastic systems, Wiley, 1988.

[A3] Dzhaparidze, K. O., Parameter estimation and hypothesis testing in spectral analysis of stationary time series, Springer, 1986.

[A4] Ljung, L., System identification: theory for the user, Prentice-Hall, 1987

周概容 译

参数谱估计量 [spectral estimator, parametric; спектральная оценка параметрическая]

一个**平稳随机过程** (stationary stochastic process) 的**谱密度** (spectral density) $f(\lambda)$ 对应于 $f(\lambda)$ 的某一确定参数模型 (即在此假设下, 函数 $f(\lambda)$ 属于一由有限个参数描述的谱密度的特定族) 时的估计量. 在求参数谱估计量时, 观测数据仅用来计算模型的未知参数, 于是估计谱密度的问题就化为估计这些参数的统计问题. 实际中应用最广的参数谱估计量是**最大熵谱估计量** (maximum-entropy spectral estimator), 它相应于假定函数 $[f(\lambda)]^{-1}$ 是一固定阶数的三角多项式的平方. 应用问题中常见的更一般的参数谱估计类是**混合自回归滑动平均过程** (mixed autoregressive moving-average process) 模型, 即假定 $f(\lambda)$ 是两个固定阶数的三角多项式的平方之商 (见[1]-[3]).

参考文献

[1] Haykin, S. (ed.), Nonlinear methods of spectral analysis, Springer, 1983.

[2] Кей, С. М., Марпл, С. Л., 《Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр》, 69 (1981), 11, 5-51.

[3] Методы спектрального оценивания. Тематич. вып., 《Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр.》, 70 (1982), 9.

А. М. Яглом 撰

【补注】

参考文献

[A1] Jenkins, G. M., Watts, D. G., Spectral analysis and its applications, Holden-Day, 1968.

[A2] Hannan, E. J., Multiple time series, Wiley, 1970.

潘一民 译

谱函数 [spectral function; спектральная функция]

见**谱分解** (spectral resolution).

谱函数的估计量 [spectral function, estimator of the; спектральной функции оценка], 谱测度的估计量 (estimator of the spectral measure)

离散时间**平稳随机过程** (stationary stochastic process) 的观测值 $X(1), \cdots, X(N)$ 的函数, 用来作为其**谱函数** (spectral function) $F(\lambda)$ 的估计. 作为这个函数的一个估计, 常用如下形式的表达式

$$F_N(\lambda)=\frac{2\pi}{N}\sum_{-\pi\leq 2\pi k/N\leq\lambda} I_N\left[\frac{2\pi k}{N}\right],$$

其中 $I_N(x)$ 是**周期图**(periodogram). 在相当一般的关于 $F(\lambda)$ 的光滑性条件下, 或在关于随机过程 $X(t)$ 的混合条件下, 这个估计是渐近无偏和相合的.

上述 $F(\lambda)$ 的估计是谱密度 $f(\lambda)$ 的函数

$$I(A)=\int_{-\pi}^{\pi}A(x)f(x)dx$$

的估计

$$\frac{2\pi}{N}\sum_{-\pi\leq 2\pi k/N\leq\pi}A\left[\frac{2\pi k}{N}\right]I_N\left[\frac{2\pi k}{N}\right]$$

的一个特殊情形. 特别地, 谱密度的许多估计量(见**谱密度的估计量**(spectral density, estimator of the))都归结为这种形式, 其中函数 $A(x)$ 依赖于样本含量 N, 且集中于点 $x=\lambda$ 附近.

参考文献

[1] Brillinger, D., Time series, Data analysis and theory, Holt, Rinehart & Winston, 1975.

[2] Hannan, E. J., Multiple time series, Wiley, 1970.

И. Г. Журбенко 撰

【补注】

参考文献

[A1] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., Time series analysis, Holden-Day, 1960.

潘一民 译

平稳随机过程的谱函数[**spectral function of a stationary stochastic process; спектральная функция стационарного случайного процесса**], 齐次随机场的谱函数(spectral function of a homogeneous random field), 谱分布函数(spectral distribution function), n 维空间中的

频率 λ 或波动向量 $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 的函数, 分别出现于宽平稳**随机过程**(stochastic process)或 n 维空间中宽齐次**随机场**(random field)的协方差函数的谱分解中(见**随机函数的谱分解**(spectral decomposition of a random function)). 平稳随机过程的谱函数族与 λ 的所有有界单调非减函数一致, 而齐次随机场的谱函数族是 n 个变量 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的函数族, 它与 n 维概率分布函数仅相差一非负常数乘子.

A. M. Яглом 撰 潘一民 译

谱同调[**spectral homology; спектральные гомологии**]

拓扑空间 X 的开覆盖 α 的神经(nerve)的系数群为交换群 G 的同调群的反向极限

$$\check{H}_n(X;G)=\varprojlim H_n(\alpha;G)$$

(也称为 Čech 同调(Čech homology), 或 Александров-Čech 同调(Aleksandrov-Čech homology)). 对 X 的每个闭集 A, 群 $\check{H}_n(A;G)$ 可用类似的方式通过 α 的子系统 α' 来定义. 其中 α' 是 α 的所有那些与 A 相交非空的子集合. 群 $H_n(\alpha, \alpha';G)$ 的反向极限称为偶 (X, A) 的谱同调群(spectral homology group) $\check{H}_n(X, A;G)$.

由于反向极限函子不保持正合性, 偶 (X, A) 的同调序列一般并不正合. 不过序列中任意相邻两个映射的复合为零, 即该序列是半正合的(semi-exact). 若 X 是紧空间并且 G 是紧群或域时(或更一般地, G 是代数紧时), 上述序列的确是正合的.

紧空间的谱同调在下述意义下是连续的:

$$\check{H}_n(\varprojlim X_\lambda;G)=\varprojlim\check{H}_n(X_\lambda;G).$$

没有正合性并非谱同调的唯一不足之处. 群 $\check{H}_n$ 也不是加性的, 即, 离散并 $X=\bigcup_\lambda X_\lambda$ 的同调可能与直和 $\sum_\lambda\check{H}_n(X_\lambda;G)$ 不同. 如果考虑带紧支集的谱同调群(spectral homology group with compact support) $\check{H}_n^c(X;G)$, 则加性便得以保证, 其中 $\check{H}_n^c(X;G)=\lim_{\to}\check{H}_n(C;G)$, 这里极限对所有的紧子集 $C\subset X$ 取. 由于所有常见的同调(单纯同调, 胞腔同调以及奇异同调)都是带紧支集的同调, 很自然应该考虑函子 $\check{H}_n^c$.

函子 $\check{H}_n$ 与 $\check{H}_n^c$ 之间的差异很好地说明了当对原始定义作小的改动后, 同调群会有怎样的变化(另一方面, 在这种情况下, 上同调群具有惊人的稳定性). 在一般拓扑空间的范畴中, 有各种各样逻辑上行得通的定义同调群的方法, 上述第一种同调论并不是正确的选择. 对应于 Александров-Čech 上同调的同调论 H_*^c 在 20 世纪 60 年代才获得普遍承认(尽管其定义早在 40 年代和 50 年代就已给出). 同调论 H_*^c 满足所有 **Steenrod-Eilenberg 公理**(Steenrod-Eilenberg axioms)(并且具有紧支集). 如果 X 是紧空间, 则有下列正合列

$$0\to\varprojlim{}^1 H_{n+1}(\alpha;G)\to H_n(X;G)\to$$
$$\to\check{H}_n(X;G)\to 0,$$

其中 $\varprojlim^1$ 是反向极限函子的导出函子. 一般而言, 存在满态射 $H_n^c(X;G)\to\check{H}_n^c(X;G)$, 当 G 是代数紧群时, 其核为零. 在局部紧并且对 H_*^c 为同调局部连通的空间的范畴内, 函子 $\check{H}_n$, $\check{H}_n^c$ 及 H_n^c 同构.

参考文献

[1] Eilenberg, S. and Steenrod, N., Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1966.

[2] Скляренко, Е. Г., 《Успехи матем. наук》, 34 (1979), 6, 90－118.

[3] Massey, W., Homology and cohomology theory, M. Dekker, 1978.

Е. Г. Скляренко 撰 潘建中 译 沈信耀 校

谱测度 [spectral measure; спектральная мера]

从某个集合的 Boole 代数到 Banach 空间上投影算子的 Boole 代数中的一个酉同态. Banach 空间 X 上的每个算子 T 在其谱 $\sigma(T)$ 的既开又闭子集的集合上按公式

$$E(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(zI-T)^{-1}dz$$

定义一个谱测度, 其中 Γ 是从 $\sigma(T)\backslash\alpha$ 分离 α 的一条 Jordan 曲线. 这里 $TE(\alpha)=E(\alpha)T$ 且 $\sigma(T|E(\alpha)X)\subset\alpha$. 在集合的更广的 Boole 代数类上满足这些条件的谱测度的构造是线性算子**谱理论** (spectral theory) 中基本问题之一.

参考文献

[1A] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral operators, 3, Interscience, 1971.

[1B] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

В. С. Шульман 撰 葛显良 译 吴绍平 校

谱算子 [spectral operator; спектральный оператор], 谱测度 (spectral measure)

映 **Banach 空间** (Banach space) X 到自身中的一个**线性算子** (linear operator) A, 使得对平面中 Borel 子集 δ 的 σ 代数 $\mathscr{B}$ 存在一个**单位分解** (resolution of the identity) $E(\delta)$ 具有以下性质: 1) 对任何 $\delta\in\mathscr{B}$ 投影算子 $E(\delta)$ 约化 A, 即 $E(\delta)A=AE(\delta)$ 且谱 $\sigma(A_\delta)$ 在 $\bar{\delta}$ 中, 其中 A_δ 是 A 到不变子空间 $E(\delta)X$ 的限制; 2) 映射 $\delta\mapsto E(\delta)$ 是 $\mathscr{B}=\{\delta\}$ 到 Boole 代数 $\{E(\delta)\}$ 中的同胚; 3) 所有投影算子 $E(\delta)$ 是有界的, 即 $\|E(\delta)\|\leqslant M$, $\delta\in\mathscr{B}$; 以及 4) 单位分解 $E(\delta)$ 按 X 的强拓扑是可数加性的, 即对任何 $x\in X$ 和任何两两不相交集合的序列 $\{\delta_n\}\subset\mathscr{B}$,

$$E\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\delta_n\right]x=\sum_{n=1}^{\infty}E(\delta_n)x.$$

谱算子概念可推广到闭无界算子的情形, 此时在 1) 中, 必须补充要求 $E(\delta)D(A)\subset D(A)$ 成立, 其中 $D(A)$ 是 A 的定义域, 且对有界的 δ, $E(\delta)X\subset D(A)$.

有限维空间上所有线性算子和 Hilbert 空间上所有自伴的和正规的算子都是谱算子. 例如, $L_p(-\infty,\infty)$ $(1<p<\infty)$ 上算子

$$Ax(t)=tx(t)+\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)x(s)ds$$

在 $D(A)=\{x(t):\int_{-\infty}^{\infty}|tx(t)|^2dt<\infty\}$ 上是谱算子, 如果核 $K(t,s)$ 是全变差 $\mathrm{var}\,\mu<1/2\pi$ 的平面上 Borel 测度 μ 的 Fourier 变换且使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)x(s)ds,\ \int_{-\infty}^{\infty}K(t,s)x(t)dt$$

是 $L_p(-\infty,\infty)$ 上有界线性算子.

谱算子有许多重要性质, 如

$$\lambda\in\delta(A)\Leftrightarrow\exists\{x_n\}\subset X,\ \|x_n\|=1,$$
$$(A-\lambda I)x_n\to 0.$$

如果 X 是可分的, A 的点谱和剩余谱至多可数.

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral operators, 3, Interscience, 1971.

[2] Dunford, N., A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64 (1958), 217-274.

В. И. Соболев 撰 葛显良 译 吴绍平 校

谱半径 [spectral radius; спектральный радиус], Banach 代数的元素的

包含这元素的谱的平面上最小闭圆盘的半径 ρ (见**元素的谱** (spectrum of an element)). 一个元素 a 的谱半径由公式

$$\rho(a)=\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{1/n}=\inf\|a^n\|^{1/n}$$

与其幂的范数相联系, 特别地上式蕴涵 $\rho(a)\leqslant\|a\|$. Banach 空间上一个有界线性算子的谱半径是它作为所有算子的 Banach 代数的一个元素的谱半径. 在 Hilbert 空间中一个算子的谱半径等于相似于它的算子的范数中的最大下界 (见 [2]):

$$\rho(A)=\inf_X\|XAX^{-1}\|.$$

如果该算子是正规的, 则 $\rho(A)=\|A\|$ (见**正规算子** (normal operator)).

作为 Banach 代数的元素的一个函数, 谱半径是上半连续的 (但一般不连续). 谱半径的下调和性已被证明 ([3]). (这就是指如果 $z\mapsto h(z)$ 是某区域 $D\subset\mathbf{C}$ 到 Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 中的一个全纯映射, 则 $z\mapsto\rho(h(z))$ 是**下调和函数** (subharmonic function).)

参考文献

[1] Наймарк, М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968 (英译本: Naimark, M. A., Normed rings, Noordhoff, 1959).

[2] Halmos, P., A Hilbert space problem book, Springer, 1980 (中译本: P. R. 哈尔莫斯, 希耳伯特空间问题集, 上海科学技术出版社, 1984).

[3] Vesentini, E., On the subharmonicity of the spectral radius, *Boll. Union. Mat. Ital.*, 1 (1968), 427-429.

[4] Ptak, V., On the spectral radius in Banach algebra with involution, *Bull. London Math. Soc.*, **2** (1970), 327－334.

В. С. Шульман 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

葛显良 译 鲁世杰 校

谱分解 [**spectral resolution**; **спектральная функция**], 谱函数 (spectral function), 单位分解 (resolution of the identity)

从实直线到 Hilbert 空间上正交投影算子集合中的一个单调映射 $P(\cdot)$，按强算子拓扑是左连续的，且满足条件

$$\lim_{t\to-\infty}P(t)=0,\ \lim_{t\to+\infty}P(t)=I.$$

直线上每个自伴（即取自伴的值）强可数可加性的 Borel **谱测度** (spectral measure) $E(\cdot)$ 由公式 $P(t)=E(-\infty,t)$ 定义一个谱分解，且对每个谱分解存在唯一的定义它的谱测度.

谱分解概念在自伴算子的谱理论中是基本的：由谱分解定理（见**线性算子的谱分解** (spectral decomposition of a linear operator)，每个这样的算子有一个积分表示 $\int_{-\infty}^{\infty}t\,dP(t)$，其中 $P(t)$ 是某个谱分解. 在对称算子理论中起类似作用的是广义谱分解 (generalized spectral resolution) 概念，它是从实直线到非负算子集合中的一个映射，满足加在谱分解上的所有条件，除了值不必是投影算子之外. 每个广义谱分解可扩张成一个更大空间上的谱分解 (Наймарк 定理 (Naimark theorem)).

参考文献

[1] Ахиезер, Н. И., Глазман, И. М., Теория линейных операторов в гильбертом пространстве, 2 изд., М., 1966 (英译本: Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, Pitman, 1981).

[2] Наймарк, М. А., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 4 (1940), 1, 53－104.

В. С. Шульман 撰 葛显良 译 吴绍平 校

谱半不变量 [**spectral semi-invariant**; **спектральный семиинвариант**], 谱累积量 (spectral cumulant)

平稳随机过程 (stationary stochastic process) 的特征之一. 设 $X(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 为一实平稳过程，满足 $\mathsf{E}|X(t)|^n\leqslant C<\infty$. 此过程的半不变量 (semi-invariant)

$$S^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)=$$

$$=\frac{i^{-n}\partial^n}{\partial u_1\cdots\partial u_n}\log\mathsf{E}\,e^{i(u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n))}\Big|_{u_1=\cdots=u_n=0}$$

与其矩

$$M^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)=\mathsf{E}(X(t_1)\cdots X(t_n))$$

通过以下两关系式相联系:

$$S^{(n)}(I)=\sum_{\bigcup_{p=1}^{q}I_p=I}(-1)^{q-1}(q-1)!\prod_{p=1}^{q}M^{(p)}(I_p),$$

$$M^{(n)}(I)=\sum_{\bigcup_{p=1}^{q}I_p=I}\prod_{p=1}^{q}S^{(p)}(I_p),$$

其中

$$I=(t_1,\cdots,t_n),\ I_p=(t_{i_1},\cdots,t_{i_p})\subseteq I,$$

而其求和遍历 I 关于不交子集 I_p 的所有划分. 称 $X(t)\in\Phi^{(n)}$，如果对所有 $1\leqslant k\leqslant n$，存在 $\mathbf{R}^k$ 上的有界变差复值测度 $M^{(k)}$，使得对所有 $t_1,\cdots,t_k$，

$$M^{(k)}(t_1,\cdots,t_k)=$$

$$=\int_{\mathbf{R}^k}e^{i(t_1\lambda_1+\cdots+t_k\lambda_k)}M^{(k)}(d\lambda_1\cdots d\lambda_k)$$

$$=\int_{\mathbf{R}^k}e^{i(t,\lambda)}M^{(k)}(d\lambda).$$

定义在 Borel 集族上的测度 $F^{(n)}$ 称为谱半不变量 (spectral semi-invariant)，如果对所有 $t_1,\cdots,t_n$，

$$S^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{i(t,\lambda)}F^{(n)}(d\lambda).$$

若 $X(t)\in\Phi^{(n)}$，测度 $F^{(n)}$ 必存在且有有界变差. 在平稳过程 $X(t)$ 的情形下，半不变量 $S^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)$ 是平移不变的:

$$S^{(n)}(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau)=S^{(n)}(t_1,\cdots,t_n),$$

而谱测度 $F^{(n)}$ 与 $M^{(n)}$ 集中在流形 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$ 上. 如果测度 $F^{(n)}$ 在此流形上对 Lebesgue 测度是绝对连续的，则存在 n 阶**谱密度** (spectral density) $f_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})$，对所有 $t_1,\cdots,t_n$，满足如下方程:

$$S^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)=$$

$$=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}e^{i(\lambda_1(t_2-t_1)+\cdots+\lambda_{n-1}(t_n-t_1))}f_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1})d\lambda.$$

在离散时间情形下，则必须在所有上述公式中用 k 维立方体 $-\pi\leqslant\lambda_i\leqslant\pi(1\leqslant i\leqslant k)$ 来替代 $\mathbf{R}^k$.

参考文献

[1] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本: Prokhorov,

Yu V, Rozanov, Yu. A.. Probability theory, Springer, 1969).

[2] Леонов, В. П., Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов, М., 1964.

И. Г. Журбенко 撰 潘一民 译

谱序列[**spectral sequence**; **спектральная последовательность**]

一个微分模序列，其中每个是前一个的同调模．人们通常研究双分次（较少分次或三分次）模的谱序列，并将它们表示为平面上一个压一个的表格形式．更一般地，可以研究任意 **Abel 范畴**（Abelian category）中对象（比如，双模，环，代数，余代数，Hopf 代数等等）的谱序列．

所有已知的谱序列都是从一些正合偶得到的．一个正合偶（exact couple）$(D^1, E^1, i^1, j^1, k^1)$ 定义为如下形式的正合图表．

$$\begin{array}{ccc} D^1 & \xrightarrow{i^1} & D^1 \\ & {\scriptstyle k^1}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle j^1} & \\ & E^1 & \end{array}$$

同态 $d^1 = j^1k^1$ 是 E^1 中的微分．从任何正合偶，可构造出导出正合偶（derived exact couple）$(D^2, E^2, i^2, j^2, k^2)$．其中 $D^2 = \mathrm{Im}\, i^1$，$E^2 = H(E^1, d^1)$．重复这个过程，就得到所说的谱序列 $E = \{E^n, d^n\}$．

1）Leray 谱序列（Leray spectral sequence）．带有滤层结构的模的链复形（$\{K^p\}$，d）决定双分次模的一个正合偶 $D^1_{p,q} = H_{p+q}(K^p)$，$E^1_{p,q} = H_{p+q}(K^p/K^{p-1})$．在这儿所得的谱序列中，微分 d^r 的双分次等于 $(-r, r-1)$；而

$$E^r_{p,q} =$$

$$= \frac{\mathrm{Ker}\,(d^{r-1}_{p,q}: E^{r-1}_{p,q} \to E^{r-1}_{p-r+1,q+r-2})}{\mathrm{Im}\,(d^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}: E^{r-1}_{p+r-1,q-r+2} \to E^{r-1}_{p,q})} \simeq$$

$$\simeq \frac{\mathrm{Im}(H_{p+q}(K^p/K^{p-r}) \to H_{p+q}(K^p/K^{p-1}))}{\mathrm{Im}(\partial: H_{p+q+1}(K^{p+r-1}/K^p) \to H_{p+q}(K^p/K^{p-1}))}.$$

模 $F_{p,q} = \mathrm{Im}(H_{p+q}(K^p) \to H_{p+q}(K))$ 构成 $H_*(K)$ 的一个滤层．双分次模

$$E^\infty_{p,q} = F_{p,q}/F_{p-1,q+1} \simeq$$

$$\simeq \frac{\mathrm{Im}(H_{p+q}(K^p) \to H_{p+q}(K^p/K^{p-1}))}{\mathrm{Im}(\partial: H_{p+q+1}(K/K^p) \to H_{p+q}(K^p/K^{p-1}))}$$

称为 $H_*(K)$ 的上述滤层所对应的分次模．滤层 $\{K^p\}$ 称为正则的（regular），如果当 $p<0$ 时，$K^p = 0$，当 $q<0$ 时，$E^1_{p,q} = 0$ 而且 $K = \bigcup K^p$．在这种情况下，当 $p<0$ 或 $q<0$ 时，$E^r_{p,q} = 0$；这样的谱序列称为第一象限谱序列（first-quadrant spectral sequence）．此外，当 $r > \max(p, q+1)$ 时，$E^r_{p,q} \simeq E^{r+1}_{p,q} \simeq E^\infty_{p,q}$．在这种情形下，说谱序列收敛到 $H_*(K)$．记为

$$E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(K).$$

2）Leray-Serre 谱序列（Leray-Serre spectral sequence）是上述 Leray 谱序列的一种特例．此时滤层 $\{K^p\}$ 就是一个带有滤层结构的拓扑空间的（上）链复形，比如 **CW 复形**（CW-complex）X 的骨架构成的滤层给出坍缩的谱序列，$E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(X)$．此时，若 $q \neq 0$，则 $E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q} = 0$，而 $E^2_{n,0} = E^\infty_{n,0} = H_n(X)$．Leray-Serre 谱序列是从 Serre 纤维化 $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ 的全空间 E 的一个滤层得到的．这个滤层是由底空间 B 的骨架 B^n 在映射 p 下的原象 $p^{-1}(B^n)$ 构成的．若纤维 F 和底空间 B 是道路连通的，则对每个系数群 G，有一个谱序列 $E^r_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(E; G)$，其中微分 d^r 的双分次是 $(-r, r-1)$，

$$E^1_{p,q} \simeq C_p(B) \otimes H_q(F; G),$$
$$E^2_{p,q} \simeq H_p(B; \mathscr{H}_q(F; G)),$$

其中 $\mathscr{H}_q(F; G)$ 是 B 上由群 $H_q(F; G)$ 组成的局部系数的系统．同态 $i_*: H_n(F; G) \to H_n(E; G)$ 等于复合同态

$$H_n(F; G) = E^2_{0,n} \to E^r_{0,n} = E^\infty_{0,n} = F_{0,n} \subset$$
$$\subset H_n(F; G),$$

而同态 $p_*: H_n(E; G) \to H_n(B; G)$ 则与复合同态

$$H_n(E; G) = F_{n,0} \to E^\infty_{n,0} = E^r_{n,0} \subset E^2_{n,0} =$$
$$= H_n(B; G)$$

相同，其中 r 充分大．该谱序列的微分 $d^n_{n,0}$ 与**超渡**（transgression）τ：$H_n(B; G) \to H_{n-1}(F; G)$ 相同．

上述同调 Leray-Serre 谱序列有一个对偶的上同调 Leray-Serre 谱序列 $E^{p,q}_r \Rightarrow H^{p+q}(E; G)$，其中微分 d_r 的双分次为 $(r, -r+1)$，$E^{p,q}_2 \simeq H^p(B; \mathscr{H}_q(F; G))$．若 G 是环，则每一项 E_r 是双分次环，d_r 是 E_r 中的微分，且 E_{r+1} 中的乘法是由 E_r 中的乘法诱导出的．若 G 是域，底空间 B 单连通，则 $E^{**}_2 \simeq H^*(B; G) \otimes H^*(F; G)$．

3）Atiyah-Hirzebruch（-Whitehead）谱序列（Atiyah-Hirzebruch（-Whitehead）spectral sequence）则是将广义（上）同调函子 $h_*(h^*)$ 作用于空间 E 的同一滤层而得的谱序列．用上同调时，谱序列 $E^{p,q}_r \Rightarrow h^{p+q}_r(E)$，其中 $E^{p,q}_2 = H^p(B; h^q(F))$．与 Leray-

Serre 谱序列不同的是，平凡纤维化 id: $X \to X$ 所对应的 Atiyah-Hirzebruch 谱序列一般不是坍缩的.

4) Eilenberg-Moore 谱序列(Eilenberg-Moore spectral sequence)由纤维化的交换图

$$\begin{array}{ccc} E & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & B \end{array}$$

导出. 用上同调时, Eilenberg-Moore 谱序列

$$E_r \Rightarrow H^*(E; R),$$

$$E_2^{p,q} \simeq \mathrm{Tor}_{H^*(B,R)}^{p,q}(H^*(X; R), H^*(Y; R)).$$

若 R 是域, 交换图中的空间是 H 空间, 映射是 H 映射, 则上述谱序列是双分次 Hopf 代数范畴中的谱序列.

5) Adams 谱序列(Adams spectral sequence) $E_r^{s,t}$ 对任何素数 $p \geqslant 2$, 以及空间 X, Y 有定义(其中 X, Y 满足适当的有限性条件). 此时,

$$E_2^{s,t} \simeq \mathrm{Ext}_{A_p}^{s,t}(H^*(X; \mathbf{Z}_p), H^*(Y; \mathbf{Z}_p)),$$

其中 A_p 是模 p **Steenrod 代数**(Steenrod algebra). d_r 的双分次等于 $(r, r-1)$. 这个谱序列在下述意义下收敛: 当 $r > s$ 时, 存在单态射 $E_{r+1}^{s,t} \to E_r^{s,t}$, 因此可以定义群 $E_\infty^{s,t} = \bigcap_{r>s} E_r^{s,t}$. 同时映射 $Y \to X$ 的稳定同伦类所组成的群 $\{Y, X\}$ 有一串降滤过 $\{F_s\}$, 满足

$$F^s\{S^{t-s}Y, X\} / F^{s+1}\{s^{t-s}Y, X\} \simeq E_\infty^{s,t},$$

而 $F^\infty = \bigcap_{s \geqslant 0} F^s$ 则由 $\{Y, X\}$ 中所有阶数与 p 互素的有限阶元素组成. $X = Y = S^0$ 时, 这个谱序列使得原则上能计算球面的稳定同伦群的 p 分量. A. C. Мищенко 和 C. П. Новиков 把上述 Adams 谱序列推广到了任意广义上同调论(generalized cohomology theories). 另一推广是收敛到不稳定同伦群的 Adams 谱序列.

参考文献

[1] Mosher, R. E. and Tangora, M. C., Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968.

[2] Фукс, Д. В., Фоменко, А. Т., Гутенмахер, В. Л., Гомотопическая топология, М., 1969.

[3] Serre, J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 425 – 505.

[4] MacLane, S., Homology, Springer, 1963.

[5] Cartan, H. and Eilenberg, S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[6] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966(中译本: E. H. 斯潘尼尔, 代数拓扑学, 上海科学技术出版社, 1987).

[7] Hu, S.-T., Homotopy theory, Acad. Press, 1959.

[8] Godement, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958.

[9] Новиков, С. П., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 31 (1967), 855 – 951.

[10] Adams, J. F., Stable homotopy and generalized homology, Univ. Chicago Press, 1974.

[11] Switzer, R., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975.

[12] Smith, L., Lectures on Eilenberg-Moore spectral sequence, Lecture notes in math., 134, Springer, 1970.

[13] Ravenel, D. C., A novices guide to the Adams-Novikov spectral sequence, in Geometric Applications of Homotopy Theory, Vol. 2, Springer, 1978. 404 – 475.

С. Н. Малыгин 撰

【补注】 设 (E^n, d^n), $n = 2, 3, \cdots$, 是一个谱序列, 则 E^{n+1} 是 (E^n, d^n) 的同调. 谱序列如下归纳地定义了初始项(initial term) E^2 的一系列子模:

$$0 = B^1 \subset B^2 \subset B^3 \subset \cdots \subset C^3 \subset C^2 \subset C^1 = E^2,$$

其中 $E^{r+1} = C^r / B^r$, C^{r+1} / B^r 是 d^r: $E^r \to E^r$ 的核, 而 B^{r+1} / B^r 则是 d^r 的象. 现在可定义第 ∞ 项:

$$C^\infty = \bigcap_n C^n, \ B^\infty = \bigcup_n B^n, \ E^\infty = C^\infty / B^\infty.$$

E^r 被认为是 E^∞ 的逐次逼近. 若 (E^n, d^n) 是双分次模的谱序列 $E^n = \bigoplus E_{p,q}^n$, d^r: $E_{p,q}^r \to E_{p-r,q+r-1}^r$, 则所有 B^i, C^i, B^∞, C^∞, E^∞ 也带有自然的双分次结构.

有时还有一个初始项 E^1, 那么就可以从 E^1 而不是 E^2 重复上述的构造.

对第一象限谱序列, 即当 $p < 0$ 或 $q < 0$ 时, $E_{p,q}^2 = 0$, 此时, 对给定的 p, q, 当 r 充分大时,

$$E_{p+r,q-r+1}^r \xrightarrow{d^r} E_{p,q}^r \xrightarrow{d^r} E_{p-r,q+r-1}^r$$

中两头的模均为零, 因而 r 充分大时, $E_{p,q}^r = E_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^\infty$.

对第一象限谱序列, $E_{p,0}^{r+1}$ 总是 $E_{p,0}^r$ 的子模, $E_{0,q}^{r+1}$ 总是 $E_{0,q}^r$ 的商, 因而给出一系列单态射和满态射:

$$E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^{p+1} \to \cdots \to E_{p,0}^3 \to E_{p,0}^2,$$

$$E_{0,q}^2 \to E_{0,q}^3 \to \cdots \to E_{0,q}^{q+2} = E_{0,q}^\infty,$$

这些称为棱同态(edge homomorphism).

设 (A_p) 是模 A 的滤层(filtration of a module), 它由下列子模构成:

$$\cdots \subset A_{p-1} \subset A_p \subset A_{p+1} \subset \cdots,$$

与它相伴的分次模 $G_r(A)$ 是

$$\mathrm{Gr}(A) = \bigoplus_p A_p / A_{p-1}.$$

谱序列 (E_p^r, d^r) 称为收敛到分次模 H，记为

$$E_p^r \Rightarrow H,$$

如果存在 H 的滤层 F_pH，使得

$$E_p^\infty \simeq F_pH / F_{p+1}H. \qquad (*)$$

通常情况下，E_p^r 和 H 是分次模，那么滤层和同构 $(*)$ 均与分次匹配. 潘建中 译 沈信耀 校

谱集 [spectral set; спектральное множество]

1) 赋范空间上算子 A 的谱集 (spectral set of an operator) 是一个子集 $S \subset \mathbf{C}$，使得对任何多项式 $p(z)$

$$\| p(A) \| \leqslant \sup \{ |p(z)| : z \in S \}.$$

这样，单位圆周是 Hilbert 空间上任何一个压缩 (contraction) (其范数不超过一的算子) 的谱集 (von Neumann 定理 (von Neumann theorem)). 这结果是与对任何压缩酉幂膨胀的存在性紧密联系的 (Hilbert 空间 H 上一个算子 A 的幂膨胀 (power dilation) 是定义为 Hilbert 空间 $H_1 \supset H$ 上使得 $P_H A_1^n|_H = A^n (n \in \mathbf{Z}^+)$ 的一个算子 A_1)；一个紧子集 $S \subset C$ 是 A 的谱集，当且仅当 S 有一个正规幂膨胀，它的谱在 ∂S 中. 对 Banach 空间中每个压缩均成为谱集的圆周的最小半径等于一.

2) 交换 Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 的谱集 (spectral set) 或谱综合集 (set of spectral synthesis) 是极大理想空间 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ 的一个闭子集，它恰是一个闭理想 $I \subset \mathfrak{A}$ 的包. 当 $\mathfrak{A}$ 是一个局部紧 Abel 群的群代数的情形，谱集也称为调和综合集 (sets of harmonic synthesis).

参考文献

[1] Neumann, J. von, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 258 – 281.

[2] Кацнельсон, В. Э., Мацаев, В. И., «Теория функций, функц. анализ и их приложения», 1966, 3, 3 – 10.

В. С. Шульман 撰

【补注】 亦见谱综合 (spectral synthesis).

葛显良 译 吴绍平 校

谱综合 [spectral synthesis; спектральный синтез]

由包含在线性算子族的不变子空间内的该线性算子族的本征子空间或根子空间，重构这些不变子空间. 确切地说，设 $\mathscr{A}$ 是拓扑向量空间 X 上的一个交换算子族，$\sigma_p(\mathscr{A})$ 是其点谱 (point spectrum) (即 $\mathscr{A}$ 上的数值函数 $\lambda = \lambda(A)$ 的集合，对于其中的 λ，本征子空间

$$N_{\mathscr{A}}(\lambda) = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \operatorname{Ker}(A - \lambda(A) I)$$

不是零)，又设

$$K_{\mathscr{A}}(\lambda) = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{Ker}(A - \lambda(A) I)^n$$

是对应点 $\lambda \in \sigma_p(\mathscr{A})$ 的根子空间 (见算子的谱 (spectrum of an operator)). 在 $\mathscr{A}$ 作用下不变的子空间 $L \subset X$ 容许谱综合，如果 L 是包含在其内的根子空间的闭包. 如果所有 $\mathscr{A}$ 不变子空间都容许谱综合，则称族 $\mathscr{A}$ 本身容许谱综合.

容许谱综合的算子族的例子有：Banach 空间上的任意紧交换算子群、或者更一般地，任意具有相对紧轨道的群. 如果 $\dim X < \infty$，则由于存在 **Jordan 分解** (Jordan decomposition)，因此每一个单元族都容许谱综合. 对于一般情形，要使算子 A 容许谱综合，必须至少要求全空间 X 关于 A 容许谱综合，也就是 A 应该有一个完全的根子空间系. 但即使是对于 Hilbert 空间上的**正规算子** (normal operator)，这一条件也不是充分的. 为使正规算子 A 容许谱综合，其充分必要条件是 $\sigma_p(A)$ 不包含与多项式正交的测度的支集. 这一条件成立，当且仅当对任意区域 $G \subset \mathbf{C}$，存在函数 f 在 G 内解析且满足条件

$$\sup_{z \in G} |f(z)| < \sup_{z \in G \cap \sigma_p(A)} |f(z)|.$$

特别地，完全酉算子和完全自伴算子 (见**完全算子** (complete operator)，**自伴算子** (self-adjoint operator) 和**酉算子** (unitary operator)) 容许谱综合. "近似于" 完全酉算子或完全自伴算子的完全算子 (例如具有核型虚分量的**耗散算子** (dissipative operator) 以及谱在一个圆上并且当逼近该圆时其预解式具有正规增长的算子) 也可能容许谱综合.

根子空间系的完全性并不保证不变子空间的谱综合，即使再加上算子是紧算子的条件：完全紧算子 (compact operator) 在一个不变子空间上的限制不一定有特征向量，而且甚至可以与事先给定的任意紧算子相同.

在不变子空间的谱综合问题中，不仅包含了阐明用根向量的线性组合逼近它们元素的可能性，而且还包含了具体构造一个逼近序列并估计它的收敛速度. 在算子具有可数谱的情形，逼近序列通常是用形式 Fourier 级数 $x \approx \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \varepsilon_\lambda x$ 的部分和序列的平均来构造的，其中的 ε_λ 是 Riesz 投影算子 (Riesz projector)：

$$\varepsilon_\lambda x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} (z - A)^{-1} dz.$$

这里，Γ_λ 是将点 $\lambda \in \sigma_p(A)$ 与谱的其余部分分离开的一条围道.

如果空间 X 由局部紧的 Abel 群上的函数组成，而且 $\mathscr{A}$ 与所有位移算子的族相同，则 $\mathscr{A}$ 的本征空间是由该群的特征标生成的一维子空间．因此，不变子空间的谱综合理论包含了局部紧 Abel 群上调和综合的经典问题（见**抽象调和分析**（harmonic analysis, abstract）），后者是要找到一些条件，使在这些条件下，对由群上的函数组成的某个拓扑向量空间，平移不变子空间是由包含在它们中的特征标生成的．特别地，紧群上的或更一般地在群上的殆周期函数空间中的谱综合的可能性，是前面叙述的关于具有相对紧轨道的算子群谱综合的结果的推论．另外，谱综合问题与正则交换 Banach 代数中的理想的综合问题紧密相关：一个闭理想是极大理想的交（"它容许谱综合"），当且仅当它的在伴随空间中的零化子关于用该代数中的元素相乘的算子的伴随算子族容许谱综合．

谱综合的上述定义能依这样的方式推广，使得它还能包括没有扩大点谱的算子族（甚至非交换算子族）．为此，取代的条件是：在不变子空间以及给定的算子族在这些子空间上的限制的谱的特征之间存在一个一一对应．在这种意义下讨论的是正则交换 Banach 代数上的模的谱综合，以及局部紧 Abel 群的表示的谱综合．

参考文献

[1] Hewitt, E. and Ross, K. A., Abstract harmonic analysis, 1－2, Springer, 1979.

[2] Никольский, Н. К., в кн: Итоги науки и техники. Математич. анализ, т. 12, М. 1974, 199－412.

[3] Benedetto, J. J., Spectral synthesis, Teubner, 1975.

В. С. Шульман 撰

【补注】 根据[A2]中第 140 页，名词"谱综合"是由 A. Beurling 在 1947 年左右引进的．从此，它成为交换调和分析（即在交换 Banach 代数 $L_1(G)$ 的范围内，G 是局部紧的 Abel 群）中许多研究的一个课题．对偶群 $\hat{G}$ 的元素可以等同于 $L_1(G)$ 的闭极大理想．$L_1(G)$ 中闭理想 I 的余谱（cospectrum）是 $\hat{G}$ 中由所有包含 I 的闭极大理想组成的闭集．对于 $\hat{G}$ 的每一个闭子集 E，都相应有 $L_1(G)$ 中的一个自然的闭理想以 E 作为余谱，即对应于 E 的点的所有闭极大理想的交．E 称为**谱综合集**（set of spectral synthesis）（或 **Wiener 集**（Wiener set））（[A2]），如果这个交是唯一以 E 作为余谱的闭理想．由 N. Wiener（1932）对于 $G=\mathbf{R}$ 的情形证明的**经典逼近定理**（classical approximation theorem）可以叙述为：空集是谱综合集．

不是谱综合集的集合（也称为"非谱综合集"）的第一个例子是 L. Schwarz 于 1948 年给出的，他证明了 $\hat{G}=\mathbf{R}^n (n\geqslant 3)$ 中的球不是谱综合集．P. Malliavin（1959）证明：对所有非紧群 G，在 $\hat{G}$ 中都存在非谱综合集．这一结论的完全不同的证明是由 N. Th. Varopoulos 于 1965 年给出的，他用了张量代数．这一领域里有一个著名的未解决的问题（**并问题**（union problem））：两个谱综合集的并是否仍是谱综合集？更详细的内容见[1]，[3]，[A1]及[A2]．

参考文献

[A1] Graham, C. C. and McGehee, O. C., Essays in commutative harmonic analysis, Springer, 1979.

[A2] Reiter, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups, Clarendon Press, 1968.

朱学贤 译　刘和平 校

谱理论 [**spectral theory**; **спектральная теория**]，亦称谱论，线性算子的

泛函分析（functional analysis）的一个分支，它基于**线性算子**（linear operator）的谱性质（如谱的位置，预解式的性态和其本征值的渐近性质）来研究线性算子的结构．关于一个线性算子的结构的描述通常理解如下：在一个具体（通常是函数的）模型的规定的类中求与其等价的算子；从一类较简单算子重新构造它的特殊方法（例如，按直和或直接积分形式）；发现一组基使得在该基下算子的矩阵有最简单的形式，证明根向量系的完全性；不变子空间的格的完全的描述；不变子空间的极大链的辨识（三角形表示）；或一个充分广泛的函数演算的构造，等等．

谱理论中一个很普及（且有效）的思想是把一个算子分解成与其谱的一个分划相对应的算子的直和．这方面的第一个结果（对无穷维空间）是由 F. Riesz（1909）得到的，他提出了以下的构造．设 T 是 Banach 空间 X 上具有谱 $\sigma(T)$ 和**预解式**（resolvent）$R_T(\lambda)$（即 $R_T(\lambda)=(T-\lambda I)^{-1}, \lambda\in\mathbf{C}\setminus\sigma(T)$）的有界线性算子，则当 Γ 是包围 $\sigma(T)$ 的一个任意围道时，公式

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\oint_{\Gamma} f(\lambda)R_T(\lambda)d\lambda$$

在 $\sigma(T)$ 的一个邻域内全纯的函数芽的代数上定义了一个函数演算．如果 δ 是 $\sigma(T)$ 的一个既开又闭子集且 f 是在 δ 上等于 1 而在 $\sigma(T)\setminus\delta$ 上为 0 的函数，则得到一个投影算子 $P_T(\delta)$，它与 T 交换且满足 $\sigma(T|_{P_T(\delta)X})=\delta$．

一个更一般的谱理论是基于谱子空间的概念．对应于一个闭子集 $\delta\subset\sigma(T)$ 的 T 的**谱流形**（spectral manifold）是定义在 $\mathbf{C}\setminus\delta$ 中有局部预解式（即一个解析 X 值函数 $f(\lambda)$，满足条件 $(T-\lambda I)f(\lambda)=x$，$\lambda\in\mathbf{C}\setminus\delta$）的所有向量 $x\in X$ 的集合 $X_T(\delta)$；**谱子空间**（spectral subspace）是谱流形的闭包．如果同一向量的任何两个局部预解式在它们的定义域的交上一致

(这表示零向量的局部预解式等于零，例如，对所有无本征值的算子，这一点成立)，则称此算子有唯一扩张性质．在这情形下，对每个 $x\in X$ 存在一个有极大定义域的局部预解式，它的补称为 T 在向量 x 的局部谱(local spectrum)且记作 $\sigma(T,x)$．这样，对具有唯一扩张性质的一个算子 T，

$$X_T(\delta)=\{x\in X:\sigma(T,x)\subset\delta\};$$

如果 $X_T(\delta)$ 是闭的，则 $\sigma(T|_{X_T(\delta)})\subset\delta$．在一般情形下关于谱子空间包含性的类似命题是错的．谱子空间满足对偶性条件 $X_T(\delta_1)^\perp\supset X_{T^*}(\delta_2)$（其中 δ_1 和 δ_2 是不相交闭集），但是另一个自然条件 $X_T(\overline{G}_1)^\perp\subset\overline{X_{T^*}(\overline{G}_2)}$（其中 G_1，G_2 是开集且 $G_1\cup G_2=\sigma(T)$）可能不成立．这个包含式将成立如果把上式右边换成"弱谱子空间"$X_T^W(\overline{G}_2)$（其中 $X_T^W(\delta)$ 由满足以下条件的向量 $x\in X$ 构成：对每个 $\varepsilon>0$ 存在解析的 X 值函数 $f_\varepsilon(\lambda)$ 具有性质 $\|(T-\lambda I)f_\varepsilon(\lambda)-x\|\leqslant\varepsilon$，$\lambda\in\mathbf{C}\backslash\delta$）．对谱的更强分离性的一些充分条件已经知道．特别地，对具有实谱的算子在预解式增长性上的限制

$$\int_0 \log^+\log^+[\sup_s\|R_T(s+it)\|]dt<\infty$$

蕴涵存在(对谱的任何开覆盖)线性地生成 X 的 T 不变子空间族，使得 T 到它们的限制的谱内接于该覆盖．事实上这样的算子属于可分解算子(decomposable operators)类，后者定义为其谱流形是闭的且满足以下条件的算子：对 T 的谱的任何开覆盖 $\{G_i\}_{i=1}^n$，子空间 $X_T(\overline{G}_i)$ 线性地生成 X．这种算子类包含其预解式满足解析可优化性条件的所有算子(例子有紧算子、谱算子的弱扰动，l_p 中 Fourier 级数的乘子，和 J 对称算子)，而且它在解析映射和(给定一定限制下)取极限时，以及在构成限制和商之下是稳定的．同时，谱子空间的丰富性(当谱是充分丰富时)保证了谱论的内容充实性．一个不属于任何给定的谱分解范围的算子已经构建出来，由于所有它的在不变子空间上的限制的谱与区间 $[0,1]$ 重合．

即使在稀疏谱情形，一个算子在谱子空间上的限制可以有相当复杂的结构(精细结构)．这样预解式的每个极点是一个本征值，其上升(一个根链的极大长度)等于极点阶数；对应的谱子空间是一个根子空间．在有限维空间上算子的情形，这化成算子分解成从根链构造的 Jordan 块的直和．Jordan 形的类似在一般谱论中也占重要地位；Jordan 块的角色可由具有单点谱和有一个循环向量的算子，由具有不变子空间的线性序格的算子(这样的算子称为单胞算子；在有限维空间的算子中这个性质仅为 Jordan 块所具有)，或由有简单的具体表示(模型)的算子所扮演．然而，这样一种分解的存在性不是普遍的：存在这样的算子，它们的不变子空间的格和谱以太复杂的方式排列以致不能把它们看成初等"胞腔"(块)，且同时甚至没有一对不相交的不变子空间．长期以来不知道是否每个有界算子(在维数大于 1 的空间上)有非平凡不变子空间．对紧算子，与紧算子可交换的算子，与 Hermite 算子或酉算子接近的算子，次正规算子，和属于某些其他特殊类的算子，这问题的肯定答案已经得到．1984 年 C．J．Read([8])构造了某些 Banach 空间(包括 l_1)上没有不变子空间的算子的例子．对自反空间该问题仍悬而未决(1990)．

有限维谱理论的某些结果在紧算子的谱理论中有简单的类似．例如，紧算子的谱至多可数且它的仅有可能的聚点是 0，谱的非零点是预解式的极点，其根子空间是有限维的，且伴随算子在根子空间的限制有同样的结构．然而，即使在这情形当点谱是充分丰富且 T 的根向量张成整个 X 时(在这样的情形称 T 是完全算子(complete operator))，X 分解成根子空间的直接和仍可能不成立，由于其相互位置的几何奇异性．

如果 X 是一个 Hilbert 空间(在这情形写成 H 以取代 X)，则每个紧算子 $T\in\mathscr{L}(H)$ 可表成级数的和

$$\sum_n s_nf_n\otimes e_n,$$

即
$$Tx=\sum_n s_n(x,f_n)e_n,\ x\in H,$$

其中 $\{s_n\}$ 是正数的非增序列而 $\{f_n\}$，$\{e_n\}$ 是正交规范系．数 $s_n=s_n(T)$ 称为 T 的奇异数(singular numbers)或 s 数；它们与算子 $(TT^*)^{1/2}$ 的本征值一致，按递减次序，按重数重复计数．此外 $s_n(T)=\inf\|TP\|$，其中 P 跑遍余秩为 n(奇异数的极小-极大特征)的投影算子的集合，且 $s_n(T)$ 与从 T 到秩为 n 的算子集合的距离一致，这是数值上表示该算子的奇异数的下降速率和它与有限秩算子的邻近性之间的对应关系．根据这点有对和与积的奇异数的估计，由此推出关于 s 数下降速率的特殊条件区分出算子代数中的理想．特别地

$$\gamma_p=\{T:|T|_p\equiv(\sum s_n^p(T))^{1/p}<\infty\}$$

是一个理想，当 $p\geqslant1$ 时它是关于范数 $|T|_p$ 的一个 Banach 空间．空间 γ_2 是一个 Hilbert 空间，而它的元素称为 Hilbert-Schmidt 算子(Hilbert-Schmidt operators)；对 H 的任何 L_2 实现，有所有 Hilbert-Schmidt 算子作为具有平方可和核的积分算子的表示．γ_1 中算子称为核型算子(nuclear operators)或迹类算子(trace class operator)：定义在有限秩算子的理想上的迹可延拓成 γ_1 上的一个连续泛函，它在任

何算子上的值与其矩阵的对角线元素的（级数的）和一致，也与本征值的和一致．当 $T\in\gamma_1$ 时，对形式为 $I+T$ 的算子，可定义行列式的概念（本征值的无穷乘积）．函数 $\det(I-\mu T)$ 称为 T 的特征行列式（characteristic determinant）．这是矩阵的特征多项式的自然推广，且由于有合适的估计，它在核型算子的谱理论中是很有用的．特别地，一个算子 $T\in\gamma_1$ 的预解式由公式（E. Fredholm，1903）

$$R_T(\lambda)=F_T(\lambda^{-1})\det(I-\lambda^{-1}T)^{-1}$$

与特征行列式相关．这里的 F_T 是一个整算子函数，其系数用 T 的"部分迹"来表示．该公式和用这方法得到的对预解式的估计可继续用于 $\gamma_p(p>1)$ 中的算子（这在应用上是重要的），并导致以下的完全性检验法：1）如果 $T=A(I+S)$，其中 $A=A^*\in\gamma_p$，S 是紧的且 $\operatorname{Ker}A=0$，则 T 是完全的（Кельдыш 定理（Keldysh theorem）；它在**微分算子的谱理论**（spectral theory of differential operators）中有许多应用）；2）如果 $T\in\gamma_p$ 且二次型 (Tx,x) 的值域包含在大小为 π/p 的某个角中，则 T 是完全的．

其谱由单独一个点 $\lambda=0$ 组成的（与完全性条件相反的一个条件）紧算子称为 Volterra 算子（Volterra operators），由于 Volterra 积分算子

$$Tf(x)=\int_0^x K(x,y)f(y)\,dy$$

是其原型．更确切地说，每个 Hilbert-Schmidt Volterra 算子酉等价于一个向量函数空间上的 Volterra 积分算子；不属于 γ_2 的算子有其核是广义函数的模型．这样的积分表示是矩阵的三角形表示的类似．按投影算子链的积分算子函数技术已经有所发展且在此基础上对 Volterra 算子的一个抽象三角形表示已经得到：

$$T=\int_{\mathscr{P}}P(T-T^*)\,dP$$

其中 $\mathscr{P}$ 是 T 不变投影算子的一个极大链．这导致积分表示理论中基本定理的精细的改进和推广，导致接近于单位的 Volterra 算子的 Hermite 分量的本征值分布之间的重要关系式的一个证明，导致算子的三角形因子分解的构造，且导致在谱理论和典范微分方程组边值问题理论中某些问题之间建立联系（特别地，使得可能用算子方法去研究这样的方程组的稳定性问题）．

对任何紧算子秩为 1 的链的存在性，即有循环向量这一长期悬而未决的问题已经否定地解决了．秩为 1 的不变链的存在性对具有核型虚部分量的耗散算子已经被证明，且作为一个结果，它们的三角形表示有一个更完全的形式．也有对这样的算子的 Jordan 表示理论，且这是与经典（有限维的）情形一致的：每个算子分解成单胞算子的拟直和，其中在这算子类中是单胞的条件等价于循环向量的存在性．在这理论中，特征算子函数概念起中心作用．

与酉膨胀理论中的几何构造紧密相关，压缩（即其范数不超过 1 的算子）的特征算子函数的概念居于这算子类的谱理论的中心．T 的特征算子函数是定义在开单位圆盘 $\Delta\subset\mathbf{C}$ 内的一个函数 $\theta_T(\lambda)$，在从 $\overline{D_T(H)}$ 到 $\overline{D_{T^*}(H)}$（其中 $D_T=(I-T^*T)^{1/2}$）的算子的空间中取值且满足关系式

$$\theta_T(\lambda)D_T=D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}(I\lambda-T).$$

特征算子函数在 Δ 内解析且是压缩的：$\|\theta_T(\lambda)\|\leq 1$．如果 T^n 和 T^{*n} 按强算子拓扑趋于零（这样的算子构成类 C_{00}），则 θ_T 是一个内函数（inner function），即它在 $\partial\Delta$ 上的边界值几乎处处等于 1．反之，对任何内算子值函数 $\theta:\Delta\to\mathscr{B}(E_1,E_2)$，可以构造压缩 T，使得 $\theta_T=\theta$，由限制在 Hardy 空间 $H^2_{E_2}(\Delta)$ 上用 λ 作乘法的算子到子空间 $\theta H^2_{E_1}$ 的正交补 K_θ 上．这个构造，称为函数压缩模型（functional contraction model），它使得可把谱理论问题翻译成经典函数语言，后者具有插值问题，有理逼近，解析延拓，和特殊的因式分解等形式．这函数模型可用来发展一种更丰富的函数演算，对 $\varphi\in H^\infty(\Delta)$ 定义算子 $\varphi(T)$ 作为用 $\varphi(\lambda)$ 相乘的算子到 K_θ 的限制（条件 $T\in C_{00}$ 是不必要的，重要的是要求 T 是完全非酉的）．如果这演算不是单射，即如果对某函数 $\varphi\in H^\infty$，$\varphi\neq 0$ 而 $\varphi(T)=0$，则 T 称为类 C_0 的一个压缩（contraction）．压缩 $T\in C_0$ 有极小的内函数 m_T（零化 T 的所有函数的理想的生成元）；m_T 是矩阵的最低多项式的一种类似：它决定 T 的许多谱性质．这样，一个压缩 $T\in C_0$ 是完全的，当且仅当 m_T 是 **Blaschke 积**（Blaschke product）（且在这情形下 T 容许有**谱综合**（spectral synthesis））．一个压缩 $T\in C_0$ 的点谱 $\sigma_p(T)$ 与 m_T 的零点集合一致，且 $\sigma(T)$ 是从 $\sigma_p(T)$ 再添加边界 $\partial\Delta$ 上 m_T 不能被解析延拓到的那些点．C_0 中压缩在 Δ 中有至多可数谱这事实指示了这个类的限制．另一方面，例如，它包含了其亏算子 D_T，D_{T^*} 是核型的所有压缩．如果 D_T，D_{T^*} 是秩为 1 的算子，则该函数模型作用在经典 Hardy 空间 $H^2(\Delta)$ 上且完全由标量内函数 $m=m_T=\theta_T$ 所决定；在这情形下写成 $T=S(m)$．压缩 $S(m)$ 的谱理论最紧密地近似于解析函数的谱理论且已被研究得最多．这些压缩在 C_0 中压缩的谱理论中起着 Jordan 块的作用，由于每个压缩 $T\in C_0$ 拟相似于一个直和 $\oplus_{i=1}^N S(m_i)$ 这一事实．对 $T\in C_0$ 更通常的 Jordan 分解（分解成单胞算子）不总是可能的．

参考文献

[1A] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear opera-

tors. Spectral operators, 3, Interscience, 1971.

[1B] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral theory, 2, Interscience, 1963.

[2] Radjavi, H. and Rosenthal, P., Invariant subspaces, Springer, 1973.

[3] Colojoară, I. and Foiaş, C., Theory of generalized spectral operators, Gordon & Breach, 1968.

[4] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965 (英译本: Gokhberg, I. Ts. and Krein, M. G., Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1969).

[5] Гохберг, И. Ц., Крейн, М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967 (英译本: Gokhberg, I. Ts. and Krein, M. G., Theory and applications of Volterra operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc., 1970).

[6] Sz-Nagy, B. and Foiaş, C., Hamonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, 1970 (译自法文).

[7] Никольский, Н. К., Лекции об операторе сдвига, М., 1980 (英译本: Nikol'skii, N. K., Treatise on the shift operator, Springer, 1986).

[8] Read, C. J., A solution to the invariant subspace problem, *Bull. London Math. Soc.*, **16** (1984), 4, 337 – 401.

B. C. Шульман 撰

【补注】 对线性算子的根向量和根子空间的概念见**根向量** (root vector).

线性算子 A 的一个根链 (对应于根 ξ) 是使得 $Ax_0=\xi x_0, Ax_1=\xi x_1+x_0, \cdots, Ax_n=\xi x_n+x_{n-1}$ 的非零向量序列 $x_0, \cdots, x_n$. 它也称为 Jordan 链 (Jordan chain), ([A1]).

十分一般地, Banach 空间上一个线性算子 A 的上升 (ascent of a linear operator) 是使得 $\operatorname{Ker}(A^n)=\operatorname{Ker}(A^{n+1})$ 的最小整数 n, 且因而对所有 $k\geqslant 0$ 也有 $\operatorname{Ker}(A^n)=\operatorname{Ker}(A^{n+k})$. 如果没有这样的整数 n 存在, 则规定 A 的上升腾 $\alpha(A)$ 等于 ∞.

设 $R(A)=AX$ 表示 Banach 空间上一个算子 A 的值域 (range of an operator). 线性算子 A 的下降 (descent of a linear operator) 定义为使得 $R(A^n)=R(A^{n+1})$ 的最小整数 n, 因而对所有的 $k\geqslant 0$, $R(A^n)=R(A^{n+k})$. 如果没有这样的 n 存在, 规定 A 的下降 $\delta(A)$ 为 ∞.

如果 A 是一个有界线性算子且 $\alpha(A)$ 和 $\delta(A)$ 两者都是有限的, 则 $\alpha(A)=\delta(A)\ (=p)$ 且 $X=R(A^p)\oplus\operatorname{Ker}(A^p)$. 特别地对有限维 Banach 空间, 这称为对应于 A 的 X 的 Fitting 分解 (Fitting decomposition). 算子 A 相应地成为一一映射算子 A_1: $R(A^p)\to R(A^p)$ 和一个幂零算子 A_2: $\operatorname{Ker}(A^p)\to\operatorname{Ker}(A^p)$的直和; 这称为算子 A 的 Fitting 分解 (Fitting decomposition of the operator). Fitting 引理 (Fitting lemma) 也应用于其他方面. 例如, 对有有限长度的模 M 的一个模自同态 α, 存在一个 n 使得 $M=\operatorname{Im}(\alpha^n)\oplus\operatorname{Ker}(\alpha^n)$.

参考文献

[A1] Birman, M. S. and Solomyak, M. Z., Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space, Reidel, 1987, Chapt. 3, §5 (译自俄文).

[A2] Dowson, H. R., Spectral theory of linear operator, Acad. Press, 1978.

葛显良 译 吴绍平 校

微分算子的谱理论 [spectral theory of differential operators; спектральная теория дифференциальных операторов]

一般算子谱理论 (spectral theory) 的一个分支, 其中研究各种函数空间上, 特别是可测函数的 Hilbert 空间上微分算子的谱性质.

设 Ω_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个区域, 设 Γ 是其边界, 设

$$l(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha \tag{1}$$

是一个线性微分算子, 又设

$$l_j(u)=\sum_{|\alpha|\leqslant m_j}b_{\alpha,j}(x)D^\alpha u|_\Gamma=0,$$
$$1\leqslant j\leqslant N, \tag{2}$$

是由线性微分算子 l_j 定义的边界条件.

这里

$$x=(x_1, \cdots, x_n),\ D=(D_1, \cdots, D_n),$$
$$D_j=\frac{\partial}{\partial x_j},\ \alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

α_j 是非负整数, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$, 且 a_α 和 $b_{\alpha,j}$ 分别是定义在 Ω_n 内和 Γ 上的函数. 除非另外说明, 以后假定 a_α 和 $b_{\alpha,j}$ 是充分光滑函数当 $n>1$, 而 $a_m(x)\neq 0$ 对所有 $x\in(a, b)$, 这里 $\Omega_1=(a, b)$, 如果 $n=1$.

微分算子的自伴扩张. 设 $C_0^\infty(\Omega_n)$ 是有任意阶导数且在 Ω_n 内一个紧集外为零的函数集合, L_0' 是在 $C_0^\infty(\Omega_n)$ 中函数上由 (1) 给定的微分算子. 如果对 $C_0^\infty(\Omega_n)$ 中任何一对函数 u 和 v

$$\int_{\Omega_n} l(x, D)u\bar{v}\,dx=\int_{\Omega_n} u\overline{l(x, D)v}\,dx, \tag{3}$$

则 L_0' 称为对称微分算子 (symmetric differential operator), 而 l 称为形式自伴微分算子 (formally self-adjoint differential operator) (亦见**自伴微分方程** (self-adjoint differential equation); **自伴算子** (self-adjoint

operator)). 设 L_0 是 L_0' 在 $L_2(\Omega_n)$ 中的闭包(见**闭算子**(closed operator)). 则 L_0 及其伴随 L_0^*(见**伴随算子**(adjoint operator))分别称为由 $l(x, D)$ 生成的极小算子(minimal operator)和极大算子(maximal operator); L_0^* 是 L_0 的一个扩张. 微分算子理论中的一个重要问题是描述 L_0 和 L_0^*, 以及描述 L_0 的所有自伴扩张(见**自伴算子**).

这里可应用对称算子扩张的抽象理论(见**算子的扩张**(extension of an operator)). 然而, 对微分算子, 自伴扩张常常可以用边界条件来成功地描述. 设

$$H_{\pm} = \{u(x): u(x)\in D(L_0^*), L_0^* u = \pm iu\} \tag{4}$$

是算子 L_0 的**亏子空间**(deficiency subspace). 如果 $\dim H_{\pm} = 0$, 则 $L_0 = L_0^*$, 且称 L_0' 为本质自伴的(essentially self-adjoint). 以下任一条件是 L_0' 在 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 上为本质自伴的充分条件: 形式自伴微分算子 $l(x, D)$ 有形式

$$-\sum_{k,j=1}^{n} D_k a_{kj}(x) D_j + q(x), \ x\in\mathbf{R}^n, \tag{5}$$

具有实系数, 且 L_0' 是下方有界的; 它有形式(5), 是椭圆型的, a_{kj} 是常数, 且 $q(x) \geqslant -Q(|x|)$, 其中 $Q(r)$ 不是单调减少的, 而积分

$$\int^{\infty} Q^{-\frac{1}{2}}(r)dr = \infty;$$

它有常实系数; 它有有界系数且主部是具有实常系数的椭圆型的(见**微分算子的主部**(principal part of a differential operator)).

设 L_0 有有限亏指数 $n_{\pm} = \dim H_{\pm}$, 这对常微分算子是典型的. 在这情形下数 $n_{\pm}$ 与方程 $l(u) = \pm iu$ 在 $L_2(a, b)$ 中的解子空间的维数一致. 所以 $n_{\pm} < m$, 且微分算子亏指数的计算与常微分方程的定性理论和渐近方法相联系.

设 $n=1$ 且 $x\in(a, b)$. 如果 $n_+ \neq n_-$, 则 L_0' 甚至没有一个自伴扩张. 如果 $n_+ = n_- = k$, 则为了 L_0' 的扩张的自伴性必须给 k 个边界条件, 且这些已经完全地被描述. 当表示式 L_0' 有两个正则端点时, 或有一个正则端点但 $m=2k$ 且 $n_{\pm} = k$ 时, 边值问题取一种简单形式. 一个端点 a 称为正则的(regular), 如果 $a > -\infty$ 且 $1/a_m(x)$, $a_j(x)$, $0\leqslant j\leqslant m-1$, 对任一 $\beta < b$ 在 $[a, \beta]$ 上可和.

有 $L_2(\mathbf{R}^n)$ $(n\geqslant 3)$ 上具有不连续系数且有有限亏指数的偏微分算子的例子, 但它们的理论仍然发展不充分. 并非有界域中对称偏微分算子的所有自伴扩张已经用边界条件来描述, 但是具有给定性质的各种扩张已经被描述.

设 l 是具有实系数的偶数 $m=2k$ 阶的形式自伴椭圆型微分算子, 又设 $C_k^{\infty}(\Omega_n)$ 是在有界闭域 $\overline{\Omega}_n$ 中有任意阶导数且满足 Dirichlet 型边界条件 $D^{\alpha}u = 0$, $x\in\Gamma$, $|\alpha|\leqslant k-1$, 的所有函数的集合. 则由 l 定义的具有定义域 $C_k^{\infty}(\Omega_n)$ 的微分算子是对称的, 且其闭包 L_m 是自伴的. 有对微分算子的具体的自伴边界条件的其他例子. 在具有 Dirichlet 型, Neumann 型或第三类边界条件的二阶微分算子的情形已作了最完全的研究.

自伴微分算子的谱分析. 每个自伴微分算子 L 容许有一个形式为

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda} \tag{6}$$

的谱分解, 其中 E_{λ} 是单位分解(resolution of the identity)(分解成正交投影算子族). 然而, 该一般公式未给出一个具体的自伴微分算子的按本征函数的直接展开式, 因而能用本征函数来表示族 E_{λ} 是重要的. 如果一个自伴微分算子有离散谱 $\{\lambda_k\}$, 对应的正交规范本征函数为 $\{\varphi_k(x)\}$, 则 E_{λ} 是具有(谱)核

$$E(x, y, \lambda) = \sum_{\lambda_k\in(0, \lambda]} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)} \tag{7}$$

的积分算子. 在微分算子的连续谱情形, 问题变得复杂: 对连续谱没有 $L_2(\Omega_n)$ 中的本征函数. 然而, 以下结果为真.

设 L 是 $L_2(-\infty, \infty)$ 上形式(1)的自伴常微分算子, 且设 $\varphi_1(x, \lambda), \cdots, \varphi_m(x, \lambda)$ 是方程 $lu = \lambda u$ 的基本解组. 则存在一个单调的矩阵函数 $\sigma(\lambda) = \|\sigma_{ij}(\lambda)\|_{i,j=1}^{m}$(一个谱测度)使得 L 的单位分解 E_{λ} 由核

$$E(x, y, \lambda) = \int_0^{\lambda} \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i(x, \lambda)\overline{\varphi_j(y, \lambda)}\, d\sigma_{ij}(\lambda) \tag{8}$$

给出. 此外, 对 $L_2(-\infty, \infty)$ 中任一函数 f, 积分

$$\{F_j(\lambda)\} = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_j(x, \lambda)} f(x)dx\right\} \tag{9}$$

在由测度 $\sigma(\lambda)$ 生成的向量函数空间 $L_2(-\infty, \infty; d\sigma(\lambda))$ 中收敛, 而且, 反之, 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^{m} F_i(\lambda)\varphi_j(x, \lambda)d\sigma_{ij}(\lambda)$$

在 $L_2(-\infty, \infty)$ 中收敛于 $f(x)$. 如果(1)有一个正则端点 a 和 $m=2k$, 且亏指数 $n_{\pm} = k$, 则函数 $\varphi_1(x, \lambda), \cdots, \varphi_k(x, \lambda)$ 可以选取以构成方程 $lu = \lambda u$ 的解类中的一个基本组, 它们在 a 点满足边界条

件，而且在这情形谱测度的阶等于 k.

设 L 是 $L_2(\Omega_n)$ 上一个自伴椭圆型微分算子．则其单位分解 E 是一个具有核 $E(x, y, \lambda)$ 的积分算子，且有一个非减函数 $\rho(\lambda)$ 使得对所有数 λ_1 和 λ_2,

$$E(x, y, \lambda_1) - E(x, y, \lambda_2) = = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(x, y, \lambda) d\rho(\lambda), \tag{10}$$

这里，对每个 λ，存在方程 $lu = \lambda u$ 的解的有限或无穷组 $\{\varphi_j(x, \lambda)\}$ 且

$$\varphi(x, y, \lambda) = \sum_j \varphi_j(x, \lambda)\overline{\varphi_j(y, \lambda)}. \tag{11}$$

对 Schrödinger 算子 $Lu = -\Delta u + q(x)u$, $x \in \mathbf{R}^3$, 在条件 $|q(x)| \leqslant c(1+|x|)^{-2-\varepsilon}$ 之下，核 $E(x, y, \lambda)$ 可借助于**色散方程** (dispersion equation) 的解来显式地表示．

公式 (10)，(11) 也对任意的自伴偏微分算子成立，且在这情形下 $\{\varphi_j(x, \lambda)\}$ 可以是广义函数，但它们是有限阶的．

按微分算子本征函数展开的收敛性质和谱核的渐近性质帮助证明解数学物理方程的 **Fourier 法** (Fourier method) 是正确的．对常微分算子，有以下的最终结果，所谓等度收敛性定理 (equiconvergence theorem)：一个给定的可和函数按一个下方有界的微分算子的本征函数的展开式与其 Fourier 积分在任一点处两者都收敛或两者都发展 (即等度收敛 (equi-convergent))．对偏微分算子，问题变得复杂．

微分算子的谱的定性理论．这理论涉及研究谱性质与系数性状，区域的几何性质和边界条件之间的关系．

有一系列对微分算子的谱的离散性的检验法．最普通的是以下的准则及其推广：如果 $q(x) \geqslant 1$，则由 $L_2(-\infty, \infty)$ 上表达式 $lu = -u'' + q(x)u$ 生成的微分算子的谱是离散的，当且仅当对任何 $j > 0$,

$$\lim_{|x| \to \infty} \int_x^{x+j} q(t)\,dt = \infty.$$

这个准则到偏微分算子的推广取更复杂的形式．有其他的较简单的对微分算子谱的离散性的检验法．例如，由 (5) 生成的自伴微分算子有离散谱，如果 $q(x) \to \infty$ 当 $|x| \to \infty$．自伴微分算子 L_m 有离散谱．

当谱有一个连续部分时，谱性质的研究是一困难问题．这里有一些结果：1) 如果常微分算子是由具有 $(-\infty, \infty)$ 上有公共周期的周期系数的形式自伴表示式 (1) 定义的，则它的谱是连续的，且由不相交区间的一个序列组成，其端点趋于 $-\infty$ 或 $+\infty$；2) 如果一个微分算子由 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 上的表示式 $(-1)^k(D_1^2 + \cdots + D_n^2)^k + q(x)$ 定义且 $\lim q(x) = 0$ 当 $|x| \to +\infty$，则它的谱充满 $[0, \infty]$，而它的负谱是离散的且仅可能在零有一个极限点．如果 $k = 1$, $|q(x)| \leqslant M(|x|)$ 且

$$\int_0^{\infty} rM(r)\,dr < \infty \; (M(r) = O(r^{-1})),$$

则负谱是有限的 (在连续谱中无本征值)．

谱的性质也依赖于边界条件．在一个有界区域中，已经描述了这样的具体的边界条件，满足这种条件就保证一个自伴 Laplace 算子的谱有连续部分．这是具有边界的区域中极小 Laplace 算子的亏指数是无限的这事实的一个推论．

自伴微分算子的函数．这些是以解微分方程混合问题为目标，也为微分算子理论中的问题而被研究．设 l 是一个 m 阶椭圆型微分算子．当 $\lambda > 0$ 时的**预解式** (resolvent) $(L+\lambda)^{-1}$ 和 $t > 0$ 时的函数 $\exp(-Lt)$ 及 $\exp(iL^{1/m}t)$ 已被彻底地研究．后两者分别是广义热方程 $u_t = -Lu$, $u(0, x) = f(x)$ 和广义波动方程 $u_t = iL^{1/m}u$, $u(0, x) = f(x)$ 的解算子．所有这三个算子函数是积分函数，且分别有核 $R(x, y, \lambda)$, $K(x, y, \lambda)$, $G(x, y, t)$ (Green 函数)．公式

$$R(x, y, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} K(x, y, t)\,dt \tag{12}$$

建立了 R 和 K 之间的联系．$R(x, y, \lambda)$ 的一些性质是：如果 L 是 $L_2(\Omega_n)$ 上一个 m 阶椭圆型自伴微分算子，则对 $(L+\lambda)^{-p}$ 对应一个 Carleman 型核，当 $p > 2/m$；当 $p > n/m$ 时，$(L_m+\lambda)^{-p}$ 是核型的，从而

$$S_p(L+\lambda)^{-p} = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \lambda)^{-p}, \tag{13}$$

其中 $\{\lambda_k\}$ 是 L_m 的本征值．对 $L_2(\mathbf{R}^n)$ 上 $(L+\lambda)^{-p}$ 也有其他的核型性检验法．

Green 函数的解析的和渐近的性质给出了关于微分算子 L 的谱性质的有用信息．例如，如果在 (13) 中当 $\lambda \to \infty$ 时 $S_p(L+\lambda)^{-p}$ 的性态已知，则应用 Tauber 的定理可找到 λ_k 的渐近性质．如果知道了 $S_p\exp(-Lt)$ 当 $t \to +0$ 时的渐近性质，同样事情也可做到．$R(x, y, \lambda)$ 和 $K(x, y, \lambda)$ 的渐近性质也可建立，例如用参数方法，用位势方法，等等．λ_k 的渐近性质对广泛的一类椭圆型微分算子已经这样被找到．为了确定一个椭圆型微分算子的谱核 $E(x, y, \lambda)$ 的渐近性质，研究核 $G(x, y, t)$ 当 $t \to 0$ 时的渐近性质并随后应用各种 Tauber 定理被证明是有效的．特别地，当 $x = y$, $x \notin \Gamma$ 时，

$$E(x, x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \int_{l_0(x, \xi) < \lambda} d\xi + O(\lambda^{(n-1)/m}).$$

非自伴微分算子(non-self-adjoint differential operator). 对有限区间上常微分算子最完全的结果已经得到. 设 L 是当 $n=1$ 和 $a_m(x)=1$ 时在有 $m-1$ 阶绝对连续导数且满足边界条件:

$$l_{\nu_0}(u)+l_{\nu_1}(u)=\alpha_\nu u^{(k_\nu)}(0)+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}\alpha_{\nu_j}u^{(j)}(0)$$

$$+\beta_\nu u^{(k_\nu)}(1)+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}\beta_{\nu_j}u^{(j)}(1)=0,\ 1\leqslant\nu\leqslant m$$

的函数上由(1)定义的微分算子. 这里 $m-1\geqslant k_1\geqslant\cdots\geqslant k_m\geqslant 0$, $k_{\nu-2}<k_\nu$ 且 α_ν, β_ν 不同时为零. 设边界条件(2)是正则的. 这对 Sturm-Liouville 型边界条件($m=2k$, $l_{\nu_0}(u)=l_{\nu_1}(u)=0$, $1\leqslant\nu\leqslant m-1$)成立, 对周期型边界条件($\alpha_\nu=\beta_\nu=1$)也成立. 则 L 有无穷多个本征值, 它们有精确的渐近式; 由 L 的本征函数和它们的连带函数所组成的函数系在 $L_p(0,1)$ 中是完全的; $D(L)$ 中函数 f 按 L 的本征函数和它们的连带函数的展开式在 $(0,1]$ 上一致收敛. 本征函数和它们的连带函数的函数系在某些非正则边界条件下也可以是完全的, 特别对分裂型的边界条件($l_{\nu_0}(u)=0$, $1\leqslant\nu\leqslant m_1$, $l_{\nu_1}(u)=0$, $1\leqslant\nu\leqslant m_2$, $m_1\neq m_2$, $m_1+m_2=m$). 然而, 展成本征函数及其连带函数的级数展开式的收敛性仅对很狭窄的一类(l 解析的)函数成立.

设 L_0 是可分 Hilbert 空间 H 上具有本征值$\{\lambda_k\}$的自伴算子, 且假设算子 L_0^{-p} 对某一 $p>0$ 是核型的. 设 L_1 是另一个算子使得 $L_1L_0^{-1}$ 是紧的. 则由 L_0+L_1 的本征向量和它们的连带组成的系在 H 中是完全的(Келдыш 定理(Keldysh theorem)). 这定理的应用给出了有本征函数及其连带函数的完全系的微分算子的类.

设 L_m 是 $L_2(\Omega_n)$ 上的一个微分算子, 又设

$$L_1u=\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}d_\alpha(x)D^\alpha u.$$

则由 L_m+L_1 的本征函数及其连带函数组成的函数系在 $L_2(\Omega_n)$ 中是完全的. 然而, 一个函数关于这个函数系的级数展开式一般是发散的, 用广义 Abel 求和法是条件可和的.

如果 Ω_n 是一个无界区域, 则为了满足 Келдыш 定理的条件必须在微分算子的系数函数的增长性上加上进一步的条件.

具有其谱的连续部分的非自伴微分算子已经研究过的不多. 这是与此情形下不存在与谱分解定理类似的定理这事实有关的. 一个例外是由表达式 $-d^2u/dx^2+q(x)$ 生成的微分算子, 其中 $x\in[0,\infty)$ 或 $x\in(-\infty,+\infty)$ 且 $q(x)$ 是一复值函数. 设 $\varphi(x,k)$ 是方程 $-u^{(2)}+q(x)u=k^2u$ 对 $0\leqslant x<\infty$ 满足初始条件 $\varphi(0,k)=1$, $\varphi'(0,k)=0$ 的解. 设 f_1 和 f_2 是 $L_2(0,\infty)$ 中有紧支集的函数, 又设

$$F_j(k)=\int_0^\infty f_j(x)\varphi(x,k)dx.$$

则有线性拓扑空间 G 上一个线性泛函 R 使得 $F_1F_2\in G$ 且

$$(R,F_1F_2)=\int_0^\infty f_1(x)f_2(x)dx.$$

空间 G 是增长阶为1的有限型的且在实轴上可和的所有偶整函数的集合. 如果 $xq(x)\in L_1(0,\infty)$, 则 R 可被显式地计算. 在此情形下, 谱奇点, 即预解式的核的奇点, 出现在连续谱中, 且这些不是微分算子的本征值. 在非自伴算子中谱奇点是固有的, 且由于它们, 展成本征函数的问题(和收敛性问题)变得更复杂. 对 $L_2(\mathbf{R}^3)$ 上微分算子

$$Lu=(-D_1^2-D_2^2-D_3^2+q(x))u,$$

其中 $q(x)$ 是指数地减小的一个复值函数, 由解色散理论中的一个问题, 考虑到谱奇点的影响, 谱分解的一个形式也已经被找到.

谱分析的逆问题. 当要求用某些谱特征确定微分算子时这些问题就产生了. 按照各种扩张的谱, 按照谱测度, 按照散射数据(即规范化本征函数的渐近性状), 或按其他性质来决定一维 Schrödinger 方程和 Dirac 型方程组的问题已经完全解决. 逆问题在非线性方程的求积中已找到应用.

微分算子的谱理论与振动弦的研究相联系而产生且引起了正交展开理论的诞生(18 和 19 世纪). 有限区间上二阶自伴微分算子的系统研究可追溯到 1830 年(**Sturm-Liouville 问题** (Sturm-Liouville problem))且在 19 世纪得到广泛的研究, 特别与特殊函数理论相联系. 然而, Sturm-Liouville 算子的本征函数系的完全性直到 1896 年才被证明, 此时展成本征函数的展开式的收敛性质也被研究. 奇异微分算子理论开始于 1909 – 1910年, 当时具有任意谱结构的二阶自伴无界微分算子的谱分解被发现了. 且当时原则上引入了一个亏指数的概念, 且得到了扩张理论的第一批结果. 从 1920 年以后, 随着量子力学的兴起, 对奇异微分算子的兴趣增长了. 非自伴奇异微分算子的系统研究开始于 1950年, 当时阐明了算子束理论的基础并找到了一种方法去证明由微分算子的本征函数及其连带函数所组成的函数系的完全性.

参考文献

[1] Березанский, Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965(英译本: Berezanskiy, Yu. M., Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators, Amer. Math. Soc., 1968).

[2] Глазман, И. М., Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М. 1963 (英译本: Glazman, I. M., Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators, Israel Progr. Sci. Transl., 1965).
[3] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. Spectral theory, 2, Interscience, 1963.
[4] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, 1976.
[5] Левитан, Б. М., Саргсян, И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970 (英译本: Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S., Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators, Amer. Math. Soc., 1975).
[6] Марченко, В. А., Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, К, 1972 (英译本: Marchenko, V. A., Sturm-Liouville operators and applications, Birkhäuser, 1986).
[7] Наймарк, М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969 (М. А. 纳依玛克, 线性微分算子, 科学出版社, 1964).
[8] Titchmarsh, E. C., Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, 1, Clarendon Press, 1962, Chapts. 1; 2.
[9A] Фаддеев, Л. Д., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 69 (1963) (英译本: Faddeev, L. D., Mathematical aspects of the three-body problem in the quantum scattering theory, Israel Progr. Sci. Transl., 1965).
[9B] Фаддеев, Л. Д., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР》, 73 (1964), 314 – 336.
[10A] Алимов, Ш. А., Ильин, В. А., Никишин, Е. М., 《Успехи матем. наук》, 31 (1976), 6, 28 – 83.
[10B] Алимов, Ш. А., Ильин, В. А., Никишин, Е. М., 《Успехи матем. наук》, 32 (1977), 1, 107 – 130.
[11] Березанский, Ю. М., 《Укр. матем. ж.》, 26 (1974), 5, 579 – 590.
[12] Гасымов, М. Г., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, 19 (1968), 41 – 112.
[13] Левитан, Б. М., Гасымов, М. Г., 《Успехи матем. наук》, 19 (1964), 2, 3 – 63.
[14] Дубровин, Б. А., Матвеев, В. Б., Новиков, С. П., 《Успехи матем. наук》, 31 (1976), 1, 55 – 136.
[15] Костюченко, А. Г., в кн., IV летняя математическая школа, К., 1968, 42 – 117.
[16] Hörmander, L., The spectral function of an elliptic operator, *Acta Math.*, 121 (1968), 193 – 218.

М. Г. Гасымов 撰

【补注】 一个重要的最近发展是椭圆型算子的谱渐近式的研究, 见[A1], Chapt. XXIX, 和[A4]作为一个导引; 亦见[A5].

参考文献

[A1] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, II, IV, Springer, 1983 – 1985, Chapts XIV, XXIX, XXX.
[A2] Schechter, M., Spectra of partial differential operators, North-Holland, 1971.
[A3] Calogero, F. and Degasperis, A., Nonlinear evolution equations solvable by the inverse spectral transform II, *Nuovo Cimento*, 39B (1977), 1 – 54.
[A4] Shubin, M. A., Pseudodifferential operators and spectral theory, Springer, 1980 (译自俄文).
[A5] Levendorskiĭ, S., Asymptotic distribution of eigenvalues of differential operators, Kluwer, 1991 (译自俄文).

葛显良 译 吴绍平 校

谱类型 [spectral type; спектральный тип], Hellinger 类型 (Hellinger type), 测度的

给定的 σ 代数上所有非负测度的集合中关于互相绝对连续 (见**绝对连续性** (absolute continuity)) 的含有所说测度的等价类. 谱类型的集合连同由测度的绝对连续性关系诱导的序关系形成一个完全分配格, 其中每个可数子集是有界的.

谱类型理论用于构造正规算子的酉不变量系. 设 A 是空间 H 上的任一**正规算子** (normal operator), $E_A(\cdot)$ 是平面内对应的**谱测度** (spectral measure). 向量 $x\in H$ 的谱类型 (spectral type) $\sigma_A(x)$ 定义为测度 $(E_A(\cdot)x, x)$ 的谱类型. 形如 $\sigma_A(x)$ 的所有谱类型称为从属于 (subordinate) 算子 A. 如果 H 是可分的, 则在从属于 A 的谱类型中存在极大谱类型. 特别地, 所有循环正规算子具有极大谱类型. 已证实循环正规算子不计酉等价由其极大谱类型决定. 一般情形中酉不变量系包含极大谱类型的齐次分量的重数.

参考文献

[1] Плеснер, А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965.
[2] Dixmier, J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien: algèbres de von Neumann, Gauthier-Villars, 1957.

В. С. Шульман 撰 沈永欢 译

谱窗 [spectral window; спектральное окно], 谱密度估计量的

角频率 λ 的函数, 用来在**平稳随机过程** (stationary stochastic process) $X(t)$ 的**谱密度** (spectral density) $f(\lambda)$ 的非参数估计中定义一个权函数, 以光滑从该过程的观测数据构造的**周期图** (periodogram). 作为谱密度在一点 λ_0 处的值的估计, 通常取在 λ 的

周期图与一形如 $B_N A(B_N(\lambda-\lambda_0))$ 的表达式之积对 $d\lambda$ 的积分，其中 B_N 是一个实数而 $A(\lambda)$ 是频率的确定函数，它在 $\lambda=0$ 处取其最大值且关于 λ 的积分等于 1．这个函数通常称为谱窗生成元（spectral window generator），而“谱窗”一词则用来称呼函数 $B_N A(B_N\lambda)$．谱窗的宽度为 B_N^{-1}，它依赖于样本容量 N（即过程 $X(t)$ 的被观测实现的长度）且当 $N\to\infty$ 时趋于零（但比 N^{-1} 要慢）．谱窗的 Fourier 变换（在离散时间 t 的情形下，$-\pi\leqslant\lambda<\pi$，则是其 Fourier 系数的集）称为谱密度估计的滞后窗（lag window）．它定义一个离散或连续自变量（依赖于 t 为离散或连续）的权函数，由它乘以从给定样本算出的样本自相关函数，其所得乘积的 Fourier 变换即为所要求的**谱密度估计量**（spectral density, estimator of the）．

参考文献

[1] Blackman, R. B., Tukey, J. W., The measurement of power spectra: From the point of view of communications engineering, Dover, reprint, 1959.

[2] Jenkins, G., Watts, D. G., Spectral analysis and its applications, 1－2, Holden-Day, 1968.

[3] Brillinger, D. R., Time series, Data analysis and theory, Holt, Rinehart & Winston, 1975.

[4] Priestley, M. B., Spectral analysis and time series, 1－2, Acad. Press, 1981.

[5] Yaglom, A. M., Correlation theory of stationary and related random processes, 1－2, Springer, 1987（译自俄文）.

A. M. Яглом 撰 潘一民 译

C^* 代数的谱[spectrum of a C^*-algebra; спектр C^*-алгебры]

C^* 代数（C^*-algebra）的不可约表示的酉等价类的集合，该谱可拓扑化，如果认定一个子集的闭包是其核包含这个子集的所有表示的核之交的所有表示（的等价类）的总体．对交换 C^* 代数，结果所得的拓扑空间与特征标的空间重合（它同胚于极大理想空间，见 **C^* 代数的特征标**（character of a C^*-algebra）；**极大理想**（maximal ideal））．在一般情形下，一个 C^* 代数的谱是分解其表示成不可约表示的直接积分的基础．

参考文献

[1] Dixmier, J., C^*-algebras, North-Holland, 1977（译自法文）.

В. С. Шульман 撰

【补注】 这个在 C^* 代数的谱上的拓扑称为包核拓扑（hull-kernel topology），或 Jacobson 拓扑（Jacobson topology）．

参考文献

[A1] Arvesen, W., An invitation to C^*-algebras, Springer, 1976.

[A2] Pedersen, G. K., C^*-algebras and their automorphism groups, Acad. Press, 1979, § 4.1.

葛显良 译 鲁世杰 校

动力系统的谱[spectrum of a dynamical system; спектр динамической системы]

具有相空间（phase space）X 和不变测度（invariant measure）μ 的动力系统 $\{T_t\}$ 的谱是对相应于 Hilbert 空间 $L_2(X,\mu)$ 中酉（等距）位移算子

$$(U_t f)(x)=f(T_t x)$$

的群（或半群）的各种谱不变量和谱性质的通称．对于狭义动力系统（**可测流**（measurable flow）$\{T_t\}$ 或**瀑布**（cascade）$\{T^n\}$），指的只是**正规算子**（normal operator）的谱不变量：在第二种情形是酉算子 $(U_T f)=f(Tx)$ 的谱不变量；而在第一种情形是生成自伴算子 A 的谱不变量，此处 A 是酉算子单参数群 $\{U_t\}$ 的无穷小生成元（由 Stone 定理，这里 $U_t=e^{itA}$）．

动力系统中的“谱”术语与通常用法多少有点差别．对于所有具有实际意义的 T 和 $\{T_t\}$，U_T（或 A）在通常意义下的谱即使得算子 $U_T-\lambda E$（或 $A-\lambda E$）没有有界逆算子的 λ 的集合（见**算子的谱**（spectrum of an operator）），与圆 $|\lambda|=1$ 或 $\mathbf{R}$ 相同（见 [1]，[2]）．因此，a）通常意义下的谱不提供关于给定的动力系统区别于其他系统的性态的信息；b）按谱这一术语的常规意义，它几乎没有孤立点，因而它（按通常意义）是连续的，于是又不含有关于给定系统特殊性质的信息．据此，在动力系统理论中，当 U_T 或 A 没有除常数外的本征值时，就说它有连续谱（continuous spectrum）；当本征函数在 $L_2(X,\mu)$ 中构成完全系时，就说它有**离散谱**（discrete spectrum）；而所有别的情形则说它有混合谱（mixed spectrum）．

动力系统的由其谱决定的性质称为谱性质（spectral property）；其例子为**遍历性**（ergodicity）（等价于 U_T 的本征值 1 或 A 的本征值 0 是单的）和**混合**（mixing）．具有离散谱的遍历动力系统有完全的度量分类：不计**度量同构**（metric isomorphism），这样的系统由其谱决定（[3]）．对于比 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{Z}$ 更一般的变换群，也已开发类似的理论（见[4]）．在非交换情形下，表述变得更加复杂，而且谱不再完全确定动力系统．如果谱不是离散的，则情形远为复杂得多．

参考文献

[1] Ionescu Tulcea, A., Random series and spectra of measure-preserving transformations，载于 Ergodic theory (Tulane Univ., 1961), Acad. Press, 1963, 273－292.

[2] Goldstein, S., Spectrum of measurable flows, *Asté-*

risque, **40** (Internat. Conf. Dynam. Systems in Math. Physics) (1976), 5 – 10.

[3] Корнфельд, И. П., Синай, Я. Г., Фомин, С. В., Эргодическая теория. М., 1980 (英译本: Cornfel'd [Kornfel'd], I. P., Fomin, S. V., Sinaǐ, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982).

[4] Mackey, G. W., Ergodic transformation groups with a pure point spectrum, *Illinois J. Math.*, **8** (1964), 593 – 600.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 文献中也用术语"纯点谱"(pure point spectrum)代替"离散谱". 关于比 **R** 和 **Z** 更一般的不一定是交换的变换群, 亦见[A1]和[A2].

在复杂性上仅高于最简单的动力系统的是具有广义离散谱(generalized discrete spectrum)和具有拟离散谱(quasi-discrete spectrum)的动力系统. 见[A4], [A3].

参考文献

[A1] Zimmer, R., Extensions of ergodic group actions, *Illinois J. Math.*, **20** (1976), 373 – 409.

[A2] Zimmer, R., Ergodic actions with generalized discrete spectrum, *Illinois J. Math.*, **20** (1976), 555 – 588.

[A3] Абрамов, Л. М., 《Изв. АН СССР. Сер. Матем.》, **26** (1962), 513 – 530 (英译本: Abramov, L. M., Metric automorphisms with quasi-discrete spectrum, *Transl. Amer. Math. Soc.*, **39** (1964), 37 – 56).

[A4] Parry, W., Compact abelian group extensions of discrete dynamical systems, *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, **13** (1969), 95 – 113.

沈永欢 译

矩阵的谱[spectrum of a matrix; спектр матрицы]

矩阵的本征值的集合(亦见**本征值**(eigen value); **特征多项式**(characteristic polynomial)).

环的谱[spectrum of a ring; спектр кольца]

带有 **Zariski 拓扑**(Zariski topology)(也称谱拓扑(spectral topology))的拓扑空间 Spec A, 它的点是环 A 的素理想 $\mathfrak{p}$. A 被假设为交换的, 有幺元. A 的元素 a 通过设 $a(\mathfrak{p}) \equiv a \bmod \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$ 可被看成 Spec A 上的函数. Spec A 具有局部环的层 $\mathscr{O}$(Spec A), 称为它的结构层(structure sheaf). 对于点 $\mathfrak{p} \in$ Spec A, $\mathscr{O}$(Spec A) 在 $\mathfrak{p}$ 上的茎是 A 在 $\mathfrak{p}$ 的局部化 $A_{\mathfrak{p}}$.

对于保持幺元的环同态 $\varphi: A \to A'$, 对应一个连续映射 φ^*: Spec $A' \to$ Spec A. 如果 N 是 A 的幂零根基, 则自然映射 Spec $A/N \to$ Spec A 是拓扑空间的同胚.

对于非幂零元 $f \in A$, 设 $D(f) = (\text{Spec } A) \setminus V(f)$, 这里 $V(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A: f \in \mathfrak{p}\}$. 则赋环空间 $D(f)$ 与 Spec $A_{(f)}$ 同构, 这里 $A_{(f)}$ 是 A 关于 f 的局部化. 集 $D(f)$ 称为主开集(principle open sets). 它们构成 Spec A 上拓扑的基. $\mathfrak{p} \in$ Spec A 是闭点, 当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是 A 的极大理想. 对于 $\mathfrak{p}$ 指定它在 Spec A 内的闭包 $\overline{\mathfrak{p}}$ 就可得到 Spec A 的点与 Spec A 的不可约闭子集的集合间的一一对应. Spec A 是拟紧的, 但通常不是 Hausdorff 的. Spec A 的维数(dimension)被定义为不同不可约闭集序列 $Z_0 \subset \cdots \subset Z_n \subset$ Spec A 的最大长度 n.

A 的许多性质可用 Spec A 的术语来描述. 例如 A/N 是 Noether 的, 当且仅当 Spec A 具有关于闭集的降链条件; Spec A 是不可约空间, 当且仅当 A/N 是整环; Spec A 的维数等于 A 的 Krull 维数等.

有时可以考虑极大谱(maximal spectrum) Specm A. 它是 Spec A 中闭点构成的子空间. 对于分次环 A 也可考虑射影谱(projective spectrum) Proj A. 如果 $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, 则 Proj A 的点是使 $\mathfrak{p} \not\supset \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的 A 的齐次素理想 $\mathfrak{p}$.

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algèbre commutative, Eléments de mathématique, XXVIII, Hermann, 1961.

[2] Шафаревич, И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972 (英译本: Shafarevich, I. R., Basic algebraic geometry, Springer, 1977).

Л. В. Кузьмин 撰

【补注】 由幺环同态 $\varphi: A \to A'$ 定义的连续映射 φ^*: Spec $A' \to$ Spec A 由 $\varphi^*(\mathfrak{p}') = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ 给出.

二元组(Spec A, $\mathscr{O}$(Spec A))是**仿射概形**(affine scheme).

类似地, Proj A 具有局部环的层 $\mathscr{O}$(Proj A), 它在点 $\mathfrak{p}$ 的茎是 A 在 $\mathfrak{p}$ 的齐次局部化 $A_{(\mathfrak{p})}$. (亦见**交换代数的局部化**(localization in a commutative algebra).) 二元组(Proj A, $\mathscr{O}$(Proj A))是**射影概形**(projective scheme).

对非交换环, 谱也被研究, 见[A1].

关于 Krull 维数见(结合环的)**维数**(dimension).

参考文献

[A1] Oystaeyen, F. van and Verschoren, A., Non-commutative algebraic geometry, Lecture notes in math., 887, Springer, 1981.

陈志杰 译

元素的谱[spectrum of an element; спектр элемента], Banach 代数的

使 $a - \lambda e$ 是不可逆的数 $\lambda \in \mathbf{C}$ 的集合(该代数假设是复的, a 是它的给定元素而 e 是该代数的单位). 谱是非空紧集(Гельфанд-Mazur 定理(Gel'fand-Mazur theorem)). 在交换代数的情形, 谱与该代数的所有特征标在这元素上的值的集合一致(见 C^* 代

数的特征标(character of a C^*-algebra).

这概念可用来作为发展一种对 **Banach 代数**(Banach algebra)的元素的函数演算的基础. Banach 代数的元素 a 的多项式的自然演算可以扩张成从谱 $\sigma(a)$ 的邻域内全纯函数的芽的环到 A 中的连续同态. 考虑多元函数的必要性导致 Banach 代数的元素组的联合谱(joint spectrum of a system of elements)的概念. 如果 A 是交换的, 则由定义 A 中元素的一个集合 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 的谱是所有具有形式 $\{\varphi(a_i)\}_{i=1}^n$ 的 n 元组的集合 $\sigma(\{a_i\}) \subset \mathbf{C}^n$, 其中 φ 是 A 的一个特征标. 一般地, 定义 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 的左(右)谱包括使得组 $\{a_i - \lambda_i e\}$ 包含于该代数的非平凡左(分别地, 右)理想中的那些数组 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathbf{C}^n$. 谱则定义为左谱和右谱之并. 关于多参数谱理论的基本结果以及元素集合的谱的概念的其他观点, 见[1]-[4].

参考文献

[1] Bourbaki, N., Theories spectrales, Eléments de mathématique, 32, Hermann, 1967.

[2] Harte, R., The spectral mapping theorem in several variables, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78 (1972), 871-875.

[3] Taylor, J., A joint spectrum for several commuting operators, *J. Funct. Anal.*, 6 (1970), 172-191.

[4] Zhelazko, W., An axiomatic approach to joint spectral I, *Studia Math.*, 64 (1979), 249-261.

В. С. Шульман 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

[A2] Naĭmark, M. A., Normed rings, Reidel, 1984 (译自俄文).

[A3] Rickart, C. E., General theory of Banach algebras, v. Nostrand, 1960.

葛显良 译 鲁世杰 校

算子的谱[spectrum of an operator; спектр оператора]

使得算子 $A - \lambda I$ 没有处处定义的有界逆的复数 $\lambda \in \mathbf{C}$ 的集合 $\sigma(A)$. 这里 A 是复 Banach 空间 X 上的一个**线性算子**(linear operator)而 I 是 X 上单位算子. 如果 A 在 X 上不是闭的, 则 $\sigma(A) = \mathbf{C}$, 所以通常考虑闭算子的谱(对容许有闭包的算子, 算子的闭包的谱有时称为闭包谱(closure spectrum)).

如果 $A - \lambda I$ 或者是非单射或者是非满射, 则 $\lambda \in \sigma(A)$. 在第一种情形 λ 称为 A 的一个本征值(eigenvalue); 本征值的集合 $\sigma_p(A)$ 称为点谱(point spectrum). 在第二种情形 λ 称为连续谱(continuous spectrum) $\sigma_C(A)$ 或剩余谱(residual spectrum) $\sigma_r(A)$ 的一个点, 依赖于子空间 $(A - \lambda I)X$ 在 X 中是否稠密.

也有谱点的其他分类. 例如, $\sigma(A) = \sigma_a(A) \cup \sigma_d(A)$, 其中 $\sigma_a(A)$ 由近似本征值组成($\lambda \in \sigma_a(A)$ 如果存在 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$ 使得 $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$), 且

$$\sigma_d(A) = \{\lambda \in \mathbf{C}: \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = 0,$$

$$\overline{(A - \lambda I)X} = (A - \lambda I)X \neq X\}.$$

注意 $\sigma_d(A) \subset \sigma_r(A)$, 且因而 $\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \sigma_a(A)$. 在扰动理论中, 要用到极限谱(limit spectrum) $\sigma_{\lim}(A)$, 它由 $\sigma(A)$ 的极限点和有无穷重数的孤立本征值组成, 也用到 Weyl 谱(Weyl spectrum), 它等于所有紧扰动的谱的交, 等等.

如果 A 是一个**有界算子**(bounded operator), 则 $\sigma(A)$ 是紧的且非空(在这情形 $\sigma(A)$ 与 Banach 代数 $B(X)$ 的元素 A 的谱一致, 见**元素的谱**(spectrum of an element)); 在一般情况下只能说 $\sigma(A)$ 在 $\mathbf{C}$ 中是闭的. 在集合 $\rho(A) = \mathbf{C} \setminus \sigma(A)$ 上可以定义解析的 $B(X)$ 值函数 $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, 称为 A 的预解式(resolvent)($\rho(A)$ 称为预解集(resolvent set)). 借助于预解式, 在 $\sigma(A)$ 的邻域内解析的函数上建立起关于 A 的一个函数演算

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda,$$

其中 Γ 是包围 $\sigma(A)$ 的一个围道(A 的无界性要求在 Γ 的选择上加以限制). 在谱的几何性质和预解式的渐近性质上加上进一步的条件使得可以扩张这个演算.

算子函数的谱由公式

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda): \lambda \in \sigma(A)\}$$

确定(谱映射定理(spectral mapping theorem)). 当 A 是有界时, 伴随算子的谱 $\sigma(A^*)$ 与 $\sigma(A)$ 一致; 一般地, $\sigma(A^*) \subset \sigma(A)$.

如果 $\dim X < \infty$, 则 $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, 且 X 分解成在 A 作用下不变的子空间的直和, 在每个这样的子空间上 A 导出一个具有单点谱的算子. 算子的**谱理论**(spectral theory)关注于寻求对这个分解的无穷维类似. 亦见**谱分析**(spectral analysis); **谱综合**(spectral synthesis); **谱算子**(spectral operator); **线性算子的谱分解**(spectral decomposition of a linear operator).

参考文献

[1] Dunford, N. and Schwartz, J. T., Linear operators. General theory, 1, Interscience, 1958.

[2] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, 1980.

В. С. Шульман 撰

【补注】

参考文献

[A1] Taylor, A. E. and Lay, D. C., Introduction to functional analysis, Wiley, 1980.

[A2] Riesz, F. and Szökefalvi-Nagy, B., Functional analysis, F. Ungar, 1955 (译自法文)(中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 科学出版社, 第一卷, 1963, 第二卷, 1980).

葛显良 译 吴绍平 校

空间的谱 [spectrum of spaces; спектр пространств]

表示一个广义上同调论的对象. 这个概念是在[1]中首先引进的(亦见**广义上同调论** (generalized cohomology theories)).

空间的谱 **M** 定义为一列拓扑(通常是胞腔)空间 $\{M_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 加上映射 s_n: $\Sigma M_n \to M_{n+1}$, 其中 Σ 表示**纬垂** (suspension). 空间的谱构成一个范畴; 谱 **M** 到谱 **N** 中的态射 (morphism of a spectrum into a spectrum), 粗略地说, 是由一族满足 $t_n \circ \Sigma f_n = f_{n+1} \circ s_n$ (t_n 是谱 **N** 中的映射)的映射 f_n: $M_n \to N_n$ 所决定的某个函数 f: **M** $\to$ **N** 的"共尾"部分. 可以引入同伦态射以及空间的谱的同伦等价的概念, 也可以构造谱的同伦范畴([2]). 空间的谱的 **Постников 系统** (Postnikov system)也已经有了.

一个空间谱 **M** 上的纬垂 Σ**M** 定义为空间的谱 $\Sigma\mathbf{M} = \{N_n\} = \{\Sigma M_n\}$. 令 $(\Sigma^{-1}\mathbf{M})_n = M_{n-1}$, 则 Σ 和 Σ^{-1} 是互为同伦逆的函子, 因此在空间的谱的范畴中(这与空间的范畴的情形不同), 纬垂函子是可逆的, 因此有许多方便. 一般而言, 在空间的谱的范畴中, 与稳定性有关的所有论证(比如, Adams 谱序列的构造)都需要自然性.

空间的谱的例子.

1) 对任何空间 X, 可以定义空间的谱 $\mathbf{X} = \{M_n\}$, 其中 $M_n = *$, 当 $n < 0$, $M_n = \Sigma^n X$, 当 $n \geqslant 0$. s_n 是自然的等同映射 $\Sigma(\Sigma^n X) \to \Sigma^{n+1} X$. 因此当 $X = S^0$ 时, 得到**球谱** $\{S^n\}$.

2) Eilenberg-MacLane 空间谱 $H(\pi)$ (或 **EM** (π)), 其中 π 是交换群. 同伦等价 ω_n: $K(\pi, n) \to \Omega K(\pi, n+1)$, 其中 $K(\pi, n)$ 是 **Eilenberg-MacLane 空间** (Eilenberg-MacLane space) 而 ΩX 是 X 上的**闭路空间** (loop space), 给出伴随映射 s_n: $\Sigma K(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$, 这样就得到空间的谱 $\{K(\pi, n), s_n\}$. 这个谱表示带有系数群 π 的通常上同调论.

3) 设 X 是对某个 d 满足 $\Omega^d X \simeq X$ 的空间. 令 $n = ad + b$, 其中 $0 \leqslant b \leqslant d$, $a \in \mathbf{Z}$, 设 $M_n = \Omega^{d-b} X$. 由此得到形如 $\{\cdots, X, \Omega^{d-1} X, \Omega^{d-2} X, \cdots, \Omega^1 X, X \simeq \Omega^d X, \cdots\}$ 的一列空间 $\{M_n\}$. 如例 2) 中那样, 同伦等价 ω: $M_n \to \Omega M_{n+1}$ 给出映射 s_n: $\Sigma M_n \to M_{n+1}$, 从而得到一个空间的谱. 例如, 酉群的**分类空间** (classifying space) $\mathrm{BU} = \lim \mathrm{BU}_n$, U_n 是酉群, 根据 Bott 周期性定理 (Bott periodicity theorem), $\Omega^2(\mathrm{BU} \times \mathbf{Z}) \simeq \mathrm{BU} \times \mathbf{Z}$. 由此得到空间的谱 $\{\cdots, U, \mathrm{BU} \times \mathbf{Z}, U, \mathrm{BU} \times \mathbf{Z}, \cdots\}$, 这个谱表示复 K 理论. 对实 K 理论有类似结果 ($\Omega^8(\mathrm{BO} \times \mathbf{Z}_2) \simeq \mathrm{BO} \times \mathbf{Z}_2$).

4) 各种 **Thom 谱** (Thom spectrum), 它们表示配边 (cobordism) 理论.

任给两个空间的谱 **M** 和 **N**, 可定义它们的约化积 (reduced product) $\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}$ (类似于空间的约化积). **M** 上的乘法 (multiplication) 定义为(在适当意义下)可结合的态射 $\mathbf{M} \wedge \mathbf{M} \to \mathbf{M}$. 带有乘法的空间的谱称为环谱 (ring spectrum), 或乘性谱 (multiplicative spectrum), 它所表示的上同调论中有乘法. 为克服与上述乘法比较弱的结合律相关的困难所作的努力引导人们重新审查空间的谱理论的基础. 为此引进了与坐标无关的空间的谱的概念, 即, 谱是由 $\mathbf{R}^\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbf{R}^n$ 的线性子空间 V 为指标的一族空间 $\{M_V\}$ (及对应的映射). 与坐标无关的空间的谱所成的范畴与通常空间的谱的范畴同构, 但前者的配对 $\wedge$ 比较容易处理, 因此它在考察与空间的谱的更高阶结构, 上同调论的定向等等有关的精细几何问题中起着重要作用.

参考文献

[1] Lima, E. L., The Spanier-Whitehead duality in new homotopy categories, *Summa Brasiliens. Math.*, **4** (1959), 91 – 148.

[2] Switzer, R., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975.

[3] Adams, J. F., Infinite loop spaces, Princeton Univ. Press, 1978.

[4] May, J. P., Infinite loop space theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 456 – 494.

[5] May, J. P., E_∞-ring spaces and E_∞-ring spectra, Lecture notes in math., 577, Springer, 1977.

Ю. В. Рудяк 撰

【补注】 要了解谱所定义的上同调及同调论, 见**广义上同调论** (generalized cohomology theory); 至于纬垂与闭路空间函子之间的相伴性, 以及典范映射 $X \to \Omega\Sigma X$, $x \mapsto \omega_x$, $\omega_x(t) = (x, t)$, 见**纬垂** (suspension).

谱之间的映射 f: **M** $\to$ **N** 是由单个的连续映射 f_n: $M_n \to N_n$ (或对次数为 r 的谱映射 (mapping of spectra of degree r) 是 $M_n \to N_{n-r}$) 定义的. 将**映射锥构造** (mapping-cone construction) 和**映射柱** (mapping-cylinder) 构造应用到这些单个映射就定义了谱映射的映射锥 (mapping cone of a mapping of spectra) 及谱映射的映射柱 (mapping cylinder of a mapping of

spectra).

谱 M 称为 Ω 谱 (Ω-spectrum) 如果相伴于 s_n: $\Sigma M_n \to M_{n+1}$ 的映射 s_n: $M_n \to \Omega M_{n+1}$ 是弱同伦等价.

通常, CW 谱 (CW-spectrum) 定义为 CW 复形 M_n 的序列 $\{M_n\}$ 使得 ΣM_n 是 (或者同伦于) M_{n+1} 的一个子复形.

参考文献

[A1] Eckmann, B., Homotopy and cohomology theory, in Proc. internat. Congress Mathematicians, Stockholm 1962, Almqvist & Wiksells, 1963, 59 – 75.

[A2] Brown, E. H., Cohomology theories, *Ann. of Math.*, 75 (1962), 467 – 484.

[A3] Whitehead, G. W., Generalized homology theories, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 (1962), 227 – 238.

潘建中 译 沈信耀 校

Sperner 引理 [Sperner lemma; Шпернера лемма]

如果一个闭 n 维单形 (见**单形 (抽象的)** (simplex (abstract))) T^n 的覆盖由对应于 T^n 顶点 $a_0, \cdots, a_n$ 的 $n+1$ 个闭集 $A_0, \cdots, A_n$ 组成, 使得单形的每一个面 $T_r = (a_{i_0}, \cdots, a_{i_r})$ 由顶点对应的集合 $A_{i_0}, \cdots, A_{i_r}$ 覆盖, 则存在一个点属于所有的集合 $A_0, \cdots, A_n$. 这一引理由 E. Sperner 建立 (见[1]). Sperner 引理推出 $\mathbf{R}^n$ 的 **Lebesgue 维数** (Lebesgue dimension) 是 n. Sperner 引理也可用于 Brouwer 不动点定理和 Brouwer 关于区域不变性定理的证明 (见 **Brouwer 定理** (Brouwer theorem)).

参考文献

[1] Sperner, E., Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6 (1928), 265 – 272.

[2] Александров, Н. С., Пасынков, Б. А., Введение в теорию размерности ⋯, М., 1973.

[3] Engelking, R., General topology, Heldermann, 1989.

Н. Г. Кошевникова 撰

【补注】 上面正文中陈述的定理在西方不被认为是 Sperner 引理, 事实上, 它不是[1]中证明的.

Sperner 引理如下: 设 $\sigma = a_0 \cdots a_n$ 是一个 n 维单形, T 是 σ 的一个单纯重分, f 是 $V(T$ 的顶点集$)$ 到 $\{0, \cdots, n\}$ 的映射, 使得当 v 属于 σ 的面 $a_{i_0}, \cdots, a_{i_k}$ 时, $f(v) \in \{i_0, \cdots, i_k\}$, 则 f 在其上为满射的 T 中 n 维单形的个数是奇数.

上面这样的一个映射 f 称为一个 Sperner 标号 (Sperner labelling). Sperner 在 [1] 中证明了此引理, 并且得到了一个推论, 它是上面正文中陈述的定理的稍弱形式: 他对集合 $A_0, \cdots, A_n$ 加的要求是: 对每一个 i, 集合 A_i 必须包含点 a_i 并且和 σ 中与 a_i 相对的面不相交. 这些要求很容易推出条目中陈述的条件.

上面正文中陈述的定理由 B. Knaster, K. Kuratowski 和 S. Mazurkiewicz 在 [A2] 中证明, 在那里, 它被用于证明 Brouwer 不动点定理. 这个定理的这一形式在无限维情形也非常有用, 见[A1], 有时被称为 KKM 定理 (KKM-theorem).

Sperner 标号、和以上给出的关于重分的 Sperner 引理, 已被用于发展计算 Brouwer 不动点的有效方式, 见[A3], 因而也用于诸如经济的平衡, 并且, 回过来, 这一发展是计算非线性方程的根的同调论方法的基础, 等等, 见[A4], [A5].

参考文献

[A1] Dugundji, J. and Granas, A., Fixed point theory, PWN, 1982.

[A2] Knaster, B., Kuratowski, K. and Mazurkiewicz, S., Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, *Fund. Math.*, 14 (1929), 132 – 137.

[A3] Scarf, H. E., The approximation of fixed points of a continuous mapping, *SIAM J. Appl. Math.*, 15 (1967), 1328 – 1343.

[A4] Allgower, E. L. and Georg, K., Simplicial and continuation methods for approximations to fixed points and solutions to systems of equations, *SIAM Review*, 22 (1980), 28 – 85.

[A5] Eaves, B. C., A short course in solving equations with PL homotopies, in Proc. SIAM-AMS, Vol. 9, Amer. Math. Soc. & SIAM, 1976, 73 – 143.

陆璇年 译

球面 [sphere; сфера]

Euclid 空间 E^{n+1} 中的点 x 的集合 S^n, 这些点到点 x_0 (球面的中心 (centre of the sphere)) 有常数距离 R (球面的半径 (radius of the sphere)), 即

$$S^n = \{x \in E^{n+1} : \rho(x, x_0) = R\}.$$

球面 S^0 是一对点, 球面 S^1 是圆, 当 $n > 2$ 时, 球面 S^n, 有时称为超球面 (hypersphere). 球面 S^n 的体积 (当 $n=1$ 时是周长, $n=2$ 时是面积) 由公式

$$v(S^n) = \frac{2\pi^{n+1/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} R^n$$

给出; 特别地,

$$v(S^1) = 2\pi R, \quad v(S^2) = 4\pi R^2,$$

$$v(S^3) = 2\pi^2 R^3, \quad v(S^4) = \frac{8}{3}\pi^2 R^4.$$

这里, Γ 是 **Γ 函数** (gamma-function).

球面 S^n 在 E^{n+1} 的 Descartes 坐标系中的方程取形式

$$\sum (x^i - x_0^i)^2 = R^2,$$

(这里，x^i, x_0^i, $i=1,\cdots,n+1$ 分别是 x, x_0 的坐标)，即球面是一个（超）二次型或特殊形式的二次曲面．

空间中与球面相关的任何点的位置由点的幂（见**点的度**（degree of a point））表示其特征．（3 维空间中）与之有关的有固定的幂的已给点的所有球面的全体形成了一个**球面罗**（web of sphere）．与球面有关的恒等幂（不同的点不同）的直线（根轴（radical axis））的点的所有球面的全体形成一个球面的**网**（net），与之有关的恒等次数（随不同点而不同）的平面（根平面（radical plane））的点的所有球而形成了球面束（pencil）．

从微分几何的观点看来，球面 S^n 是一个常曲率 $k=1/R^n$ 的 **Riemann 空间**（Riemannian space）（当 $n=2$ 时曲率是 Gauss 曲率，当 $n>2$ 时是 Riemann 曲率）．球面的所有测地线是闭的且有等长 $2\pi R$——这些就是众所周知的大圆（great circles），即 E^{n+1} 中通过中心的二维平面与 S^n 的交．S^n 的外几何性质是：所有的法线交于一点；任何一个正截口的曲率是相等的，为 1，它不依赖于点的选择，特别地，它有常平均曲率，由于这个原因，球面的完全平均曲率在同样面积的凸曲面中是最小的；球面的所有的点是脐的（见**脐点**（umbilical point））．

上述某些性质，作为基础，已用来作为球面的概念的推广的起点．例如，**仿射球面**（affine sphere）的定义就基于所有它的（仿射）法线交于一个点；**伪球面**（pseudo-sphere）就是 E^3 中常 Gauss 曲率（虽然是负的）的曲面；**极限球面**（horosphere; limit sphere）的解释之一就是也用一个二次方程

$$(1-x^2-y^2-z^2)=\text{常数}\ (1-x\alpha-y\beta-z\gamma)^2$$

定义的 S^2 中的点的集合．

空间 E^{n+1} 的正交群 $O(n+1)$ 在 S^n 上起了双传递的作用（2 传递性（2-transitivity）意味着对任何两对距离相等的点对，存在一个旋转——$O(n+1)$ 的一个元素——将一对点映到另一对点）；该群是 S^n 的等距完全群；最后，球面是一个**齐性空间**（homogeneous space）：$S^n=O(n+1)/O(n)$．

从（微分）拓扑的观点来看，球面 S^n 是一个闭微分流形，它将 E^{n+1} 分成两个以它为公共边界的区域；同胚于 E^{n+1} 的有界区域则是一个（开）球（ball）；于是，球面可定义为它的边界．

$n\geqslant 1$ 时，S^n 的同调群是

$$H_k(S^n)=\begin{cases}0, & k\neq 0,n,\\ \mathbf{Z}, & k=0,n;\end{cases}$$

特别是，S^n 不能缩成一个点，即 S^n 到它自身的恒同映射是本质的（见**本质映射**（essential mapping））．

$n\geqslant 1$，S^n 的同伦群，对 $k\leqslant n$ 是

$$\pi_k(S^n)=\begin{cases}0, & k<n,\\ \mathbf{Z}, & k=n.\end{cases}$$

此外，还有，例如 $\pi_3(S^2)=\mathbf{Z}$，和当 $n>2$ 时，$\pi_{n+1}(S^n)=\pi_2(S^n)=\mathbf{Z}_2$．一般地，对任何 k 和 n，$k>n$，群 $\pi_k(S^n)$ 没有算出（见**球面的同伦群**（spheres, homotopy groups of the））．

球面的概念在这里也有一个推广．例如，一个非驯球面（wild sphere）是 E^{n+1} 中的不界住同胚于 E^{n+1} 的区域的一个拓扑球面（见下文）；**Milnor 球面**（Milnor sphere）（一个怪球面（exotic sphere））是一个同胚但不微分同胚于 S^n 的流形．

同胚于一个球面的拓扑空间称为拓扑球面（topological sphere），这里的基本问题之一是条件的问题，在此条件下，空间是拓扑球面．

例．a）当 $n>2$ 时，已知无 S^n 的拓扑不变量的特征．对 $n=1$ 的情形，见**一维流形**（one dimensional manifold）．为达**连续统**（continuum）同胚于球面 S^2 的目的，必要和充分的是它局部连通．它至少包含一条简单闭曲线且其上的每一条这样的曲线将它分成两个以这条曲线作为它们的公共边界的区域（Wilder 定理（Wilder theorem））．

b）维数 $\geqslant 2$ 的完全的单连通 Riemann 空间，对所有的二维切平面 σ，其曲率 K_δ 是 δ 有界的（$\delta>1/4$），即 $\delta\leqslant K_\delta\leqslant 1$，则它同胚于 S^n（球面定理（sphere theorem），见 **Riemann 几何学**（Riemannian geometry））．

c）（整）同调群与 S^n 的同调群相一致的单连通闭光滑流形当 $n\geqslant 4$ 时同胚于 S^n（当 $n=3$ 时，它是未知的（1990））．如果 $n=5,6$，它也微分同胚于 S^n（广义 Poincaré 猜想（generalized Poincaré conjecture）），当 $n\geqslant 7$ 时，微分同胚结论不成立．

度量空间 (M,ρ) 中球面用相同的方式确切地定义为 $S=\{x\in M:\rho(x,x_0)=R\}$．然而，一般地讲，这个集合可能有相当复杂的结构（甚至它可能是空集）．

在有范数 $\|\cdot\|$ 的赋范空间 E 中，集合 $S=\{x\in E:\|x\|=R\}$ 称为一个球面；一般地讲，这基本上是一个任意的、无穷维的凸（超）曲面，而不总具有例如光滑性、圆性和其他通常的球面所具有的有用的性质．用于拓扑学中的一种——所谓无限维球面（infinite-dimensional sphere）——是球套序列

$$S^1\subset S^2\subset\cdots$$

的严格的归纳极限 S^∞；另一个定义：$S^\infty=V_1(\mathbf{R}^\infty)$，其中 $V_1(\mathbf{R}^\infty)$ 是一个无限维 **Stiefel 流形**（Stiefel ma-

nifold). 对任何 i, 结论是 $\pi_i(S^\omega)=0$.

球面概念的应用非常多. 例如, 球面用于构造新的空间或在它们上面增补结构. 例如, 射影空间 $\mathbf{R}P^n$ 可以理解为将对径点叠合的球面 S^n; 具有环柄和洞的球面用于**环柄理论** (handle theory); 也见**上同伦群** (cohomotopy group); **球面映射** (spherical map).

参考文献

[1] Розенфельд, Б. А., Многомерные пространства, М., 1966.

[2] Розенфельд, Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

[3] Lévy, P., Problèmes concrets d'analyse fonctionelle, Gauthier-Villars, 1951.

[4] Введение в топологию, М., 1980.

[5] Busemann, H., The geometry of geodesics, Acad Press, 1955.

И. С. Шарадзе 撰

【补注】 其同调群像 n 球面的同调群的单连通拓扑流形有时称作 Poincaré 流形 (Poincaré manifold). 最近证明了一个光滑的 Poincaré 4 流形不必微分同胚于标准的 S^4.

关于 4 流形, 包括 4 球面的最近结果的综合报告, 见[A3].

参考文献

[A1] Milnor, J., On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. of Math.*, 64 (1956), 399 – 405.

[A2] Berger, M., Geometry, 1, Springer, 1977.

[A3] Freedman, M. H. and Luo, F., Selected applications of geometry to low-dimensional topology, Amer. Math. Soc., 1987.

薛春华 译

球面的同伦群 [spheres, homotopy groups of the; сфер гомотопические группы]

经典同伦理论中研究的一个对象. 球面同伦群 $\pi_i(S^n)$ 的计算在那个年代 (特别是 20 世纪 50 年代) 被当作拓扑学中的中心问题之一. 拓扑学家希望这些群能成功地完全算出来, 并且将有助于解决同伦中的其他分类问题. 这些希望没有完全实现. 球面的同伦群只被部分地计算出, 并且随着**广义上同调论** (generalized cohomology theories) 的发展, 它们的计算问题变成不再紧迫. 然而, 当发现了它在微分拓扑学 (球面上的微分结构和多维纽结的分类) 中的意想不到的用处时, 已经汇集的关于这些群的所有信息都不是多余的.

Ⅰ. **一般理论**. 1) 如果 $i<n$ 或 $i>n=1$, 则 $\pi_i(S^n)=0$.

2) $\pi_n(S^n)=\mathbf{Z}$ (Brouwer-Hopf 定理 (Brouwer-Hopf theorem)); 这个同构将群 $\pi_n(S^n)$ 的一个元素与表示它的映射 $S^n\to S^n$ 的度相联系.

3) 群 $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ 有秩 1; 另外, 具 $i\neq n$ 的群 $\pi_i(S^n)$ 是有限的.

纬垂 (suspension) 同态

$$E:\pi_i(S^n)\to\pi_{i+1}(S^{n+1})$$

将用映射 $f:S^i\to S^n$ 表示的群 $\pi_i(S^n)$ 的一个元素联系到映射 $Ef:S^{i+1}\to S^{n+1}$ 的类, 该映射由公式

$$Ef(\sqrt{1-x^2}\,\mathbf{x},x)=\begin{cases}(\sqrt{1-x^2}\,f(\mathbf{x}),x), & |x|\leqslant 1,\\ (0,x), & |x|=1\end{cases}$$

定义, 其中 $\mathbf{x}\in S^i$, $x\in\mathbf{R}$.

4) 同态 E 当 $i>2n-1$ 时是一个同构, 而当 $i\geqslant 2n-1$ 时是一个满同态.

因此, 对每个 k, 群 $\pi_{n+k}(S^n)$ 可以作为系列

$$\pi_{1+k}(S^1)\xrightarrow{E}\pi_{2+k}(S^2)\xrightarrow{E}\pi_{3+k}(S^3)\xrightarrow{E}\cdots$$

的项, 在它的第 $(k+2)$ 项, 稳定化开始; 具有 $n\geqslant k+2$ 的群 $\pi_{n+k}(S^k)$ 称为**球面的第 k 个稳定同伦群** (k-th stable homotopy groups of the spheres), 用 π_k^s 表示. 则当 $k<0$ 时 $\pi_k^s=0$ 及 $\pi_0^s=\mathbf{Z}$.

关于任何拓扑空间的**同伦群** (homotopy group), Whitehead 积定义在球面的同伦群上:

$$\pi_i(S^n)\times\pi_j(S^n)\to\pi_{i+j-1}(S^n),\ (\alpha,\beta)\to[\alpha,\beta].$$

对它的通常的性质 (分配性, 反交换性和 Jacobi 恒等式) 都加上.

5) $E[\alpha,\beta]=0$.

Whitehead 积可作出下列对 4) 的提炼:

6) 满同态 $E:\pi_{2n-1}(S^n)\to\pi_{2n}(S^{n+1})$ 的核由类 $[i_n,i_n]$ 生成, 其中 i_n 是群 $\pi_n(S^n)$ 的典型的生成元 (用恒同映射表示).

与 Whitehead 积紧密相关的是由 $\alpha\in\pi_{4m-1}(S^{2m})$ 所定义的 **Hopf 不变量** (Hopf invariant) $H(\alpha)$. 因此, 能依公式 $h(z_1,z_2)=z_1:z_2$ 产生的 Hopf 映射 $h:S^3\to S^2$ 表示的群 $\pi_3(S^2)$ 的元素有等于 1 的 Hopf 不变量 (其中, S^3 看作空间 $\mathbf{C}^2$ 中的单位球面, 而 S^2 看作是 $\mathbf{C}P^1$).

7) 映射 $H:\pi_3(S^2)\to\mathbf{Z}$ 是同构.

8) $H([i_{2m},i_{2m}])=2$.

8) 的一个推论是: 群 $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ 是无限的. 这个事实早已在 3) 中叙述过.

9) 当 $m\neq 1,2,4$ 时, 在 $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ 中不存在奇 Hopf 不变量的元素 (在这个定理被证明之前早已知道的, 它的断言等价于下面的 Frobenius 猜想 (Frobenius conjecture): 当 $l\neq 1,2,4,8$ 时, 则在 $\mathbf{R}^l$ 中不存在具有在非零元素上单值除法的双线性乘法).

可以由映射的毗连定义的**合成积** (composition product)

$$\pi_i(S^j) \times \pi_j(S^n) \to \pi_i(S^n), \quad (\beta, \alpha) \to \alpha \circ \beta$$

对球面是唯一的．

10）对任意 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \pi_j(S^n)$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \pi_i(S^j)$, $\delta \in \pi_{i-1}(S^{j-1})$, $\gamma \in \pi_k(S^i)$, 下列式子成立:

a) $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$;

b) $\alpha \circ (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \circ \beta_1 + \alpha \circ \beta_2$;

c) $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ E\delta = \alpha_1 \circ E\delta + \alpha_2 \circ E\delta$;

d) $E(\alpha \circ \beta) = E\alpha \circ E\beta$.

一般地讲，"左分配律" $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$ 不成立． 断言 d) 使得可以定义一个稳定合成积 (stable composition product)

$$\pi_q^s \times \pi_r^s \to \pi_{q+r}^s, \quad (\beta, \alpha) \to \alpha \circ \beta.$$

11）对任何 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \pi_r^s$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \pi_q^s$, $\gamma \in \pi_p^s$, 10) 中的断言 a) 和 b) 成立，还有下式成立:

c') $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$,

d') $\alpha \circ \beta = (-1)^{qr} \beta \circ \alpha$.

Ⅱ． **计算的方法**． 20 世纪 30 年代中期提出的 Л. С. Понтрягин 的几何方法（见[1]）是基于下面的定义．$\mathbf{R}^i$ 中的光滑的 m 维紧流形称为装标架的 (framed)，如果在流形上定义了一个横截于它的光滑的 $(i-m)$ 标架场，该场自己就称作是一个标架 (framing)．两个无边的装标架的流形 X_0, $X_1 \subset \mathbf{R}^i$ 称作配边的 (cobordant)，如果存在一个带 $\partial Y = (X_0 \times 0) \dot{\bigcup} (\dot{X}_1 \times 1)$ 的装标架的流形 $Y \subset \mathbf{R}^i \times [0,1] \subset \mathbf{R}^{i+1}$，对于它，标架在 $X_0 \times 0$ 和 $X_1 \times 1$ 上的限制被包含在 $\mathbf{R}^i \times 0$ 和 $\mathbf{R}^i \times 1$ 之中，并且，对给定 $\mathbf{R}^i \times 0$ 和 $\mathbf{R}^i \times 1$ 与 $\mathbf{R}^i$ 的自然叠合变为流形 X_0 和 X_1 的给定的标架．$\mathbf{R}^i$ 中无边的配边装标架 m 维流形的分类的集合用 $\Omega^m(i)$ 来表示．

1) 在 $\pi_i(S^n)$ 与 $\Omega^{i-n}(i)$ 之间存在一一对应．

这个方法对小的 $i-n$ 给出了一个好的结果． 它也使得可能证明 Ⅰ 节中的某些定理和提供了在小维数的流形上的种种几何信息．

另一组方法由包括使用各种纤维丛的同伦序列的初等代数方法，Whitehead 乘积，合成乘积和相应的较高的乘积 (Toda 方括号，见[3]) 的性质以及下面的 James 定理 (James theorem) 所组成．

2) 存在一个群和同态的序列:

$$\cdots \to \pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{i-1}(S^n) \to \cdots,$$

它对奇数 n 和 $i < 3n-1$ 是正合的（在该序列中，H 是 Hopf 不变量的一个推广）．

初等代数方法证实了确是有效的: 当 $i - n \leqslant 13$ 时，计算群 $\pi_i(S^n)$ 几乎不用其他的方法是可能的．

也存在消去空间 (killing space) 的方法（见[5]）．这个方法对任何空间的同伦群的计算是合适的． 它基于用具有下列性质

$$\pi_i(X|_k) = \begin{cases} \pi_i(X), & i \geqslant k, \\ 0, & i < k \end{cases}$$

的消去空间 $X|_k$ 的序列的一个空间的构造． 因此，$\pi_i(X) = \pi_i(X|_i) = \mathbf{H}_i(X|_i)$ 和计算同伦群的问题简化到计算 $X|_i$ 的同调群（和上同调群）的问题． 这些同调群通过归纳法利用纤维丛的**谱序列** (spectral sequence) 被发现: $X|_k$ 用 **Eilenberg-MacLane 空间** (Eilenberg-MacLane space) $K(\pi_k(X), k)$ 上的纤维 $X|_{k+1}$ 而被中断．计算没有自动的特征: 为了进行下去，必须尽可能多地知道有关 X 的上同调群，包括在它们中的最初的和较高的**上同调运算** (cohomology operation) 的作用．

计算球面的稳定同伦群的更合适的工具是 Adams 谱序列． 设 p 是一个素数，$A_{(p)}$ 是系数取在 $\mathbf{Z}_p$ 中的上同调空间上的稳定上同调运算的 **Steenrod 代数** (Steenrod algebra).

3) 存在一个谱序列，它的第一项与 Steenrod 代数的上同调群（即与 $\mathrm{Ext}_{A(p)}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p)$）相一致，而极限项与球面的稳定群有关，它通过相对于素数 p 的阶的挠分解因子．

Adams 谱序列允许在球面的稳定同伦群的计算中达到值得重视的进展． 对任何空间的稳定同伦群的计算存在一个类似的谱序列． 也存在 Adams 谱序列的非稳定的类似物（见[4]）．

计算球面同伦群的较现代的方法是基于**广义上同调论** (generalized cohomology theories)．其中之一包括使用 **Adams e 不变量** (Adams e-invariant)，这与 K 理论紧密相连． 在构造这个 e 不变量中，表示类 $\alpha \in \pi_i(S^n)$ 的映射 $f: S^i \to S^n$ 是固定的，而通过映射 f 在球面 S^n 上粘贴一个 $(i+1)$ 维胞腔得到的空间 $X_\alpha = S^n \bigcup_f D^{i+1}$ 得到检验． 结果是

$$H_n(X_\alpha; \mathbf{Z}) \cong H_{i+1}(X_\alpha; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}.$$

设 μ, ν 是这些群的典型生成元，存在一个具有**陈（省身）特征标** (Chern character) $\mathrm{ch}\,\xi$ 满足关系 $\langle \mathrm{ch}\,\xi, \mu \rangle = 1$ 的 X_α 上的复向量丛 ξ．那么 $\langle \mathrm{ch}\,\xi, \nu \rangle$ 是一个有理数，其模 1 的残数不依赖于 ξ 的选择．该残数是类 α 的 e 不变量 $e(\alpha)$．函数 e 是一个同态

$$e: \pi_i(S^n) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

它的象可确定（见[2]）．

最后，计算球面（不仅仅是球面）同伦群的潜在最有力的方法是 Adams-Новиков 谱序列，Adams 谱序列的类似物，它不是基于通常的上同调群而是基于上

$i-n$ \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	表格
1	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	…	…	…	…	…	…	…	…	…	$\mathbf{Z}_2$
2	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	…	…	…	…	…	…	…	…	$\mathbf{Z}_2$
3	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_{24}$	…	…	…	…	…	…	…	$\mathbf{Z}_{24}$
4	$\mathbf{Z}_{12}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_2$	0	…	…	…	…	…	…	0
5	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}$	0	…	…	…	…	…	0
6	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_{24}\oplus\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	…	…	…	…	$\mathbf{Z}_2$
7	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_{15}$	$\mathbf{Z}_{15}$	$\mathbf{Z}_{30}$	$\mathbf{Z}_{60}$	$\mathbf{Z}_{120}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_{120}$	$\mathbf{Z}_{240}$	…	…	…	$\mathbf{Z}_{240}$
8	$\mathbf{Z}_{15}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_2^4$	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_2^2$	…	…	$\mathbf{Z}_2^2$
9	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_2^4$	$\mathbf{Z}_2^5$	$\mathbf{Z}_2^4$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_2^3$	…	$\mathbf{Z}_2^3$
10	$\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_{12}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{120}\oplus\mathbf{Z}_{12}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{72}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{72}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}\oplus\mathbf{Z}_{24}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{12}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_6$
11	$\mathbf{Z}_{12}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{84}\oplus\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_{84}\oplus\mathbf{Z}_2^5$	$\mathbf{Z}_{504}\oplus\mathbf{Z}_4$	$\mathbf{Z}_{504}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{504}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{504}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{504}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{504}$	$\mathbf{Z}_{504}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_{504}$	$\mathbf{Z}_{504}$

配边．然而，这个序列的第一项的明确的计算还有内在的困难，该困难还未被克服．

Ⅲ．**计算的结果**．具有 $i-n\leqslant 2$ 的群 $\pi_i(S^n)$ 同构于上表中的群：

2）具有 $12\leqslant k\leqslant 22$ 的群 π_k^s 同构于下表中的群：

$k=12$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	$\mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_{480}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_2^4$	$\mathbf{Z}_8\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{264}\oplus\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_{24}$	$\mathbf{Z}_2^2$	$\mathbf{Z}_2^2$

关于群 $\pi_i(S^n)$ 的计算的更进一步的结果，见[3]．在这些群中的奇准素分量的计算中已取得了特别的进展．

例如：

3）如果 p 是一个奇素数，则群 π_k^s 的 p 准素分量当 $k=2l(p-1)-1$, $l=1,\cdots,(p-1)$ 时是 $\mathbf{Z}_p$，而对其他的 $k<2p(p-1)-2$ 时是平凡的．

有涉及球面的同伦群的许多结果，它们的作用的区域不限于值 $i-n$ 的任何有限范围．特别地，群 $\pi(S^n)$ 的非平凡元素的许多无穷序列已经知道（见[4]）．

4）**Whitehead 同态**（Whitehead homomorphism）J_k 的象的阶等于不可约分数 $B_k/4k$ 的分母，其中 B_k 是第 k 个 **Bernoulli 数**（Bernoulli numbers）．特别地，Card Im $J_1=24$, Card Im $J_2=240$, Card Im $J_3=504$, Card Im $J_4=480$.

参考文献

[1] Понтрягин, Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

[2A] Adams, J., On the groups $J(X)$ Ⅰ, *Topology*, **2** (1963), 181 – 195.

[2B] Adams, J., On the groups $J(X)$ Ⅱ, *Topology*, **3** (1964), 137 – 181.

[2C] Adams, J., On the groups $J(X)$ Ⅲ, *Topology*, **3** (1964), 193 – 222.

[2D] Adams, J., On the groups $J(X)$ Ⅳ, *Topology*, **5** (1966), 21 – 71.

[3] Toda, H., Composition methods in homotopy groups of spheres, Princeton Univ. Press, 1962.

[4] Whitehead, G., Recent advances in homotopy theory, Amer. Math. Soc., 1970.

[5] Фукс, Д. Б., Фоменко, А. Т., Гутенмахер, В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969.

Д. Б. Фукс 撰

【补注】 一般的结果 $\pi_n(S^n)=\mathbf{Z}$ 和对 $m<n$, $\pi_m(S^n)$ 也一起称为 Hurewicz 定理（Hurewicz theorem）．纬垂在一个适当的范围中诱导了一个同构这个事实称作 Freudenthal 纬垂定理（Freudenthal suspension theorem）．$\pi_{n+k}(S^n)$, $k>0$ 除 $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ 形如 $\mathbf{Z}\oplus$（有限的）之外是有限的，这个结果称作 Serre 有限定理（Serre finiteness theorem）．从属于合成积的附加结果是西田幂零定理（Nishida nilpotence theorem），那是对每个 $\alpha\in\pi_k^s$, $k>0$ 是幂零的．更进一步，有 Cohen-Moore-Neisendorfer 指数定理（Cohen-Moore-Neisendorfer exponent theorem），它叙述了对 $p\geqslant 5$, Abel 群 $\pi_{2i+1+j}(S^{2i+1})$ 的 p 分量有指数 p^i.

对球面的同伦群的一个很完全的讨论，特别对 Adams-Новиков 谱序列和它的 E^2 项，见[A2]．

参考文献

[A1] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology: 1900 – 1960, Birkhäuser, 1989.

[A2] Ravenel, D. C., Complex cobordism and stable homotopy groups of the spheres, Acad. Press, 1986.

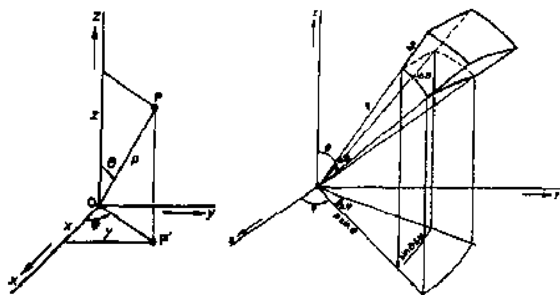
徐森林 译

球面坐标［spherical coordinates; сферические координаты］

三个数 ρ, θ 和 φ，它们同 Descartes 直角坐标 x, y 和 z 由下列公式相联系：

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta,$$

其中 $0\leqslant\rho<\infty,\ 0\leqslant\varphi<2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi$（见图）.



坐标曲面是（见图）：同心球，中心在原点 $O(\rho=OP=$ 常数）；半平面，通过轴 $Oz\ (\varphi=\angle xOP'=$ 常数）；圆锥，顶点在 O，轴为 $Oz\ (\theta=\angle zOP=$ 常数）. 球面坐标系是正交的.

Lamé 系数（Lamé coefficients）是

$$L_\rho=1,\ L_\varphi=\rho\sin\theta,\ L_\theta=\rho.$$

面积元是

$$d\sigma=$$

$$=\sqrt{\rho^2\sin^2\theta(d\rho d\varphi)^2+\rho^2(d\rho d\theta)^2+\rho^4\sin^2\theta(d\varphi d\theta)^2}.$$

体积元是

$$dV=\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

向量分析的基本运算是

$$\operatorname{grad}_\rho f=\frac{\partial f}{\partial\rho},\ \operatorname{grad}_\varphi f=\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{grad}_\theta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta};$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{2}{\rho}a_\rho+\frac{\partial a_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{\rho\tan\theta}a_\theta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta};$$

$$\operatorname{rot}_\rho\mathbf{a}=\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{\rho\tan\theta}a_\varphi;$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\theta}-\frac{\partial a_\theta}{\partial\rho}-\frac{a_\theta}{\theta\rho};$$

$$\operatorname{rot}_\theta\mathbf{a}=\frac{\partial a_\varphi}{\partial\rho}+\frac{a_\varphi}{\rho}-\frac{1}{\rho\sin}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi};$$

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}.$$

数 u, v 和 w 称为广义球面坐标（generalized spherical coordinates），它们同 Descartes 坐标 x, y 和 z 由下列公式相联系：

$$x=au\cos v\sin w,\ y=bu\sin v\sin w,\ z=cu\cos w,$$

其中 $0\leqslant u<\infty,\ 0\leqslant v<2\pi,\ 0\leqslant w\leqslant\pi,\ a>b,\ b>0$. 坐标曲面是：椭球面（$u=$ 常数），半平面（$v=$ 常数）和椭圆锥（$w=$ 常数）.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】 如果曲面由 $R=R(\varphi,\theta)$ 给出，则面积元可以写成

$$dS=$$

$$=R\sqrt{\left\{R^2+\left(\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2\right\}\sin^2\theta+\left(\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)^2}\,d\theta\,d\varphi.$$

当引入新坐标时变换向量函数的一般方法，例如见 [A1].

参考文献

[A1] Rutherford, D. E., Vector methods, Oliver & Boyd, 1949.

[A2] Spiegel, M. R., Vector analysis, McGraw-Hill, 1959.

[A3] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.

杜小杨 译

球面函数 [**spherical functions; сферические функции**]，球体调和函数（solid spherical harmonics），第一类和第二类连带 Legendre 函数（associated Legendre functions of the first and second kinds）

微分方程

$$(1-z)^2\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+$$

$$+\left[v(v+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]=0$$

的两个线性无关的解 $P_\nu^\mu(z), Q_\nu^\mu(z)$，其中 μ, ν 是复常数；此方程出现于用**分离变量法**（separation of variables, method of）解一类偏微分方程中. 点 $z=\pm1, \infty$ 一般是解的分支点. 球面函数是**超几何函数**（hypergeometric function）的特殊情形：

$$P_\nu^\mu(z)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\Bigl(\nu,\nu+1;$$

$$1-\mu;\frac{1-z}{2}\Bigr)$$

$$(\arg\frac{z+1}{z-1}=0,\ 若\ \operatorname{Im}z=0,\ z>1),$$

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}\frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{z^{\mu+\nu+1}}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2},\ \frac{\mu+\nu+2}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)$$

$(\arg z = 0$，若 $\operatorname{Im} z = 0$，$z > 0$；

$\arg(z^2-1) = 0$，若 $\operatorname{Im} z = 0$，$z > 1)$.

球面函数 $P_\nu^\mu(z)$，$Q_\nu^\mu(z)$ 分别在沿 $-\infty$ 到 $+1$ 的实轴割开的复平面的区域 $|1-z|<2$ 和 $|z|>1$ 内有定义并单值.

如果 $\operatorname{Im} z = 0$，$z = x$，$-1<x<1$，则常取下列函数为解：

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}[e^{\mu\pi i/2}P_\nu^\mu(x+i0)+$$

$$+e^{-\mu\pi i/2}P_\nu^\mu(x-i0)] =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}{}_2F_1(-\nu,\nu+1;$$

$$1-\mu;\ \frac{1-x}{2}\Big),$$

$$Q_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}e^{\mu\pi i}[e^{-\mu\pi i/2}Q_\nu^\mu(x+i0)+$$

$$+e^{\mu\pi i/2}Q_\nu^\mu(x-i0)] = \frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\Bigg[\cos\mu\pi P_\nu^\mu(x)+$$

$$-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(x)\Bigg],$$

其中 $f(x+i0)$ $(f(x-i0))$ 是函数 $f(z)$ 在割线的上（下）边界上的值.

当 $\mu=0$，$\nu=n=0,1,\cdots$ 时，$P_n(z)=P_n^0(z)$ 是 **Legendre 多项式**（Legendre polynomials）. 关于球带函数，见**球面调和函数**（spherical harmonics）.

参考文献

[1] Bateman, H., Erdélyi, A., Higher transcendental functions. Bessel functions, 2, McGraw-Hill, 1953（中译本：A. 爱尔台里，高级超越函数，上海科学技术出版社，1957－1958）.

[2] Jahnke, E. and Emde, F., Tables of functions with formulae and curves, Dover, reprint, 1945（译自德文）.

[3] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 1952.

[4] Krazer, A. and Franz, W., Transzendente Funktionen, Akademie-Verlag, 1960.

[5] Hobson, E. W., The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Chelsea, reprint, 1955.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰

【补注】"球面函数"一词更通常的用法有如下述.

设 G 是幺模局部紧群，K 是 G 的子群，又设 π 是 G 到 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的不可约酉表示，它使得 $\mathscr{H}$ 中的 K 固定向量构成由单位向量 e 生成的一维子空间；于是 G 上由 $\varphi(x)=(e,\pi(x)e)$ 定义的 K 双不变函数 φ 称为球面函数（spherical function）. 有时称 φ 为球带函数（zonal spherical function），而函数 $x\to(v,\pi(x)e)$ $(v\in\mathscr{H})$ 也称为球面函数. 有些数学家称 φ 为基本球面函数（elementary spherical function），而所有 G 上的 K 双不变函数则称为球面函数.

偶 (G,K) 称为 Гельфанд 偶（Gel'fand pair），如果对 G 的所有不可约酉表示，表示空间中 K 固定向量的子空间为 1 维或 0 维. 这个条件等价于 G 上具有紧支集的 K 双不变连续函数的卷积代数 $C_c(K\backslash G/K)$ 是交换的. 这时球面函数更一般地定义为函数方程

$$\varphi(x)\varphi(y)=\int_K\varphi(xky)dk,\ x,\ y\in G \qquad (*)$$

的不恒等于零的解 φ，其中 dk 是 K 上的规范化 Haar 测度. 这些解包括与不可约酉表示相联系的球面函数. 另外一些解可能与 G 的不可约非酉表示相联系. 交换代数 $C_c(K\backslash G/K)$ 的特征标正是映射 $f\to\int_G f(x)\varphi(x)dx$，其中 dx 是 G 上的 Haar 测度，φ 是 $(*)$ 的解.

如果 G 加之还是连通 Lie 群，则 (G,K) 是 Гельфанд 偶，当且仅当齐性空间 G/K 上的 G 不变微分算子的代数 $\mathscr{D}(G/K)$ 是交换的. 此时 φ 是 $(*)$ 的解，当且仅当它是 K 双不变的，C^∞ 的，$\varphi(e)=1$，且 G/K 上的函数 $xK\to\varphi(x)$ 是 $\mathscr{D}(G/K)$ 的元素的联合本征函数. 特别地，如果 G 是连通实半单 Lie 群，K 是一个极大紧子群，则 (G,K) 是 Гельфанд 偶，G/K 是 Riemann 对称空间，从而可得到关于 $\mathscr{D}(G/K)$ 和球面函数的许多信息.

参考文献

[A1] Faraut, J., Analyse harmonique sur les paires de Gelfand et les espaces hyperboliques, in *Anal. Harmonique*, *CIMPA*, 1982, 315－446.

[A2] Гельфанд, И. М., 《Докл. АН СССР》, 70 (1950), 5－8（英译本：Gel'fand, I. M., Spherical functions on symmetric spaces, *Transl. Amer. Math. Soc.*, 37 (1964), 39－44）.

[A3] Godement, R., Introduction aux traveaux de A. Selberg, *Sem. Bourbaki*, 144 (1957).

[A4] Helgason, S., Groups and geometric analysis, Acad. Press, 1984.

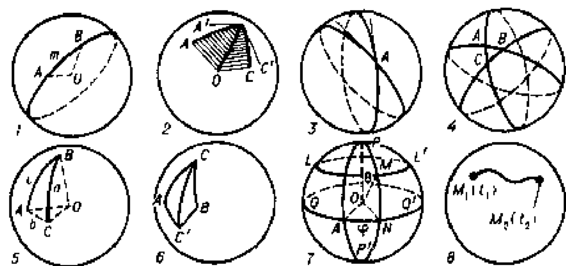
沈永欢 译

球面几何学 [spherical geometry; сферическая геоме-

трия]

数学的涉及球面上的几何图形的一个领域，犹如平面几何学涉及平面内的几何图形．

每一个平面与一个球面相交，给出某一个圆作为截影；如果相交平面通过球面的中心 O，那么作为交线得到一个所谓的大圆（great circle）．通过球面上的任何两点 A 与 B 可画出唯一的大圆（图 1），除非它们是对径点．



一个球面的大圆是它的**测地线**（geodesic line），因此它们在球面几何学中的作用与直线在平面几何学中的作用相同．然而，直线的任何线段是它们端点之间的最短曲线，球面上的一个大圆弧却仅当它短于其补弧时是最短曲线．在其他许多意义下，球面几何学也不同于平面几何学；例如，没有平行的测地线：两个大圆永远相交，并且交于两点．

球面上线段 AB 的长度，即一大圆弧 AmB（图 1）的长度是用它对应的中心角 AOB 度量的．由两大圆弧在球面上组成的角 ABC（图 2）是用在交点 B 的对应弧的切线间的角 $A'BC'$ 或用平面 OBA 与 OBC 组成的二面角度量的．

当两个大圆在球面上相交时，形成四个球面二角形（spherical digon 或 spherical lune）（图 3）．一个二角形由给出它的角所定义．一个二角形的面积用公式 $S=2R^2A$ 确定，其中，R 是球面的半径，A 是以弧度表示的二角形的角．

不交于一对对径点的三个大圆在球面上形成八个球面三角形（spherical triangle）（图 4）；如果其中的一个三角形的元素（角与边）已知，就容易确定所有其他三角形的元素．所以通常只考虑边与角都小于 π 的三角形（这样的三角形称为 Euler 三角形（Euler triangle）．一个球面三角形的边 a,b,c 是用三面角 $OABC$（图 5）的平面角度量的；三角形的角 A,B,C 是用同一三面角的二面角度量的．球面三角形的性质与平面上的三角形（直线三角形）的性质有很大不同．因而，关于球面上三角形相等的第四种情形可添加到关于直线三角形已经熟知的三个中：如果两个三角形的对应角相等，则它们是相等的（在球面上，相似三角形不存在）．

能够由绕着球面的一个运动使之一致的三角形称为直接合同的．这样的三角形有相等的元素与相同的定向．有相等的元素与不同定向的三角形称为反向对称的；图 6 中的三角形 $AC'C$ 与 BCC' 是一个例子．

在每一个球面（Euler）三角形里，每一边小于另两边的和，且大于另两边的差；所有边的和永远小于 2π．一个球面三角形的角的和总小于 3π 而大于 π．差 $s-\pi=\varepsilon$ 称为**球面角盈**（spherical excess），其中 s 是球面三角形的角的和．一个球面三角形的面积由公式 $S=R^2\varepsilon$ 定义，其中 R 是球面的半径．关于球面三角形的角与边之间的关系，见**球面三角学**（spherical trigonometry）．

球面上每一点的位置用给定的两个数可完全确定；这两个数（坐标）可用以下方式定义（图 7）．固定一个大圆 QQ'（赤道（equator）），并取球面的垂直于赤道的平面的直径 PP' 与球表面的二交点里的一个，例如 P（极（pole）），以及从极出发的一个大半圆 PAP'（零子午线（zero meridian））．从 P 发出的球面的大半圆称为子午线（meridian），而平行于赤道的球面的小圆称为平行圆（parallel）．球面上点 M 的一个坐标是角 $\theta=POM$ ——极距（polar distance），而另一个坐标是零子午线与通过点 M 的子午线间的夹角 $\varphi=AON$ ——经度（longitude）（按逆时针方向计算）．

曲线 $\theta=f(t)$, $\varphi=g(t)$ 的弧 M_1M_2（图 8）的长度 L 按照以下公式计算：

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[\frac{df}{dt}\right]^2+\sin f\left[\frac{dg}{dt}\right]^2}\,dt\,.$$

参考文献

[1] Степанов, Н. Н., Сферическая тригонометрия, 2 изд., Л.-М., 1948.

[2] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 – Геометрия, М., 1963.

В. Н. Битюцков 撰

【补注】 令 $S=S^d\subset\mathbf{R}^{d+1}$ 是单位球面．S 的点，即单位长度向量，可与从 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的原点发出的半直线等同．S 上度量、距离的概念用 $d(x,y)=\arccos(x,y)$ 定义，其中 (x,y) 是单位长度向量 x,y 的内积．令 xy 与 xz 是 S 上二个相交的大圆弧，如记法所示交于 x．令 x_y 是 x 处的 xy 的单位长度切向量，x_z 类似地定义，则在 x 处的 xy 与 xz 之间的夹角是 $\arccos(x_y,x_z)$，这也是通过 O 切出 xy 与 xz 的平面间的夹角．

如上所述，一个边为 a,b,c 的球面三角形总满足 $|b-c|<a<b+c$ 和 $a+b+c<2\pi$；反之，如果

$a, b, c \in (0, \pi)$ 且满足这些不等式，则存在一个以它们为边的球面三角形．

一个大圆的极（pole of a great circle）是球面上垂直于截出该大圆的平面的一点，即如果将大圆作为赤道，则两极是北极与南极．

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, II, Springer, 1989（中译本：M．贝尔热．几何，第一—五卷，科学出版社，1987－1991）

[A2] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952（中译本：D．希尔伯特，S．康福森．直观几何，上、下册，高等教育出版社，1964）

[A3] Rosenfeld, B. A. [B. A. Rozenfel'd], A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988（译自俄文）．

[A4] Coolidge, J. L., A treatise on the circle and sphere, Clarendon Press, 1916.

[A5] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.

林向岩 译 陆珊年 校

球面调和函数 [spherical harmonics; сферическая гармоника], k 次的

n 元变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的 k 次齐次调和多项式（harmonic polynomial）$h^{(k)}(x)$ 在 Euclid 空间 $E^n(n\geqslant 3)$ 中的单位球面 S^{n-1} 上的限制．特别地，当 $n=3$ 时，球面调和函数即为经典的球面函数（spherical functions）．

设 $x\in E^n$，$x\neq 0$，令 $r=|x|$，则 $x'=x/r\in S^{n-1}$．球面调和函数的基本性质是正交性质（property of orthogonality）：设 $Y^{(k)}(x)$ 和 $Y^{(l)}(x)$ 分别是 k 阶和 l 阶球面调和函数且 $k\neq l$，则

$$\int_{S^{n-1}} Y^{(k)}(x')Y^{(l)}(x')dx'=0.$$

最简单的球面调和函数是带球面调和函数（zonal spherical harmonics）．对任意 $t'\in S^{n-1}$ 及任意 $k>0$，存在一个带球面调和函数 $Z_{t'}^{(k)}(x')$，它在球面 S^{n-1} 的与向量 t' 垂直的任意一个平行截口上都等于常数．当 $n=3$ 和 $n>3$ 时，带球面调和函数 $Z_{t'}^{(k)}(x')$ 分别与 **Legendre 多项式**（Legendre polynomials）$P_k^{(\lambda)}$ 及**超球多项式**（ultraspherical polynomials）$P_k^{(\lambda)}$ 只相差一个常数因子：

$$Z_{t'}^{(k)}(x')=c(k,n)P_k^{(\lambda)}(x't'),$$

其中的多项式 $P_k^{(\lambda)}(n\geqslant 3)$ 由生成函数

$$(1-2st+s^2)^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k^{(\lambda)}(t)s^k$$

定义，$0\leqslant|s|<1$，$|t|=1$，$\lambda=(n-2)/2$．多项式系 $P_k^{(\lambda)}(k=0,1,\cdots)$ 是加权 $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ 正交的并且构成了空间 $L_2([-1,1],(1-t^2)^{\lambda-1/2})$ 中的一组正交基．若 f 是 $L_2(S^{n-1})$ 中的函数且 $\int_{S^{n-1}}f(x')dx'=0$，则存在唯一的一组球面调和函数 $Y^{(k)}$ 使得

$$f(x')=\sum_{k=1}^{\infty}Y^{(k)}(x'),$$

其中的级数依 $L_2(S^{n-1})$ 模收敛．

按球面调和函数展开非常类似于展成 **Fourier 级数**（Fourier series），前者本质上是后者的推广．齐次调和多项式 $h^{(k)}(x)$ 有时称为空间球调和函数（spatial spherical harmonics）．由齐次性

$$h^{(k)}(x)=|x|^kY^{(k)}(x'),$$

球面调和函数有时也称为表面球调和函数（surface spherical harmonics）．

参考文献

[1] Morse, P. M. and Feshbach, H., Methods of theoretical physics. 1－2, McGraw-Hill, 1953.

[2] Stein, E. M. and Weiss, G., Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1975（中译本：Elias, M. Stein, Guido Weiss，欧氏空间上的 Fourier 分析引论，上海科学技术出版社，1987）．

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gelfand, I. M., Minlos, R. A. and Shapiro, Z. Ya., Representations of the rotation group and the Lorentz group, and their applications, MacMillan, 1963（译自俄文）．

[A2] Vilenkin, N. Ya., Special functions and the theory of group representations, Amer. Math. Soc., 1968（译自俄文）．

[A3] Vilenkin, N. Ya. and Klimyk, A. Yu., Special functions, group representations, and integral transforms, 1, Kluwer, 1991（译自俄文）．

朱学贤 译 刘和平 校

球面调和函数法 [spherical harmonics, method of; сферических гармоник метод]，亦称球谐函数法

通过将粒子的相密度展开成球面函数（spherical functions）的有限项之和，用于求得动理方程近似解的一种方法；球面函数的宗量给出粒子速度的方向（见[1]）．该方法广泛用于中子物理学问题的求解．

一维平面几何情况下，定常积分微分动理学输运方程（transport equation）（给定粒子的各向同性散射）

$$\mu\frac{d\psi(x,\mu)}{dx}+\psi(x,\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x,\mu')d\mu' \quad (1)$$

代之以 $\widetilde{\psi}_n(x)$ 的近似微分方程组，$\widetilde{\psi}_n(x)$ 是 Fourier 系数

$$\psi_n(x)=\int_{-1}^{+1}\psi(x,\mu)P_n(\mu)d\mu,$$

$$n=0,\cdots,2N-1, \tag{2}$$

的近似值. 因而在条件

$$\widetilde{\psi}_{2N}(x)\equiv 0 \tag{3}$$

下，产生形式为

$$n\frac{d\widetilde{\psi}_{n-1}(x)}{dx}+(2n+1-c\delta_{n0})\widetilde{\psi}_n(x)+$$

$$+(n+1)\frac{d\widetilde{\psi}_{n+1}(x)}{dx}=0 \tag{4}$$

的方程组. 这里，$\psi(x,\mu)$ 是物质中被散射粒子的相密度，c 是由于与物质粒子相互作用一次而产生的平均次级粒子数，而 $P_n(\mu)$ 是 n 次 **Legendre 多项式**（Legendre polynomials）. 方程组（4）定义对于方程（1）的球面调和函数法的 P_{2N-1} 近似. 相密度的近似值是

$$\widetilde{\psi}(x,\mu)=\sum_{n=0}^{2N-1}\frac{2n+1}{2}\widetilde{\psi}_n(x)P_n(\mu). \tag{5}$$

对于方程（1），典型边界条件取下列形式

$$\left.\begin{aligned}&\psi(0,\mu)=0 \quad 对\ 0<\mu\leqslant 1,\\&\psi(h,\mu)=0 \quad 对\ -1\leqslant\mu<0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

这个类型边界条件存在于，例如，具有自由表面 $x=0$ 和 $x=h$（具有真空边界）厚度为 h 的层的临界状态的中子物理学问题中. 在这个问题中，必须求出（1）和（6）的正值解以及求出本征值 c.

球面调和函数法中，很自然地是用

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 P_n(\mu)\widetilde{\psi}(0,\mu)d\mu=0,\\&\int_0^{-1} P_n(\mu)\widetilde{\psi}(h,\mu)d\mu=0,\\&n=0,1,\cdots,2N-1,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

来代替（6）. 然而，这种处理方法涉及比方程组（4）的特解所必需为两倍那样多的条件. 实际上，曾经尝试过（7）中 n 值的各种不同选择. 具有 $n=2k+1$, $k=0,1,\cdots,N-1$ 的条件给出最好结果. 对于一般类型的单速输运方程，**Владимиров 变分原理**（Vladimirov variational principle）（当选择球面调和函数（spherical harmonics）的线性组合形式的试探函数时）导致球面调和函数法的方程组和上述边界条件. 在三维几何情况，边界条件可以写成下列形式

$$\int_{(\Omega\cdot n)<0}(\Omega\cdot n)\widetilde{\psi}(\mathbf{r},\Omega)Y_{2k,i}(\Omega)d\Omega|_{\mathbf{r}\in\Gamma}=0, \tag{8}$$

$$i=0,\pm 1,\cdots,\pm 2k;\ k=0,1,\cdots,N-1.$$

这里 $\mathbf{r}$ 是空间坐标向量，Ω 是具有球面坐标为 (θ,φ) 的粒子速度的单位向量，$\mathbf{n}$ 是分段平滑表面 Γ 的外法线上单位向量，表面 Γ 为问题求解的空间中凸区域的边界，

$$Y_{k,i}(\Omega)=P_k^{(|i|)}(\cos\theta)\sin|i|\varphi,\ i=-k,\cdots,-1,$$

$$Y_{k,i}(\Omega)=P_k^{(i)}(\cos\theta)\sin i\varphi,\ i=0,\cdots,k,$$

是球面函数，$P_k^{(i)}(\mu)$ 是第一类连带 Legendre 函数（$P_k^{(0)}(\mu)=P_k(\mu)$ 是 Legendre 多项式）.

球面调和函数法的最低阶近似（P_1, P_3）被广泛用于求解中子物理学问题，并且在远离区域边界，中子源和中子强吸收体之处给出好结果. 中子年龄理论也以 P_1 近似予以构造. 球面调和函数法的广义解当 $N\to\infty$ 时收敛于输运方程的解（见 [2]）. $\widetilde{\psi}(x,\mu)\to\psi(x,\mu)$ 的收敛速率，通过比较对于 $\widetilde{\psi}_0(x)$ 和 $\psi_0(x)$ 的积分方程，即通过估计其核的邻近程度，很容易进行估计. 具有边界条件（6）的方程（1）化至具有核为

$$E_1(|x-s|)=\int_0^1\frac{e^{-|x-s|/\mu}}{\mu}d\mu$$

的积分方程. 方程组（3），给定边界条件类似于（6），

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{\psi}(0,\mu_i)=0 \ 对\ 0<\mu_i<1,\\&i=1,2,\cdots,N,\\&\widetilde{\psi}(h,\mu_i)=0 \ 对\ -1<\mu_i<0,\\&i=-1,-2,\cdots,-N.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 μ_i 是 $P_{2N}(\mu)$ 的根，化至具有核为

$$\widetilde{E}_1(|x-s|)=\sum_{i=1}^{N}a_i\frac{e^{-|x-s|/\mu_i}}{\mu_i}$$

的积分方程，这里 a_i 是结点系 $-1<\mu_i<1$ 的 **Gauss 求积公式**（Gauss quadrature formula）的权重. 函数 $e^{-|x-s|/\mu}/\mu$ 的奇异性导致对于大 N 的慢收敛性:

$$\int_0^h|E_1(x)-\widetilde{E}_1(x)|dx<\frac{\text{const}}{N},$$

$$|\psi_0(x) - \widetilde{\psi}_0(x)| < \frac{\text{const}}{N}.$$

近似本征值以速率 $1/N^2$ 收敛于严格本征值.

边界条件(9)自然地出现于利用离散纵坐标法(method of discrete ordinates)对动理学方程的求解中;该方法在于用近似方程组

$$\mu_i \frac{\partial \widetilde{\widetilde{\psi}}_i(x)}{\partial x} + \widetilde{\widetilde{\psi}}_i(x) = \frac{c}{2} \sum_{j=-N}^{N} a_j \widetilde{\widetilde{\psi}}_j(x) \quad (10)$$

来代替方程(1).一维几何情况的离散纵坐标法等价于球面调和函数法(见[3]),因为通过未知函数的线性变换:

$$\widetilde{\psi}_n(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j \widetilde{\widetilde{\psi}}_j(x) P_n(\mu_j),$$

可以由方程组(4)求得方程组(10).然而,在多维问题中,最低阶近似下的球谐函数法要比离散纵坐标法更加精确.

参考文献

[1] Марчук, Г. И., Лебедев, В. П., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981.

[2] Султангазин, У. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 14 (1974), 1, 166 – 178.

[3] Richtmyer, R. D. and Morton, K. W., Difference methods for initial-value problems, Wiley (Interscience), 1967. В. А. Чуянов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Marchuk, G. I., Methods of numerical mathematics, Springer, 1975(译自俄文).

[A2] Davison, B. and Sykes, J. B., Neutron transport theory, Clarendon Press, 1957.

[A3] Case, K. M. and Zweifel, P. F., Linear transport theory, Addison-Wesley, 1967. 徐锡申 译

球面标线[spherical indicatrix; сферическая индикатриса]

三维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中一条曲线在它上面的点通过下列单位向量之一映到单位球面 S^2 的映射下的象:该曲线的切向量,主法向量,或次法向量.设 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ 是曲线 l 的向径,s 是自然参数,$\mathbf{R}=\mathbf{R}(s)$ 是曲线 l 借助于上面列举的单位向量之一所给出的、映到其中心在原点的球面 S^2 内的球面映象的向径.球面切标线由方程

$$\mathbf{R}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

定义,球面主法标线的方程是

$$\mathbf{R}(s) = \frac{d^2\mathbf{r}/ds^2}{|d^2\mathbf{r}/ds^2|},$$

球面次法标线的方程是

$$\mathbf{R}(s) = \frac{(d\mathbf{r}/ds) \times (d^2\mathbf{r}/ds^2)}{|d^2\mathbf{r}/ds^2|}.$$

球面切标线的切线与曲线在对应点 s 的主法向量平行.球面标线的曲率和挠率能用曲线自身的曲率和挠率表示.对于每一条球面标线会有无限多条曲线以它为标线,即曲线不能够根据它的球面标线作唯一的复原.

参考文献

[1] Выгодский, М. Я., Дифференциальная геометрия, М.-Л., 1949. Л. А. Сидоров 撰

【补注】

[A1] Struik, D. J., Differential geometry, Addison-Wesley, 1957.

[A2] Weatherburn, C. E., Differential geometry, 1, Cambridge Univ. Press, 1961.

[A3] Salmon, G., Analytsche Geometrie des Raumes, 1 – 2, Teubner, 1894. 陈维桓 译

球面映射[spherical map; сферическое отображение], Gauss 映射(Gauss map),法球面映射(normal spherical map)

从空间 E^{k+1} 中光滑可定向(超)曲面 M^k 到中心在 E^{k+1} 的原点的(单位)球面 S^k 的映射.它对点 $x \in M^k$ 指定了位置向量为 $\bar{n}(x)$ (M^k 在点 x 的(单位)法向量)的点 $x^* \in S^k$.换言之,球面映射是由 M^k 的 k 个无关的切向量所构造的多重向量来定义的:

$$\bar{n} = \frac{\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_k}{|\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_k|}$$

(这里,$u^1, \cdots, u^k$ 是点 x 的局部坐标,$x_i = \partial\bar{x}/\partial u^i$,$\bar{x}$ 是 M^k 的位置向量).例如,当 $k=2$ 时,

$$\bar{n} = \frac{[\bar{x}_u, \bar{x}_v]}{|[\bar{x}_u, \bar{x}_v]|},$$

其中 $[\cdot, \cdot]$ 是向量积;这个最简单的情形是由 C. F. Gauss 在 1814 年所研究的.在球面映射下的象称为 M^k 的球面象(spherical image).

形式

$$d\bar{n}^2 = \gamma_{ij} du^i du^j$$

是 S^k 的度量形式的原象,称为(超)曲面 M^k 的第三基本形式(third fundamental form).对应的张量 γ_{ij} 与第一基本形式、第二基本形式的张量 g_{ij}, b_{ij} 有关,其关系式是

$$\gamma_{ij} = g^{kl} b_{ik} b_{jl}.$$

对应于 g_{ij} 和 γ_{ij} 的度量联络是伴随联络(adjoint con-

nections).

除了球面映射之外，当（超）曲面能 1－1 地投影到某个（超）平面上时也考虑所谓的法映射（normal map）$\widetilde{n}$．对于用方程

$$x^{k+1}=f(x^1,\cdots,x^k)$$

定义的（超）曲面（x^i 是 E^{k+1} 中的 Descartes 坐标），$\widetilde{n}$ 定义为

$$\widetilde{n}=\{p_1,\cdots,p_k\},$$

其中 $p_i=\partial f/\partial x^i$，所以 $\widetilde{n}=n\sqrt{1+\sum p_i^2}$．

对于非可定向（超）曲面，有所谓的不可定向球面映射（non-orientable spherical map），即从 M^k 到椭圆空间 El^k 的映射（后者可解释为通过 E^{k+1} 的原点的直线的集合，即 k 维射影空间）：对于点 $x\in M^k$ 系以与 M^k 在 x 的切平面垂直的直线．

球面映射刻画了（超）曲面在空间中的曲率．确实，在点 $x\in M^k$ 的球面象的面积元素 dS^* 和曲面的面积元素 dS 之比等于全曲率（total curvature）（或 Kronecker 曲率（Kronecker curvature），或外曲率（outer curvature））K_l，它是 M^k 在 x 的主曲率之积：

$$K_l=\frac{dS^*}{dS}\text{，即 }K(ds^*)=\frac{K(ds)}{K_l}.$$

同样地，集合 $F\subset M^k$ 的（积分）曲率等于它的球面象（即集合 $F^*=\overline{n}(F)\subset S^k$）的面积：

$$\iint K_l\,dS=\iint dS^*. \tag{1}$$

球面映射的推广．

1）切表示（tangent representation），即 E^N 中子流形 M^k 的球面映射，是指如下定义的映射

$$M^k\to G_{k,N},$$

其中 $G_{k,N}$ 是 **Grassmann 流形**（Grassmann manifold）．设 T_x 是 M^k 在点 x 的切空间，将它看作 E^N 中的（超）平面，同时 $T(x)$ 是经过 E^N 的原点、与 T_x 平行的 k 维子空间．映射 $x\to T(x)$ 也称为球面映射．当 k 是偶数时，成立（1）的推广：

$$\int_{T_N(M^k)}\widetilde{\Omega}=\int_{M^k}\Omega,$$

其中 $\Omega=\varepsilon^{i_1\cdots i_k}\Omega_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{k-1}i_k}$，这里 Ω_{ij} 是 M^k 上的**曲率形式**（curvature form），$\widetilde{\Omega}$ 是 $G_{k,N}$ 上的类似的形式，$T_N(M^k)$ 是 M^k 在球面映射下的象．法映射（normal map）$M^k\to G_{N-k,N}$ 是对偶地定义的：点 $x\in M^k$ 对应于 $T(x)$ 的正交补．

2）**向量丛**（vector bundle）ξ^k 到向量空间 $F^N(k\leqslant N\leqslant\infty)$ 的 Gauss 映射（Gauss map）是从纤维空间 $E(\xi^k)$ 到 F^N 的映射

$$g:E(\xi^k)\to F^N,$$

它在每一条纤维上诱导出一个线性单同态．对于典型向量丛 γ_k^N（它是乘积丛（$G_{k,N}\times\mathbf{R}^N$, p, $G_{k,N}$）的子丛，其全空间是由所有可能的元素（V, x）$\in G_{k,N}\times\mathbf{R}^N$, $x\in V$ 组成的），映射（V, x）$\to x$ 称为典范 Gauss 映射（canonical Gauss map）．对于任意一个纤维丛 ξ^k，每一个 Gauss 映射是典范的 Gauss 映射和纤维丛的态射的合成；存在 Gauss 映射的充分必要条件是存在映射 $f:B(\xi)\to G_{k,N}$（这里 B 是纤维丛的底空间），使得 ξ 和 $f^*(\gamma_k^N)$ 是同构的（特别是，对于仿紧空间上的每一个向量丛，存在到 F^∞ 的 Gauss 映射）．

对于一个 Riemann 空间的子流形，存在球面映射的多种推广．

3）Ефимов 映射（Efimov map）与 Riemann 空间 V^3 中的曲面 M^2 有关，它是上面提到的伴随联络的概念的扩充．因为在 V^3 中没有绝对平行性，其定义是更为形式化的，考察第三基本形式的类似物——法向量的协变微分的平方 $(D\overline{n})^2$．在 Gauss 曲率 $K(ds^*)$ 和 $K(ds)$ 之间的关系的证明更复杂了（一般说来是 Codazzi 方程的非齐性的结果）．这个关系保持如前，即 $K(|Dn|)=K(ds)/K_l$；这里 $K(ds)$, $K(|Dn|)$ 是度量 ds 和 $|Dn|$ 的 Gauss 曲率（在 $V^3=E^3$ 的情形下，$K(ds)=K_l$）．例如在下列情况下：M^2 的法向量是空间 V^3 的 **Ricci 张量**（Ricci tensor）（在 M^2 上的点考虑）的特征向量，换言之在 M^2 是该张量的主曲面之一时，便得到前面的公式 $K(|Dn|)=K(|dn|)=1$．K_l 是 M^2 在 V^3 中的外曲率．若 V^3 是常曲率空间，则总是这种情形．

最后，球面映射的概念还被引入某些类非正则曲面．

4）极映射（polar mapping）是从凸（超）曲面 F^k 到 E^{k+1} 中的球面映射，它把点 $x\in F^k$ 系于从原点引出的、平行于 F^k 在 x 的支撑（超）平面的法线的单位向量的集合 $\nu(x)$．Александров 定理（Aleksandrov theorem）：每一个 Borel 集 $A\subset F^k$ 的球面象 $\nu(A)$ 是可测的，积分曲率 $K(A)=\operatorname{mes}\nu(A)$ 是全可加函数．

参考文献

[1] Каган, В. Ф., Основы теории поверхностей, ч. 2, М.-Л., 1948.

[2] Бакельман, И. Я., Вернер, А. Л., Кантор, Б. Е., Введение в дифференциальную геометрию «в целом», М., 1973.

[3] Мищенко, А. С., Фоменко, А. Т., Курс дифференциальной геометрии и топологии, М., 1980.
[4] Норден, А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976.
[5] Schwartz, J. T., Differential geometry and topology, Gordon & Breach, 1968.
[6] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.
[7] Bishop, R. L. and Crittenden, R. J., Geometry of manifolds, Acad. Press, 1964
[8] Eisenhart, L. P., Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1949.
[9] Busemann, H., Convex surfaces, Interscience, 1958.

Л. А. Сидоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] Spivak, M., Differential geometry, 1—5, Publish or Perish, 1975.

陈维桓 译

球面三角学 [spherical trigonometry; сферическая тригонометрия]

研究球面三角形的边与角之间的相互关系的数学学科(见**球面几何学**(spherical geometry)). 设 A, B, C 是球面三角形 ABC 的角, a、b, c 是对边. 球面三角形的角和边由下面的球面三角学基本公式相联系:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \qquad (1)$$

(正弦定理(sine theorem));

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \qquad (2)$$

(边的余弦定理(cosine theorem for sides));

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$

(角的余弦定理(cosine theorem for angles));

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A, \qquad (3)$$

$$\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a$$

(联系五个元素的公式). 在这些公式中, 边 a, b, c 由对应的圆心角来度量, 这些边的长度分别等于 aR, bR, cR, 其中 R 是球的半径. 按照循环置换: $A\to B\to C\to A$ $(a\to b\to c\to a)$ 改变角和边的记号, 就可得到与上面写出的这些公式类似的球面三角学的其他公式. 有了球面三角学的基本公式就可由球面三角形的任何三个元素确定其他三个元素.

为了由给定两边 a 和 b 及其夹角 C 或者由给定两角 A, B 及其夹边 c 求球面三角形, 可以利用下面这些公式(Napier 类比(Napier analogues)):

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\{(a-b)/2\}}{\sin\{(a+b)/2\}}\cot\frac{C}{2}, \qquad (4)$$

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\{(a-b)/2\}}{\cos\{(a+b)/2\}}\cot\frac{C}{2},$$

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\{(A-B)/2\}}{\sin\{(A+B)/2\}}\tan\frac{c}{2},$$

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\cos\{(A-B)/2\}}{\cos\{(A+B)/2\}}\tan\frac{c}{2} \qquad (5)$$

对于直角球面三角形($A=90°$, a 是斜边, b, c 是另外两个边), 这些公式可以简化, 例如

$$\sin b=\sin a\sin B \qquad (1')$$

(正弦定理(sine theorem));

$$\cos a=\cos b\cos c \qquad (2')$$

(Pythagoras 球面定理(Pythagoras spherical theorem));

$$\sin a\cos B=\cos b\ \sin c. \qquad (3')$$

在解题时, 下面的联系球面三角形所有六个元素的 Delambre 公式(Delambre formulas)是有用的

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2},$$

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2},$$

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2},$$

$$\cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},\ s=\frac{a+b+c}{2};$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\ \sin C}},$$

$$S=\frac{A+B+C}{2}.$$

关于参考文献, 见**球面几何学**(spherical geometry).

В. И. Битюцков 撰

【补注】 “Napier 类比”中的“类比”(analogue), 是“比例”(proportion)一词的旧称.

由边为 a, b, c 的球面三角形 ABC 的元素之间的一个关系, 通过把每个元素换成它的补角, 同时把小写字母换成对应的大写字母, 把大写字母换成小写字母, 便可得到另一个关系, 例如, 由

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A$$

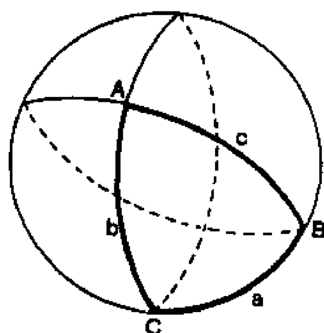
得到

$$\sin(180-A)\cos(180-b)=$$
$$=\cos(180-B)\sin(180-C)+$$
$$-\sin(180-B)\cos(180-C)\cos(180-a),$$

即

$$\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a.$$

Delambre 公式也称为 Gauss 公式（Gauss formulas）（或 Gauss 类比（Gauss analogues））.



参考文献

[A1] Flanders, H. and Price, J., Trigonometry, Acad Press, 1975.

[A2] Hessenberg, G. and Kneser, H., Ebene und Sphaerische Trigonometrie, de Gruyter, 1957.

[A3] Granville, W. A., Smith, P. F. and Mikesh, J S., Spherical trigonometry, Ginn, 1943.

[A4] Lietzmann, W., Elementare Kugelgeometrie, Vandenhoeck & Ruprecht, 1949.

[A5] Berger, M., Geometry, 2, Springer, 1989（中译本：M. 贝尔热，几何，第一－五卷，科学出版社，1987－1991）.

[A6] Rosenfeld, B. A., A history of non-Euclidean geometry, Springer, 1988（译自俄文）.

[A7] Donnay, J. D., H. Spherical trigonometry after the Cesàro method, 1945.

杜小杨 译

自旋 [spin; спин]

表征一个量子粒子（或一个量子场）的内禀自由度的变量之一．一个非相对论性粒子，如果其态向量在幺模酉群 SU(2) 的不可约酉表示 $D^{(s)}$ 的表示空间中取值，则该粒子具有自旋 s ($s=0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots$)．表示空间的维数是 $(2s+1)$．在相对论情况，自旋定义为表征所谓小群（little group）的不可约表示的量子数，小群是 **Poincaré 群**（Poincaré group）$P_+^\uparrow$ 的一个子群．对于有质量粒子（$m>0$），小群是 SU(2) 群．对于具有质量为零的粒子，小群是平面的 Euclid 群．在这个情况，为了避免连续自旋，人们必须限制于小群的那样一些表示，它们是一维的并将它们用量子数 λ，所谓螺旋度（helicity）来标记．螺旋度 λ 取值 $\lambda=0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$．表示空间的维数在这个情况等于一．

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974（中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席茨，量子力学（非相对论理论），人民教育出版社，上册，1980，下册，1981）.

[2] Гельфанд, И. М., Минлос, Р. А., Шапиро, З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения, М., 1958（英译本：Gel'fand, I. M., Minlos, R. A. and Shapiro, Z. Ya., Representations of the rotation and the Lorentz groups and their applications, Pergamon, 1963）.

Р. А. Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wigner, E. P., On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *Ann. of Math.*, **40** (1939), 149

[A2] Wightman, A. S., L'invariance dans la mécanique relativiste, in Relations de Dispersion et Particules Elémentaires, Wiley & Hermann, 1960, 159－226.

[A3] Weinberg, S., Feynman rules for any spin, *Phys. Rev.*, 133 (1964), B1318－B1331.

[A4] Weinberg, S., Feynman rules for any spin, II, *Phys. Rev*, 134 (1964), B882－B896.

徐锡申 译

旋量 [spinor; спинор]

旋量表示（spinor representation）空间的一个元素．例如，若 Q 是域 k 上 n 维空间 V 中具有最大 Witt 指标 $m=[n/2]$（当 k 是代数封闭域时，此条件总是成立）的非退化二次型（quadratic form），则能够把 V 的最大（m 维）全迷向子空间上的**外代数**（exterior algebra）取作对应于 Q 的旋量空间．

旋量是 E. Cartan 在 1913 年探讨拓扑群的表示论时首先进行研究的，然后被 B. L. van der Waerden 在 1929 年研究量子力学时再次采用（于是发现了在电子和其他基本粒子中出现自旋是由其类型（如张量、伪张量）至今尚未知的物理变量所表征；例如，它们被确定到差一个符号，将坐标系绕某个轴旋转 2π，这些变量的分量全都改变符号）.

旋量理论当前在许多数学分支中找到了广泛的应用，使得解决代数拓扑和微分拓扑中的一系列难题（例如，k 维球面上非零向量场的个数问题，一个椭圆算子的指标问题，K理论中的问题）成为可能．

参考文献

[1] Дубровин, Б. А., Новиков, С. П., Фоменко, А. Т., Современная геометрия, М., 1979（英译本：Dubrovin, B. A., Novikov, S. P., Fomenko, A.

T . Modern geometry-methods and applications, 1−2, Springer, 1985).

[2] Желнорович, В. А., Теория спиноров и её применение в физике и механике, М., 1982.

[3] Cartan, E., Leçons sur la théone des spineurs, 1−2, Hermann, 1938.

[4] Karoubi, M., K-theory: an introduction, Springer, 1978 (译自法文). М И. Войцеховский 撰

【补注】

[A1] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966

[A2] Penrose, R. and Rindler, W. Spinors and space-time, Cambridge Univ. Press, 1984. 陈维桓 译

旋量群 [**spinor group; спинорная группа**], 域 k 上 n 维向量空间 $V(n \geqslant 3)$ 上非退化二次型 Q 的

一个连通**线性代数群** (linear algebraic group), 它是二次型 Q 的正交群 $O_n(Q)$ 的恒等元的不可约分支 $O_n^+(Q)$ 的单连通覆叠. 如果 $\operatorname{char} k \neq 2$, 那么 $O_n^+(Q)$ 与特殊正交群 $SO_n(Q)$ 一致. 旋量群是这样构造的: 设 $C=C(Q)$ 是偶 (V, Q) 的 **Clifford 代数** (Clifford algebra), $C^+(C^-)$ 是由 V 的偶 (奇) 数个元素的积生成的 C 的子空间, 又设 β 是由公式

$$\beta(v_1 v_2 \cdots v_n) = v_n \cdots v_2 v_1$$

定义的 C 的典范反自同构. 包含关系 $V \subset C$ 使得可以定义 Clifford 群 (Clifford group)

$$G = \{s \in C : s \text{ 在 } C \text{ 中可逆且 } sVs^{-1} = V\}$$

和偶 (even) (或特殊 (special)) Clifford 群 (Clifford group)

$$G^+ = G \cap C^+.$$

旋量群 $\mathrm{Spin}_n = \mathrm{Spin}_n(Q)$ 由

$$\mathrm{Spin}_n = \{s \in G^+ : s\beta(s) = 1\}$$

定义. 当 $n \neq 4$ 时, 旋量群 Spin_n 是拟单的连通单连通线性代数群; 当 $n=2m+1$ 时, 它是 B_m 型的, 当 $n=2m \geqslant 8$ 时, 它是 D_m 型的, 当 $n=6$ 时, 它是 A_3 型的, 当 $n=4$ 时, 它是 $A_1 \times A_1$ 型的, 且下述同构成立:

$$\mathrm{Spin}_3 \cong \mathrm{SL}_2, \ \mathrm{Spin}_4 \cong \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2,$$

$$\mathrm{Spin}_5 \cong \mathrm{Sp}_4, \ \mathrm{Spin}_6 \cong \mathrm{SL}_4.$$

存在 Spin_n 在 V 中的线性表示 θ, 它由

$$\theta(s) \cdot v = svs^{-1}, \ s \in \mathrm{Spin}_n, \ v \in V$$

定义. 如果 $\operatorname{char} k \neq 2$,

$$\theta(\mathrm{Spin}_n(Q)) = O_n^+(Q) \quad \text{且} \ \operatorname{Ker}\theta = \{\pm 1\}.$$

群 Spin_n 在 C^+ 中有一个忠实的线性表示, 见**旋量表示** (spinor representation).

如果 $k=\mathbf{R}$ 是实数域且 Q 是正 (或负) 定的, 那么代数群 Spin_n 的实点的群 $\mathrm{Spin}_n(\mathbf{R})$ 有时也称为旋量群. 这是一个连通单连通紧 Lie 群, 它是特殊正交群 $SO_n(\mathbf{R})$ 的一个双叶覆叠, 且下述同构成立:

$$\mathrm{Spin}_3(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SU}_2, \ \mathrm{Spin}_4(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2,$$

$$\mathrm{Spin}_5(\mathbf{R}) \cong \mathrm{Sp}_4(2)$$

(见**辛群** (symplectic group)),

$$\mathrm{Spin}_6(\mathbf{R}) \cong \mathrm{SU}_4.$$

参考文献

[1] Weyl, H., The classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946 (译自德文).

[2] Dieudonné, J., La géometrie des groupes classiques, Springer, 1955.

[3] Cartan, E., Leçons sur la théorie des spineurs, 2, Hermann, 1938.

[4] Постников, М. М., Группы и алгебры Ли, М., 1982.

[5] Chevalley, C., Theory of Lie groups, 1, Princeton Univ. Press, 1946. В. Л. Попов 撰

【补注】 亦见**二次型** (quadratic form). C^+ 是所谓的 A 的偶 Clifford 代数 (even Clifford algebra).

参考文献

[A1] Bourbaki, N., Algèbre. Formes sesquilineaires et formes quadratiques, Eléments de mathématique, Hermann, 1959, Chapt. 9.

[A2] Chevalley, C., The algebraic theory of spinors, Columbia Univ. Press, 1954.

[A3] Bröcker, T. and Tom Dieck, T., Representations of compact Lie groups, Springer, 1985. 叶家琛 译

旋量表示 [**spinor representation** 或 spin representation; **спинорное представление**]

旋量群 (spinor group) $\mathrm{Spin}_n(Q)$ 的最简单的忠实线性表示 (见**忠实表示** (faithful representation); **线性表示** (linear representation)), 或对应的偶 Clifford 代数 $C^+=C^+(Q)$ 的线性表示, (Q 是二次型 (quadratic form), 见**旋量群** (spinor group)). 如果基域 K 是代数闭的, 那么代数 C^+ 同构于全矩阵代数 $M_{2^m}(K)$ (其中 $n=2m+1$), 或同构于代数 $M_{2^{m-1}}(K) \oplus M_{2^{m-1}}(K)$ (其中 $n=2m$). 这样定义的代数 C^+ 的在 K 上 2^m 维空间上的线性表示 ρ 称为旋量表示 (spinor representation). 表示 ρ 限制到 $\mathrm{Spin}_n(Q)$ 称为 $\mathrm{Spin}_n(Q)$ 的旋量表示. 对奇数 n,

旋量表示是不可约的；而对偶数 n，它分裂成两个不等价的不可约表示 ρ' 和 ρ'' 的直和，通常称 ρ' 和 ρ'' 为半旋量表示（half-spin(or) representation）．旋量表示空间的元素称为旋量（spinor），半旋量表示空间的元素称为半旋量（half-spin(or)）．对任意的 $n \geqslant 3$，旋量群 Spin_n 的旋量表示是自对偶的，旋量群 Spin_{2m} 的半旋量表示 ρ' 和 ρ'' 对于偶数 m 是自对偶的，对于奇数 m 是互为对偶的．对所有的 $n \geqslant 3$，旋量群 Spin_n 的旋量表示是忠实的，而旋量群 Spin_{2m} 的半旋量表示对奇数 m 是忠实的，但当 m 是偶数时有一个 2 阶的核．

对某个子域 $k \subset K$ 上空间 V 的二次型 Q，旋量表示并不总是定义在 k 上．然而，当 Q 的 Witt 指标极大时，即等于 $[n/2]$（特别当 k 是代数闭域）时，旋量表示和半旋量表示都定义在 k 上．此时，如果 $\mathrm{char}\, k \neq 2$，这些表示能够这样来描述（见 [1]）：设 L 和 M 是 k 空间 V 的 k 子空间，它们（关于 V 上与 Q 相伴的对称双线性型）是极大全迷向的且 $L \cap M = 0$．又设 C_L 是 Clifford 代数 $C = C(Q)$ 的由子空间 $L \subset V$ 生成的子代数，$e_M \in C$ 是组成 M 的一个 k 基的 m 个向量的积．如果 n 是偶数，$n = 2m$，那么旋量表示通过左平移：$\rho(s)x = sx\,(s \in C^+,\ x \in Ce_M)$ 在左理想 Ce_M 中实现．并且映射 $x \mapsto xe_M$ 定义了向量空间的同构 $C_L \to Ce_M$，使得可以在 C_L 中实现旋量表示．它自然同构于 L 上外代数．半旋量表示 ρ' 和 ρ'' 在 2^{m-1} 维子空间 $C_L \cap C^+$ 和 $C_L \cap C^-$ 中实现．

如果 n 是奇数，那么 V 能嵌入 k 上 $n+1$ 维向量空间 $V_1 = V \oplus k\varepsilon$ 中．对所有的 $v \in V$ 和 $\lambda \in k$，通过 $Q_1(v+\varepsilon) = Q(v) - \lambda^2$，在 V_1 上定义了二次型 Q_1．于是，Q_1 是定义在 k 上的非退化二次型，它在偶数维向量空间 V_1 上是极大 Witt 指标的．$C^+(Q)$（或 $\mathrm{Spin}_n(Q)$）的旋量表示分别是通过限制 $C^+(Q_1)$（或 $\mathrm{Spin}_{n+1}(Q_1)$）的任意半旋量表示到子代数 $C^+(Q)$（或 $\mathrm{Spin}_n(Q)$）得到的．

当 $3 \leqslant n \leqslant 14$ 且 k 是特征 0 的代数闭域时，旋量的分类问题已经解决了，（见 [4]，[8]，[9]）．这个问题包括下述三方面：1）通过给出每个轨道的代表元来描述旋量空间中 $\rho(\mathrm{Spin}_n)$ 的轨道；2）计算每个代表元在 Spin_n 中的稳定子；3）描述线性群 $\rho(\mathrm{Spin}_n)$ 的不变量的代数．

当 E. Cartan 在分类单 Lie 代数的有限维表示时（[6]），他在 1913 年发现了 Spin_n 的 Lie 代数 $\mathfrak{p}_n$ 的旋量和半旋量表示的存在性．在 1935 年 R. Brauer 和 H. Weyl 用 Clifford 代数的语言来描述旋量和半旋量表示（[5]）．Dirac（[3]）说明了怎样在量子力学中用旋量来描述电子的旋转．

参考文献

[1] Bourbaki, N., Algèbre, Eléments de mathématique, Hermann, 1970, Chapt. II. Algèbre linéaire.

[2] Weyl, H., Classical groups, their invariants and representations, Princeton Univ. Press, 1946（译自德文）.

[3] Dirac, P., Principles of quantum mechanics, Clarendon Press, 1958.

[4] Попов, В. Л.,《Тр. матем. об-ва》, 37 (1978), 173 – 217.

[5] Brauer, R. and Weyl, H., Spinors in n-dimensions, *Amer. J. Math.*, 57 (1935), 2, 425 – 449.

[6] Cartan, E., Les groupes projectifs qui ne laissant invariante aucune multiplicité plane, *Bull. Soc. Math. France*, 41 (1913), 53 – 96.

[7] Chevalley, C., The algebraic theory of spinors, Columbia Univ. Press, 1954.

[8] Gatti, V. and Viniberghi, E., Spinors in 13-dimensional space, *Adv. Math.*, 30 (1978), 2, 137 – 155.

[9] Igusa, J. I., A classification of spinors up to dimension twelve, *Amer. J. Math.*, 92 (1970), 4, 997 – 1028.

В. Л. Попов 撰 叶家琛 译

旋量结构 [**spinor structure**; **спинорная структура**]，*在一个 n 维流形 M 上的自旋标架的纤维化*（fibration of spin-frames）

M 上结构群为 Spin_n（见**旋量群**（spinor group））的主纤维丛 $\tilde{\pi}: \tilde{P} \to M$，覆盖了某个结构群为 SO_n 的余标架的主纤维丛 $\pi: P \to M$．后一个条件的意思是给定了一个主纤维丛的满同态 $\kappa: \tilde{P} \to P$，它在底空间上恒同，且与自然同态 ρ: $\mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n$ 是相容的．通常说旋量结构 $(\tilde{\pi}, \kappa)$ 是从属于由 π 在 M 上定义的 Riemann 度量的．从 G 结构理论的观点来看，旋量结构是结构群为 $G = \mathrm{Spin}_n$ 随同一个非忠实表示 $\rho: \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n$ 的广义 G 结构（见 **G 结构**（G-structure））．

类似地可以定义从属于伪 Riemann 度量的旋量结构，在复流形上从属于复度量的旋量结构．在 M 上存在旋量结构的充分必要条件是 M 是可定向的，且 Stiefel-Whitney 类 $W_2(M)$ 为零．当这些条件成立时，M 上从属于一个已知 Riemann 度量的非同构的旋量结构的数目与群 $H^1(M, \mathbf{Z})$ 的阶相同（见 [6]）．

设 C 是有二次型 $q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 的 $\mathbf{R}^n$ 的 **Clifford 代数**（Clifford algebra）的复化．则 C 有在 $2^{[n/2]}$ 维空间 S 中的不可约表示，它定义了 $\mathrm{Spin}_n \subset C$ 在 S 中的一个表示．M 上的每一个旋量结构 $\tilde{\pi}$ 产生了以 S 为纤维型的相配向量丛 $\pi_S: S(M) \to M$，称为旋量丛（spinor bundle）．M 上的 Riemann 联络以典型的

方式在 π_S 上决定了一个联络，在 π_S 的光滑截面（旋量场（spinor field））的空间 $\Gamma(S)$ 上有一个一阶线性微分算子 D，即 Dirac 算子（Dirac operator）的作用，在局部上定义为

$$Du=\sum_{i=1}^{n}s_i\cdot\nabla_{s_i}u,\ u\in\Gamma(S),$$

其中 $\nabla_{s_i}(i=1,\cdots,n)$ 是沿一组单位正交向量场 s_i 的方向的协变导数，"·"表示旋量场和对应于 S 上的上述 C 模结构的向量场的乘法．

属于 D 的核的旋量场称为调和旋量场（harmonic spinor fields）．若 M 是紧的，则 $\dim\ker D<\infty$，该维数在度量的共形变形下是不变的（[4]）．若 M 上的 Riemann 度量有正的数量曲率，则 $\ker D=0$（参看[4]，[5]）．

在时-空（space-time）流形 (M, g)（即四维 Lorentz 流形）上的旋量结构定义为从属于 Lorentz 度量 g 的旋量结构．在非紧时-空 M 上的旋量结构的存在性等价于 M 的全可平行性（见[3]）．作为在旋量群 $\mathrm{Spin}(1,3)\approx SL(2,G)$ 上的模，旋量空间分解成两个复二维复共轭的 $SL(2,G)$ 模 $\mathscr{C}^2$ 和 $\mathscr{C}^{\cdot 2}$ 的直和．这对应于旋量丛的分解 $S(M)=\mathscr{C}^2(M)\oplus\mathscr{C}^{\cdot 2}(M)$，这里张量积 $\mathscr{C}^2(M)\otimes\mathscr{C}^{\cdot 2}(M)$ 等同于切丛 TM 的复化．在时-空中作为 Dirac 算子的特征函数的旋量场刻画了旋量为 1/2 的自由质点（如电子）场．

参考文献

[1] Casanova, G., L'algèbre vectorielle, Presses Univ. France, 1976.

[2] Penrose, R., The structure of space-time, in C. de Witt and J. Wheeler (eds.), Batelle Rencontres, 1967, Benjamin, 1968, pp. 121-235 (chapt. Ⅶ).

[3] Geroch, R., Spinor structure of space-times in general relativity, *J. Math. Phys*, 9 (1968), 1739-1744.

[4] Hitchin, N., Harmonic spinors, *Adv. in Math.*, 14 (1974), 1-55.

[5] Lichnerowicz, A., Champs spinoriels et propagateurs en rélativeté génerale, *Bull. Soc. Math. France*, 92 (1964), 11-100.

[6] Milnor, J., Spin structure on mainfolds, *Enseign. Math.*, 9 (1963), 198-203.

[7] Penrose, R., The twistor programme, *Reports Math. Phys.*, 12 (1977), 65-76.

[8] Wells, R. O. jr., Complex manifolds and mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1 (1979), 296-336.

Д. В. Алексеевский 撰

【补注】

参考文献

[A1] Baum, H., Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten, Teubner, 1981

[A2] Dodson, C. T. J., Categories, bundles, and spacetime topology, Kluwer, 1988, Chapt. V, §3.

陈维桓 译

螺线 [spirals; спирали]

围绕一个点（或几个点）旋转，同时又向着或背着这个点（或这几个点）移动的平面曲线．可分成两类：代数螺线和伪螺线．

代数螺线（algebraic spirals）是指极坐标方程关于变量 ρ 和 φ 是代数的螺线．其中包括**双曲螺线**（hyperbolic spiral），**Archimedes 螺线**（Archimedean spiral），**Galileo 螺线**（Galilean spiral），**Fermat 螺线**（Fermat spiral），**抛物螺线**（parabolic spiral）和**连锁螺线**（lituus）．

伪螺线（pseudo-spirals）是自然方程可写成

$$r=as^m$$

形式的螺线，其中 r 是曲率半径，s 是弧长．当 $m=1$ 时这称为**对数螺线**（logarithmic spiral），当 $m=-1$ 时，是 **Cornu 螺线**（Cornu spiral），当 $m=1/2$ 时是圆的渐伸线（见**渐伸线（平面曲线的）**（evolvent of a plane curve））．

参考文献

[1] Савелов, А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

[A1] Lawrence, J. D., A catelog of special plane curves, Dover, 1972.

[A2] Berger, M., Geometry, Springer, 1987（译自法文）.

[A3] Coxter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1963.

[A4] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1-3, Chelsea, reprint, 1971.

[A5] Fladt, K., Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven, Akad. Verlagsgesell., 1962.

陈志杰 译

样条 [spline; сплайн]

在区间 $[a, b]$ 上定义的具有 $m-1$ 阶连续导数的函数 $S_m(\Delta_n; x)$，该函数在由剖分 Δ_n：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 形成的每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上为至多 m 次的确定的代数多项式．样条可以表示如下：

$$S_m(\Delta_n; x)=P_m(x)+\sum_{k=0}^{n-1}c_k(x-x_k)_+^m,$$

其中，c_k 为实数，$P_m(x)$ 是至多 m 次的多项式，$(x-t)_+^m=\max(0,(x-t)^m)$．点 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ 称作样条结点（knots）．如果对 $k\geq 1$，样条 $s_m(\Delta_n; x)$ 在 $[a, b]$ 上有 $m-k$ 阶连续导数，并且在结点处该样条的 $m-k+1$ 阶导数不连续，则称该样条具有亏数（defect）k．除这些多项式样条（polynomial spli-

nes)外，还可以考虑由齐次线性微分方程 $Ly=0$ 的解"粘合"而成的更一般的样条（L 样条（L-splines)），在各个结点处具有不同光滑性的样条（L_g 样条（L_g-splines)）以及多元样条．样条及其推广在求解诸如最佳求积公式和最佳数值微分等极值问题时，常常以极值函数的面目出现．样条被用于函数逼近（见**样条逼近**（spline approximation）；**样条插值**（spline interpolation））和用来构造常微分方程和偏微分方程的近似解．样条还可以用来构造具有良好收敛性质的规范正交系．

参考文献

[1] Стечкин, С. Б., Субботин, Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976.

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】 I. J. Schoenberg 被公认是样条之"父"，40年代中期，他对这些函数进行了命名并对其做了专门研究．1960 年以来，样条插值与逼近领域的发展突飞猛进．1973年以前发表的样条函数方面的相当完整的文献目录，可参见[A4]；[A3] 也提供了有价值的参考文献．

参考文献

[A1] Schoenberg, I. J., Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A, On the problem of smoothing of graduation. A first class of analytic approximation formulae, *Quart. Appl. Math.*, 4 (1946), 45 – 99.

[A2] Schoenberg, I. J., Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B, On the problem of osculatory formulae, *Quart. Appl. Math.*, 4 (1946), 112 – 141.

[A3] Schumaker, L. L., Spline functions; basic theory, Wiley, 1981.

[A4] Rooj, P. L. J. and Schurer, F., A bibliography on spline functions, in K. Böhmer, G. Meinardus and W. Schempp (eds.), Spline Funktionen, B. I. Mannheim, 1974, 315 – 415.

[A5] Prenter, P. M., Splines and variational methods, Wiley, 1975.

王仁宏 檀结庆 译

样条逼近 [**spline approximation; сплайн-аппроксимация**]

利用**样条**（spline）近似地表示某个函数，或根据不完全信息（例如，根据函数在某些点的取值）对给定函数类的函数用样条进行近似重建．

正如函数逼近经典理论中那样，人们要研究样条逼近的线性方法（包括**样条插值**（spline interpolation））、最佳方法，以及用非线性样条类，例如，变结点的样条进行逼近等．

利用样条作最佳逼近．这将涉及到存在性和唯一性问题，最佳逼近样条的特征性质（见**最佳逼近元**（element of best approximation）），逼近阶，以及样条与给定函数类的偏差的渐近性质与精确上界等．带固定结点的样条不能形成 **Чебышев 系**（Chebyshev system）；因而，最佳逼近样条在 $C[a,b]$ 中不一定是唯一的，并且最佳逼近样条的特征性质比**最佳逼近多项式**（polynomial of best approximation）（见[8]）的特征性质更复杂．然而，在 $L[a,b]$ 中，对于连续函数子类来说，当最佳逼近样条是由 $[a,b]$ 上形成 Чебышев 系的光滑函数粘结而成时，它们则具有唯一性质（见[2]）．具有确定的光滑性但结点非固定的样条（这里假定结点数不超过某个给定的数目）不能形成一个闭集．因此，最佳逼近样条此时不一定存在．逼近阶可用下述结果进行刻画（[6]）：

$$\|f^{(i)}(x)-S^{(i)}_{m,\Delta_n}(x)\|_{L_p[a,b]}\leqslant$$

$$\leqslant c\|\Delta_n\|^{l-p^{-1}+q^{-1}}\omega_{m-i}(f^{(i+1)},\|\Delta_n\|)_q,\quad (1)$$

$$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,$$

其中，$S_{m,\Delta_n}(x)$ 是一个 m 次多项式样条，其结点为剖分点

$$\Delta_n:\ a=x_0^{(n)}\leqslant x_1^{(n)}<\cdots<x_n^{(n)}=b,$$

$$\|\Delta_n\|=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}-x_i),$$

$\omega_k(f,\delta)q$ 是 $L_q[a,b]$ 中的 k 阶光滑模（见**光滑性的模**（smoothness, modulus of）），f 是具有 $l-1$ 阶绝对连续导数且在 L_q 中具有 l 阶导数（$1\leqslant l\leqslant m$）的函数，$i=0,\cdots,l-1$．当 $1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty$ 时，可用 $i-1$ 取代（1）中的 i 并且可移去常数 $\|\Delta_n\|^{1-p^{-1}+q^{-1}}$．对于多维样条已得到了较（1）更弱的类似不等式．例如，如果 $f\in W_2^k(\Omega)$（Соболев 空间），S_n^k 是具有均匀结点且间距为 h 的（每个变量的次数至多为 k 的）样条集合，且区域 Ω 满足严格锥条件（见**嵌入定理**（imbedding theorems）），则有

$$\inf_{s\in S_n^k}\|f-s\|_{W_2^j(\Omega)}\leqslant c\cdot h^{k-j}\|f\|_{W_2^k(\Omega)},\ 0\leqslant j\leqslant k.$$

对于均匀划分（$\|\Delta_n\|=1/n$）和函数类 W_q^{m+1}，当 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ 时，（1）式右边的阶为 $n^{p^{-1}-q^{-1}-m-1+r}$．如果考虑光滑度为 $m-1$，变结点数不超过 n 的 m 次样条的逼近，则可以证明（[7]），以结点的选取为代价，逼近阶为 n^{-m-1+r}．对于具有均匀结点的多项式样条对某些周期函数类的最佳一致逼近，已有一系列完满结果．例如，对函数类 $\widetilde{W}^rH_\omega$，其中，$\omega(\delta)$ 是凸连续模，r 次样条偏差的上确界已被确定（见[4]）；它恰好等于相应函数类的**宽度**（width）．对高阶导数具有进一步限制的最佳样条逼近也已被研究

([6]). 在研究最佳求积公式时自然产生了特殊函数 $(b-t)^r$ 的最佳逼近问题(见**单样条**(monospline)).

样条逼近的线性方法. 对这些方法的研究早在最佳样条逼近问题之前就开始了, 当时主要是研究**插值样条**(interpolation spline)逼近(见[1], [3], [5]). 插值样条通常具有与最佳逼近样条同样的逼近阶, 这正是它比多项式插值优越的一个方面. 因此, 如果一个函数在 $(-\infty, \infty)$ 上有连续的 r 阶导数, 则对于具有均匀插值结点 $x_i = ih$, $i=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 和均匀样条结点的 $n \geq r$ 次多项式插值样条 $S_n(x, h)$, 逼近估计

$$\|f^{(i)}(x) - S_n^{(i)}(x, h)\|_{C(-\infty, \infty)} \leq$$
$$\leq c \cdot \omega_{r+1-i}(f^{(i)}, h), \ i=0, 1, \cdots, r$$

成立. 在研究具有任意结点的插值样条时, 常把插值结点间的最大距离选作为逼近参数(通常, 插值结点与样条结点是密切相关的). 在应用中, 用得最广泛的样条是多项式插值三次样条 $S_3(x)$(cubic splines). 这与三次样条的构造通常归结为求解具有主对角占优的三对角矩阵的线性方程组这一事实有关. 这种方程组的求解很容易在计算机上实现. 此外, 如果函数 f 在 $[a, b]$ 上有 $k(0 \leq k \leq 3)$ 阶连续导数, 则有下述估计:

$$\|f^{(i)}(x) - S_3^{(i)}(x)\|_{C[a,b]} \leq$$
$$\leq c\|\Delta_n\|^{k-i}\omega(f^{(k)}, \|\Delta_n\|), \ 0 \leq i \leq k,$$

其中 $x_i^{(n)}$ 是插值结点. 当 $k=1$ 或 2 时, 常数 $c>0$ 不依赖于 f 和划分 Δ_n. 当 $k=0$ 或 $k=3$ 时, 对剖分序列 Δ_n 要施加进一步的限制. 对多维三次样条和高次样条均有类似的结果成立.

奇次插值样条具有一系列的极值性质. 例如, 在所有于 $[a, b]$ 上 $(m-1)$ 阶导数绝对连续, m 阶导函数属于 $L_2[a, b]$ 且在点 $x_i(a<x_0<\cdots<x_n<b)$ 取给定值 y_i 的函数类中, m 阶导数在 $[a, b]$ 上有最小 L_2 范数的函数是结点为 x_i 的多项式样条 $S_{2m-1}(x)$, 它在点 x_i 取值 y_i, 在 $[a, b]$ 上有 $2m-2$ 阶连续导数且在区间 $[a, x_0]$ 和 $[x_n, b]$ 上为次数不高于 $m-1$ 的多项式. 这一性质已成为对样条进行各种推广的基础. 对于某些函数类, 插值样条偏差的上确界恰好等于最佳逼近样条偏差的上确界, 例如, 当 $\omega(\delta)=\delta$ 时, $\widetilde{W}^r H_\omega$ 就是具有这种特征的函数类.

样条在对有误差的网格函数进行光滑处理([3], [5])的问题中起着重要作用. 样条可用来构造基([5])和具有有界 **Lebesgue 常数**(Lebesgue constants)的规范正交基([9]).

样条逼近方法与偏微分方程数值解的**有限元法**(finite-element method)有着密切联系, 有限元方法正是以选取特殊基函数的 **Ritz 法**(Ritz method)为基础的. 在有限元方法中, 分片多项式函数, 即**样条**(spline)被选作基函数. 例如, 设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个有界区域, 它可以分解成有限个直角三角形子域 T_i, $1 \leq i \leq N$. 对固定的 i, 多项式

$$P_i(x_1, x_2) =$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 x_2^2$$

由条件

$$P_i(p_{ij}) = f(p_{ij}), \ P_i(q_{ij}) = f(q_{ij}), \ j=1, 2, 3$$

确定, 其中函数 $f(p)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上连续, p_{ij} 是三角形 T_i 的顶点, q_{ij} 是 T_i 各边的中点. 对 $p \in T_i$, $i=0, \cdots, N$, 令 $S(p)=P_i(p)$. 如果 $f \in W_2^3(\Omega)$, 则有

$$\|f-S\|_{W_2^j(\Omega)} \leq ch^{3-j}\|f\|_{W_2^3(\Omega)}, \ j=0, 1,$$

其中 h 是 T_i 的某条边的长度, c 是一个绝对常数.

参考文献

[1] Ahlberg, J. H., Nilson, E. N. and Walsh, J. F., Theory of splines and their applications, Acad Press, 1967.

[2] Галкин, П. В., 《Матем заметки》, **15** (1974), 1, 3 – 14.

[3] Завьялов, Ю. С., Квасов, Б. И., Мирошниченко, В. Л., Методы сплайн-функций, М., 1980.

[4] Корнейчук, Н. П., 《Докл. АН СССР》, **213** (1973), 3, 525 – 529.

[5] Стечкин, С. Б., Субботин, Ю. Н., Сплайны в вычислительной математике, М., 1976.

[6] Субботин, Ю. Н., 《Матем. заметки》, **16** (1974), 5, 843 – 854.

[7] Субботин, Ю. Н., Черных, Н. И., 《Матем. заметки》, 7 (1970), 1, 31 – 48.

[8] Schumaker, L. L., Uniform approximation by Tchebycheffian spline functions, *J. Math. and Mech.*, **18** (1968), 369 – 377.

[9] Ciesielski, Z. and Domsta, J., Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$, *Studia Math.*, **41** (1972), 211 – 224.

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Greville, T. N. E. (ed.), Theory and application of spline functions, Acad. Press, 1969.

[A2] Schoenberg, I. J. (ed.), Approximations with special emphasis on spline functions, Acad. Press, 1969.

[A3] Prenter, P. M., Splines and variational methods, Wiley, 1975.

[A4] Boor, C. de, A practical guide to splines, Springer, 1978.

[A5] Ciesielski, Z., Spline bases in function spaces, in Z. Ciesielski and J. Musielak (ed.), Approximation Theory, Reidel, 1975, 49 – 54

[A6] Böhmer, K., Meinardus, G. and Schempp. W. (eds.), Spline-Funktionen, B. I. Mannheim, 1974

王仁宏 檀结庆 译

样条插值 [**spline interpolation**; **сплайн-интерполяция**]

借助于**样条**(spline)的插值, 亦即, 构造一个**插值样条**(interpolation spline), 使其在预置点 x_i, $i=0, \cdots, n$, 处取给定的值 $f(x_i)$. 通常, 插值样条在端点处满足某些附加条件. 例如, 就剖分 Δ_n: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 以及 $[a, b]$ 上由分片三次多项式组成且具有二阶连续导数的三次样条 $S_3(\Delta_n, x)$ 而言, 除要求 $S_3(\Delta_n, x_i)=f(x_i)$ 外, 还需要有端点处的条件, 例如, $S_3'(\Delta_n, a)=y_0'$, $S_3'(\Delta_n, b)=y_n'$ 或 $S_3''(\Delta_n, a)=y_0''$, $S_3''(\Delta_n, b)=y_n''$. 如果 $f(x_i)$ 是周期为 $b-a$ 的函数的值, 则样条也需是周期为 $b-a$ 的. 对 $2k+1$ 次的多项式样条, 端点 a 和 b 处的附加条件数将增加 k 个. 对 $2k$ 次的插值样条, 样条结点($2k$ 阶导数不连续的点)通常在各个点 x_i 之间折半选取, 而在 a 和 b 处给出其余 k 个条件.

与多项式**插值**(interpolation)相比, 样条插值具有某些优越性. 例如, 存在剖分序列 Δ_{n_k}: $a=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<\cdots<x_{n_k}^{(k)}=b$ 及相应的插值样条, 只要

$$\|\Delta_{n_k}\|=\max_{0\leqslant i\leqslant n_k-1}(x_{i+1}^{(k)}-x_i^{(k)})\to 0,$$

该插值过程对任何连续函数均收敛.

许多样条插值过程给出与**最佳逼近**(best approximation)同样的逼近阶. 此外, 某些可微函数类的样条插值具有误差不超过相应函数类的**宽度**(width)这一性质. 样条插值可用来求解某些变分问题. 例如, 在端点 a 和 b 处给定非常一般的附加条件下, 插值样条满足关系式:

$$\int_a^b [f^{(m)}(t)-S_{2m-1}^{(m)}(\Delta_n, t)]^2 dt$$
$$=\int_a^b [f^{(m)}(t)]^2 dt-\int_a^b [S_{2m-1}^{(m)}(\Delta_n, t)]^2 dt. \quad (1)$$

从该关系式可推出奇次插值样条的存在性与唯一性以及下述最简单的有关收敛性结果:

$$\left.\begin{aligned}&\|f^{(i)}(t)-S_{2m-1}^{(i)}(\Delta_n, t)\|_{L_2[a,b]}\leqslant\\&\leqslant c_{i,m}\|\Delta_n\|^{m-i}\|f^{(m)}(t)\|_{L_2[a,b]},\\&\|f^{(i)}(t)-S_{2m-1}^{(i)}(\Delta_n, t)\|_{C[a,b]}\leqslant\\&\leqslant c_{i,m}\|\Delta_n\|^{m-i-\frac{1}{2}}\|f^{(m)}(t)\|_{L_2[a,b]},\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

$i=0, \cdots, m-1$, 其中 $c_{i,m}$ 仅与 i 和 m 相关, $\|\Delta_n\|=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}-x_i)$. 对于某些可微函数类, 插值样条序列对任何满足 $\|\Delta_{n_k}\|\to 0$ 的剖分序列 Δ_{n_k} 收敛于被插值的函数(情形(2)就是如此).

除多项式插值样条外, 还可以使用更一般形式的样条(L 样条或 L_g 样条). 对于许多这些形式的样条, 依然有类似于(1)和(2)的结果成立. 对于亏数大于 1 的样条, 通常考虑多重点插值.

亦见**样条逼近**(spline approximation).

有关参考文献见**样条**(spline).

Ю. Н. Субботин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lyche, T. and Schumaker, L. L., On the convergence of cubic interpolating splines, in A. Meir and A. Sharma (eds.): Spline Functions and Approximation Theory, Birkhäuser, 1973, 169 – 189.

[A2] Subbotin, Yu. N., Interpolating splines, in Z. Ciesielski and J. Musielal (eds.): Approximation Theory, Reidel, 1975, 221 – 234.

[A3] Schoenberg, I. J., Cardinal spline interpolation, SIAM, 1973.

[A4] Prenter, P. M., Splines and variational methods, Wiley, 1975.

王仁宏 檀结庆 译

分裂群 [**split group**; **разложимая группа**], 域 k 上的, k 分裂群(k-split group)

定义在 k 上且包含一个在 k 上分裂的 **Borel 子群**(Borel subgroup)的**线性代数群**(linear algebraic group). 一个连通可解线性代数群 B 称为在 k 上分裂, 如果它定义在 k 上且有**合成序列**(composition sequence) $B=B_0\supset B_1\supset\cdots\supset B_t=\{1\}$, 使得 B_i 是定义在 k 上的连通代数群且每个商群 B_i/B_{i+1} 在 k 上或者同构于 1 维环面 $G_m\cong\mathrm{GL}_1$ 或者同构于 1 维加法群 G_a. 特别地, **代数环面**(algebraic torus)在 k 上分裂, 当且仅当它定义在 k 上且在 k 上同构于一些同样的群 G_m 的直积. 对连通可解 k 分裂群, **Borel 不动点定理**(Borel fixed-point theorem)成立. 定义在 k 上的约化线性代数群在 k 上分裂, 当且仅当它有一个在 k 上分裂的极大环面, 即当它的 k 秩与它的秩一致(见**代数群的秩**(rank of an algebraic group); **约化群**(reductive group)). 在定义在 k 上的任何有理同态下, k 分裂群的象是 k 分裂群. 定义在域 k 上的每个线性代数群在 k 的代数闭包上分裂; 如果 G 也是连通约化或连通可解的, 那么它在 k 的某个有限扩张域上分裂. 如果 k 是完满域, 那么定义在 k 上的连通可解线性代数群在 k 上分裂, 当且仅当它能在 k 上化为三角形式. 如果 $\mathrm{char}\, k=0$, 那么

定义在 k 上的线性代数群在 k 上分裂，当且仅当它的 Lie 代数 L 是 k 上分裂的（split）（或可分解的）Lie 代数（（decomposable）Lie algebra over k）；由定义，后者表明该 Lie 代数 L 有分裂的 Cartan 子代数（split Cartan subalgebra），即 **Cartan 子代数**（Cartan subalgebra）$H \subset L$，对每个 $h \in H$，算子 $\mathrm{ad}_L h$ 的所有本征值都属于 k.

如果 $G_{\mathbf{R}}$ 是半单 **R** 分裂代数群 G 的实点组成的实 Lie 群，且 $G_{\mathbf{C}}$ 是 Lie 群 $G_{\mathbf{R}}$ 的复化，那么 $G_{\mathbf{R}}$ 称为复 Lie 群 $G_{\mathbf{C}}$ 的正规实形式（normal real form）.

存在域 k 上**拟分裂群**（quasi-split group）但在 k 上不是分裂群的例子．群 SO(3, 1) 就是 $k = \mathbf{R}$ 时的一个例子.

参考文献

[1] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.（第二版 Springer, 1991）.

[2] Borel, A. and Tits, J., Groupes réductifs, *Publ. Math. IHES*, **27** (1965), 55 – 150.

[3] Мерзляков, Ю. И., Рациональные группы, М., 1980.

[4] Humphreys, J. E., Linear algebraic groups, Springer. 1975（修正第二次印刷 Springer, 1981）.

В. Л. Попов 撰 叶家琛 译

分裂序列［**split sequence**; **расщепляющаяся последовательность**］，分裂正合序列（split exact sequence），分裂短正合序列（split short exact sequence）

Abel 范畴中的一个**正合序列**（exact sequence）

$$O \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to O, \qquad (*)$$

它同构于直和序列

$$O \to A \to A \oplus C \to C \to O,$$

其中同构 $B \to A \oplus C$ 由 A, C 上的恒等映射诱导．正合序列（*）分裂的充分条件是存在 f 的右逆 f'，或 g 的左逆 g'．分裂正合序列类是群 $\mathrm{Ext}_R^1(A, C)$ 的零元（见 **Baer 乘法**（Baer multiplication））.在向量空间范畴中（即固定域上的模范畴），每个正合序列都可分裂.

在**相对同调代数**（relative homological algebra）中，典型的情况是研究在一个范畴中正合、在另一范畴中分裂的正合序列. В. Е. Говоров 撰

【补注】

参考文献

[A1] MacLane, S., Homology, Springer, 1963, P. 16, 260.

张英伯 译

可分裂群［**splittable group**; **расщепляемая группа**］

由真子群 H 和 K 生成的群（group）G，并且 H 在 G 中正规及 $H \cap K = E$（故商群 G/H 同构于 K，见**正规子群**（normal subgroup））. G 称为群 H 被群 K 的分裂扩张（split extension），或 H 和 K 的半直积（semi-direct product）．若子群 H 和 K 是元素交换的（commute elementwise），即 $hk = kh$ 对所有 $h \in H$, $k \in K$，则它们的半直积就是直积 $H \times K$．群 H 和群 K 的半直积 G 可由 K 到 H 的自同构群 $\mathrm{Aut}\, H$ 中的同态 ψ 所给定．这时 G 的乘法由下述公式确定

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 \psi(k_1)(h_2), k_1 k_2),$$

对所有 $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$. 在这种情形下，当 $K = \mathrm{Aut}\, H$ 及 ψ 是恒等映射时，G 称为 H 的全形（holomorph）（见**群的全形**（holomorph of a group））.

参考文献

[1] Gorenstein, D., Finite groups, Chelsea, reprint, 1980.

Н. Н. Вильямс 撰

【补注】 反之，设 $G = HK$ 是半直积，则用 k 在 G 上作共轭定义同态 ψ: $K \to \mathrm{Aut}\, H$，由此可重造 G，即

$$\psi(k)(h) = khk^{-1}.$$

作为集合，H 和 K 的半直积是 $H \times K$．子集 $\{(h, 1): h \in H\}$, $\{(1, k) | k \in K\}$ 是与 H, K 等同的子群. 石生明 译 王 杰 校

多项式的分裂域［**splitting field of a polynomial**; **поле разложения многочлена**］

含有一个多项式的全部根的最小的域．更确切地说，一个域 K 的扩张 L 称作域 K 上多项式 f 的分裂域，如果 f 在 L 上分解成线性因子

$$f = a_0 (x - a_1) \cdots (x - a_n)$$

且 $L = K(a_1, \cdots, a_n)$（见**域扩张**（extension of a field））．任一多项式 $f \in K[x]$ 都存在分裂域，并且在可以相差一个在 K 上为恒同映射的同构的意义下是唯一确定的．由定义即知分裂域是 K 的有限代数扩张.

例．复数域 **C** 是实数域 **R** 上多项式 $x^2 + 1$ 的分裂域．任一有限域（finite field）$GF(q)$，其中 $q = p^n$，是素域 $GF(p) \subset GF(q)$ 上多项式 $x^q - x$ 的分裂域. О. А. Иванова 撰

【补注】 亦见 **Galois 理论**（Galois theory）；**不可约多项式**（irreducible polynomial）.

参考文献

[A1] Stewart, I., Galois theory, Chapman & Hall, 1979.

赵春来 译

零散单群［**sporadic simple group**; **спорадическая простая группа**］

不属于有限单群的任何已知的无限系列中的有限

记号	名称	阶
M_{11}		$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
M_{12}		$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
M_{22}	Mathieu 群	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
M_{23}		$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
M_{24}		$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
J_1	Janko 群	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
J_2, HJ	Hall - Janko 群	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
J_3, HJM	Higman - Janko - McKay 群	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
J_4	Janko 群	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$
Co_1, $\cdot 1$		$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
Co_2, $\cdot 2$	Conway 群	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Co_3, $\cdot 3$		$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
F_{22}, $M(22)$		$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
F_{23}, $M(23)$	Fischer 群	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
F_{24}', $M(24)'$		$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
HS	Higman - Sims 群	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
He, HHM	Held - Higman - McKay 群	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
Suz	鈴木群	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
M^c	McLaughlin 群	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
Ly	Lyons 群	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Ru	Rudvalis 群	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
$O'N$, $O'NS$	O'Nan - Sims 群	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
F_1, M	Monster 或	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot$
	Fischer - Griess 群	$\cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$
F_2, B	Baby Monster	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$
F_3, E, Th	Thompson 群	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
F_5, D, HN	原田 - Norton 群	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$

单群 (simple finite group). 26 个零散单群列在上面的表中

参考文献

[1] Сыскин С. А., 《Успехи матем. наук》, 35 (1980), 5, 181 – 212.

[2] Aschbacher, M., The finite simple groups and their classification, Yale Univ. Press, 1980.

В. Д. Мазуров 撰

【补注】 有限单群的最近分类 (1981) 已导致以下结论: 除了对 Monster 作为具有某些附加性质的它的阶的仅有的单群的唯一性证明之外, 每一个非 Abel 有限单群是同构于: 一个在至少五个字母上的**交错群** (alternating group), 一个 Lie 型 (扭曲或非扭曲) 群, 或上述 26 个零散单群之一. 对该证明的讨论见 [A2].

参考文献

[A1] Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A. and Wilson, R. A., ATLAS of finite groups, Clarendon Press, 1985.

[A2] Gorenstein, D., Finite simple groups: an introduction to their classification, Plenum Press, 1982.

【译注】 参见**有限单群** (simple finite group) 中的补注, 亦参见文献 [B1].

[B1] Aschbacher, M, Sporadic groups, Cambridge Univ. Press, 1994.

石生明 译 王 杰 校

喷射 [spray; пульверизация], *在微分流形 M 上的*

切空间 TM 上的向量场 W, 用 TM 上与 M 的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 以自然的方式所伴随的局部坐标 $(x^1, \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n)$ 表示, 它的分量是 $(v^1, \cdots, v^n, f^1, \cdots, f^n)$, 其中 $f^i = f^i(x^1, \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n)$ 是 C^1 类函数, 并且对于固定的 $x^1, \cdots, x^n$ 它们是 $v^1, \cdots, v^n$ 的正的 2 次齐次函数 (W 的这些性质不依赖于局部坐标的实际选取). 这个向量场决定的微分方程组

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i,$$

$$\frac{dv^i}{dt} = f^i(x^1, \cdots, x^n, v^1, \cdots, v^n),$$

$$i = 1, \cdots, n$$

等价于 2 阶微分方程组

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = f^i\left(x^1, \cdots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \cdots, \frac{dx^n}{dt}\right);$$

因此，喷射（以不变的方式，即与坐标系无关的方式）描述了 M 上的这样一组微分方程.

喷射的最重要情形是 f^i 为 v^i 的 2 次多项式：

$$f^i = \sum \Gamma^i_{jk}(x^1, \cdots, x^n) v^j v^k, \Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}. \quad (*)$$

在此情形下，Γ^i_{jk} 在 M 上给出一个挠率为零的**仿射联络**（affine connection）. 反过来，对于每一个仿射联络，测地线方程由某个喷射给出，其中 f^i 具有形状（*）(从联络过渡到喷射时，Γ^i_{jk} 关于下指标作对称化). 如果向量场 W 是 C^2 类的，则 f^i 必定有（*）的形状. 但是在一般情形下，W 在丛 TM 的零截面的外部可以是光滑的，但是在这个截面附近不是 C^2 类的场. 在这样一种情形下，人们有时谈论广义的喷射，而把“喷射”这一术语只留给特殊情形（*）使用. 在 Finsler 几何学中测地线的微分方程产生了广义的喷射.

用不变的方式给出喷射的定义是可能的，它也适用于 Banach 流形（参见[1]).

参考文献

[1] Lang, S., Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1967.

Д. В. Аносов 撰

【补注】 仿射联络的喷射也称为该联络的**测地喷射**（geodesic spray).

参考文献

[A1] Gromoll, D., Klingenberg, W. and Meyer, W., Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer, 1968.

陈维桓 译

展形（直觉主义逻辑中的）[spread (in intuitionistic logic); поток]

直觉主义数学的一个概念（见**直觉主义**（intuitionism)). 它是一个总体，一个**种类**（species)，由一些正整数的有限序列（见**多元组**（tuple))所组成；这些有限序列称为展形的**结点**（nodes）（或展形的**容许序列**（admissible sequences)). 更精确地说，一个自然数序列的种类 Π 称为一个**展形**（spread)，如果如下的条件得到满足：1）存在一个有效的规律 a（所谓的**展形定律**（spread law))，利用它对任意序列 $\langle n_1, \cdots, n_m\rangle$ 可以确定这个序列是否为 Π 的一个结点. 2）空序列 $\langle\ \rangle$ 是任何展形的一个结点. 3）如果序列 $\langle n_1, \cdots, n_m\rangle$ 是展形的一个结点，那么它的任何形如 $\langle n_1, \cdots, n_i\rangle$ $(i \leqslant m)$ 的初始序列也是 Π 的一个结点. 4）如果序列 $\langle n_1, \cdots, n_m\rangle$ 是 Π 的一个结点，那么存在一个正整数 k，使得 $\langle n_1, \cdots, n_m, k\rangle$ 也是 Π 的一个结点.

如果考虑当且仅当 τ 是 π 的真初始序列时 $\tau < \pi$，将正整数序列排序，那么从这个顺序的观点来看，Π 是一个有效地给出的（由定律给出的）以 $\langle\ \rangle$ 为原点的一无限树. 一个选择序列 α（或者更一般地，一个将自然数转换为自然数的任意有效函数）称为展形 Π 的**元素**（element of the spread）记为 $\alpha \in \Pi$，如果对任意 n，序列 $\langle\alpha(0), \cdots, \alpha(n-1)\rangle$ 是 Π 的一个结点. 在应用上人们经常要处理有标记的展形. 一个**有标记的展形**（labelled spread）Γ 由一个展形 Π 和一个有效的规则 Γ_Π（通常称为**补足展形定律**（complementary spread law))组成，Γ_Π 使 Π 每一个结点附属一个对象 $\Gamma_\Pi(\pi)$. 因此存在着一个在展形 Π 的每一个元素和由定律 Γ_Π 给出的对象序列之间的自然对应.

在形式直觉主义数学分析的语言里一个展形是由一个函数 ——它的分布定律给出的. 在这种观点之下人们考虑标准的原始递归的在自然数序列与自然数之间的一对一的对应关系. 让零元组 $\langle\ \rangle$ 与 0 对应，让两个序列的连接被编码成原始递归函数 $x^* y$，以及让 $\hat{x}$ 表示由一个元素 x 所组成的序列. 论断“对应于 x 的序列是由 a 给出的展形的结点”被写成 $a(x) = 0$. 这时，描述“函数 a 定义一个展形”的概念的公式 $\mathrm{Spr}(a)$ 被写成

$$a(0) = 0 \ \& \ \forall x y(a(x^* y) = 0 \supset a(x) = 0) \&$$

$$\& \forall x(a(x) = 0 \supset \exists y(a(x^* \hat{y}) = 0))$$

的形式. 最后，如果 $\overline{\alpha}(n)$ 表示序列 $\langle\alpha(0), \cdots, \alpha(n-1)\rangle$ 所对应的编码数，其中 n 是序列的长度，那么公式 $\alpha \in a$（“α 是由 a 给出的展形的元素”)就被写成为 $\forall x a(\overline{\alpha}(x)) = 0$.

在数学基础中展形概念的推广，其中自然数序列代之以更为复杂的对象的序列（例如由选择序列所组成的序列)，也被加以考虑.

参考文献

[1] Heyting, A., Intuitionism, An introduction, North-Holland, 1971.

А. Г. Драгалин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dummett, M. A. E., Elements of intuitionism, Oxford Univ. Press, 1977.

[A2] Troelstra, A. S. and Dalen, D. van., Constructivism in mathematics, 1-2, North-Holland, 1988-1989.

[A3] Troelstra, A. S., Principles of intuitionism, Springer, 1969.

[A4] Troelstra, A. S., Choice sequences, Clarendon Press, 1977.

[A5] Hoeven, G. van der and Moerdijk, I., On choice

sequences determined by spreads, *J. Symbolic Logic*, 49 (1984), 908 – 916

罗里波 译 王世强 校

可求积性 [squarability; квадрируемость]

平面内一点集的 Jordan 可测性, 见 **Jordan 测度** (Jordan measure). 不是每个区域 (即连通开集) 甚至不是每个 Jordan 区域 (即其边界是一条简单闭曲线) 都是可求积的. 另一方面, 边界为一条**可求长曲线** (rectifiable curve) 的点集是可求积的.

参考文献

[1] Никольский, С. М., Курс математического анализа, 2, М., 1973 (中译本: 尼柯尔斯基, 数学分析教程, 人民教育出版社, 1981).

В. В. Сазонов 撰 周民强 译

正方形 [square; квадрат]

长与宽相等的**矩形** (rectangle).

平方 [square; квадрат], 数 a 的

积 $a \cdot a = a^2$; 因为这个积表示边长为 a 的正方形的面积, 所以称为"平方". БСЭ-3

【补注】 对 $a \cdot a$ 称"平方" (正如对 $a \cdot a \cdot a$ 称"立方"一样), 是古希腊人从几何观点看待数的痕迹. 杜小杨 译

平方根法 [square-root method; квадратного корня метод]

解具有非退化的 Hermite 阵 A 的线性代数方程组 $Ax = b$ 的一种方法. 当在计算机上执行时, 在直接法中它是最有效的.

在一般情形, 这个方法的计算格式是基于 A 的形式为

$$A = S^* D S \tag{1}$$

的因子分解, 其中 S 是具有实正对角元的上三角阵, 而 D 是具有对角元 1 或 -1 的对角阵. 由 (1) 立即得到计算矩阵 S 和 D 的元素 s_{ij} 和 d_{ii} 的递推关系:

$$\left.\begin{aligned} d_{ii} &= \operatorname{sign}\left[a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}\right], \\ s_{ii} &= \left|a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk}\right|^{1/2}, \\ s_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \bar{s}_{ki} s_{kj} d_{kk}}{s_{ii} d_{ii}}, \quad j > i. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在进行因子分解 (1) 后, 求原方程组的解化为对具有三角阵的两个方程组 $S^* D y = b$ 和 $S x = y$ 的逐次求解. 在这方面, 平方根法和解方阵组的大多数直接法的矩阵求逆过程是相同的 (见 **Gauss 法** (Gauss method)).

在实数情形, 当 A 是对称阵时, 格式 (2) 与因子分解 $A = S^T D S$ 相对应, 其中 S 是实阵, 而且有所简化. 当 A 是正定矩阵时, 格式 (2) 有实质的简化. 这时, $D = E$ 且 $A = S^* S$.

对非正定矩阵要用平方根法的变形, 它基于形如 $A = S^* S$ 的因子分解. 为计算 S 的元素, 可用类似 (2) 的递推关系. 但是, 如果 A 是实阵, 这种因子分解在计算机上的执行过程不是有效的, 因为在计算矩阵 S 时, 可能产生复数运算.

下面是平方根法的重要特征.

1) 在解基于矩阵因子分解的方程组的直接法中, 平方根法是最高速的 (是 Gauss 法的两倍).

2) 用平方根法进行矩阵的因子分解, 提供矩阵的三角部分一半元素的简洁信息就够了. 而且, 格式 (2) 使人们在计算机内存里存放矩阵 S 就行了, 而不必存放原矩阵 A 的数据. 这样, 实质上, 增加了可解的方程组的阶数.

3) 平方根法的计算格式可以对初始矩阵各个行序列所成的集逐行分布式处理. 这时, 应用外存 (贮器) 就可以求解高阶方程组.

4) 平方根法保持矩阵的带状结构, 即矩阵 S 和初始矩阵的上半部分有同样的形式.

5) 对具有正定矩阵的方程组, 平方根法特别有效. 在这种情况, 计算过程中矩阵的元素不增加. 这种性质保证了计算过程关于舍入误差的稳定性. 在这种情况, 计算解精度的上界在直接法类中是最小的. 在有可能计算具有双精度的格式 (2) 的向量的数积时, 可以使误差的总体水平进一步减小.

当采用定点运算时, 计算过程中不增加元素为平方根法提供了一个方便的计算机执行过程.

6) 分解式 (1) 可以用来计算行列式和逆矩阵.

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Численные методы алгебры, М., 1966.
[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, М., 1974 (英译本: Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977)
[3] Wilkinson, J. H., The algebraic eigenvalue problem, Oxford Univ. Press, 1969 (中译本: J. H. 威尔金森, 代数特征值问题, 科学出版社, 1987).
[4] Воеводин, В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977.

Г. Д. Ким 撰 袁国兴 张宝琳 译

稳定性 [stability; устойчивость]

含意并未清楚界定的名词.

1) 与运动相关的稳定性是一系统在无限时间区间中的性态的一种特性. 运动的这一特性可以详细说明如下:

a) 它即是这样的性质, 当运动系统 (在**相空间** (phase space) 中) 初始位置有小扰动时, 此系统的运动距某一运动也在某种意义下有小的偏离, 而且此偏离之所谓小对 $t \geqslant 0$ 是一致的 (见 **Ляпунов 稳定性** (Lyapunov stability); **轨道稳定性** (orbit stability); **一致稳定性** (uniform stability)). 在另一些论述中, 运动的稳定性指的是这样的性质, 即运动系统 (在相空间中) 的初始位置, 以及运动规律本身均有小扰动时, 此系统的运动离某一位置只有小的偏离 (见**持续作用扰动下的稳定性** (stability in the presence of persistently acting perturbations)). 有时只对一部分参数而非全体参数来度量偏离和扰动之小 (见**对部分变量的稳定性** (stability for a part of the variables)).

b) 运动的稳定性作为系统的相图的某些特点在运动规律有了小扰动时仍得以保持这样一个性质 (见**稳定性理论** (stability theory); **粗系统** (rough system)).

c) 稳定性即指这样一种性质, 即此系统在运动过程中恒位于相空间的某一有界区域中 (见 **Lagrange 稳定性** (Lagrange stability)).

d) 指系统的这一性质, 即在运动过程中可任意频繁地且任意接近地回到 (其相空间中的) 初始位置 (见 **Poisson 稳定性** (Poisson stability)).

2) 与几何对象或其他依赖于参数的对象有关的稳定性, 即这些对象对参数的连续依赖性 (见 [1], [2]).

然而, "稳定性" 的所有上述的解释仍未穷尽其含意.

参考文献

[1] Погорелов, А. В., Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, М., 1967.

[2] Решетняк, Ю. Г., Теоремы устойчивости в геометрии и анализе, Новосиб., 1982.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 "稳定性" 一词在代数拓扑学和代数 K 理论的稳定化问题中 (例如见**代数 K 理论中的稳定性定理** (stability theorems in algebraic K-theory); **稳定同伦群** (stable homotopy group)), 在逻辑理论的稳定性问题中 (例如见 (**逻辑中的**) **稳定性理论** (stability theory (in logic)); **稳定与非稳定理论** (stable and unstable theories)), 或者在不变性问题中的稳定性问题 (一集合中的子集在一变换群下的稳定性), 都有不同的含意. 相当一般地说来, 稳定性就是指当着其他性质改变时, 某一性质仍得以保持不变. 齐民友 译

绝对稳定性 [stability, absolute; устойчивость, абсолютная]

非线性常微分方程组 (或其他类型方程组) 之平凡解的整体稳定性, 而且对某一类中的所有方程组为一致的. "绝对稳定性" 一词总是假设已给一类方程组, 并指明了在何种意义下理解稳定性与一致性. 除常微分方程外, 也考虑有限差分方程, 积分方程, 具有延迟变元的常微分方程和偏微分方程的绝对稳定性

考虑由微分方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B\xi(t) \qquad (1)$$

以及函数对 $\{x(\cdot), \xi(\cdot)\}$ 之某个集合 $\mathfrak{M}$ 所描述的系统. 这里 A 和 B 分别是 $N\times N$ 维和 $N\times n$ 维复常数矩阵; $x(t)$ 和 $\xi(t)$ 是复值函数所成的 N 阶与 n 阶向量, 其中 $\xi(t)$ 为局部可积的而 $x(t)$ 为绝对连续的. 在应用中, A, B, $x(t)$, $\xi(t)$ 通常都是实的, 方程 (1) 描述一个系统的线性部分, 而 $\mathfrak{M}$ 则由此系统的非线性块之性质决定. 在简单的情况下, 只有一个非线性块, 它由方程

$$\xi(t)=\varphi[\sigma(t), t], \ \sigma(t)=Cx(t) \qquad (2)$$

来描述 ($\sigma(t)$ 与 $\xi(t)$ 是标量函数而 C 是一个 $(1\times N)$ 矩阵; $\sigma(t)$, $\xi(t)$ 和 C 都是实的). 这时 $\mathfrak{M}$ 就是使 (2) 成立的一切函数对 $\{x(t), \xi(t)\}$ 之集合.

从对于特殊的非线性方程组的大量研究, 可以理解到, 首先应该考虑 $\xi(t)$ 和 $x(t)$ 的某个二次关系. 例如, 设对 (2) 中的函数 $\varphi(\sigma, t)$ 只知道对于一切 $t\geqslant 0$ 和 σ 均有

$$\mu_1 \leqslant \frac{\varphi(\sigma, t)}{\sigma} \leqslant \mu_2.$$

这时 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}[\mu_1, \mu_2]$ 就是使得 $\mu_1\leqslant \xi(t)/\sigma(t) \leqslant \mu_2$ 几乎处处成立的所有 $x(t)$ 和 $\xi(t)$ 之集合, 其中 $\sigma(t)=Cx(t)$; 上式也可写为

$$[\mu_2\sigma(t)-\xi(t)][\xi(t)-\mu_1\sigma(t)]\geqslant 0. \qquad (3)$$

以下, 设 $n\geqslant 1$ 而 $F(x, \xi)$ 是 $\mathbf{C}^N\times\mathbf{C}^n$ 上的 Hermite 形式. 在一般情况下, 要考虑几乎处处适合**局部约束的** (local constraint)

$$F[x(t), \xi(t)]\geqslant 0 \qquad (4)$$

的函数对 $\{x(t), \xi(t)\}$ 之集合 $\mathfrak{M}_{F,L}$, 也要考虑适合**积分约束的** (integral constraint)

$$\exists T_k\to\infty: \int_0^{T_k} F[x(t), \xi(t)]dt\geqslant -\gamma \qquad (5)$$

的函数对 $\{x(t), \xi(t)\}$ 之集合 $\mathfrak{M}_{F,I}(\gamma)$ (数 T_k 与 $x(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ 有关). 有许多在应用中很重要的非线性块 (如 "排气孔"、滞后非线性、各种脉冲调制

器）都满足一个含有适当选择的 Hermite 形式 $F(x, \xi)$ 的约束（5）.

以下设方程（1）是可控的（controllable，见[1]），即设 $N \times n$ 维矩阵

$$(B, AB, \cdots, A^{N-1}B)$$

之秩为 N，并设下述的极小稳定性（minimal stability）条件亦得满足：存在一个 $n \times N$ 维矩阵 R 使得 $A + BR$ 成一 Hurwitz 矩阵（Hurwitz matrix）（即为稳定的），而且

$$F(x, Rx) \geqslant 0$$

对任意 x 成立，F 即（4）或（5）中的 Hermite 形式. 令 D, E 分别为任意的 $m \times N$ 阶和 $m \times n$ 阶矩阵，$\|D\| + \|E\| \neq 0$，并且构成系统（1）的"输出"：

$$\eta(t) = Dx(t) + E\xi(t). \tag{6}$$

要区别实的情况，即（1），（6）中的一切量和 $F(x, \xi)$ 的系数均为实的情况，以及复的情况，即它们一般地为复值的情况. 以下用 $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,L}$（或 $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,I}(\gamma)$）表示适合（4）（或（5））的一切实的 $x(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ 之集合. 令

$$\|\eta(\cdot)\|^2 = \int_0^{\infty} |\eta(t)|^2 dt.$$

系统（1）称为在类 $\mathfrak{M}$ 中关于输出（6）为绝对稳定的，如果存在常数 C_1, $C_2 \geqslant 0$，使得由（1），（6）以及 $[x(\cdot), \xi(\cdot)] \in \mathfrak{M}$ 可得 $\|\eta(\cdot)\|$ 为有限的而且满足估计式

$$\|\eta(\cdot)\|^2 \leqslant C_1 |x(0)|^2 + C_2. \tag{7}$$

绝对稳定性的二次准则（quadratic criteria for absolute stability）. 系统（1）在类 $\mathfrak{M}_{F,I}(\gamma)$（若是实的情况则是在类 $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,I}(\gamma)$）中关于输出（6）为绝对稳定的必要充分条件是

$$\exists \delta > 0: F(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \leqslant -\delta |\tilde{\eta}|^2 \tag{8}$$

对一切适合以下关系式的复的 $\tilde{x}$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ 和实的 ω 成立：

$$i\omega\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{\xi}, \quad \tilde{\eta} = D\tilde{x} + E\tilde{\xi}. \tag{9}$$

如果（8），（9）成立，则可在（7）中取 $C_2 = C_2'\gamma$，而 C_1, C_2' 两数均与（5）中的 γ 无关. 若 $\eta(t) = x(t)$ 且（4）成立，而（8）对于 $\tilde{\eta} = \tilde{x}$ 成立，则对一切 $x(\cdot)$, $t \geqslant t_0$ 有整体的指数稳定性（exponential stability）：

$$\exists C, \varepsilon > 0: |x(t)| \leqslant Ce^{-\varepsilon(t-t_0)}|x(t_0)|. \tag{10}$$

设对一切 ω, $\det(A - i\omega I) \neq 0$（$I$ 是 $N \times N$ 单位矩阵）. 系统（1）在类 $\mathfrak{M}_{F,L}$ 中关于输出 $\eta(t) = [x(t), \xi(t)]$ 为绝对稳定的必要充分条件是对任意 ω（$-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$）和任意复的 $\tilde{\xi} \neq 0$，以下不等式成立：

$$F[(A - i\omega I)^{-1}B\tilde{\xi}, \tilde{\xi}] < 0. \tag{11}$$

对于类 $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,L}$ 只对于充分性有类似断言成立. 在类 $\mathfrak{M}^{\partial}_{F,L}$ 中只有对特殊的 Hermite 形式 F 才知道绝对稳定的必要充分条件，而只当 $N = 2$ 时有可以有效地验证的条件（见[3]，[7]）.

由关系式（9）可知

$$\tilde{\eta} = W^{(\eta)}(i\omega)\tilde{\xi},$$

这里，$W^{(\eta)}(i\omega) = E + D(i\omega I - A)^{-1}B$；矩阵 $W^{(\eta)}(i\omega)$ 之元素 $W^{(\eta)}_{jk}$ 称为由输入 ξ_k 到输出 η_j 的频率特征（frequency characteristic）. 可用频率特征来表示的，确立系统有某些性质的判别准则称为频率稳定性准则（frequency stability criteria）. 频率准则的优点是在实际应用中有用，且在系统（1）经历变换 $x' = Sx$（S = 常数矩阵，$\det S \neq 0$）时不变.

在实情况且 $n = 1$ 时，对于由关系式（3）所定义的类 $\mathfrak{M}[\mu_1, \mu_2]$，条件（11）化为

$$\mathrm{Re}\{[\mu_2 \overline{W(i\omega)} - 1][1 - \mu_1 W(i\omega)]\} > 0, \tag{12}$$

这里 $W(i\omega) = C(A - i\omega I)^{-1}B$ 是由输入 $\xi(t)$ 到输出 $[-\sigma(t)]$ 的频率特征. 频率准则（12）（圆准则（circle criterion））表明，频率特征 $W(i\omega)$（$-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$）与中心在 $(-\mu_1^{-1} - \mu_2^{-1})/2$ 处且经过点 $(-\mu_1^{-1}, -\mu_2^{-1})$ 的圆不相交. 这时的极小稳定性条件意味着线性系统（1）（其中 $\xi = \mu\sigma$, $\sigma = Cx$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$）的渐近稳定性. 准则（12）是 Михайлов-Nyquist 准则（见 **Михайлов 准则**（Mikhailov criterion）；**Nyquist 准则**（Nyquist criterion））对非线性系统的自然的推广.

从历史来说，非线性系统之绝对稳定性的第一个频率准则是 $n = 1$ 时关于定常非线性类 M, $\xi(t) = \varphi[\sigma(t)]$（其中 $0 \leqslant \sigma\varphi(\sigma) \leqslant \mu_0\sigma^2$）的 Popov 准则（Popov criterion）（见[2]），它就是

$$\exists \theta: \mu_0^{-1} + \mathrm{Re}\, W(i\omega) + \theta \mathrm{Re}[i\omega W(i\omega)] > 0, \tag{13}$$
$$0 \leqslant \omega \leqslant \infty.$$

这时的极小稳定性条件等价于要求（1）中的矩阵 A 为 Hurwitz 矩阵. 这个准则可以用几何方法简单地验证.

频率判别准则（6），（12），（13）和其他的频率准则都与整体 **Ляпунов 函数**（Lyapunov function）的

存在性有确定的联系．绝对稳定性的频率判别准则通常将包含一切可用某个多参数函数类的 Ляпунов 函数得出的准则．例如，准则（12）就是存在一个如下的函数之必要充分条件，即存在一函数

$$V(x)=x^{*}Hx$$

（$H=H^{*}=$ 常数是（$N\times N$）维矩阵，$*$ 是 Hermite 共轭的符号），使得它沿着系统（1）的轨道（具有任意非线性（2），但 $\mu_1\leqslant\varphi(\sigma,t)/\sigma\leqslant\mu_2$）的导数均满足不等式

$$\frac{dV(x)}{dx}<0,\ \text{当}\ x\neq 0\ \text{时}.$$

类似地，Popov 频率条件（13）包含了所有可用以下形状的 Ляпунов 函数建立的准则：

$$V(x)=x^{*}Hx+\theta\int_{0}^{\sigma}\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

对于不同类别的非线性还知道绝对稳定性的许多其他的频率判别准则（见[3]－[6]）．特别是，其中包含了许多在应用上重要的情况，例如非唯一的平衡位置（见[1]）．绝对稳定性的频率准则使得可以从一般形状的非线性系统中分出那些容易确定其整体稳定性的类来．例如，系统（1），其中 $\xi=\varphi(\sigma)$，$\sigma=Cx$，$N\leqslant 3$，$n=1$（即阶数至多为 3 而有一个非线性条件的任意系统），当 $\mu_1\leqslant\varphi'(\sigma)\leqslant\mu_2$ 时是整体渐近稳定的，而任意线性系统，其中 $\xi=\mu\sigma(\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2)$ 者都是渐近稳定的．对于 4 阶（或更高阶）系统，类似的论断是不正确的．进一步、对于 $N\geqslant 4$，$n=1$，存在具有非线性条件 $\xi=\varphi(\sigma)(\mu_1\leqslant\varphi'(\sigma)\leqslant\mu_2)$ 的系统(1)，使任一线性化系统且 $\xi=\mu\sigma(\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2)$ 之矩阵是 Hurwitz 矩阵，但非线性系统有一周期解．

若把极小稳定性条件代以类似的极小不稳定性条件，则不等式（8），（11），（12），（13）变成**绝对不稳定**（absolute instability）（此词将有相应的意义）的准则．例如，考虑实情况而 $n=1$，设系统（1）具有 $\xi=\mu\sigma(\sigma=Cx)$ 而 μ 适合 $\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_2$，若其系数矩阵（即矩阵 $A+B\mu C$）在半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 中有 $k\geqslant 1$ 个本征值，并设频率条件（12）满足．这时，函数 $\varphi(\sigma,t)$ 满足条件 $\mu_1\leqslant\varphi(\sigma,t)/\sigma\leqslant\mu_2$ 的系统（1），（2）（以及（1），（3））都有一解 $x(t)$，使得

$$|x(t)|\geqslant Ce^{\varepsilon t}|x(0)|,\ t\geqslant 0,$$

这里常数 $C>0$，$\varepsilon>0$ 对此类中的所有系统都是相同的．相应的向量 $x(0)$ 填满了锥 $x(0)^{*}Hx(0)<0$，而 $H=H^{*}$ 是具有 k 个负本征值的矩阵．

类似地，对于 $n=1$，条件（13）是具有 $\sigma=Cx$ 的系统（1）在定常非线性类 $\xi(t)=\varphi[\sigma(t)]$（其中 $0\leqslant\sigma\varphi(\sigma)\leqslant\mu_0\sigma^2$）的**绝对不稳定的频率准则**（frequency criterion for the absolute instability），只要（1）中的矩阵 A 在半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 中有一个本征值．

在绝对稳定性理论中对于耗散、收敛性、周期运动的存在性（自振动，强迫状态）等等，都有类似的频率准则（例如见[3]，[5]及[1]，[3]，[5]的参考文献；亦见[8]－[10]）．

参考文献

[1] Гелиг, А. Х., Леонов, Г. А., Якубович, В. А., Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, М., 1978.

[2] Айзерман, М. А., Гантмахер, Ф. Р., Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем, М., 1963.

[3] Якубович, В. А., в кн., Методы исследования нелинейных систем автоматического управления, М., 1975, 74－180.

[4] Попов, В. М., Гиперустойчивость автоматических систем, пер. с рум., М., 1970（译自罗马尼亚文）（英译本：Popov, V. M., Hyperstability of control systems, Springer, 1973）.

[5] Воронов, А. А., Устойчивость, управляемость, наблюдаемость, М., 1979.

[6] Резван, В., Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием, пер. с рум., М., 1983（译自罗马尼亚文）.

[7] Пятницкий, Е. С., «Автоматика и телемеханика», 1968, 6, 5－36.

[8] Šiljak, D. D., Nonlinear systems. Parameter analysis and design, Wiley, 1969.

[9] Narendra, K. S. and Taylor, I. H., Frequency domain criteria for absolute stability, Acad. Press, 1973.

[10] Willems, J. L., Stability theory of dynamical systems, Nelson, 1970.

В. А. Якубович 撰

【补注】

参考文献

[A1] Willems, J. C., Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation, *IEEE Trans. Aut. Control* AC-16 (1971), 621－634.

[A2] La Salle, J. and Lefschetz, S., Stability by Lyapunov's direct method with applications, Acad. Press, 1961.

齐民友 译

稳定性准则[**stability criterion**; **устойчивости критерий**]

方程

$$\lambda^{n}+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0\qquad(*)$$

的所有根有负的实部的一个充要条件．

当应用一次近似稳定性的 Ляпунов 定理于微分方程自治系统的一个不动点时，可运用稳定性准则（见 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability））．最常用的稳定

性准则是 Routh-Hurwitz 准则 (Routh-Hurwitz criterion) 或 Hurwitz 准则 (Hurwitz criterion): 方程 (*) 的所有根有负的实部的充要条件是不等式 $\Delta_i > 0$, $i \in (1, \cdots, n)$ 成立, 其中

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots,$$

是矩阵

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_n \end{Vmatrix}$$

的主对角线子式 (在这个矩阵的主对角线上有 $a_1, \cdots, a_n$; 对 $i > n$, $a_i = 0$).

当 $n = 2$ 时, Routh-Hurwitz 稳定性准则形式特别简单: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ 的根有负的实部的充要条件是方程有正的系数: $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

对每一个 $n \in \mathbf{N}$, 方程 (*) 的所有根有负的实部的必要条件 (对 $n > 2$ 是不充分的) 是方程的所有系数均为正: $a_i > 0$, $i \in \{1, \cdots, n\}$. 如果行列式 Δ_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$ 至少有一个是负的, 则方程 (*) 有一个根有正的实部 (当运用关于一次近似的不稳定的 Ляпунов 定理于微分方程的自治系统的一个不动点时, 可以应用这个论断, 见 **Ляпунов 稳定性**. 如果对所有的 $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\Delta_i \geqslant 0$, 可是对某一个 $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\Delta_i = 0$, 则不用求出方程 (*) 的根, 也可以描述方程 (*) 的根相对于虚轴的位置 (见 [5], [8], 第 16 章, 第 8 节).

对应用更简单的是 Liénard-Chipart 准则 (Liénard-Chipart criterion): 方程 (*) 的所有根有负的实部的充要条件是下列不等式成立: $a_i > 0$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\Delta_{n-2i+1} > 0$, $i \in \{1, \cdots, [n/2]\}$ (行列式 Δ_i 和 Routh-Hurwitz 准则里的 Δ_i 是一样的).

Hermite 准则 (Hermite criterion) (历史上最早的, 见 [1], [10], 第 3.1 节) 允许借助于对方程 (*) 的系数的有限个算术运算来确定这个方程的所有根是否有负的实部. 上面阐述的 Routh-Hurwitz 准则是由 A. Hurwitz 发现的 Hermite 准则的一个变型. Ляпунов 稳定性准则也已熟知 (见 [3], [8], 第 16 章, 第 5 节, [10], 第 3.5 节).

为了研究微分映射 (具有离散时间的自治系统) 不动点的稳定性, 也为了研究微分方程自治系统闭轨道的**轨道稳定性** (orbit stability), 必须应用方程 (*) 的所有根的绝对值小于 1 的充要条件. 这个准则是由上面叙述的开单位圆盘到开左半平面的映射 $\lambda \mapsto (\lambda+1)/(\lambda-1)$ 的稳定性准则得到的 (见 [10], 第 3.2 节).

参考文献

[1] Hermite, C., Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprise entre des limites donnés, *J. Reine Angew. Math.*, 52 (1856), 39 − 51.

[2] Routh, E. J., A treatise on the stability of a given state of motion, Macmillan, 1877.

[3] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956 (英译本: Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966)

[4] Hurwitz, A., Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, *Math. Ann.*, 46 (1895), 273 − 284.

[5] Orlando, L., Sul problema di Hurwitz relative alle parti reali delle radici di un'equazione algebrica, *Math. Ann.*, 71 (1911), 233 − 245.

[6] Liénard, A. and Chipart, M. H., Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique, *J. Math. Pure Appl.*, (6) 10 (1914), 291 − 346.

[7] Четаев, Н. Г., Устойчивость движения, М.-Л., 1946.

[8] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967 (中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔, 矩阵论, 上、下卷, 高等教育出版社, 1955).

[9] Демидович, Б. П., Лекций по математической теорий устойчивости, М., 1967.

[10] Jury, E., Inners and stability of dynamic systems, Wiley, 1974.

B. M. Миллионщиков 撰

【补注】 也见 **Mikhailov 准则** (Mikhailov criterion), 它等价于 Routh-Hurwitz 准则, 可是用曲线表示的公式可由 λ 在正虚轴上变化时的 (*) 得到.

在控制论 (强控制) 中, 人们常常关心的是整个多项式族而不是单个多项式的稳定性. 而这种情况的稳定性结果即为通常的 Kharitonov 型定理.

原 Харитонов 定理 ([A1], [A2]) 可以如下叙述. 令 $P(s; q)$ 是多项式族

$$P(s;q) = q_0 + q_1 s + \cdots + q_n s^n,$$

其中每个 q_i 分布在给定的闭区间 $[q_i^-, q_i^+]$ 上, 形成了四个多项式

$$K_1(s) = q_0^- + q_1^- s + q_2^+ s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^- s^4 + \\ + q_5^- s^5 + q_6^+ s^6 + \cdots,$$

$$K_2(s) = q_0^+ + q_1^+ s + q_2^- s^2 + q_3^- s^3 + q_4^+ s^4 + \\ + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \cdots,$$

$$K_3(s) = q_0^+ + q_1^- s + q_2^- s^2 + q_3^+ s^3 + q_4^+ s^4 + \\ + q_5^- s^5 + q_6^- s^6 + \cdots,$$

$$K_4(s) = q_0^- + q_1^+ s + q_2^+ s^2 + q_3^- s^3 + q_4 s^4 + \\ + q_5^+ s^5 + q_6^- s^6 + \cdots.$$

则每个多项式 $P(s;q)(q_i^- \leqslant q_i \leqslant q_i^+)$ 的零点严格地在左半平面内，当且仅当这四个多项式 $K_i(s)(i = 1, \cdots, 4)$ 均有此性质时．

有大量类似定理的变形可用于允许有零点出现的其他区域、其余形状的多项式（例如上面高于三次的多项式）族和离散时间稳定性，见述评[A3]．

参考文献

[A1] Kharitonov, V. L., Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations, *Diff Uravn.*, 14(1978), 11, 1483 − 1485(俄文).

[A2] Kharitonov, V. L., On a generalization of a stability criterion, *Akad. Nauk Kazakhs SSR, Fiz-Mat.*, 1 (1978), 53 − 57(俄文).

[A3] Barmish, B. and Koss, B., New tools for robustness analysis, in Proc. 27-th IEEE CDC, IEEE, 1988, 1 − 6.

袁国兴 张宝琳 译

对部分变量的稳定性[stability for a part of the variables; устойчивость по части переменных]

常微分方程组

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \cdots, x_n),\ s = 1, \cdots, n \qquad (1)$$

的解 $x = 0$ 对于一部分变量 $x_1, \cdots, x_k (k < n)$ 而不是对于所有变量的 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability）．这里 $X_s(t, x)$ 是已给的实值连续函数，并在区域

$$t \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leqslant \text{常数} \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 < \infty \qquad (2)$$

中满足解 $x(t;\ t_0, x_0)$ 的存在性与唯一性条件．此外

$$X_s(t, 0) \equiv 0,\ s = 1, \cdots, n,$$

且所有的解都定义于整个 $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ 上，$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leqslant H$．

令当 $i = 1, \cdots, k$ 时 $x_i = y_i$；当 $j = 1, \cdots, m$ 时 $x_{k+j} = z_j$，而 $n = k + m,\ m \geqslant 1$；再令

$$\|y\| = \left[\sum_{i=1}^{k} y_i^2\right]^{1/2},\ \|z\| = \left[\sum_{j=1}^{m} z_j^2\right]^{1/2},$$

$$\|x\| = \left[\sum_{s=1}^{n} x_s^2\right]^{1/2}.$$

方程组 (1) 的解 $x = 0$ 称为：

a) 关于 $x_1, \cdots, x_k$ 稳定的（stable relative to $x_1, \cdots, x_k$）或 y 稳定的（y-stable），如果

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in I)(\exists \delta > 0)(\forall x_0 \in B_\delta)(\forall t \in J^+):$$
$$\|y(t;\ t_0, x_0)\| < \varepsilon,$$

即对任一给定的 $\varepsilon > 0 (\varepsilon < H)$ 和 $t_0 \geqslant 0$，可以找到一数 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得对每个满足条件 $\|x_0\| \leqslant \delta$ 的扰动 x_0 以及每个 $t > t_0$，解 $y(t;\ t_0, x_0)$ 满足条件 $\|y\| < \varepsilon$；

b) y 不稳定的（y-unstable）相反情况，即

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists t_0 \in I)(\forall \delta > 0)(\exists x_0 \in B_\delta)(\exists t \in J^+):$$
$$\|y(t;\ t_0, x_0)\| \geqslant \varepsilon;$$

c) 关于 t_0 一致 y 稳定的（y-stable uniformly in t_0），即在定义 a) 中对每一个 $\varepsilon > 0$，数 $\delta(\varepsilon)$ 可以选得与 t_0 无关．

d) 渐近 y 稳定的（asymptotically y-stable），即它是 y 稳定的，而且对每个 $t_0 \geqslant 0$，必存在一个 $\delta_1(t_0) > 0$，使当 $\|x_0\| \leqslant \delta_1$ 时，

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t;\ t_0, x_0)\| = 0.$$

以上 $I = [0, \infty)$，J^+ 是 $x(t;\ t_0, x_0)$ 定义于其上的最大的右区间；$B_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \|x\| < \delta\}$；在情况 d) 中，除了上面提出的条件外还假设方程组 (1) 的所有解都在 $[t_0, \infty)$ 上存在．

对部分变量的稳定性问题是 A. M. Ляпунов 提出的（[1]），它是对所有变量（即 $k = n$）的稳定性问题的推广．对于解这个问题，应用适当修正的 **Ляпунов 函数**（Lyapunov function）方法于 y 稳定性问题是特别有效的（见[2]）．这个方法的基础是几个定理，它们推广了经典的 Ляпунов 定理．

考虑一个实值函数 $V(t, x) \in C^1$，$V(t, 0) = 0$，同时也考虑其对 t 的全导数（应用 (1)）：

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s.$$

一个有固定符号的函数 $V(t, x)$，若存在一个正定函数 $W(y)$，使在区域 (2) 中

$$V(t, x) \geqslant W(y) \text{ 或 } -V(t, x) \geqslant W(y),$$

就说 V 是 y 符号定函数（y-sign-definite function）．说一个有界函数 $V(t, x)$ 对 $x_1, \cdots, x_p$ 允许一个无穷小上界（admit an infinitesimal upper bound），若对每一个 $l > 0$ 都存在一个 $\lambda(l)$，使当 $t \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 < \lambda$，$-\infty < x_{p+1}, \cdots, x_n < \infty$ 时恒有

$$|V(t, x)| < l.$$

定理 1. 若对方程组 (1) 存在一个 y 正定函数 $V(t, x)$，而其导数 $\dot{V} \leqslant 0$，则解 $x = 0$ 是 y 稳定的．

定理 2. 若定理 1 的条件成立，而且 V 对 x 允许一个无穷小上界，则方程组 (1) 的解 $x = 0$ 对 t_0

一致地 y 稳定的.

定理 3. 若定理 1 的条件满足, 而且 V 对 y 允许一个无穷小上界, 则对任一 $\varepsilon>0$, 可以找到一个 $\delta_2(\varepsilon)>0$, 使得由 $t_0\geqslant 0$, $\|y_0\|\leqslant\delta_2$, $0\leqslant\|z_0\|<\infty$, 可以得到以下不等式: 对一切 $t\geqslant t_0$,

$$\|y(t;\ t_0,\ x_0)\|<\varepsilon.$$

定理 4. 若方程组 (1) 存在一个对 $x_1,\cdots,x_p$ $(k\leqslant p\leqslant n)$ 允许一个无穷小上界的 y 正定函数 V, 其导数 $\dot V$ 对 $x_1,\cdots,x_p$ 为负定, 则方程组 (1) 的解 $x=0$ 为渐近 y 稳定的.

为了研究 y 不稳定性, 成功地应用了 Читаев 的不稳定定理 (见 **Читаев 函数** (Chetaev function)) 和一些其他定理. 还得到了一些 y 稳定性定理之逆成立的条件, 例如定理 1, 定理 2 和 $p=k$ 时的定理 4 之逆. 应用了微分不等式和向量 Ляпунов 函数的方法来证明整体渐近 y 稳定性定理和一阶逼近定理等等 (见 [3], [4]).

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., 《Матем. сб.》, 17 (1893), 2, 253 – 333.

[2] Румянцев, В. В., 《Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астроном., физ., Хим.》, 1957, 4, 9 – 16.

[3] Озиранер, А. С., Румянцев, В. В. 《Прикл. матем. и механ.》, 36 (1972), 2, 364 – 384.

В. В. Румянцев 撰

【补注】 对部分变量的稳定性也称为部分稳定性 (partial stability), 有时称为条件稳定性 (conditional stability) ([A1]). 但是后一种用语还有别的意思: 令 C 为一类轨道, $x(t;\ t_0,\ x_0)$ 是 C 中一个轨道. 这个轨道称为对 C 为稳定的 (stable relative to C), 若对已给的 $\varepsilon>0$ 存在一个 $\delta>0$, 使对每一个轨道 $\widetilde{x}(t;\ t_0,\ \widetilde{x}_0)$, 由 $\|x_0-\widetilde{x}_0\|\leqslant\delta$ 可得 $\|x(t;\ t_0,\ x_0)-\widetilde{x}(t;\ t_0,\ \widetilde{x}_0)\|\leqslant\varepsilon$. 若 C 不是所有轨道的类, 这样一个 $x(t;\ t_0,\ x_0)$ 就称为条件稳定的 ([A2]).

参考文献

[A1] Hahn, W., Stability of motion, Springer, 1965, §55.

[A2] Lefschetz, S., Differential equations: geometric theory, Dover, reprint, 1977, 第 78, 83 页 (中译本: S. 莱夫谢茨, 微分方程几何理论, 上海科学技术出版社, 1965).

齐民友 译

对策论中的稳定性 [stability in game theory; устойчивость в теории игр]

直接或间接反映局势稳定性 (stability of a situation) 或局势集的稳定性的观念的一种原理. 人们选取了下列几种基本的稳定性概念.

1. φ 稳定性 (φ-stability). 见**联盟对策** (coalitional game).

2. ψ 稳定性 (ψ-stability). **合作对策** (cooperative game) 中的一种最优化原理, 它联系由局中人集 I 的联盟划分和相对于新联盟形成的配置所组成的对的稳定性概念. 局中人集 I 的划分 $\mathscr{T}=(T_1,\cdots,T_m)$ 称为联盟结构 (coalition structure). 设 $<I,v>$ 是合作对策, ψ 是使每个联盟结构 $\mathscr{T}$ 联系联盟集 $\psi(\mathscr{T})$ 的函数. 对 $(x,\mathscr{T})$ (x 是配置) 称为 ψ 稳定的, 如果 $\sum_{i\in S}x_i\geqslant v(S)$ 对于所有 $S\in\psi(\mathscr{T})$ 成立, 且当 $\{i\}\notin\mathscr{T}$ 时, $x_i>v(\{i\})$.

3. k 稳定性 (k-stability). ψ 稳定性的特殊情形, 其中在对于 $\psi(\mathscr{T})$ 选取联盟时, $\mathscr{T}$ 中的元素的变化不能多于 k 个局中人.

4. M 稳定性 (M-stability). 合作对策论中的最优化原理, 它将联盟形成和定义在联盟 T 的集合上的特征函数 v 的值 $v(T)$ 的配置的稳定性的直观概念形式化, 这种稳定性是相对于局中人之间一种联盟针对另外的联盟的可能的威胁而言的. 设 $x=(x_i)_{i\in I}$ 是满足条件 $\sum_{i\in T_k}x_i=v(T_k)$, $k=1,\cdots,m$, 的向量, $\mathscr{T}=(T_1,\cdots,T_m)$ 是联盟结构. 则称对 $(x,\mathscr{T})$ 为一个构形 (configuration). 构形称为个体合理的 (individually rational), 如果 $x_i\geqslant v(\{i\})$, $i\in I$. 构形 $(x,\mathscr{T})$ 称为是联盟合理的 (coalitionally rational), 如果向量 x 使 $\sum_{i\in S}x_i\geqslant v(S)$ 对于任何联盟 $S\in T_k$, $k=1,\cdots,m$ 成立. 在 $\sum_{k=1}^m v(T_k)=v(I)$ 的情形下, 特别是, 当 $\mathscr{T}=\{I\}$ 时, 对于每一个个体合理构形 $(x,\mathscr{T})$, 向量 x 是一个配置.

集合 $P(K;\mathscr{T})=\{i\in I: i\in T_k,\ T_k\cap K\neq\varnothing\}$ 称为联盟 $K\subset I$ 在联盟结构 $\mathscr{T}$ 中的对手集 (set of partners). 设 $(x,\mathscr{T})$ 是联盟合理构形, $K,L\subset I$ 是不相交的联盟. 如果联盟合理的构形 (y,U) 满足条件

$$P(K;U)\cap L=\varnothing,$$

$$y_i>x_i\ \ 对于任何\ \ i\in K,$$

$$y_i\geqslant x_i\ \ 对于任何\ \ i\in P(K;U),$$

那么它称为联盟 K 针对 L 的威胁 (threat of a coalition K against L). L 针对 K 的反威胁 (counter-threat) 理解为满足下列条件的联盟合理构形 (z,V):

$$K\not\subset P(L;V),$$

$$z_i\geqslant x_i\ \ 对于任何\ \ i\in P(L;V),$$

$$z_i\geqslant y_i\ \ 对于任何\ \ i\in P(L;V)\cap P(K;U).$$

联盟合理构形 $(x,\mathscr{T})$ 称为 M 稳定的 (M-stable), 如果对于任何一对不相交的联盟 K,L 以及对于 K 针对 L 的每个威胁, 存在一个 L 针对 K 的反威胁.

所有对于联盟结构 $\mathscr{T}$ 的 M 稳定构形的集合称为 M 稳定集（M-stable set），并表示为 M 或 $M(\mathscr{T})$. 在 $\sum_k v(T_k)=v(I)$ 的情形下，集合 M 包含合作对策 $<I, v>$ 的核心（见**对策论中的核心**（core in the theory of games））. 集合 M 经常为空集，因此，人们又进一步考虑集合 $M_1^{(i)}$，它的定义与 M 类似，其变化在于：人们不仅考虑联盟合理构形，并且也考虑所有个体合理构形、以及仅容许单元素联盟（即，个体局中人）之间的威胁和反威胁．可以证明，集合 $M_1^{(i)}$ 对于任何联盟结构是非空的．对于 $\mathscr{T}=\{I\}$，集合 $M_1^{(i)}$ 包含 k 核，而对于**凸对策**（convex game）$<I, v>$，它与 k 核以及核心重合．

M 稳定性和 $M_1^{(i)}$ 稳定性的概念对于无旁支付的合作对策有自然推广．已知，在这一情形下，集合 $M_1^{(i)}$ 可能是空的；存在某些使 $M_1^{(i)}$ 非空的条件．

参考文献

[1] Aumann, R. J. and Maschler, M., The bargaining set for cooperative games, in Advances in Game Theory, Princeton Univ. Press, 443 – 476.

[2] Воробьев, Н. Н., 《Успехи матем. наук》, 25 (1970), 2, 81 – 140.

[3] Luce, R. D., Mathematical models of human behaviour, Stanford, 1955, 32 – 44.

[4] Luce, R. D. and Raiffa, H., Games and decisions. Introduction and critical survey, Wiley, 1957.

[5] Peleg, B., Existence theorem for the bargaining of $M_1^{(i)}$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 109 – 110.

[6] Peleg, B., Quota games with a continuum of players, *Israel J. Math.*, 1 (1963), 48 – 53.

[7] Owen, G., The theory of games, Acad. Press, 1982.

А. Я. Кирута 撰 史树中 译

持续作用扰动下的稳定性 [stability in the presence of persistently acting perturbations; устойчивость при постоянно действующих возмущениях]

初值问题

$$\dot{x}=f(x, t), \ x(t_0)=x_0, \ x\in \mathbf{R}^n \qquad (*)$$

之解 $x_0(t)$ $(t\geqslant t_0)$ 的如下性质：对每一个 $\varepsilon>0$ 都有一个 $\delta>0$ 使得对每一个适合不等式 $|y_0-x_0|<\delta$ 的 y_0，以及满足以下条件的每一个映射 $g(x, t)$：

a) 在集合

$$E_\varepsilon=\{(x, t): t\geqslant t_0, |x-x_0(t)|<\varepsilon\}$$

上 g 和 g_x 都连续；

b) $\sup_{(x, t)\in E_\varepsilon}|g(x, t)-f(x, t)|<\delta$,

初值问题

$$\dot{y}=g(y, t), \ y(t_0)=y_0, \ y\in\mathbf{R}^n$$

的解 $y_0(t)$ 对一切 $t\geqslant t_0$ 有定义且满足不等式

$$\sup_{t\geqslant t_0}|y_0(t)-x_0(t)|<\varepsilon.$$

Bohl 定理（Bohl theorem）（[1]）. 设初值问题 $(*)$ 有解 $x(t)$, $t\geqslant t_0$，满足以下条件：

α) f 和 f_x 对某个 ε_0 在 E_{ε_0} 上连续；

β) $\sup_{t\geqslant t_0}\|f_x(x(t), t)\|<+\infty$;

γ) 映射 f 在点 $(x(t), t)$, $t\geqslant t_0$，处对 x 可微，这个可微性对 $t\geqslant t_0$ 是一致的，即

$$\sup_{t\geqslant t_0}\frac{1}{|y|}|f(x(t)+y, t)-f(x(t), t)+$$

$$-f_x(x(t), t)y|\to 0 \quad \text{当 } y\to 0 \text{ 时}.$$

这时，为使初值问题的解在持续作用的扰动下为稳定，必要与充分条件是：方程组 $\dot{x}=f(x, t)$ 沿解 $x(t)$ 的**变分方程**（variational equations）组的上奇异指数（见**奇异指数**（singular exponents））小于零．

若 $f(x, t)$ 不含 t（即自治系统），而解 $x(t)$ 为周期的或常值的；或者 $f(x, t)$ 对 t 有周期而解 $x(t)$ 也有相同的（或可公度的）周期或者常值，则：1) Bohl 定理中所陈述的一致可微性条件是多余的（它可从定理的其他条件导出）；2) 方程组 $\dot{x}=f(x, t)$ 沿解 $x(t)$ 的变分方程组的上奇异指数可以有效地算出来．

参考文献

[1] Bohl, P., Ueber Differentialgleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, (1914), 284 – 318.

[2] Малкин, И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966.（中译本：И. Г. 马尔金，运动稳定性理论，科学出版社，1959）.

[3] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970.（英译本：Daletskii, Yu. L., Krein, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974）.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 持续作用扰动下的稳定性也称为**持续扰动下的稳定性**（stability under persistent perturbation）或**全稳定性**（total stability）.

参考文献

[A1] Hahn, W., Stability of motion, Springer, 1965. §56（译自德文）.

齐民友 译

计算算法的稳定性 [stability of a computational algorithm; устойчивость вычислительного алгоритма]

一个局部的分解算子 L_m^h，对 h 和 m 一致有界，描述了求解方程

$$L^h u^h=f^h$$

算法的逐次步骤，例如具有步长 h 的网格方程（见**算法的闭包**（closure of a computational algorithm））．计算算法的稳定性保证了算法误差对计算结果的影响是弱的．但是，不排除这种可能性，即量 $p(h)=\sup\|L_m^h\|$ 较慢地增长，当 $h\to 0$ 时，计算误差影响的相应增强实际上仍然是容许的．总是使计算算法稳定性的概念具体，使之适用于网格射影法（见[4]）、和适用于迭代法（见[6]）．计算算法稳定性也还有其他的定义（例如见[1]，[3]）．

参考文献

[1] Babushka, I., Vitásek, E. and Prágcr, M., Numerical processes in differential equations, Wiley, 1966.

[2] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

[3] Гаврин, М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971.

[4] Марчук, Г. И., Агошков, В. И., Введение в проекционно-сеточные методы, М., 1981.

[5] Самарский, А. А., Гулин, А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973.

[6] Самарский, А. А., Николаев, Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978（英译本：Samarskiĭ, A. A. and Nikolaev, E. S., Numerical methods for grid equations, 1-2, Birkhäuser, 1989）.

А. Ф. Шапкин 撰　袁国兴　张宝琳 译

计算过程的稳定性 [stability of a computational process; устойчивость вычислительного процесса]

表征总计算误差积累速度的特性．因为在实际计算中人们不可能用精确数进行计算，而且也不可能避免舍入误差，有时舍入误差会很快地使精度丧失，所以要引进计算过程稳定性的概念．

一个计算过程是对数进行算术运算的一个序列，令 X_i 是赋范线性空间，而 A_i 是一个连续算子，

$$A_i: X_1\times\cdots\times X_i\to X_{i+1},$$

则这列方程

$$x_{i+1}=A_i(x_1,\cdots,x_i), \qquad (1)$$

$$x_{i+1}\in X_{i+1},\ i=1,\cdots,N-1,$$

给出了具有初始数据 x_1 和中间结果 x_i，$i=2,\cdots,N-1$ 的一个计算过程．通常 $X_i=\mathbf{R}^n$，而算子 A_i 由有限个算子运算组成．通常 x_{i+1} 不依赖于在它之前得到的所有中间结果．数 N 可以预先给定，或者由正在进行的计算过程本身确定．在后面这种情形，N 与 x_1 有关（例如，如果 N 是一个给定精度所需要的迭代数）．

一个实际计算过程不可能严格地按照定义（1）执行，这是因为在执行中，会引入算术运算的舍入误差，而且 x_{i+1} 可能是由前面不精确的结果得到的．这就是说得到的不是 x_{i+1}，实际上计算了这样的量

$$\widetilde{x}_{i+1}=A_i(\widetilde{x}_1,\cdots,\widetilde{x}_i)+\delta_i,\ \delta_i\in X_{i+1}, \qquad (2)$$

其中的小附加误差 δ_i 是在运用算子 A_i 的过程中由舍入引入的．δ_i 的值由 $\widetilde{x}_j(j=1,\cdots,i)$ 的值确定，与舍入的方法，机器程序的运行性能等有关．但是，即使对 $j=1,\cdots,i$，$\|\delta_j\|$ 是小的，这本身也不能保证 $\|x_{i+1}-\widetilde{x}_{i+1}\|$ 是小的．仅对一个所谓稳定的计算过程这个差才是小的，因为这个过程不强烈的依赖于 i．

参考文献

[1] Babushka, I., Vitásek, E. and Prágcr, M., Numerical processes in differential equations, Wiley, 1966.

[2] Воеводин, В. В., Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры, М., 1969.

[3] Гаврин, М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971.

А. Ф. Шапкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Wilkinson, J., Rounding errors in algebraic processes, Prentice-Hall, 1963（中译本：J. H. 威尔金森，代数过程的舍入误差，人民教育出版社，1982）.

袁国兴　张宝琳 译

弹性系统的稳定性 [stability of an elastic system; устойчивость упругих систем]

1）一个弹性系统的稳定性是该弹性系统（即一个弹性体，或一些相互作用的弹性体的系统）在充分小的干扰因素作用下微小偏离平衡位置（运动）的性质、外力的波动、对于理想的几何形状的偏离、材料的缺陷等，都可以扮演干扰因素的角色．

2）弹性系统的稳定性是**可变形固体力学**（mechanics of deformable solids）的一部分，它包括对于所有可变形系统稳定性的研究，例如弹性系统、粘弹性系统和弹塑性系统等；常用**可变形系统的稳定性**（stability of deformable systems）这个名称．

弹性系统的稳定性这个概念与运动稳定性这个概念密切相关，特别是与 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability）这个概念密切相关．弹性系统的稳定性理论的中心问题是在外部作用下的系统的参数空间中寻找这样一个区域：在其边界之内的平衡位置（运动）可以认为是稳定的．稳定性区域的边界面称为**临界面**（critical surface）．对于一个弹性体的作用常常可以用一个参数 β 来代表，并不失去一般性，我们可以假定 $0\leqslant\beta<\infty$，$\beta=0$ 代表稳定．β 参数值的下限 β_*，即该时平衡（运动）可以认为是稳定的，称为**临界参**

数(critical parameter). 弹性系统的稳定性的问题在应用中有极大的价值: 一个结构、一台机器或一架仪器的元件丧失稳定性, 一般来说, 意味着其承载能力的丧失或其正常工作条件的破坏.

弹性系统的稳定性的严格理论基于经典的**稳定性理论**(stability theory)对于连续体系的推广, 可以看作为微分方程理论在 Banach 空间的应用. 所考虑的位置与干扰位置的邻近程度以某一个范数来估计. 在实际的计算中, 人们常常用有限多个自由度的系统来近似连续系统, 广泛采用变分方法、网格方法和其他近似方法.

具有理想约束的弹性系统, 在与时间无关的有势(保守)力的作用下, 从全局来看, 是保守系统. 平衡的稳定性条件可以用 Lagrange-Dirichlet 定理(Lagrange-Dirichlet theorem)给出, 即在一个稳定的平衡位置, 系统的势能 Π 具有孤立的极小值. 研究弹性系统稳定性的**能量法**(energy method)就基于这个定理. 能量方法研究的是系统在改变参数时势能 Π 的改变. 对此, $\Pi[u]$ 为位移场 u 的泛函. 对于弹性系统稳定性的一个参数的问题中, 临界参数 β_* 是在 $\delta\Pi=0$ 条件下, 使不等式 $\delta^2\Pi>0$ 不能成立的 β 值的下限. 在临界参数 β_* 的邻域, 存在平衡形式的**分歧**(bifurcation).

为了计算相应于分叉点的临界参数, 通常不用能量方法, 而是用**静力学方法**(static method). 这里, 弹性系统稳定性的问题化为求相应于变分条件 $\delta I=0$ 的算子方程的特征值这样一个线性问题. $I[u]$ 是位移场的二次泛函, 其在形式上与 $\delta^2\Pi$ 相同, 如果 u 代之以变分 δu 的话. 最小的特征值即取为临界参数. 通常, 补充的分析证实, 对于容许的最小的特征值, 发生平衡形式的分叉.

在 L. Euler 的工作中, 基于经典的变分原理, 首先采用了能量方法和静力法(1744-1757). 他也解决了棱柱形弹性梁在轴压下稳定性这个较简单的问题, 并研究了梁在失去稳定性之后的性状. 对于两端简支的梁, 临界力等于:

$$N_*=\frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

其中 E 为材料的 Young 模量, J 为横截面的惯性矩, l 为梁的长度. 对于梁、梁系、板、壳、以及所有特征尺寸都具有同一数量级的物体, 已有很多具体的结果(见[1]).

对于非势力的情况, 一般地说, 能量方法和静力法都不适用(见[2]). 能量方法和静力法对于弹性系统稳定性的动力学问题(dynamical problems)也不适用(见[3]). 对于所有这些情况, 人们用**动力学方法**(dynamic method), 它考虑在所研究的平衡或运动的邻域内系统的微小运动. 对于非势力不随时间变化的情况, 稳定性的研究可以化为相对于系统参数、特征指数或复特征频率的广义特征值问题. 动力学方法的基础是将稳定性定理的一级近似推广到连续系统中去. 如果在一个具体问题的提法中无简化假定, 那么这方法给出的通常就是精确的结果. 在相反的情况下, 就可能出现所谓**稳定和失去稳定佯谬**(paradox of stabilization and destabilization)(见[4]). 在弹性系统稳定性理论的非保守问题中, 重要的有气动弹性力学问题、水动弹性力学问题(见[2], [5], [6]), 以及周期载荷下的稳定性问题(见[3]). 后者与连续系统的参数共振问题密切相关.

将弹性系统稳定性理论推广到弹塑性系统中去, 要克服研究非线性、非完整连续系统时会遇到的严重困难(见[7]). 对于材料有蠕变或其他遗传现象的系统, 必须研究有限时间间隔的稳定性(见[8]).

参考文献

[1] Вольмир, А. С., Устойчивость деформируемых систем, 2 изд., М., 1967.

[2] Болотин, В. В., Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961. (英译本: Bolotin, V. V., Nonconservative problems of the theory of elastic stability, Pergamon, 1963).

[3] Болотин, В. В., Динамическая устойчивость упругих систем, М., 1956.

[4] Болотин, В. В., Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением, Новосиб., 1979, 7-17. (英译本: Bolotin, V. V., Effects of stabilization and destabilization in problems of stability of elastic systems, in Problems of Stability of Motion, Analytical Mechanics and Equations of Motion, Novosibirsk, 1979, pp. 7-17).

[5] Вольмир, А. С., Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости, М., 1976.

[6] Вольмир, А. С., Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, М., 1979.

[7] Клюшников, В. Д., Устойчивость упруго-пластических систем, М., 1980.

[8] Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.

В. В. Болотин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Knops, R. J. and Wilkes, E. W., Theory of elastic stability, in S. Flügge (ed), Handbuch der Physik, Vol. VI a/3, Springer, 1973, pp. 125-302.

[A2] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., Theory of elastic stability, McGraw-Hill, 1961 (中译本: S. P. 铁摩辛柯, 弹性稳定理论, 科学出版社, 1965).

[A3] Ziegler, H., Principles of structural stability, Blaisdell, 1968.

[A4] Thompson, J. U. T. and Hunt, G. W., A general theory of elastic stability, Wiley, 1973
[A5] Leipolz, H., Stabilitätstheorie, Teubner, 1968
[A6] Dym, C. L., Stability theory and its application to structural mechanics, Noordhoff, 1974

王克仁 译 诸德超 校

特征指数的稳定性 [**stability of characteristic exponents**; **устойчивость характеристических показателей**]

线性常微分方程组

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

的 **Ляпунов 特征指数** (Lyapunov characteristic exponent) 的一个性质，这里 $A(\cdot)$ 是满足以下条件的连续映射 $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (或 $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n)$):

$$\sup_{t \in \mathbf{R}^+} \| A(t) \| < +\infty.$$

令 $\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$ 是方程组 (1) 的特征指数，说它们是稳定的 (stable)，是指每一个函数

$$\lambda_i(\cdot): M_n \to \mathbf{R}, \ i = 1, \cdots, n$$

都在 A 点连续，这里 M_n 是所有方程组 (1) 的集合，并且赋以由下述距离形成的度量空间构造

$$d(A, B) = \sup_{t \in \mathbf{R}^+} \| A(t) - B(t) \|$$

(为方便计，可把方程组 (1) 与映射 $A(\cdot)$ 等同起来，此外写 A 而不写 $A(\cdot)$).

现已找到了具有不稳定指数的方程组 (1) (见[2]，[3])．例如方程组

$$\dot{v} = (\sin \ln(1+t) + \cos \ln(1+t))v + \delta v$$

的特征指数当 $\delta = 0$ 时是不稳定的，因为当 $\delta = 0$ 时，最大特征指数 $\lambda_1 = 1$，而当 $\delta \neq 0$ 时，$\lambda_1 > 1$ 而且 λ_1 不依赖于 δ．为使特征指数稳定，只需满足**积分分离条件** (integral separation condition) 即可 (Perron 定理 (Perron theorem))．满足这个条件的方程组 (1) 的集合，就是具有稳定特征指数的方程组 (1) 之集合在空间 M_n 中的内域．

若对一切 $t \in \mathbf{R}^+$，$A(t) \equiv A(0)$，或者有一个 $T > 0$ 使 $A(t+T) = A(t)$ 对一切 $t \in \mathbf{R}^+$ 成立 (即方程组 (1) 有常数值的或周期的系数)，则 (1) 的特征指数是稳定的．若 $A(\cdot)$ 是一殆周期映射 (见**殆周期系数的线性微分方程组** (linear system of differential equations with almost-periodic coefficients))，则方程组 (1) 之特征指数为稳定的必要充分条件是方程组 (1) 为殆可约化的 (亦见**可约化线性方程组** (reducible linear system))．

为使方程组 (1) 的特征指数为稳定的，只需有一个 **Ляпунов 变换** (Lyapunov transformation) 把方程组 (1) 化为分块对角形

$$\left.\begin{array}{c} \dot{y}_i = B_i(t) y_i, \\ y_i \in \mathbf{R}^{k_i}, \ i = 1, \cdots, m, \ \sum_{i=1}^{m} k_i = n \end{array}\right\} \tag{2}$$

而且：a) 这些分块为积分可分离的，即可以找到数 $a > 0$，$d > 0$ 使得对所有 $\theta \geqslant \tau \geqslant 0$，$i = 1, \cdots, m-1$ 有

$$\| Y_i(\tau, \theta) \|^{-1} \geqslant d(\exp[a(\theta - \tau)]) \| Y_{i+1}(\theta, \tau) \|$$

(这里 $Y_i(\theta, \tau)$ 是方程组 (2) 的 **Cauchy 算子** (Cauchy operator))；b) 方程组 (2) 的上、下**中心指数** (central exponents) 相等，即

$$\Omega(B_i) = \omega(B_i), \ i = 1, \cdots, m.$$

这个定理中的条件也是方程组 (1) 的特征指数为稳定的必要条件 (见[6])．特征指数不稳定的方程组可能具有特征指数为随机稳定这一性质．

方程组 (1) 的特征指数称为随机稳定的 (stochastically stable) (或称为几乎必然稳定的 (almost-certainly stable)) 是指，当 $\sigma \to 0$ 时，方程组

$$\dot{y} = A(t)y + \sigma^2 C(t, \omega) y$$

的特征指数以概率 1 趋于方程组 (1) 的特征指数；这里线性算子 $C(t, \omega): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 的矩阵 (在 $\mathbf{R}^n$ 的某个与 (t, ω) 无关的基之下) 之元素是独立的非零**白噪声** (white noise)．

若映射 $A(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ 是一致连续的且有

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| A(t) \| < +\infty,$$

则对几乎每一个映射 $\tilde{A}(\cdot)$，只要

$$\tilde{A}(t) = \lim_{k \to \infty} A(t_k + t), \ t_k \to 0+,$$

则方程组 $\dot{x} = A(t)x$ 的特征指数是随机稳定的 (对于**移位动力系统** (shift dynamical system) ($S = \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$)，可以考虑一个集中于点 $A(\cdot)$ 之轨道的闭包上的规范不变测度．所谓"几乎每一个 $A(\cdot)$"就是在每一个这种测度的意义下几乎每一个 $A(\cdot)$)．

设有一个在光滑闭流形 V^n 上由一光滑向量场给出的动力系统．则对几乎每一点 $x \in V^n$ (在任意规范不变测度的意义下)，与点 x 相关的轨道的**变分方程** (variational equations) 的特征指数是随机稳定的．

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собр. соч., т. 2, М.-Л, 1956

(英译本: Lyapunov, A. M., Stability of motion. Acad. Press, 1966).
[2] Perron, O., Die Ordnungszahlen der Differentialgleichungssysteme, *Math. Z*, **31** (1930), 748－766.
[3] Perron, O., Ueber lineare Differentialgleichungen bei denen die unabhängig Variable reel ist 1, *J. Reine Angew Math.*, **142** (1913), 254－270
[4] Немыцкий, В. В., Степанов, В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949 (中译本: B. B. 涅梅茨基, B. B. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性理论, 上、下, 科学出版社, 1956, 1959).
[5] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Э., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости, М., 1966.
[6] Изобов, Н. А., Итоги науки и техники., Математический анализ, М., **12** (1974), 71－146.

B. M. Миллионщиков 撰 齐民友 译

差分格式的稳定性 [stability of difference schemes; устойчивость разностный схем]

差分(网格)方法的理论中的重要概念之一. 它定义为差分格式的解对于输入信息的连续依赖性. 更精确地说, 假设在原始问题的自变量的空间中的一组网格点 $\Omega_h (h\in\{h\})$ 上构造一个差分格式(原始问题的差分或网格模型), 这里参数 h 为某个赋范线性空间的元素, 由它确定所用的具体网格. 又假设对于每一个这样的网格 Ω_h 都对应一个 N_h 维线性空间 U_h 及 U_h 中的一个算子方程(差分方程组)

$$L_h(u_h)=f_h,\ h\in\{h\}, \tag{1}$$

这里 $f_h\in U_h$ 且算子 L_h 为已知. 通常 h 与网格的胞腔的维数有关且当 $\|h\|\to 0$ 时 N_h 无限增大. 设 u_h 及 f_h 分别是赋范空间 H_h 及 F_h 中的元素, 同时算子 L_h 是线性的. 这时, 差分格式称为稳定的, 如果: 1) L_h^{-1} 对于任何 $h\in\{h\}$ 都存在; 及 2) 存在一个不依赖于 h 的常数 $K>0$ 使

$$\left\|L_h^{-1}\right\|_{F_h\to H_h}\leqslant K,\ h\in\{h\}. \tag{2}$$

这个定义等价于方程(1)的适定性(正确性): 对于任一右端项 f_h, 方程(1)的解都存在且唯一, 同时在空间 H_h 及 F_h 中(关于 h)一致连续依赖于 f_h. 用先验估计的语言叙述, 就是存在一个不依赖于 h 的常数 K, 使对于方程(1)的任一解都成立先验估计

$$\left\|u_h\right\|_{H_h}\leqslant K\left\|f_h\right\|_{F_h}. \tag{3}$$

这样一来, 如果对于一个稳定的差分格式在某种情况下实际上不是得到方程(1)的解 u_h, 而是得到其扰动方程 $L_h\widetilde{u}_h=\widetilde{f}_h$ 的解 $\widetilde{u}_h$(例如方程(1)的近似解), 那么容易确定其误差的上界:

$$\left\|u_h-\widetilde{u}_h\right\|_{H_h}\leqslant K\left\|f_h-\widetilde{f}_h\right\|_{F_h}. \tag{4}$$

再者, 如果一个差分格式是稳定的且在空间 F_h 中逼近其原始问题, 那么它必收敛, 且有误差估计:

$$\left\|z_h\right\|_{H_h}\leqslant K\left\|\xi_h\right\|_{F_h}, \tag{5}$$

这里 z_h 为格式误差, 而 ξ_h 为逼近误差(见[1]－[7]). 所述的定理阐述了将 f_h 视作赋范空间 F_h 的元素的理由: 逼近误差本质上依赖于空间 F_h 的选择. 因此, 对于一个固定的空间 H_h 来说, 形如(3)式的稳定性定理应该选择对逼近阶增长而言为最弱的范数来建立. 而对于一个固定的空间 F_h 来说, 则利用最强的范数 $\|u_h\|_{H_h}$ 来研究方程(1)更合适. 这一点与原始边值问题的适定性研究完全类似. 所以空间 H_h 及 F_h 本身通常由熟知的函数空间(例如, $C(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $W_2^m(\Omega)$ 等, 见[3]－[5])经网格离散化而构造, 且当 $\|h\|\to 0$ 时前者收敛到后者. 对于此类网格空间的选取实例及在这些空间中研究差分格式稳定性的各种方法, 和其他类似结果可参看文献[1]－[15]. 对于定常问题的投影网格法(有限元法), 最常用的方法是利用问题的解到逼近子空间的距离来估计基本误差并研究其收敛性(见[3]－[5], [7], [10]－[13]). 这时形如(3)式的稳定性定理仅用于寻求估计式(4), 而空间 H_h 及 F_h 此时也与网格函数的 Euclid 空间重合, 其研究常须借助于与研究矩阵 L_h 的条件数有关的经典代数方法(见[10]－[12]).

在非定常问题中, 自变量 t 的作用在本质上不同于空间变量, 这就迫使人们将时间网格 ω_t 与对于空间变量 $x_1,\cdots,x_d$ 的网格 ω_x 分别考虑, 同时还须定义一个与层次有关的非定常问题的专门的差分格式(见[1]－[6]). 为叙述简单计, 这里假定 $\omega_t=\omega_{t,\tau}$ 由步长 $\tau>0$ 定义, 即

$$\omega_t\equiv\{t=n\tau\equiv t_n: n=0,\cdots,[T_\tau^{-1}]\},$$

同时网格 ω_x 由空间变量的步长向量 $(h_1,\cdots,h_d)$ 给出, 其中 $h_r>0$, $r=1,\cdots,d$. 这时方程(1)中的网格 Ω 定义为 $\omega_t\times\omega_x$, 这里 $h=\{\tau,h_1,\cdots,h_d\}$, 而空间 U_h 由诸向量 $u\equiv\{u(0),u(\tau),\cdots,u([T_\tau^{-1}])\}$ 所组成, 其中每一个分量 $u(n\tau)\equiv u^n$ 属于 ω_x 上给出的网格函数的线性空间 $U=U(h_1,\cdots,h_d)$. 因此在式(2)－(5)中所出现的空间 H_h 及 F_h 的范数常由 ω_x 上给出的网格函数的线性空间 U 的不同范数 $\|u\|_H$ 及 $\|f\|_F$ 来定义. 例如, 常选取形如 $\max_{t^n\in\omega_t}\|u^n\|$, $\tau\sum_n\|u^n\|_H$ 等表达式作为 $\|u_h\|_{H_h}$

(见[1]－[6]). 当空间 H 及 F 为 Euclid 空间或酉空间且当用较简单的方法便能获得形如(3)式的估计时已得到极详尽的研究. 比如, 考虑形如

$$\left.\begin{aligned} A_1 u^{n+1} = A_0 u^n + \tau f^{n+1},\ n \geqslant 0 \\ u^0 = \varphi, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

的线性单层差分格式, 这里向量 φ 及 f^{n+1} 分别由初始条件及方程的右端项定义, 而 Euclid 空间 H 中的算子 A_1 及 A_0 满足条件 $\| A_1^{-1} \| \leqslant C_0$、$\| A_1^{-1} A_0 \| \leqslant 1 + C_1 \tau$, 其中非负常数 C_0 及 C_1 不依赖于网格. 那么对于方程(6)的解下列先验估计式成立:

$$\max_{t \in \omega_\tau} \left\| u^n \right\|_H \leqslant e^{C_1 T} \left\{ \left\| \varphi \right\|_H + C_0 \sum_{t_{k-1} \in \omega_\tau}^{n} \tau \left\| f^{n+1} \right\|_H \right\}. \quad (7)$$

将此格式表成典范形式

$$B \left[\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right] + A u^n = f^{n+1}$$

后, 对此格式的分析常归结为转移算子 $R = E - \tau B^{-1} A$ 的性质的研究(这里 E 为恒等算子), 如果存在某种对于 Euclid 空间 H 中的 B 及 A 的较简单的信息型算子不等式. 例如, 若 $B = B^* > 0$, $A = A^*$ 及 $B \geqslant \tau(1+\rho)^{-1} A$, 则(见[3], [6])存在常数 $c = C(T, \rho)$ 使

$$\left\| u^{n+1} \right\|_B \leqslant C \left[\left\| u^0 \right\|_B + \tau \sum_{k=0}^{n} \left\| f^{k+1} \right\|_{B^{-1}} \right],$$
$$t_{n+1} \in \omega_\tau, \quad (8)$$

这里 $\| u^n \|_B = (Bu^n, u^n)_H^{1/2}$. 类似的结果已对非常广泛的一类差分格式得到, 其中包括某些多步格式(见[6]). 同时, 某些特殊形式的稳定性(关于初始条件或关于右端项的稳定性)及它们的相互关系也已经得到研究.

有些结果是属于类似于稳定性或与此有关的必要条件的研究(见[3], [6]). 不用(8)式而是应用能量不等式(见[4], [5]), 在相应的条件下将能得到形如

$$\left\| u^{n+1} \right\|_B^2 + \tau \sum_{k=0}^{n} \left\| u^{k+1} \right\|_H^2 \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left[\left\| u^0 \right\|_B^2 + \tau \sum_{k=0}^{n} \left\| f^{k+1} \right\|_{B^{-1}}^2 \right] \quad (9)$$

的估计, 它能导出对于 u_h 的更强的范数下的稳定性, 且允许在此估计式中取极限. 这类估计在发展方程理论中经常遇到. 对非常广泛的一类格式类似的估计也已得到(见[4], [5], [13]).

在差分格式稳定性的研究中对于热传导方程的显式格式须区分条件稳定差分格式与绝对稳定差分格式, 前者是指仅在诸如条件 $\tau(h_\tau)^{-2} \leqslant \kappa_0$ 下具有的稳定性, 而后者是指时间变量步长与空间变量步长可以相互独立变化仍保持稳定性. 如果不用在每一步解一个复杂的方程组时, 那么此类格式常被采用. 交替方向的隐式格式、分裂格式、算子可分裂格式及可加性格式对多维问题也属于这类经济的差分格式(见[1]－[6], [13]).

形如(3)及(9)式的估计的稳定性定理也应用于这样的情形: 当逼近阶及估计式(5)不易得到, 而网格问题的解的延拓却可以构造, 且关于紧收敛于原始问题的定理本质上能建立(见[4], [5]). 各种先验估计和上述紧性原则的研究对于复杂的非线性问题是特别重要的, 因为此时解可能不唯一, 而收敛性仅对原始问题的某些解成立. 有时数学物理中的非线性问题的研究因其复杂性而转换成相应方程的线性化的研究, 同时对于差分格式主要也是讨论重要的物理守恒定律的网格化模式(见[8]). 对于弱非线性问题, 差分格式之正确性的研究常能得出很完善的结果, 这一点正是线性情形的特点(见[5]－[7]及**非线性边值问题, 数值方法**(non-linear boundary value problem, numerical methods)).

对于常微分方程的 **Cauchy 问题**(Cauchy problem), 典型的方法是将其差分格式的稳定性研究归结为特征方程的根的研究(见[2], [4], [15]).

参考文献

[1] Mitchell, A. R., Computational methods in partial differential equations, Wiley, 1969.

[2] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, т. 2, 2 изд., М., 1962 (英译本: Berezin, I. S., Zhidkov, N. P., Computing methods, Pergamon, 1973).

[3] Годунов, С. К., Рябенький, В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977 (英译本: Godunov, S. K. and Ryaben'kii, V. S., Theory of difference schemes, North-Holland, 1964).

[4] Ладыженская, О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973.

[5] Дьяконов, Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1－2, М., 1971－1972.

[6] Самарский, А. А., Гулин, А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973.

[7] Самарский, А. А., Андреев, В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976.

[8] Самарский, А. А., Попов, Ю. П., Разностные методы решения задач газовой динамики, 2 изд., М., 1980.

[9] Ладыженская, О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970 (中译本: О. А. 拉德任斯卡娅, 粘性不

可压缩流体动力学的数学问题，上海科学技术出版社，1963）.

[10] Axelson, O., Barker, V. A., Finite element solution of boundary value problems. Theory and computation, Acad. Press, 1984.

[11] Hackbusch, W., Theorie und Numerik elliptischer Differential-gleichungen, Teubner, 1986.

[12] Strang, G., Fix, J., An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, 1973

[13] Fairweather, G., Finite element Galerkin methods for differential equations, M. Dekker, 1978.

[14] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）

[15] Ракитский, Ю. В., Устинов, С. М., Черноруцкий, И. Г., Численные методы решения жестких систем, М., 1979.

Е. Г. Дьяконов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lapidus, L., Pinder, G. F., Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, Wiley, 1982.

史应光 译

稳定区域 [stability region; устойчивости область]

Cauchy 问题（Cauchy problem）所依赖的参数值的空间中的一个集合. 取 S 为使此 Cauchy 问题的解为 Ляпунов 稳定（见 **Ляпунов 稳定性**（Lyapunov stability））的参数值之集合，则 S 之内部的连通分支，以及这些分支边界上属于 S 的一切点之集合，二者之并即为稳定区域（它一般地并不是区域）. 上述定义是试图对一个通常讲得多少有些模糊的概念给以精确的意义（见[1]，第 194，195，197 页）.

例. **Mathieu 方程**（Mathieu equation）

$$\ddot{y}+(\delta+\varepsilon\cos t)y=0,$$

依赖于参数 $(\delta,\varepsilon)\in\mathbf{R}^2$，其零解的稳定区域有可数多个（见[1]，图 78），其中有一些与半平面 $\delta<0$ 相交，这解释了何以一个摆的悬挂点在垂直方向作周期（正弦的）振动时，摆的上立平衡位置有可能是稳定的（见[1]，第 6 章，第 1,4 节）.

参考文献

[1] Stoker, J. J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, Interscience, 1950.

[2] Баутин, Н. Н., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, 2 изд., М., 1984.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 对于常微分方程的数值解法的差分法，也有此区域的离散类似物. 特别是，这个集合 S 此时是指复数平面的一部分；为此，常用一个如 $\dot{x}=\lambda x$（λ 为复数）这样的模型.

参考文献

[A1] Harter, E., Norgett, S. and Wanner, G., Solving ordinary differential equations. I, Springer, 1987.

齐民友 译

稳定性定理 [stability theorems; устойчивости теоремы]

一些定理，它们的结论都是关于**稳定性**（stability）的断言.

稳定性定理（代数 K 理论中的）[stability theorems (in algebraic K-theory); стабильности теоремы (в алгебраической K-теории)]

给定基环 R 的某种特殊的扩张，对群 $K_i(R)$ 及其子群的不变性的论断（见**代数 K 理论**（algebraic K-theory））.

下面是最广为人知的稳定性定理．令 R 是正则环（见**正则环（交换代数中的）**（regular ring (in commutative algebra)）），$R[t_1,\cdots,t_n]$ 是 R 上 n 个变元 $t_1,\cdots,t_n$ 的多项式环．从 R 过渡到 $R[t_1,\cdots,t_n]$ 时，Whitehead 群的稳定性定理（stability theorem）（[1]）指出，将 R 嵌入 $R[t_1,\cdots,t_n]$ 的自然同态诱导出 $K_1(R)$ 与 $K_1(R[t_1,\cdots,t_n])$ 的一个同构（亦见 **Whitehead 群**（Whitehead group））.

若一个除环 R 在其中心 $Z(R)$ 上是有限维的，则可以定义一个从 R 的乘法群 R^* 到其中心的乘法群 $Z(R)^*$ 的简化范同态 $\mathrm{Nrd}_R:R^*\to Z(R)^*$. 这个同态的核通常记作 $\mathrm{SL}(1,R)$，它确定了 R 的约化 Whitehead 群 $SK_1(R)$:

$$SK_1(R)\simeq \mathrm{SL}(1,R)/[R^*,R^*]$$

（见**特殊线性群**（special linear group）），它是 $K_1(R)$ 的一个子群．令 $Z(R)(t_1,\cdots,t_n)$ 是 $t_1,\cdots,t_n$ 在 $Z(R)$ 上的有理函数域，则代数

$$R(t_1,\cdots,t_n)=R\otimes_{Z(R)}Z(R)(t_1,\cdots,t_n)$$

是一个除环，且 R 在 $R(t_1,\cdots,t_n)$ 中的自然嵌入诱导出同态

$$\psi'_{t_1,\cdots,t_n}:SK_1(R)\to SK_1(R(t_1,\cdots,t_n)).$$

约化 Whitehead 群的稳定性定理指出，同态 $\psi'_{t_1,\cdots,t_n}$ 是一一映射（[2]，亦见[3]）．类似的论断在酉代数 K 理论和旋量代数 K 理论中亦真（[4]，[5]）.

K_i 函子当从稳定对象 $K_i(R)$ 变换到不稳定对象时的稳定化定理亦称为稳定性定理（见[6]）.

参考文献

[1] Bass, H., Heller, A. and Swan, R., The Whitehead group of a polynomial extension, *Publ. Math. IHES*, **22**(1964), 61 – 79.

[2] Платонов, В. П., 《Тр. Матем. ин-та АН СССР.》, **142**(1976), 198 – 207.

[3] Платонов, В. П., Янчевский, В. И., 《Докл. АН СССР》, **249**(1979), 5, 1064 – 1068.

[4] Янчевский, В. И., 《Матем. сб.》, **110**(1979), 4, 579 – 596.

[5] Monastyrnyi, A. P. and Yanchevskii, V. I., Whitehead groups of spinor groups, *Math USSR Izv.*, **54**(1991), 1, 61 – 100 (*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **54**(1990), 1, 60 – 96).

[6] Bass, H., Algebraic *K*-theory, Benjamin, 1968.

В. И. Янчевский 撰

【补注】 代数 K 理论中的许多群被定义为正向极限，例如，若 R 是有 1 的结合环 $K_1(R)=\lim GL_n(R)/E_n(R)$([A1]). 对应的稳定性理论指出，序列是最终稳定的(eventually stable)，即从某点起映射变为同构. 在上例中，$K_1(R)=GL_n(R)/E_n(R)$ 对 $n\geqslant sr(R)+1$ 成立. 此处 $sr(R)$ 是 R 的 Bass 稳定秩(Bass stable rank)，([A1]–[A3]). 对高阶 K 函子的类似结果见[A4]. K_0 函子的一个稳定性结果叫作消去定理(cancellation theorem)([A1]). 对带二次型的模的一个类似结果叫作 **Witt 定理**(Witt theorem).

"稳定性定理"最通常的含义在上文的最后一句中给出(即 K_1 函子当从稳定对象变换到不稳定对象时的稳定化)，见[A3].

Whitehead 群的稳定性定理，或 Bass-Heller-Swan 定理(Bass-Heller-Swan theorem)被 D. Quillin 推广到所有的 K 群.

参考文献

[A1] Bass, H., *K*-theory and stable algebra, *Publ. Math. IHES*, **22**(1964), 485 – 544.

[A2] Vaserstein, L. N., K_1-theory and the congruence subgroup problem. *Math. Notes*, **5**(1969), 141 – 148. (*Mat. Zametki*, **5**(1969), 233 – 244.)

[A3] Suslin, A., Stability in algebraic *K*-theory, in R. K. Dennis (ed.): Algebraic *K*-theory (Oberwolfach, 1980), Lecture notes in math. Vol. 966, Springer, 1982, 304 – 333.

[A4] Quillen, D., Higher algebraic *K*-theory I, in H. Bass (ed.): Batelle Institute Conf. 1972, Lecture Notes in math. Vol. 341, Springer, 1973, 85 – 147.

张英伯 译

稳定性理论[stability theory; устойчивости теория]

一些观点，表述，思想，概念，论证，方法，理论(具有定义，引理，定理和证明)，其来源和目的是研究运动(在同样广泛的形式下理解)的**稳定性**(stability). 这样，稳定性理论是在"理论"一词最广泛意义下的一种理论. 关于运动稳定性的各种不同概念之中，最为人熟知的如下:

1. А. М. Ляпунов 引进的稳定性概念及其修正: **Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability)(特别是渐近稳定性和指数稳定性); **条件稳定性**(conditional stability)(特别是渐近条件稳定性和指数条件稳定性); **对部分变量的稳定性**(stability for a part of variables); **一致稳定性**(uniform stability); **持续作用扰动下的稳定性**(stability in the presence of persistently acting perturbation); **轨道稳定性**(orbit stability); 吸引子的出现(见**极限环**(limit cycle); **Lorenz 吸引子**(Lorenz attractor)); 随机稳定性; **绝对稳定性**(stability, absolute). 亦见**稳定性准则**(stability criterion); **稳定区域**(stability region).

2. **Lagrange 稳定性**(Lagrange stability).

3. **Poisson 稳定性**(Poisson stability)及与其相关的概念(**游荡点**(wandering point); **完全不稳定性**(complete instability)).

4. 结构稳定性(见**粗系统**(rough system))——这是由 А. А. Андронов 与 Л. С. Понтрягин 引入的概念.

5. 由 А. Н. Колмогоров 所发现的，可积 Hamilton 系统在 Hamilton 量的小扰动下，绝大部分不变环面均得以保持(见**小分母**(small denominators)).

在 Ляпунов 稳定性理论中(见[1]，第 2 卷以及[2]–[4])，可以举出与 Ляпунов 第一方法有关的问题. 这里通常都是要讲线性微分方程组理论(见**变分方程**(variational equations); **周期系数的线性微分方程组**(linear system of differential equations with periodic coefficients); **殆周期系数的线性微分方程组**(linear system of differential equations with almost-periodic coefficients); 微分方程的**正则线性系统**(regular linear system); **非正则性指标**(irregularity indices); 微分方程的**殆可约线性系统**(almost-reducible linear system); 微分方程的**可约线性系统**(reducible linear system); **乘子**(multipliers); **线性 Hamilton 系统**(Hamiltonian system, linear)); 并与线性方程组理论和 **Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponent)理论(见**奇异指数**(singular exponents); **中心指数**(central exponents); **积分分离条件**(integral separation condition); **特征指数的稳定性**(stability of characteristic exponents))有很大的交叉. 关于 Ляпунов 第二方法，见 **Ляпунов 函数**(Lyapunov function)，亦见[5]–[9].

在结构稳定性理论中可以分出 Аносов 系统理论(见 **Y 系统**(Y-system)，[10])以及结构稳定性准则(见[11]，[12]).

在研究力学中的 Ляпунов 稳定性时，会接触到以下问题: 旋转液体平衡形状的稳定性(见[1]，卷 3–4)，其他重力系统的稳定性(见[13])，液体运

动的稳定性(见[14]、[15]),可变形固体运动的稳定性(见**弹性系统的稳定性**(stability of an elastic system),亦见[16]-[19]),具有内装液体的空腔的物体运动的稳定性([20]),自动控制系统的稳定性([21])以及具有延迟的方程解的稳定性([22]).

参考文献

[1] Ляпунов, А. М., Собранные Сочинения, т. 1-5, М.-Л., 1954-1965.

[2] Bellman, R., Stability theory of differential equations, Dover, reprint, 1969.

[3] Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

[4] Далецкий, Ю. Л., Крейн, М. Г., Устойчивость решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970 (英译本: Daletskiĭ, Yu. L. and Krein, M. G., Stability of solutions of differential equations in Banach space, Amer. Math. Soc., 1974).

[5] La Salle, J. and Lefschetz, S., Stability by Lyapunov's direct methods with applications, Acad. Press, 1961.

[6] Зубов, В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применений, Л. 1957 (英译本: Zubov, V. I., Methods of A. M. Lyapunov and their applications, Noordhoff, 1964).

[7] Румянцев, В. В., в кн. Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968.

[8] Валеев, К. Г., Финин, Г. С., Построение функций Ляпунова, К., 1981.

[9] Шестаков, А. А., 《Дифф. уравн.》, 18 (1982), 12, 2069-2097.

[10] Аносов, Д. В., 《Тр. матем. ин-та АН СССР》, 90 (1967).

[11] Плисс, В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений, М., 1977.

[12] Плисс, В. А., 《Дифф. уравн.》, 16 (1980), 10, 1891-1892.

[13] Поляченко, В. Л., Фридман, А. М., Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, М., 1976.

[14] Lin, C. C. (林家翘). The theory of hydrodynamic stability, Cambridge Univ. Press, 1955.

[15] Joseph, D., Stability of fluid motions, 1-2, Springer, 1976.

[16] Болотин, В. В., Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, М., 1961.

[17] Болотин, В. В., Григолюк, Э. П., в кн., Механика в СССР за 50 лет, т. 3, М., 1972.

[18] Вольмир, А. С., Устойчивость деформируемых систем, 2 изд., М., 1967.

[19] Клюшников, В. Д., Устойчивость упруго-пластических систем, М., 1980

[20] Моисеев, Н. Н., Румянцев, В. В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, М., 1965.

[21] Narendra, K. S., and Taylor, J. H., Frequency domain criteria for absolute stability, Acad. Press, 1973.

[22] Hale, J. K., Functional differential equations, Springer, 1971

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 在可积 Hamilton 系统扰动下不变环面的保持是 KAM 理论(KAM theory),特别是 Колмогоров-Арнольд-Moser 定理的主要内容,见**拟周期运动**(quasi-periodic motion)之补注.

近来,联系着双曲系统(无循环条件)研究了结构稳定性.在[A1]中可以找到最深远的结果和早期工作的综述.

Ляпунов 全集([1])之第二卷已经译为英文,即[A2].

参考文献

[A1] Mañé, R., A proof of the C^1 stability conjecture, *Publ. Math. IHES*, 66 (1988), 161-210.

[A2] Lyapunov, A. M., Stability of motion, Acad. Press, 1966 (译自俄文).

[A3] Hahn, W., Stability of motion, Springer, 1967.

齐民友 译

稳定性理论(逻辑中的)[stability theory (in logic); устойчивости теория (в логике)]

【补注】 **模型论**(model theory)的一个分支,研究一阶理论的模型的结构理论.给定一个模型,在它中取值为真的所有一阶句子的集合组成一个一阶完全理论.例如,复数域(C, +, ·, 0, 1)的理论的模型恰好是特征为 0 的代数闭域.下面考虑一个固定的可数语言 L 的具有无限模型的完全理论.这些理论可以分成:不稳定的,稳定的,超稳定的,或 ω 稳定的几种,这种分类依赖于这个理论的每个模型上有多少个完全型(见下文)(亦见**稳定理论和不稳定理论**(stable and unstable theories).

令 $S(A)$ 表示 A 上完全型的全体.$S(A)$ 的基数至多为 $2^{|A|}$,对不稳定理论 T,这个最大值可以取到.T 对基数 λ 稳定,如果对每个基数为 λ 的集合 A,$|S(A)|=\lambda$.T 是不稳定的(unstable),如果没有基数 λ 能使 T 对 λ 稳定.T 是稳定的(stable),如果 T 对某个基数 λ 稳定.T 是超稳定的(superstable),如果对所有大于连续统势的基数都稳定.T 是 ω 稳定的(ω-stable),如果对每个无限基数都稳定.稳定性程度越高,确定这个理论的模型的某种不变性的可能性越大.任意一个线性序都是不稳定的.模的每个理论都是稳定的.一个可分闭域是稳定的但不是超稳定的.超稳定群不容许可定义子群的无穷递减链[H_i, H_{i+1}]无限).例如,整数加群是超稳定的.代数闭域或代数闭域上的代数群是 ω 稳定的.

不失一般性,一个一阶理论 T 的所有的模型都可

以看成能嵌入一个固定的大论域 $\mathscr{M}$ 中. 对每个元素 $b\in\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{M}$ 的一个子集 A, A 上 b 的型 $t(b: A)$ 是所有的有一个自由变元的, 参数取自 A 中的公式的集合, 这些公式在 $\mathscr{M}$ 中被 b 满足. $\mathscr{M}$ 中两个元素实现相同的型, 当且仅当这两个元素在使 A 不变的 $\mathscr{M}$ 的自同构群的同一轨道之中.

Löwenheim-Skolem 定理 (见 **Gödel 完全性定理** (Gödel completeness theorem) 指明什么样的理论对每个无穷基数都有模型. 稳定性理论的主要成就之一就是给出了一个分类函数 $I(T, \lambda)$. 这个函数对每个 λ 确定了理论 T 的基数为 λ 的互不同构的模型的个数. 1963 年, M. D. Morley 从推广 E. Steinitz 定理入手证明对每个一阶理论 T(如代数闭域理论), $I(T, \aleph_1)=1$(T 是 $\aleph_1$ 范畴的), 当且仅当 T 对每个不可数基数是范畴的 (见 **κ 范畴性** (categoricity in cardinality). 1971 年, Baldwin-Lachlan 定理继续这一工作, 证明一个 $\aleph_1$ 范畴理论要么只有 1 个可数模型, 要么有 $\aleph_0$ 个 (可数) 模型.

粗略地说, 每个模型都是由这个模型的"框架"和这个框架的"闭包"决定. 框架的概念下面再详细描述. 最简单的"闭包"是对函数封闭. 每个一阶语言都可以使其膨胀直到它的模型的论域的每个子集都有一个(由这个语言中的函数生成的) Ehrenfeucht-Mostowski 壳 (Ehrenfeucht-Mostowski hull), 这个壳也是一个模型. 一般说来, 这会破坏理论的稳定性. 一种较弱的闭包的概念是对每个子集 A 给出 A 上的一个素模型, 使其能嵌入包含 A 的每个模型之中. 通常, 这不一定能做到, 但是对于 ω 稳定理论 T, 这是可以做到的.

1970年左右 S. Shelah 着手研究一个理论 T 的什么性质能够使它对每个不可数基数 λ 都有 $I(T, \lambda)=2^{\lambda}$, 这些反面的结果对发展 T 的模型的结构理论起到了作用. 他证明如果 T 是不稳定的或者不是超稳定的, 则对所有不可数的 λ, $I(T, \lambda)$ 都取到最大可能的值, 2^{λ}. 如果 T 不稳定, 则存在一个公式 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$. 它定义模型 $\mathscr{M}$ 的一个 n 元无限集上的一个线性序. 由紧致性定理, 对基数为 λ 的每个线性序型 ρ 可以由 φ 构造 $\mathscr{M}$ 的一个子集, 使它是序型为 ρ 的线性序. 用一种复杂的组合方法, Shelah 证明有 2^{λ} 个这种线性序, 其 Ehrenfeucht-Mostowski 壳仍然是互不同构的, 这就证明每个不稳定理论对每个不可数基数的模型个数都是最大可能的. 对不是超稳定的理论的讨论也是类似的, 只要把线性序改为高度为 ω 的树.

在任何一个稳定理论中, 可以发现一种相关关系, $t(a; B)$ 对 A 分叉, 这种关系相当于代数或线性相关. 特别, 这种关系也有类似的替换公理成立. 不过, 一般来说与之相伴的闭包关系 (只要 $t(a; B)$ 对 A 分叉, 就有 $a\in\mathrm{cl}(B)$) 不是传递的. 如果限制于实现一个型 p 的元素, 这个闭包关系是传递的, 就称这个型 p 是**正则的** (regular). 于是, (如同线性代数中一样) 可以对每个正则型 p 确定其维数. 结构理论中不少地方都有赖于把一个模型的结构化归于在 $\mathscr{M}$ 中实现的正则型的结构. 正则型的类, 它们的维数, 它们之间的相互关系组成了一个模型的框架. 有可能几个正则型带有的关于一个模型结构的信息是相同的, 如果这样就称这些正则型为**非正交的** (non-orthogonal).

如果每一对无关模型都有极小闭包并且 T 是超稳定的, 则 T 的每个模型都可以看成是一个高度可数的树上的素模型. 如果这个树是良基的, 则 $I(T, \aleph_\alpha)$ 以 α 的一个函数为界. 如果这种闭包不存在, 或者不是最小的, 或者这种树不是良基的, 则对几乎所有的基数, T 的模型数都达到最大. 这种结构或非结构的区分就是所谓**主间隙** (main gap). 这一研讨直到 1990 年补充完成了 (shelah) 于 1970 年代后期给出的 Morley 猜想 (Morley conjecture) 的证明: 谱函数 $I(T, \lambda)$ 是除了 $\aleph_0$ 到 $\aleph_1$ 之外都是递增的.

在简单的情况下精确计算 $I(T, \lambda)$ 要求对正则型的几何构造有一种理解. 可以在正则型的实现集上定义一种**组合几何** (combinatorial geometry). B. I. Zil'ber 最初应用这种几何结构得到关于 T 的所有模型的总体信息. 在最简单的情形 (一种 $\aleph_0$ 范畴严格极小集), 这种几何一定或者是平凡的, 是有限域上的一个仿射空间, 或者是有限域上的一个射影空间. 由这种分析可以证明, 没有一个全范畴理论是有限可公理化的, 但每个全范畴理论都可以由一个句子和一个"无穷公理"模式公理化.

R. L. Vaught 于 1960 年代早期猜想一个完全的一阶理论或者有可数多个或者有 $\alpha^{\aleph_0}$ 个可数模型. Shelah 就 ω 稳定理论证明了这个结果. S. Buechler 和 L. Newelski 把它推广到某些超稳定理论. 这一推广在很大程度上依赖于几何分析.

最近, 一些很强的代数结果被用到模型论中. 1985 年 U. Hrushovski 证明, 如果一对型弱正交而不正交, 则或者是一个纯 Abel 群, 或者是可以在 T 中解释的复数上的射影特殊线性群, 他应用这个结果导出一个纯模型论的结果: 一个一维的稳定理论 (任何一对非代数型都是非正交的) 必定是超稳定的.

20 世纪 90 年代稳定性理论的研究在几个方向上继续开展: 进一步分析稳定性理论, 考察稳定群和域, 研究可数齐次结构, 分析不稳定理论 (O 极小性), 以及将稳定性理论方法向一阶逻辑之外的逻辑中推广.

参考文献

[A1] Baldwin, J. T., Classification theory: 1985, in J T. Baldwin (ed.), Classification Theory (Chicago 1985), Proc. US-Isrel Binational Workshop on Model Theory in Mathematical logic, Lecture notes in math., Vol. 1292, Springer, 1988, 1 – 23.

[A2] Baldwin, J. T., Fundamentals of stability theory. Springer, 1988.

[A3] Hodges, W., What is a structure theory? *Bull. London Math. Soc.*, **19** (1987), 209 – 237

[A4] Lascar, D., Stability in model theory, Longman, 1987(译自法文).

[A5] Pilay, A., An introduction to stability theory, Clarendon Press, 1983.

[A6] Poizat, B., Groupses stables, Nur Al-mantiq wal-ma'rifah, Villeurbanne, France, 1987.

[A7] Shelah, S., Classification theory and the number of nonisomorphic models, North-Holland, 1978.

[A8] Shelah, S., Classification of first-order theories which have a structure theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12** (1985), 227 – 232.

J. T. Baldwin 撰 沈复兴 译 罗里波 校

稳定化子[stabilizer; стабилизатор]，集合 M 中元素 a 的

作用在集合 M 上的变换群 G 的子群 G_a，它由固定 a 的所有变换组成：$G_a=\{g: g\in G, ag=a\}$. a 的稳定化子也称为 a 的迷向群(isotropy group)，a 的迷向子群(isotropy subgroup)或 a 的平稳子群(stationary subgroup). 设 $b\in M$, $f\in G$ 及 $af=b$，则 $G_b=f^{-1}G_af$. 若考虑群 G 在自身上的共轭作用，则元素 a 的稳定化子就是它在群 G 中的**中心化子**(centralizer)；若群共轭作用在它的子群集合上，则子群 H 的稳定化子就是它的正规化子(见**子集的正规化子**(normalizer of a subset)). H. H. Вильямс 撰

【补注】 若 M 是数学结构的一个集合，例如 $\mathbf{R}^n$ 中格的集合，群 G 作用于其上，例如 Euclid 运动群，则 $m\in M$ 的迷向子群 G_m 就是结构 m 的对称群(symmetry group).

参考文献

[A1] Michel, L., Simple mathematical models for symmetry breaking, in K. Maurin and R. Raczka (eds.): Mathematical Physics and Physical Mathematics, Reidel, 1975, 251 – 262.

[A2] Helgason, S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Acad. Press, 1978, 121.

[A3] Petrie, T. and Randall, J. D., Transformation groups on manifolds, M. Dekker, 1984, 8 – 9.

石生明 译 王 杰 校

稳定理论和不稳定理论[stable and unstable theories; стабильные и нестабильные теории]

模型论(model theory)的一个分支，研究初等理论(elementary theory)的稳定性(stability). 令 T 是符号集(语言)Ω 的一阶完全理论，A 是 T 的一个模型，令 $X\subseteq|A|$. 符号集 $\langle\Omega, X\rangle$ 是 Ω 中添加一些独立元素符号 $c_a(a\in X)$ 而得到的. 系统 $\langle A, X\rangle$ 的符号集是 $\langle\Omega, X\rangle$，它是模型 A 的一个加浓(enrichment)，也称简单膨胀(simple expansion)，对每个 $a\in X$、c_a 解释为 a. 理论 $T(A, X)$ 是在 $\langle A, X\rangle$ 中真的符号为 $\langle\Omega, X\rangle$ 的所有公式. 语言 $\langle\Omega, X\rangle$ 的单变元的公式 $\varphi(x)$ 的集合 $\tau(x)$ 称为 $\langle A, X\rangle$ 的一个型(type)，如果 $\tau(x)\cup T(A, X)$ 是可满足的. 以 $S(A, X)$ 记 $\langle A, X\rangle$ 的所有最大型的类. 称理论 T 是对基数 λ 稳定的，如果对 T 的任意模型 A，任意 $X\subseteq|A|$，只要 X 的基数不超过 λ，$S(A, X)$ 的基数也不超过 λ. 一个理论称为稳定的(stable)，如果对某一个无限基数是稳定的.

令 $|T|$ 表示符号集 Ω 的公式集 T 的基数. 如果 T 是稳定的，则它对于所有满足等式 $\lambda=\lambda^{|T|}$ 的基数也是稳定的. 如果 T 是稳定的，则存在一个 T 的模型 A，存在一个无限集 $Y\subseteq|A|$，使对符号集 Ω 的任意公式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$，对 Y 的任意两个不同元素的序列 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$，$\langle b_1, \cdots, b_n\rangle$，$\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ 在 A 中为真等价于 $\varphi(b_1, \cdots, b_n)$ 在 A 中为真；此时 Y 就称为 T 中的不可辨元集(set of indistinguishable elements). 不稳定理论(unstable theory)的一个特性是存在一个具有相反性质的集合. 也就是说，一个理论 T 的不稳定性等价于存在 T 的一个模型 A，存在符号集 Ω 的一个公式 $\varphi(v_1, \cdots v_n; u_1, \cdots, u_n)$，存在 A 中元素的 n 元组的一个序列 $\langle a_1^0, \cdots, a_n^0\rangle$，$\langle a_1^1, \cdots, a_n^1\rangle$，$\cdots$，使得 $\varphi(a_1^i, \cdots, a_n^i, a_1^j, \cdots, a_n^j)$ 在 A 中为真等价于不等式 $i<j$. 由此，有无限模型的全序集理论的完全扩充，以及无限 **Boole 代数**(Boolean algebra)理论都是不稳定的. 特别地，带加法的自然数理论和实数域的理论也是不稳定的. 如果理论 T 是不稳定的，则对每个不可数基数 $\lambda>|T|$，T 的势为 λ 的模型的同构型(互不同构的模型)的个数等于 2^λ. 一个理论 T 对某个不可数基数 $\lambda>|T|$ 是范畴的(见 **κ 范畴性**(categoricity in cardinality))就是稳定的. 然而，确实存在对任意不可数基数都不范畴的稳定性理论. 一个例子就是符号集由一元谓词和孤立元的可数集组成的理论 T_1. 这个理论的公理是说，可数多个孤立元都满足一元谓词，T_1 的每个模型都被分成两个无限集，以及这些孤立元互不相等.

有限或可数符号集的理论对可数基数稳定就称为全超越的(totally transcendental). 每个全超越的理论对任意无限基数都稳定. 有限或可数符号集的一个理

论如对某个不可数基数范畴，这个理论就是全超越的．全超越理论也可以用其他方法来描述．令 T 是有限或可数符号集 Ω 的一个完全理论，而 A 是 T 的一个无限模型．符号集 $\langle\Omega, |A|\rangle$ 的一个公式 $\varphi(v_0)$ 称之为秩是 -1，如果它在模型 $\langle A, |A|\rangle$ 中对任意元素取值都假；称为秩 α（α 是一个序数），如果它的秩不小于 α；而对系统 A 的任意初等扩充 B，对 $\langle\Omega, |B|\rangle$ 的任意一个公式 $\psi(v_0)$，公式 $\psi(v_0)\&\varphi(v_0)$ 或 $\neg\psi(v_0)\&\varphi(v_0)$ 中必有一个的秩小于 α．一个理论 T 是全超越的，当且仅当对 T 的每个模型 A，符号集 $\langle\Omega, |A|\rangle$ 的每个公式 φ 都有确定的秩．

参考文献

[1] Shelah, S, Stability, the f. c. p., and Superstability: model theoretic properties of formulas in first order theory, *Ann. of Math. Logic*, 3 (1971), 3, 271 - 362.

[2] Shelah, S., Classification theory and the number of non-isomorphic models, North-Holland, 1990.

Е. А. Палютин, М. А. Тайцлин 撰

【补注】 见**稳定性理论（逻辑中的）**（stability theory (in logic)）.

参考文献

[A1] Baldwin, J. T., Fundamentals of stability theory, Springer, 1988.

[A2] Lascar, D., Stability in model theory, Wiley, 1987.

[A3] Pilly, A., An introduction to stability theory, Clarendon Press, 1983.

[A4] Chang, C. C. and Keisler, H. J., Model theory, North-Holland, 1990.

沈复兴 译 罗里波 校

稳定分布 [stable distribution; устойчивое распределение]

具有如下性质的一种概率分布：对于任意的 $a_1>0, b_1, a_2>0, b_2$，关系式

$$F(a_1x+b_1)\star F(a_2x+b_2)=F(ax+b) \quad (1)$$

成立，其中 $a>0$，b 是某个常数，F 是此稳定分布的分布函数，而 $\star$ 是两个分布函数的卷积算符．

稳定分布的特征函数有如下形式：

$$\varphi(t)=\exp\left\{idt-c|t|^{\alpha}\left[1+i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t,\alpha)\right]\right\}, \quad (2)$$

其中 $0<\alpha\leqslant 2$，$-1\leqslant\beta\leqslant 1$，$c\geqslant 0$，$d$ 是任意实数，而

$$\omega(t,\alpha)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi\alpha}{2}, & \alpha\neq 1,\\ -\dfrac{2}{\pi}\ln|t|, & \alpha=1.\end{cases}$$

数 α 称为稳定分布的**指数**（exponent of the stable distribution）．指数 $\alpha=2$ 的稳定分布是**正态分布**（normal distribution），**Cauchy 分布**（Cauchy distribution）则是指数 $\alpha=1$ 的稳定分布的例子，直线上的**退化分布**（degenerate distribution）也是一个稳定分布．稳定分布是**无穷可分分布**（infinitely-divisible distribution）；对于指数为 α 且 $0<\alpha<2$ 的稳定分布，其 **Lévy 典范表示**（Lévy canonical representation）有特征 $\sigma^2=0$，

$$M(x)=\frac{c_1}{|x|^{\alpha}},\ N(x)=-\frac{c_2}{x^{\alpha}},$$

$$c_1\geqslant 0,\ c_2\geqslant 0,\ c_1+c_2>0,$$

γ 为任意实数．

一个稳定分布，除退化情形，必定具有密度．这个密度是无穷次可微的，单峰的，且在整个实轴或半轴上异于零．对于指数为 α 且 $0<\alpha<2$ 的稳定分布，关系式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{\delta}p(x)dx<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|x|^{\alpha}p(x)dx=\infty,$$

成立，其中 $\delta<\alpha$，$p(x)$ 是该稳定分布的密度．稳定分布密度的明显形式只有很少情形是已知的．稳定分布理论的基本问题之一是刻画它们的吸引域（见**稳定分布的吸引域**（attraction domain of a stable distribution））．

在稳定分布集合中，还可以挑选出**严稳定分布**（strictly-stable distribution）集，它们使方程（1）当 $b_1=b_2=b=0$ 时成立．指数为 $\alpha(\alpha\neq 1)$ 的严稳定分布的特征函数由公式（2）置 $d=0$ 给出，而 $\alpha=1$ 的严稳定分布只可能是 Cauchy 分布．谱正（负）稳定分布由其 Lévy 典范表示中 $M(x)=0$ $(N(x)=0)$ 这一事实所表征．谱正稳定分布的 Laplace 变换当 $\operatorname{Re}s\geqslant 0$ 时存在：

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}p(x)dx=\begin{cases}\exp\{-cs^{\alpha}-ds\}, & \alpha<1,\\ \exp\{cs\ln s-ds\}, & \alpha=1,\\ \exp\{cs^{\alpha}-ds\}, & \alpha>1.\end{cases}$$

其中 $p(x)$ 是指数为 α 的谱正稳定分布的密度，$0<\alpha<2$，$c>0$，d 为一实数，而多值函数 $\ln s$，s^{α} 则选择使当 $s>0$ 时 $\ln s$ 为实数及 $s^{\alpha}>0$ 的那一支．

与无穷可分分布一样，稳定分布对应于平稳独立增量的齐次随机过程．具有独立增量的随机连续的齐次随机过程 $\{x(\tau):\tau\geqslant 0\}$ 称为**稳定的**（stable），如果其增量 $x(1)-x(0)$ 有稳定分布．

参考文献

[1] Гнеденко, Б. В., Колмогоров, А. Н., Предельные распределения для сумм независимых слу-

чайных величин, М.-Л., 1949 (中译本：Б. В. 葛涅坚科等，相互独立随机变数之和的极限分布，科学出版社，1955).

[2] Прохоров, Ю. В., Розанов, Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (英译本：Prokhorov, Yu. V., Rozanov, Yu. A., Probability theory, Springer, 1969).

[3] Ибрагимов, И. А., Линник, Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965 (英译本：Ibragimov, I. A., Linnik, Yu. V., Independent and stationary sequences of random variables, Wolters-Noordhoff, 1971).

[4] Скороход, А. В., Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964.

[5] Золотарев, В. М., Одномерные устойчивые распределения, М., 1983 (英译本：Zolotarev, V. M., One-dimensional stable distributions, Amer. Math. Soc., 1986). Б. А. Рогозин 撰

【补注】 在差不多所有的文献中，稳定分布的特征函数都包含一个符号的错误，改正的公式见[A1].

参考文献

[A1] Hall, P., A comedy of errors: the canonical term for the stable characteristic functions, *Bull. London Math. Soc.*, 13 (1981), 23-27 潘一民 译

稳定同伦群 [stable homotopy group; стабильная гомотопическая группа]

拓扑空间 (topological space) X 的 k 稳定同伦群 (k-stable homotopy group) $\pi_k^s(X)$；它是下述序列的归纳极限，

$$\pi_k(X) \xrightarrow{E} \pi_{k+1}(EX) \xrightarrow{E} \pi_{k+2}(E^2X) \xrightarrow{E} \cdots, \quad (*)$$

其中 EY 是拓扑空间 Y 上的纬垂 (suspension)．纬垂同态 $E: \pi_m(Y) \to \pi_{m+1}(EY)$ 将球体类 $f: S^m \to Y$ 映为球体类 $Ef: ES^m = S^{m+1} \to EY$，其中 Ef 是从映射 $f \times \mathrm{Id}_{[0,1]}$ 作分解得到的．序列 (*) 从第 $(k+3)$ 项开始稳定（见[2]），因此

$$\pi_k^s(X) = \pi_{2k+2}(E^{k+2}X).$$

在计算稳定同伦群时，要用到 Adams 谱序列 (spectral sequence)（见[1]）．到现在为止，没能算出一个不可缩空间的稳定同伦群．然而，关于球面的同伦群 (sphere, homotopy groups of the) 已经有一部分计算．对无限维实投影空间以及一些其他空间也作过一些计算．

参考文献

[1] Фукс, Д. Б., Фоменко, А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969.

[2] Whitehead, J., Recent advances in homotopy theory, Amer. Math. Soc., 1970.

Д. Б. Фукс 撰 潘建中 译 沈信耀 校

稳定秩 [stable rank; стабильный ранг]

【补注】 令 R 是有 1 的结合环．元素序列 $(a_1, \cdots, a_n)$ 叫作左幺模的 (left unimodular)，如果由 $a_i (i = 1, \cdots, n)$ 生成的左理想是 R.

R 的左稳定秩 (left stable rank) 是最小正整数 n，使得对每个 $m > n$ 和左幺模序列 $(a_1, \cdots, a_m)$，存在 $r_1, \cdots, r_{m-1}$，若 $a_i' = a_i + r_i a_m$，$i = 1, \cdots, m-1$，则 $(a_1', \cdots, a_{m-1}')$ 也是左幺模的．

R 的右稳定秩 (right stable rank) 可将左换成右类似地定义．左、右稳定秩相等 ([A1])，亦见例如 [A2]，§11.3．从而二者均被称为 R 的稳定秩，记作 $\mathrm{st.r.}(R)$.

将左幺模序列 $(a_1, \cdots, a_n)$ 写成列向量，则 $GL_n(R)$ 从左边自然地作用在 n 长左幺模序列集 $U_C(n, R)$ 上．R 的一般线性秩 $\mathrm{glr}(R)$ 是最小正整数 n，使得对一切整数 $m > n$，$GL_m(R)$ 可迁地作用在 $U_C(m, R)$ 上．这等价于说所有秩 $\geqslant n$ 的右稳定自由模是自由的 ([A2]).

称 P 是稳定自由的 (stably free)，是指对某一非负整数对 m, n，有 $P \oplus R^n \simeq R^m$；P 的秩定义为 $m-n$．如果 R 有不变基性质 (invariant basis property)（即 $R^n \simeq R^m$，当且仅当 $n = m$），秩是完全确定的．这一性质在 R 是例如交换环，或右 Noether 环时均成立．有 $\mathrm{glr}(R) \leqslant \mathrm{st.r}(R)$，因而任意秩 $\geqslant \mathrm{st.r.}(R)$ 的稳定自由模是自由的．

若 k 是域，则对任意正整数 n，$\mathrm{glr}(k[x_1, \cdots, x_n]) = 1$.

令域 k 在它的素子域 k_0 上的超越次数是 t，则 k 的 Kronecker 维数 (Kronecker dimension) 当 $\mathrm{ch}\,k = 0$ 时定义为 $t+1$，当 $\mathrm{ch}\,k \neq 0$ 时定义为 t．若 $n \leqslant$ (k 的 Kronecker 维数) $\mathrm{st.r.}(k[X_1, \cdots, X_n]) = n+1$．如果 R 是交换的，且 Krull 维数 $m < \infty$（亦见结合环的维数 (dimension)），则 $\mathrm{st.r.}(R[X_1, \cdots, X_n]) \leqslant m+n+1$ (Bass 定理 (Bass theorem)).

令 X 是一个拓扑空间，Y 是一个度量空间，$f: X \to Y$ 是一个连续映射．点 $y \in Y$ 称为 f 的一个稳定值 (stable value)，是指 y 在 $f(X)$ 中，且存在某个 ε，使得对任意连续映射 $g: X \to Y$，只要 $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ 对一切 $x \in X$ 成立，则 y 也在 $g(X)$ 中．拓扑空间 X 的映射维数 $d(X)$ (mapping dimension of a topology space) 是这样一个最大正整数 d，使得存在某个映射 $X \to \mathbf{R}^d$，以原点作为稳定值（若这样的 d 不存在，则说 $d(X)$ 等于 ∞）．对于一些良好的空间，例如，可度量化的，分离的空间 X 而言，这一维数概念重合于

其他维数，例如归纳维数（inductive dimension），[A5]，chapt Ⅵ，§1（见维数理论（dimension theory））．这个概念永远重合于由本质映射定义的维数，见[A5]，Chapt．Ⅵ，§3．

令 $C(X)$ 是拓扑空间 X 上的实值连续函数环，$C_b(X) \subset C(X)$ 是有界函数子环．则 $\mathrm{st.r.}(C(X)) = \mathrm{st.r.}(C_b(X)) = d(X)+1$（Vaserstein 定理（Vaserstein theorem））．

Bass 和 Vaserstein 定理均表明 $\mathrm{st.r.}(R)-1$ 是环的一个很好的维数概念．

更一般地，对带 1 结合环 R 的子环和理想也可定义稳定秩．

令 R 是带 1 的结合环，$\mathfrak{g}$ 是一个子环（可能没有 1）．元素序列 $(a_1, \cdots, a_n)$ 叫作左 $\mathfrak{g}$ 幺模的（left $\mathfrak{g}$-unimodular），如果它是（在 R 中）左幺模的，且 $a_1 - 1 \in \mathfrak{g}$，$a_i \in \mathfrak{g}$，$i = 2, \cdots, n$．子环 $\mathfrak{g}$ 的稳定秩（stable rank of the subring $\mathfrak{g}$）是具有如下性质的最小正整数 n：对任意长度为 $m > n$ 的 $\mathfrak{g}$ 幺模序列 $(a_1, \cdots, a_m)$，存在 $q_i \in \mathfrak{g}$，$i = 1, \cdots, m-1$，若 $a_i' = a_i + q_i a_m$，则 $(a_1', \cdots, a_{m-1}')$ 是一个长为 $m-1$ 的左 $\mathfrak{g}$ 幺模序列．（这样的性质被看作稳定值域条件（stable range condition），见例如[A4]．）$\mathfrak{g}$ 的稳定秩不依赖于环绕它的环 R．且稳定秩的概念仍然是左右对称的（[A1]）．

参考文献

[A1] Vaserstein, L. N., Stable ranks of rings and dimensionalty of topological spaces, *Functs. Anal. Appl.*, 5 (1971), 102－110. (*Funkts. Anal. i Prilozhen.*, 5 (1970), 2, 17－27.)

[A2] McConnell, J. C., Robson, J. C., Noncommutative noetherian rings, Wiley, 1987.

[A3] Hahn, A. J., O'Meara, O. T., The classical groups and *K*-theory, Springer, 1981, §4.1.

[A4] Bass, H., Algebraic *K*-theory, Benjamin, 1968, Chapt. V, §3.

[A5] Hurewicz, W., Wallman, H., Dimension theory, Princeton Univ. Press, 1948.

张英伯 译

标准构造[standard construction；стандартная конструкция]

范畴论中的一个概念．也叫三元组（triple），单子（monad）或函子代数（functor-algebra）．

令 $\mathfrak{S}$ 是一个范畴（category）．标准构造（standard construction）是一个函子 $T: \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$，连同自然变换 $\eta: 1 \to T$ 和 $\mu: T^2 \to T$，使得下面两图交换：

$$\begin{array}{ccc} T^3Y & \xrightarrow{T\mu_Y} & T^2Y \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{TY}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} \\ T^2Y & \xrightarrow{\mu_Y} & TY \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} TY & \xrightarrow{\eta_{TY}} & T^2Y & \xleftarrow{T\eta_Y} & TY \\ & {\scriptstyle 1}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} & \swarrow{\scriptstyle 1} & \\ & & TY & & \end{array}$$

标准构造在拓扑学中的基本用途是构造各种分类空间及其它们的代数模拟，称之为棒构造（bar-construction）．

参考文献

[1] Boardman, J. and Vogt, R., Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, Springer, 1973.

[2] Adams, J. F., Infinite loop spaces, Princeton Univ Press, 1978.

[3] May, J. P., The geometry of interated loop spaces, Lecture notes in math., 271, Springer, 1972.

[4] MacLane, S., Categories for the working mathematician, Springer, 1971.

Ю. В. Рудяк 撰

【补注】 术语"标准构造"是 R. Godement 为使此概念有一个较好的名称引出的（[A1]）．目前已不再用，而普遍由"单子"一词取代（少数作者仍用"三元组"）．除上文所述之外，单子还有其他许多应用，如在泛代数（universal algebra）的范畴方法中（见[A2]，[A3]）．

参考文献

[A1] Godemen, R., Théorie des faisceaux, Hermann, 1958

[A2] Manes, E. G., Algebraic theories, Springer, 1976

[A3] Barr, M., Wells, C., Toposes, triple and theories, Springer, 1985.

张英伯 译

标准差[standard deviation；стандартное отклонение]，亦称标准偏差

同二次偏差（quadratic deviation）．

标准程序[standard program 或 standard procedure；стандартная программа]，子程序（subprogram）

用一种算法语言（程序语言）编制的，描述求解某个问题的一种计算算法（computational algorithm）的程序，在运行系统和程序系统这种特殊的要求下，这种程序可用作在计算机上求解更一般问题过程中的一个构件．标准程序的概念通常应用于计算机上用数学方法进行数值计算（计算数学，数理统计，等），虽然它也应用于其他计算技术领域．标准程序一般是放在（程序）库（libraries）中的，而且也可以作为对应用程序包主要的功能补充．程序库本质上是包含在计算机内存里由运行系统使用的所有加载，目标和初始模块的一个分类．当编制一个标准程序时，必须考虑一些更进一步的要求：模块原则，程序规则，自动文件编制，输入数据过滤和错误诊断，质量保证，等．除了正规的软件（software）程序设计方法外，许多计算机可以用工具系统自动进行程序库设计（检验系统，程序转换和生成系统，格式系统，测试系统，文件-文献系统，自动注解系统，等）．标准程序库最迫切的任务之一是研究面向问题的语言，而且和结构问题，研究数据

库方法和求解问题控制等一起，把生成标准程序库的问题与生成应用程序包的问题更紧的连在一起．现代计算机软件包括扩充的标准程序库，它构成了**自动程序设计**（automatic programming）这种特殊方法（库存程序方法）的基础．

参考文献

[1] Воеводин, В. В., Арушанян, О. Б., в сб., Численный анализ на ФОРТРАНе, М., 1979, 73 – 83.

[2] Карпов, В. Я., Корягин, Д. А., Самарский, А. А., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 18 (1978), 2, 458 – 467.

О. Б. Арушанян 撰　袁国兴　张宝琳 译

标准单形［standard simplex；стандартный симплекс］

1）空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的以点 $e_i=(\theta,\cdots,1,\cdots,0)$（第 i 个位置为1），$i=0,\cdots,n$，为顶点的 n 维单形（simplex），即

$$\Delta^n=\{(t_0,\cdots,t_{n+1}):0\leqslant t_i\leqslant 1,\sum t_i=1\}\subset \subset\mathbf{R}^{n+1}.$$

对任何拓扑空间 X，连续映射 $\sigma:\Delta^n\to X$ 就是 X 的奇异单形（见**奇异同调**（singular homology））.

2）**单纯复形**（simplicial complex）Δ^n，它的顶点是 l_i，$0\leqslant i\leqslant n$，而它的单形是顶点的任意非空子集．这个单纯复形的几何实现与 1）中所说的标准单形重合．

3）**单纯集**（simplicial set）Δ^n，它是由函子 O^+ 作用在 2）中的单纯复形上得到．函子 O^+，是范畴 Δ 上的反变函子（见**范畴中的单纯对象**（simplicial object in a category）），它使

$$\Delta^n([m])=\Delta([m],[n]),\ \Delta^n(\lambda)(\mu)=\mu\lambda.$$

因此，$[n]$ 的不减数列 $(a_0,\cdots,a_m)$ 是单纯集 Δ^n 的 m 维单形，而该单纯集的面算子 d_i 和退化算子 s_i 由下式定义：

$$d_i(a_0,\cdots,a_m)=(a_0,\cdots,a_{i-1},\hat{a}_i,a_{i+1},\cdots,a_m),$$

$$s_i(a_0,\cdots,a_m)=(a_0,\cdots,a_i,a_i,a_{i+1},\cdots,a_m);$$

这里记号 ^ 表示它下面的符号略去．单纯集 Δ^1 也称单纯区间（simplicial segment）．单形 $l_n=(0,1,\cdots,n)$（Δ^n 中的唯一非退化 n 维单形）叫作 Δ^n 的基本单形（fundamental simplex）．Δ^{n+1} 中包含全部形如 $d_i l_{n+1}(i\neq k)$ 的所有单形的最小单纯子集记为 Δ^n_k，称作第 k 个标准角形（k-th standard horn）.

对任何单纯集 K 和 K 的任一 n 维单形 σ，存在唯一的单纯映射 $\chi_\sigma:\Delta^n\to K$ 使 $\chi_\sigma(l_n)=\sigma$．这个映射叫作 σ 的特征．

4）指 3）中单纯集的基本单形 l_n，这时记为 Δ_n.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников 撰

【补注】 参考文献见**单纯集**（simpticial set）.

沈信耀 译　潘建中 校

标准化和统一化中的数学问题［standardization and unification, mathematical problems in；стандартизации и унификации математические задачи］

确定产品及其组成部分的最优系列的问题．

产品最优系列（optimal series of products）是从产品的最初系列中选取的各类产品的一个集合，它能保证满足各种形式的需求量并使所有产品开发、生产和使用过程中的总支出达到最小．如果产品不同类型的数目增加时，其开发所带来的开支单调增加，而成批生产和经营费用减少，则产品最优系列存在．

标准化问题和统一化问题之间的术语差别在某种程度上是相对的、有条件的．这种差别反映出在区别标准化和统一化问题上存在着不同的观点．例如，对单个品种但大量生产的产品选取最优系列的问题归于标准化名下，而对复合的、花费昂贵的产品及其部件选取最优系列的问题则归于统一化名下．区别标准化和统一化问题的另一种方法基于研究最初系列中产品结构的详尽程度．如果最初系列中不同类型产品相互之间完全不同且没有相同的即统一的部件，则称它为单层次标准化问题（single-level standardization problem）或简称为标准化问题（standardization problem）．考虑产品的构成以及不同产品可有相同部件的情形，就是在谈论双层次标准化问题．随着研究产品部件构成详尽程度的增大，就可能得到 n 层次标准化问题．统一化问题就是 $n>1$ 的 n 层次标准化问题．如果假定在定义复合产品最优系列时一般也必须定义这些产品最重要部件的最优系列，则上面所说的区别标准化和统一化问题的两种方法就是一致的．

在建立机器和设备的合理参数和尺度时解标准化问题的最简单的定量方法是使用基于几何级数的优先数系．已经建立的优先数系列 $R5$、$R10$、$R20$、$R40$ 是关于公比为

$$10^{1/5}\approx 1.6,\ 10^{1/10}\approx 1.25,$$
$$10^{1/20}\approx 1.12,\ 10^{1/40}\approx 1.06$$

的几何级数系列．如果对所涉及的产品类这些系列之一的最优性已得证明，且已选定主要参数的最小值 a_0，则此系列中所有其他产品的主要参数之值可通过数值 $a_0q^n(n=1,2,\cdots)$ 得到（必要时应加以舍入），其中 q 是所选系列的公比．

基于优先数系的方法给出标准化问题的非常近似的解．此外，这个方法的可行范围限于比较简单的一维标准化问题这种狭小的类，此时系列中的产品由一个主要参数刻画．在大多数情形，尤其在涉及复合的、昂贵的产品（它们不再能由一个主要参数刻画）

时，必须用非常强的数学模型来定义标准化和统一化问题的最优解.

为用于解标准化和统一化问题设计的数学模型通常归结为相当复杂的**非线性规划**(non-linear programming)的多极值问题，解此类问题需要现代计算方法和高运算速度、大存储量的电子计算机.

对于某些种类的本质上能利用特性曲线的特殊问题，也可能有比较简单的有效解法.

参考文献

[1] Коктев, А. А., Основы стандартизации в машиностроении, 4 изд., М., 1973.

[2] Чуев, Ю. В., Спехова, Г. П., Технические задачи исследования операций, М., 1971.

[3] Береснев, В. Л., Гимади, Э. Х., Дементьев, В. Т., Экстремальные задачи стандартизации, Новосиб., 1978.

[4] Вапнярский, И. Б., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 18 (1978), 2, 484 – 487.

И. Б. Вапнярский 撰 沈永欢 译

Stanton 数 [**Stanton number**; **Стэнтона число**]

热过程的特征量度之一. 它显示液体或气体流动中能量耗散的强度:

$$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{c_p \rho v},$$

其中 α 是传热系数，c_p 是介质的定压比热，ρ 是密度，而 v 是流动速度.

Stanton 数通过关系式 St = Nu/Pe 与 **Nusselt 数**(Nusselt number) Nu 和 **Péclet 数**(Péclet number) Pe 相联系.

Stanton 数是以 Th. Stanton 的姓氏命名的.

БСЭ-3 徐锡申 译

星形体 [**star body**; **звездное тело**]，关于一点 O 的，星样体(star-like body)

n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中具有下述(关于 O 的)射线性质(ray property)的开集 $\mathfrak{S}$: 如果 $a \in \overline{\mathfrak{S}}$ (这里 $\overline{\mathfrak{S}}$ 是 $\mathfrak{S}$ 的闭包)，则整个线段 $[O, a)$ (其中 $O \in [O, a)$, $a \notin [O, a)$) 位于 $\mathfrak{S}$ 中. 一个具有中心 O 的星形体 $\mathfrak{S}$ 可以刻画如下: O 是 $\mathfrak{S}$ 的一个内点; 每一条从 O 发出的射线或者全部位于 $\mathfrak{S}$ 中，或者包含一点 a，使得射线段 $[O, a)$ 位于 $\mathfrak{S}$ 中，但射线段 $(a, +\infty)$ 位于 $\mathfrak{S}$ 外. 这一定义与第一个定义等价，且适合于 $\mathfrak{S}$ 边界上的点. 一个星形体是关于 O 的星形集(star set)的一个特殊情形，一个星形集是关于 O 具有广义射线性质(generalized ray property)的一个集合: 如果 $a \in \mathfrak{S}$，则整个线段 $[O, a]$ 位于 $\mathfrak{S}$ 中. 星形体的一个特殊情形是**凸体**(convex body).

对每一个关于原点 O 的星形体 $\mathfrak{S}$ 可以用一对一的方式结合一个**射线函数**(ray function) $F(x) = F_{\mathfrak{S}}(x)$，使得 $\mathfrak{S}$ 是满足 $F(x) < 1$ 的点 $x \in \mathbf{R}^n$ 构成的集合.

这一对应由以下公式定义:

$$F(x) = \inf_{t^{-1}x \in \mathfrak{S},\, t > 0} \frac{1}{t}.$$

用这一记号，一个星形体 $\mathfrak{S}$ 是有界的，当且仅当 $F(x)$ 是一个正射线函数; 是凸的，当且仅当 $F(x)$ 是一个凸射线函数.

参考文献

[1] Cassels, J. W. S., An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1972.

А. В. Малышев 撰

【补注】 星形体在**数的几何**(geometry of numbers)中具有重要作用，如 Minkowski-Hlawka 定理.

$\mathbf{R}^n$ 中的一个集合 S 是中心对称的(centrally symmetric)，如果 $x \in S$ 推出 $-x \in S$.

Minkowski-Hlawka 定理 (Minkowski-Hlawka theorem) 是说: 对于中心对称的星形体 $\mathfrak{S}$，$V(\mathfrak{S}) \geq 2\zeta(n)\Delta(\mathfrak{S})$. 这里，$\Delta(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{S}$ 的临界行列式(见**数的几何**)，$V(\mathfrak{S})$ 是 $\mathfrak{S}$ 的体积，$\zeta(n) = 1 + 2^{-n} + 3^{-n} + \cdots$. 这是一个与 Minkowski 凸体定理(Minkowski convex body theorem)方向相反的不等式(见 **Minkowski 定理**(Minkowski theorem)).

参考文献

[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A2] Erdös, P., Gruber, P. M. and Hammer, J., Lattice points, Longman, 1989.

陆珊年 译

星形区域 [**star-like domain**; **звездообразная область**]，关于固定点 O 的

复空间 $\mathbf{C}^n (n \geq 1)$ 的区域 D，使得对于 D 内任何一点，从该点到 O 的直线段整个地位于 D 内.

称覆盖在 w 平面上的单连通开 **Riemann 曲面**(Riemann surface) D 为关于固定点 $a \in D$ 的 p 叶星形区域(p-sheeted star-like domain)，p 是自然数，如果在 $w = a$ 上方存在 p 个点(计算重数)，并且对于任何一点 $Q \in D$，存在从 Q 到 $w = a$ 上方的这些点之一的一条路径 $\Gamma \subset D$，使得 Γ 在 w 平面的投影是连接 Q 的投影与 $w = a$ 的直线段.

设 B 是 w 平面中的二连通区域，E_1 和 E_2 是它的余集连续统，$\infty \in E_2$，a 是 E_1 的固定一点，并设 Γ_1 与 Γ_2 是 B 的边界分支. 那么，称 B 为关于 a 的星形区域，如果由 Γ_1 和 Γ_2 围成的每个包含 a 的单连通区域都是关于 a 的星形区域，或者 Γ_1 是从 a 出发的直线段的并集且 $E_1 \cup B$ 是关于 a 的星形区域.

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций

комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[2] Hummel, J. A., Multivalent starlike functions, *J. d'Analyse Math.*, **18** (1967), 133 – 160.

Е. Г Голузина 撰

【补注】 对于 $n=1$, 星形区域是单位圆盘在星形函数 (star-like function) 映射下的象. 杨维奇 译

星形函数 [star-like function; звездообразная функция], 单叶星形函数 (univalent star-like function)

在圆盘 $|z|<1$ 内正则单叶的函数 $w=f(z)$, $f(0)=0$, 且把 $|z|<1$ 映射成关于 $w=0$ 的**星形区域** (star-like domain). 若函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内有 $f(z)\neq 0$, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$, 且在 $|z|<1$ 内正则, 它是该圆盘内的星形函数, 当且仅当它满足条件

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>0,\ |z|<1.$$

$|z|<1$ 内满足标准化条件 $f(0)=0$, $f'(0)=1$ 的星形函数族组成类 S^*. 这类函数可用 Stieltjes 积分作参数表示

$$f(z)=z\exp\left[-2\int_{-\pi}^{\pi}\log(1-e^{-it}z)\,d\mu(t)\right],$$

其中 $\mu(t)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的非减函数, $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$.

关于类 S^* 的**系数问题** (coefficient problem) 已解决; 关于 $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\arg f(z)$, $\arg f'(z)$ (函数的辐角取在 $z=0$ 处为 0 的分支) 的精确估计已求得. 这些估计的极值函数是 $f(z)=z/(1-e^{i\theta}z)^2$, 其中 θ 是实数. 函数 $f(z)$ 的类 S^*, 同满足 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, 在 $|z|<1$ 内正则单叶且把 $|z|<1$ 映射成凸区域的函数 $\varphi(z)$ 的类, 由公式 $z\varphi'(z)=f(z)$ 相联系.

满足

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>\alpha,\ |z|,\ \alpha<1$$

的星形函数称为 $|z|<1$ 内的 α 阶星形函数 (star-like function of order α).

还研究了圆环内的单叶星形函数 (见 [1]), 圆盘内的 p 叶星形函数与弱星形函数 (见 [2], [4]), ε 局部星形函数 (见 [1]), 以及在实轴方向星形的函数 (见[3]). 关于多复变星形函数可见 [5].

参考文献

[1] Голузин, Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966 (英译本: Goluzin, G. M., Geometric theory of functions of a complex variable, Amer. Math. Soc., 1969).

[2] Hummel, J. A., Multivalent starlike functions, *J. d'Analyse Math.*, **18** (1967), 133 – 160.

[3] Robertson, M. S. Analytic functions star-like in one direction, *Amer. J. Math.* **58** (1936), 3, 465 – 472.

[4] Goodman, A. W. Open problems on univalent and multivalent functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 6, 1035 – 1050.

[5] Баврин, И. И., Классы голоморфных функций многих комплексных переменных и экстремальные вопросы для этих классов функций, М., 1976.

Е. Г. Голузина 撰

【补注】

[A1] Goodman, A. W., Univalent functions, 1, Mariner, 1983.

[A2] Duren, P. L., Univalent functions, Springer, 1983.

[A3] Pommerenke, Ch., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975 (中译本: Ch. 泊茂仁克, 单叶函数, 科学出版社, 1987).

杨维奇 译

函数元的星形 [star of a function element; звезда элемента функции], Mittag-Leffler 星形 (Mittag-Leffler star)

一个**星形区域** (star-like domain), 在其内给定的**解析函数元** (analytic function, element of an)

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

可沿从中心 a 出发的射线解析延拓. 此星形由复 z 平面上下述这些点组成: 它们是作为幂级数的 $f(z)$ 沿从该幂级数的中心 a 出发的各种可能的射线作**解析延拓** (analytic continuation) 所能达到的点. 如果 $z=a+re^{i\varphi}(0\leqslant r<+\infty)$ 是一条射线, 在其上存在不能由上述方法达到的点, 则在该射线上存在点 $z_1\neq a$, 使得所给元素可解析延拓到区间 $[a,z_1)$ 的任一点但不能越过该区间. 如果可延拓到此射线上任何点, 则令 $z_1=\infty$. 属于所有区间 $[a,z_1)$ 的点构成的集合是围绕 a 的一个 (单连通) 星形域, 称为所给函数元的星形, 记作 S_f. 在 S_f 中作解析延拓得到一个正则解析函数 $f(z)$, 它是所给元素生成的**完全解析函数** (complete analytic function) 在 S_f 中的单叶分支.

边界 ∂S_f 的所有点都是可达的 (见**可达边界点** (attainable boundary point)). 在解析延拓问题 (亦见 **Hadamard 定理** (Hadamard theorem)) 中, 还定义 ∂S_f 的角点、可达点和良可达点. 点 $z_1\in\partial S_f$ 称为函数元的星形的角边界点 (angular boundary point), 如果其模 $|z_1|$ 在 ∂S_f 的具有相同辐角 $\arg z_1$ 的所有点中是极小的. 点 $z_1\in\partial S_f$ 称为此星形的可达边界点 (attainable boundary point), 如果存在一个半圆盘 $V(z_1)$, 使得 $f(z)$ 在 $V(z_1)$ 内处处正则, 并在其直径上异于 z_1 的点处正则. 点 $z_1\in\partial S_f$ 称为良可达的 (well-at-

tainable)，如果存在以 z_1 为顶点、开角大于 π 的扇形 $V(z_1)$，使对充分小 $\delta>0$，$f(z)$ 在区域 $\{V(z_1)\cap\{|z-z_1|<\delta\}\}$ 内正则.

G. Mittag-Leffler 证明([1])，正则函数 $f(z)$ 在其星形内可表示为在 S_f 内收敛的多项式级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k_n}c_\nu^{(n)}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(z-a)^\nu. \qquad (*)$$

公式(*)称为星形内的 Mittag-Leffler 展开(Mittag-Leffler expansion). 此展开式中多项式的次数 k_n 及其系数 $c_0^{(n)},\cdots,c_{k_n}^{(n)}$ $(n=0,1,\cdots)$ 不依赖于 $f(z)$ 的形式并可一举求出. 此点是由 P. Painlevé 完成的(见[2]，[3]).

参考文献

[1] Mittag-Leffler, G., Sur la répresentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, I, *Acta Math.*, **23** (1899), 43-62; II, *Acta Math.*, **24** (1901), 183-204; III, *Acta Math.*, **24** (1901), 205-244, IV, *Acta Math.*, **26** (1902), 353-393; V, *Acta Math.*, **29** (1905), 101-182.

[2] Маркушевич, А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8(中译本：А. И. 马库雪维奇，解析函数论，高等教育出版社，1957，第八章).

[3] Borel, E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes, Gauthier-Villars, 1905.

Е. Д. Соломенцев 撰 沈永欢 译

程序设计中的语句 [statement in programming; оператор в программировании]

程序设计语言中表达在计算机上执行程序时的有限动作的文法结构. 在命令性程序设计语言(例如 **Algol 语言**(Algol)；**Fortran 语言**(Fortran))中，语句是执行规定动作的命令. 在应用性语言(例如 **Lisp 语言**(Lisp))中，语句是执行规定动作结果的记法. 在某些语言(例如 **Algol-68 语言**(Algol-68))中，命令性和应用性都使用：每条语句生成某个值，或许是空，并且执行(作为间接效果)规定的动作. 语句的动作通常有两部分：信息的和逻辑的.

信息部分(informational part)的组成是作为存储状态的函数，作出一个值，或者更一般地，转换存储状态到另一个状态.

逻辑部分(logical part)的组成是从程序中选择另一条语句，在本语句以后它将被执行. 履行程序的确定性或不确定性依赖于选择的单值性.

也见**算法语言**(algorithmic language).

А. П. Ершов 撰 程虎 译 刘椿年 校

静力学 [statics; статика]

为力学的一个分支，研究物体在力的作用下的平衡问题和力系的等效性条件. 平衡问题是相对于一个参考系来加以研究的，在这个参考系中，定义了所有作用于物体的力(例如，相对于地球的平衡). 与**动力学**(dynamics)一样，在静力学中也采用了一些真实物体的模型，以便使平衡问题变得比较简单. 这些模型包括：质点、弹性变形体、刚体、连续体、理想流体、粘性流体、等等. 根据物体的性质，静力学可以理解为刚体的静力学、弹性变形体的静力学、流体的静力学和气体的静力学. 静力学的研究可以采用几何的方法和解析的方法.

几何静力学(geometrical statics)研究影响所考虑质点系的力系(力矢量)的几何性质，构造等效力系，将其化为最简单的形式，建立力系和力系所作用的物体平衡的条件. 几何静力学最重要的课题是刚体的静力学.

分析静力学(analytical statics)的基本概念是作用于质点系上的力在系统的任意可能位移上作的功. 分析静力学的基本原理是**虚位移原理**(virtual displacements, principle of).

静力学的研究可以追溯到古代，其开端应归于希腊数学家 Archimedes. 几何静力学平衡的基本定律是荷兰力学家 S. Stevin 和法国力学家、几何学家 L. Poinsot 建立的. 第一次以普遍的形式表述虚位移原理的是 J. Bernoulli. J. L. Lagrange 第一个对虚位移原理加以了证明，并取得了关于系统平衡的结果.

参考文献

[1] Пуансо, Л., Начало статики, пер. с франц., М.-Л., 1920(译自法文).

[2] Бернулли, И., Избранные сочинения по механике, пер. с франц., М.-Л., 1937(译自法文).

[3] Lagrange, J.: Mécanique analytique, 1, A. Blanchard, reprint, 1965.

[4] Остроградский, М. В., Общие соображения относительно моментов сил, в кн., Остроградский, М. В., Избранные труды, М., 1958.

[5] Жуковский, Н. Е., Теоретическая механика, 2 изд., М.-Л., 1952.

[6] Чаплыгин, С. А., Курсы лекций по теоретической механике, в кн.: Чаплыгин, С. А., Собр. соч., т. 4, М.-Л., 1949.

[7] Appell, P., Traité de mécanique rationelle, 1, Paris.

Е. Н. Березкин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Marcolongo, R.: Theoretische Mechanik, 1, Teubner, 1911.

[A2] Lindsay, R. B. and Margenau, H.: Foundations of

physics, Dover, reprint, 1957.

王克仁 译 诸德超 校

平稳分布 [stationary distribution; стационарное распределение]

齐次 **Марков** 链 (Markov chain) 不依赖于时间的概率分布. 设 $\xi(t)$ 是齐次 Марков 链, 状态集为 S, 转移概率为 $p_{ij}(t)=\mathrm{P}(\xi(t)=j|\xi(0)=i)$, 平稳分布是满足下列条件的数集 $\{\pi_j : j\in S\}$

$$\pi_j\geqslant 0,\quad \sum_{j\in S}\pi_j=1, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}(t)=\pi_j,\ j\in S,\ t>0. \tag{2}$$

等式 (2) 表示平稳分布是不依时间而改变的: $\mathrm{P}\{\xi(0)=i\}=\pi_i$, $i\in S$, 则对任意 $i\in S$, $t>0$, $\mathrm{P}\{\xi(t)=i\}=\pi_i$; 此外对任意 $t,t_1,\cdots,t_k>0$, $i_1,\cdots,i_k\in S$,

$$\mathrm{P}\{\xi(t_1+t)=i_1,\cdots,\xi(t_k+t)=i_k\}=$$
$$=\mathrm{P}\{\xi(t_1)=i_1,\cdots,\xi(t_k)=i_k\}.$$

如果 $i\in S$ 是 Марков 链 $\xi(t)$ 的一个状态, 使得极限

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j(i)\geqslant 0,\ j\in S,\ \sum_{j\in S}\pi_j(i)=1$$

存在, 则数集 $\{\pi_j(i): j\in S\}$ 满足 (2), 而且是链 $\xi(t)$ 的一个平稳分布 (亦见**转移概率** (transition probabilities)).

如果 Марков 链 $\xi(t)$ 的正状态类的个数等于 1, 则给定附加条件 (1) 关于 $\{\pi_j\}$ 的线性方程组 (2) 有唯一解. 如果链有 k 个正状态类, 则平稳分布的集合是 k 个平稳分布的凸包, 其中每一个平稳分布集中分布在一个类上 (见 **Марков 链的正状态类** (Markov chain, class of positive states of a)).

线性方程组 (2) 的任一非负解称为平稳测度 (stationary measure); 当 (1) 和 (2) 不相容时平稳测度也可能存在. 例如, 在 $\{0,1,\cdots\}$ 上的随机游动:

$$\xi(0)=0,\ \xi(t)=\xi(t-1)+\eta(t),\ t=1,2,\cdots,$$

其中 $\eta(1),\eta(2),\cdots$, 是独立随机变量, 使得

$$\mathrm{P}\{\eta(i)=1\}=p,\quad \mathrm{P}\{\eta(i)=-1\}=1-p,$$
$$0<p<1,\ i=1,2,\cdots,$$

没有平稳分布但具有平稳测度:

$$\pi_j=\left[\frac{p}{1-p}\right]^j,\ j=0,\ \pm 1,\ \cdots.$$

具有状态集 S 的 Марков 链 $\xi(t)$ 的平稳测度 $\{\pi_j\}$ 的一个可能的概率解释是: 设存在 $\xi(t)$ 的独立实现的可数集, 并设 $\eta_t(i)$ 是 $\xi(t)=i$ 的实现的个数. 如果随机变量 $\eta_0(i)$ $(i\in S)$ 是独立的并服从均值为 π_i $(i\in S)$ 的 Poisson 分布, 则对任意 $t>0$, 随机变量 $\eta_t(i)$ $(i\in S)$ 是独立的, 并与 $\eta_0(i)$ $(i\in S)$ 具有相同的分布.

参考文献

[1] Chung, Kai-Lai, Markov chains with stationary transition probabilitites, Springer, 1960.

[2] Karlin, S., A first course in stochastic processes, Acad. Press, 1966.

A. M. Зубков 撰

【补注】 对更一般的 Марков 过程也定义平稳分布. 例如见 [A1].

参考文献

[A1] Breiman, L., Probability, Addison-Wesley, 1968.

刘秀芳 译 陈培德 校

平稳相位法 [stationary phase, method of the; стационарной фазы метод], 亦称定常相方法

计算激烈振荡函数积分

$$F(\lambda)=\int_{\Omega}f(x)e^{i\lambda S(x)}dx \tag{*}$$

的渐近性质的一种方法, 其中 $x\in\mathbf{R}^n$, $\lambda>0$, $\lambda\to+\infty$ 是一个大参数, Ω 是一个有界区域, $S(x)$ (相位) 为实函数, $f(x)$ 是复函数且 f, $S\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. 如果 $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 即 f 有紧支集, 且如果相位 $S(x)$ 在支集 $\operatorname{supp}f$ 上没有平稳点 (stationary points) (即 $S'(x)=0$ 的那些点), 又 $\Omega=\mathbf{R}^n$, 则当 $\lambda\to+\infty$ 时, 对所有 n 均成立 $F(\lambda)=O(\lambda^{-n})$. 因此, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 平稳相位点和边界 $\partial\Omega$ 上的点对积分 (*) 的渐近性将作出本质性的贡献. 积分

$$V_{x^0}(\lambda)=\int_{\Omega}f(x)\varphi_0(x)e^{i\lambda S(x)}dx,$$

$$V_{\partial\Omega}(\lambda)=\int_{\Omega}f(x)\varphi_{\partial\Omega}(x)e^{i\lambda S(x)}dx$$

分别被称作是孤立平稳点 x^0 和边界的贡献 (contributions), 其中, $\varphi_0\in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_0\equiv 1$ 在点 x^0 附近成立, 支集 $\operatorname{supp}\varphi_0$ 不包含任何其他的平稳点, $\varphi_{\partial\Omega}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 且在边界的某个确定邻域内有 $\varphi_{\partial\Omega}\equiv 1$. 如果 x^0 是 Ω 的一个内点而且 $S'(x^0)=0$, $S''(x^0)\neq 0$, 则对 $n=1$, $\Omega=(a,b)$ 有

$$1)\ V_a(\lambda)=\frac{i}{\lambda S'(a)}e^{i\lambda S(a)}[f(a)+O(\lambda^{-1})],$$

如果 $S'(a)\neq 0$;

$$2)\ V_{x^0}(\lambda)=\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(x^0)|}}\,e^{i(\lambda S(x^0)+\pi\delta_0/4)}[f(x^0)+$$
$$+O(\lambda^{-1})],\ \delta_0=\operatorname{sgn}S''(x^0).$$

对 $n=1$, 相位 S 有有限个平稳点, 每个平稳点

的重数有限以及函数 f 在这些平稳点和某个区间 Ω 的端点有有限重数的零点的情形，已有详细研究．渐近展开式已经得到．函数 f 和 S 具有幂奇异性的情形也已被研究：例如，$f=x^{\alpha}f_1(x)$，$S=x^{\beta}S_1(x)$，其中，当 $x=0, \alpha>-1, \beta>0$ 时，f_1，S_1 是光滑函数．

令 $n\geqslant 2$，并设 $x^0\in\Omega$ 是一非退化的平稳点（non-degenerate stationary point）（即 $\Delta_S(x^0)=\det S''(x^0)\neq 0$），则此时点 x^0 的贡献为

$$V_{x^0}(\lambda)=\left[\frac{2\pi}{\lambda}\right]^{n/2}|\Delta_S(x^0)|^{-1/2}\times$$

$$\exp\left[i\left[\lambda S(x^0)+\frac{\pi}{4}\delta_S(x^0)\right]\right][f(x^0)+O(\lambda^{-1})],$$

其中，$\delta_S(x^0)$ 是矩阵 $S''(x^0)$ 的符号差（signature）．$V_{x^0}(\lambda)$ 还有一个渐近级数展开式（当边界光滑时，关于贡献 $V_{\partial\Omega}(\lambda)$ 的公式，见[5]）．

若 $x^0\in\Omega$ 是一个有限重数的平稳点，则（见[6]）

$$V_{x^0}(\lambda)\sim\exp[i\lambda S(x^0)]\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{N}a_{kl}\lambda^{-r_k}(\ln\lambda)^l\right],$$

其中 r_k 是有理数且 $n/2\leqslant r_0<\cdots<r_k\to+\infty$．退化的平稳点已被研究，见[3]，[4]．

当相位 $S=S(x,\alpha)$ 依赖于实参数 α 且对小的 $|\alpha|$，S 有两个相近的非退化平稳点时，人们已作了一些研究．此时，积分 $F(\lambda,\alpha)$ 的渐近展式可通过 **Airy 函数**（Airy functions）来表示（见[5]）．平稳相位法有一种算子变体（operator variant）：$\lambda=A$，其中 A 是轴 $-\infty<t<\infty$ 上有界的作用在 Banach 空间 B 上的强连续算子群 $\{e^{itA}\}$ 中的无穷小算子，$f(x)$ 和 $S(x)$ 是在 B 中取值的光滑函数（[9]）．如果这两个函数是解析的，则平稳相位法是**鞍点法**（saddle point method）的特殊情形．

参考文献

[1] Thomson, W., Philos. Mag., **23** (1887), 252 – 255.

[2] Erdélyi, A., Asymptotic expansions, Dover, 1956.

[3] Риекстыньш, Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1 – 2, Рига, 1974 – 1977.

[4] Olver, F. W. J., Asymptotics and special functions, Acad. Press, 1974.

[5] Федорюк, М. В., Метод перевала, М., 1977.

[6] Atiyah, M. F., Resolution of singularities and division of distributions, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23** (1970), 2, 145 – 150.

[7] Арнольд, В. И., 《Успехи матем. наук》, **28** (1973), 5, 1 – 44.

[8] Варченко, А. Н., 《Функциональный анализ》, **10** (1976), 3, 13 – 38.

[9] Маслов, В. П., Федорюк, М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976

М. В. Федорюк 撰

【补注】 形式(*)的积分是所谓**振荡积分**（oscillatory integral）或 **Fourier 积分算子**（Fourier integral operator）的一个特殊情形，亦见[A2]．

参考文献

[A1] Wong, R., Asymptotic approximations of integrals, Acad. Press, 1989.

[A2] Hörmander, L., The analysis of linear partial differential operators, I, Springer, 1983, § 7.7.

王仁宏 樹绪庆 译

平稳随机过程 [**stationary stochastic process; стационарный случайный процесс**]，**时齐随机过程**（stochastic process, homogeneous in time）

统计特征不随时间 t 而改变的**随机过程**（stochastic process）$X(t)$，即相对于时间的平移：$t\to t+a$，$X(t)\to X(t+a)$，a 取任意固定的值（实数或整数值，依赖于所考虑的是连续或离散时间的随机过程），其统计特征是不变的．平稳随机过程的概念在概率论的应用中被广泛用于自然科学技术的各个领域，因为这类过程准确地描述了很多伴有无序波动的实际现象．例如，一个平稳系统中一条电路的电流或电压的脉动（电子"噪声"）就可认为是平稳随机过程；平稳湍流中某一点处的速度或压力的脉动也是平稳随机过程，等等．

在平稳随机过程的数学理论中，过程 $X(t)$ 的概率分布的矩，尤其是第一、二阶矩——均值 $\mathsf{E}X(t)=m$，**协方差函数**（covariance function）$\mathsf{E}[(X(t+\tau)-\mathsf{E}X(t+\tau))(X(t)-\mathsf{E}X(t))]$，或等价地，**相关函数**（correlation function）$\mathsf{E}X(t+\tau)X(t)=B(\tau)$ 起着重要的作用．在许多有关平稳随机过程理论的研究中，只讨论完全由 m 与 $B(\tau)$ 定义的性质（即所谓**相关理论**（correlation theory）或二阶平稳随机过程理论）．此时，这种 $\mathsf{E}X(t)$ 与 $\mathsf{E}X(t+\tau)X(t)$ 不依赖于 t 的随机过程 $X(t)$，常被分列成一种特殊的类而称为**广泛意义下的平稳随机过程**（stationary stochastic processes in the wide sense）．更特殊的随机过程则是其任何统计特征都不随时间改变（因此，对于任意的 n，n 维随机变量 $\{X(t_1),\cdots,X(t_n)\}$ 的分布函数 $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$ 仅依赖于 $n-1$ 个差值 $t_2-t_1,\cdots,t_n-t_1$），称为**严格意义下的平稳随机过程**（stationary stochastic processes in the strict sense）．于是，平稳随机过程的理论也分为严与宽两类，每一类采用不同的数学工具．

在严平稳过程情形下，其理论可以在概率论的框架之外表述成测度空间的单参数保测变换群理论，与动态系统的一般理论（见**动力系统**（dynamical system））及**遍历理论**（ergodic theory）很相近．严平稳随机过

程理论的最重要的一般定理是 Birkhoff-Хинчин 遍历定理（Birkhoff-Khinchin ergodic theorem），按照这个定理，对于任何有数学期望（即 $\mathsf{E}|X(t)|<\infty$）的严平稳随机过程 $X(t)$，极限

$$\lim_{T-S\to\infty}\frac{1}{T-S}\int_S^T X(t)\,dt=\hat{X}, \qquad (1)$$

或

$$\lim_{T-S\to\infty}\frac{1}{T-S}\sum_{t=S+1}^{T}X(t)=\hat{X}, \qquad (1a)$$

以概率 1 存在（式（1）针对连续时间过程，而（1a）针对离散时间过程）．还有一个 Е. Е. Слуцкий 的结果（[1]）是针对宽平稳随机过程的，它表明极限（1）或（1a）依均方意义存在．这个极限与 $\mathsf{E}X(t)$ 一致，当且仅当

$$\lim_{T\to\infty}T^{-1}\int_0^T b(\tau)\,d\tau=0, \qquad (2)$$

或

$$\lim_{T\to\infty}T^{-1}\sum_{\tau=0}^{T-1}b(\tau)=0, \qquad (2a)$$

其中

$$b(\tau)=B(\tau)-m^2=$$

$$=\mathsf{E}[X(t+\tau)-m][X(t)-m]$$

（von Neumann（L_2）遍历定理（von Neumann（L_2-）ergodic theorem））．特别如果当 $\tau\to\infty$ 时，$b(\tau)\to 0$，这些条件是满足的．Birkhoff-Хинчин 定理可以应用到取如下形式的各种严平稳随机过程：

$$Y_\Phi(s)=\Phi[X(t+s)],$$

其中 $\Phi[X(t)]$ 是平稳随机过程 $X(t)$ 的任一泛函，同时是有数学期望的随机变量．如果对于所有这样的平稳随机过程 $Y_\Phi(s)$，其对应的极限 $\hat{Y}_\Phi$ 与 $\mathsf{E}Y_\Phi$ 一致，则 $X(t)$ 称为度量传递平稳随机过程（metrically transitive stationary stochastic process）．对于平稳 Gauss 随机过程 $X(t)$，严平稳与宽平稳的条件是一致的；而其具有度量传递性，当且仅当 $X(t)$ 的谱函数（spectral function）$F(\lambda)$ 是 λ 的连续函数（例如见[2]，[3]）．一般关于一个平稳随机过程 $X(t)$ 的度量传递性，并不存在简单的必要与充分条件．

除了关于度量传递性的上述结果之外，对于平稳 Gauss 随机过程还有其他一些特殊的结果．对这类过程 $X(t)$ 的实现（即单个观测值）的局部性质、零点与极大值序列的统计性质以及与一给定水平线的交点，都已作了详尽的研究（例如见[3]）．与一水平线的交点有关的结果的典型例子是如下的命题：在很宽松的正则性条件下，一条高的水平线 $x=u$ 与平稳 Gauss 随机过程 $X(t)$ 的交点集当 $u\to\infty$ 时按某个特定的时间尺度（依赖于 u 且快速趋于无穷）收敛于有单位强度的事件的 Poisson 流（见[3]）．

当研究宽平稳过程时，过程 $X(t)$ 的值的线性组合及此种线性组合序列的均方极限组成的 Hilbert 空间 H_X 是考察的对象，其中的内积由公式 $(Y_1, Y_2)=\mathsf{E}Y_1\bar{Y}_2$ 定义．此时，变换 $X(t)\to X(t+a)$，其中 a 为固定的数，将生成一个把空间 H_X 映到其自身的线性酉算子 U_a；算子 U_a 族显然满足条件 $U_aU_b=U_{a+b}$，而值 $X(t)=U_tX(0)$ 构成一点集（若时间 t 连续则为一曲线，时间离散则为一可数点列），被所有算子 U_a 映到自身上．于是，宽平稳随机过程的理论可以用泛函分析的语言重述：研究 Hilbert 空间 H_X 的点集 $X(t)=U_tX(0)$，其中 U_t 是一族使 $U_aU_b=U_{a+b}$ 成立的线性酉算子（亦见**算子半群**（semi-group of operators））．

对于宽平稳随机过程理论，基于随机过程 $X(t)$ 及其相关函数 $B(\tau)$ 的 Fourier-Stieltjes 积分展开式而考虑其谱，是处于中心地位的．由 Хинчин 定理（[4]）（它是关于正定函数一般形式的 Bochner 分析定理的简单推论），连续时间平稳随机过程的相关函数 $B(\tau)$ 总可以表示为如下形式：

$$B(\tau)=\int_\Lambda e^{i\tau\lambda}\,dF(\lambda), \qquad (3)$$

其中 $F(\lambda)$ 是 λ 的有界单调非减函数，而 $\Lambda=(-\infty,\infty)$；而关于正定序列一般形式的 Herglotz 定理类似地指明，离散时间平稳随机过程的相关函数也有同样的表示，只不过 $\Lambda=[-\pi,\pi]$．如果相关函数 $B(\tau)$ 当 $|\tau|\to\infty$ 时下降得充分快（如应用中最常见的情形，在把 $X(t)$ 理解为差值 $X(t)-m$，即考虑 $\mathsf{E}X(t)=0$ 的条件下），那么（3）的右边的积分就变成通常的 Fourier 积分

$$B(\tau)=\int_\Lambda e^{i\tau\lambda}f(\lambda)\,d\lambda, \qquad (4)$$

其中 $f(\lambda)=F'(\lambda)$ 是非负函数．函数 $F(\lambda)$ 称为 $X(t)$ 的谱函数（spectral function），而函数 $f(\lambda)$（在等式（4）成立的情形下）称为它的谱密度（spectral density）．从 Хичин 公式（3）出发（或从过程 $X(t)$ 表成 Hilbert 空间 H_X 中的点集 $X(t)=U_tX(0)$ 这一定义，再由关于 Hilbert 空间中单参数酉群的谱表示的 Stone 定理），又可以证明，$X(t)$ 本身也成立如下形式的谱分解

$$X(t)=\int_\Lambda e^{it\lambda}\,dZ(\lambda), \qquad (5)$$

其中 $Z(\lambda)$ 是一个具有不相关增量的随机函数（random function with uncorrelated increments）（即当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时有 $\mathsf{E}dZ(\lambda_1)\overline{dZ(\lambda_2)}=0$），它满足条件 $\mathsf{E}|dZ(\lambda)|^2=dF(\lambda)$，而右边的积分理解为对应的积分和序列的均

方极限．分解式（5）为把任一宽平稳随机过程考虑成一族有随机振幅与相位、且不同频率为不相关调和振荡的叠加提供了依据；谱函数 $F(\lambda)$ 与谱密度 $f(\lambda)$ 则确定了构成 $X(t)$ 的谱频率为 λ 的调和振荡平均能量（更确切些，功率）的分布．（因此，在应用研究中，函数 $f(\lambda)$ 常称之为 $X(t)$ 的能谱（energy spectrum）或功率谱（power spectrum）．）

由公式（3）定义的相关函数 $B(\tau)$ 的谱分解，表明映射 $X(t) \to e^{it\lambda}$ 是 H_X 到 $L_2(dF)$ 的一个等距映射，它把 Hilbert 空间 H_X 的元 $X(t)$ 映到 Hilbert 空间 $L_2(dF)$ 的元 $e^{it\lambda}$，而 $L_2(dF)$ 由集 Λ 上的具有对 $dF(\lambda)$ 平方可积的模数的复值函数组成．这个映射可扩张为由整个空间 H_X 到空间 $L_2(dF)$ 上的等距线性映射 M，这一事实允许人们把宽平稳随机过程理论中的许多问题重述为函数论中的问题．

宽平稳随机过程理论的一个显著部分，是致力于解决此类过程的线性逼近问题的方法，即定出 $X(t)$ 的任意"已知"值的一个线性组合来最佳逼近（在最小均方误差意义下）同一过程的某个"未知"值或任一"未知的"随机变量 Y．特别地，$X(t)$ 的最优线性外推问题是要寻求值 $X(s)$ $(s>0)$ 的最佳逼近 $X^*(s)$，而后者线性依赖于所有的"过去值" $X(t)$，$t \leqslant 0$；最优线性内插问题是要寻求 $X(s)$ 的最佳逼近，而它线性依赖于 t 在某个包含 s 的特定时间区间之外的所有 $X(t)$ 的值；最优线性滤波问题则可陈述为：对某一随机变量 Y，寻求其线性依赖于 $X(t)$ 当 $t \leqslant 0$ 时的值的最佳逼近 Y^*（Y 通常是一个与 $X(t)$ 相关的平稳随机过程 $Y(t)$ 在某个 $t=s$ 处的值，在此 $Y(t)$ 最常扮演"信号"的角色，而 $X(t)=Y(t)+N(t)$，是"信号"与干扰它的"噪声" $N(t)$ 之和，这个和是从观测得知的）．（见**随机过程的预测**（stochastic processes, prediction of）；**随机过程的滤波**（stochastic processes, filtering of）；**随机过程的内插**（stochastic processes, interpolation of）．）

所有这些问题在几何上都归结为把 Hilbert 空间 H_X（或其扩张）的一个点正交投影到此空间的一个给定子空间上的问题．根据这个几何解释以及空间 H_X 与 $L_2(dF)$ 的同构性，A. Н. Колмогоров 推导出一般公式，使之可以由离散时间 t 的平稳随机过程 $X(t)$ 的谱函数 $F(\lambda)$ 确定最优线性外推或仅当 $t=s$ 的 $X(t)$ 的值为未知这种情形的内插的均方误差（见[2]，[5]～[6]）．当用于外推问题时，关于连续时间过程 $X(t)$ 的同样结果由 М. Г. Крейн 与 K. Karhunen 获得．N. Wiener（[8]）证明了，在最优线性外推与滤波情形下，最佳逼近 $X^*(s)$ 或 $Y^*=Y^*(s)$ 的寻求可以归结为某个 Wiener-Hopf 型积分方程的解，或（当 t 为离散时）这种方程的离散类比的解，它可以采用因子分解方法（见 **Wiener-Hopf 方程**（Wiener-Hopf equation）；**Wiener-Hopf 法**（Wiener-Hopf method））．连续时间平稳随机过程的最优线性外推与滤波问题，当已知的并非其所有 $t \leqslant 0$ 的过去值而仅仅是它在有限区间 $-T \leqslant t \leqslant 0$ 上的值这种情况，以及这种 $X(t)$ 的最优线性内插问题，可以归结为由它的谱建立某种特殊形式的微分方程（"广义串方程"）的问题（见[9]，[10]）．

上述解决最优线性外推、内插与滤波的方法，只是在某些特别的场合才能为所要求的最佳逼近 $X^*(s)$ 或 Y^* 提供充分简单的明确公式，以成功地应用于实际．存在这种明确公式的一类重要情形是具有关于 $e^{i\lambda}$（若 t 为离散）或 λ（若 t 为连续）的有理谱密度 $f(\lambda)$ 的平稳随机过程 $X(t)$．这是由 Wiener（[8]）详细研究过的（为了应用于由所有 $t \leqslant 0$ 的值求外推与滤波的问题）．此后又证明了，对于这种有有理谱密度的平稳随机过程，由有限区间 $-T \leqslant t \leqslant 0$ 上的数据求线性内插、外推和滤波的问题，也存在明确的公式（例如，见[2]，[11]）．具有有理谱密度过程的简单性可以解释为：这类平稳随机过程（事实上也只有它们）是多维平稳 **Марков 过程**（Markov process）的一维分量（见[12]）．

平稳随机过程的概念容许有一整套的推广．其中之一是广义平稳随机过程（generalized stationary stochastic process）的概念．这是一个**广义随机过程**（stochastic process, generalized）$X(\varphi)$（即定义在有紧支集的无穷可微函数 $\varphi(t)$ 的空间 D 上的随机线性泛函），使得对于任何正整数 n，实数 a 及 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in D$，随机向量 $\{X(V_a\varphi_1), \cdots, X(V_a\varphi_n)\}$（其中 $V_a\varphi(t)=\varphi(t+a)$）与 $\{X(\varphi_1), \cdots, X(\varphi_n)\}$ 有相同的分布函数（广义严平稳随机过程），或者有

$$\mathsf{E}X(\varphi)=\mathsf{E}X(V_a\varphi),$$

$$\mathsf{E}X(V_a\varphi_1)\overline{X(V_a\varphi_2)}=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)},$$

对所有 a 成立（广义宽平稳随机过程）．广义宽平稳随机过程 $X(\varphi)$ 和它的相关泛函（correlation functional）$B(\varphi_1, \varphi_2)=\mathsf{E}X(\varphi_1)\overline{X(\varphi_2)}$（或协方差泛函（covariance functional）$\mathsf{E}[(X(\varphi_1)-\mathsf{E}X(\varphi_1))(\overline{X(\varphi_2)-\mathsf{E}X(\varphi_2)})]$）也有（2）和（5）那样的谱分解（见**随机函数的谱分解**（spectral decomposition of a random function））．其他常用的平稳随机过程概念的推广还有：有确定阶数的平稳增量随机过程，**齐次随机场**（random field, homogeneous）．

参考文献

[1] Слуцкий, Е. Е., Избр. труды, М., 1960, 252－268.

[2] Розанов, Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963 (英译本: Rozanov, Y. A., Stationary random processes, Holden-Day, 1967).
[3] Cramér, H., Leadbetter, M., Stationary and related stochastic processes, Wiley, 1967.
[4] Хинчин, А. Я., 《Успехи матем. наук》, 1938, 5, 42 − 51.
[5] Колмогоров, А. Н., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, 5 (1941), 1, 3 − 14.
[6] Doob, J. L., Stochastic processes, Wiley, 1953.
[7] Гихман, И. И., Скороход, А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971 (英译本: Gihman, I. I., Skorohod, A. V., The theory of stochastic processes, I. Springer, 1971).
[8] Wiener, N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, M. I. T., 1949.
[9] Крейн, М. Г., 《Докл. АН СССР》, 94 (1954), 1, 13 − 16.
[10] Dym, H., McKean, H. P., Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem, Acad. Press, 1976.
[11] Яглом, А. М., 《Труды Моск. матем. об-ва》, 4 (1955), 333 − 374.
[12] Doob, J. L., The elementary Gaussian processes, *Ann. Math. Stat.*, 15 (1944), 229 − 282.

A. M. Яглом 撰

【补注】 在英文文献中，称遍历平稳过程 (ergodic stationary process) 而不说度量传递平稳过程. 亦见 **Gauss 过程** (Gaussian process).

关于"相关函数"与"协方差函数"这两个词的用法也不完全标准，在概率论中，下面的术语似乎是普遍采用的. 给定两个随机变量 X, Y，它们的协方差 (covariance) 是 $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y)]$，它们的**相关系数** (correlation coefficient) 是 $\rho(X, Y) = \operatorname{cov}(X, Y)/(\sigma(X)\sigma(Y))$，其中 $\sigma(X)$ 是 X 的方差 (variance) $\operatorname{var}(X) = \operatorname{cov}(X, X)$ (见**方差** (dispersion)) 的平方根，而对于混合二阶矩 $\mathsf{E}(XY)$ 并没有特别的称呼. 对应地，结合一个随机过程，用术语协方差函数 (covariance function) 与相关函数 (correlation function)，也用术语自协方差函数 (auto-covariance function) 与自相关函数 (auto-correlation function) 来称呼下面的量:

$$B(s, t) = \mathsf{E}[(X(s) - \mathsf{E}X(s))(X(t) - \mathsf{E}X(t))],$$

$$\rho(s, t) = \sigma(X(s))^{-1}\sigma(X(t))^{-1}B(s, t).$$

而对于两个随机过程 $X(t)$, $Y(t)$，则对应地有互协方差函数 (cross covariance function) 与互相关函数 (cross correlation function):

$$B_{XY}(s, t) = \mathsf{E}[(X(s) - \mathsf{E}X(s))(Y(t) - \mathsf{E}Y(t))],$$

$$\rho_{XY}(s, t) = \sigma(X(s))^{-1}\sigma(Y(t))^{-1}B_{XY}(s, t).$$

不过在概率论的应用领域，例如在海洋学、水文学和电子工程学中也使用某些不同的术语 (见 [A1] ~ [A4]). 例如，也可发现用"相关函数"一词来称呼 $B(s, t)$ (替代协方差函数). 此外，还经常发现用"成对相关函数 (pair correlation function)"来称呼量

$$\gamma(s, t) = \mathsf{E}[X(s)X(t)],$$

它也用在统计力学中，例如见 [A5].

如果过程是平稳的，术语上也没有多大差别. 若 $m = \mathsf{E}X(s)$, $\sigma = \sigma(X(s))$，则 $B(s, t) = \gamma(s, t) - m^2$, $\rho(s, t) = \sigma^{-2}B(s, t)$.

参考文献

[A1] Jazwinski, A. H., Stochastic processes and filtering theory, Acad. Press, 1970, 53 − 54.
[A2] Sawaragi, Y., Sunahara, Y., Nakamizo, T., Statistical decision theory in adaptive control systems, Acad. Press, 1967.
[A3] Monin, A. S., Ozmidov, R. V., Turbulence in the ocean, Reidel, 1985.
[A4] Sobczyk, K., Stochastic differential equations, Kluwer, 1991, 23.
[A5] Thompson, C. J., Mathematical statistical mechanics, Princeton Univ. Press, 1972.

潘一民 译

平稳子群 [**stationary subgroup; стационарная подгруппа**]

同迷向群 (isotropy group).

统计验收控制 [**statistical acceptance control; статистический приемочный контроль**]

批量工业产品的**统计质量控制** (statistical quality control) 的一个分支，旨在判明批量产品是否符合规定的要求. 统计验收控制按照国家标准 (国标) 进行. 国标包含控制方案的表格和从这些表格中选取方案的原则. 事先考虑在各种硬性规定水平上进行控制的可能性. 在选取控制方案和规定水平时，要考虑被验收批量的大小 (批中产品的件数)、以往验收控制的结果以及其他一些因素. 统计验收控制是保障所接收产品的质量符合所要求水平的有力手段.

最常用的统计验收控制有两种类型: 对二择一特征的控制 (control through an alternative chracteristic) 和对计量特征的控制 (control through a quantitative characteristic). 前者产品只区分合格与不合格，后者测定产品的实值参数.

为实施控制而抽选样品时，可以使用不同的方法. 广泛采用非还原随机抽样 (见**抽样法** (sample

methods)), 在这种情形下, 相同容量的一切样本都有相同的概率. 如果验收具有破坏性(如断裂试验), 则不可能进行全面检验. 对于统计验收控制, 通常只检验组成样本的那部分产品, 因此错误判断是可能的. 在统计验收控制的理论中, 研究制定计算控制方案的概率指标的计算方法, 以及基于在控制过程中积累的信息来估计统计验收控制效率的统计方法.

统计验收控制有时采用一阶段方案(one-stage plane). 设 𝔓 是被验收的一批 N 件产品. 一阶段方案由样本容量 n 和接收数 c 表征. 如果样本中的不合格产品件数为 d 且 $d \leqslant c$, 则接收 𝔓; 若 $d > c$, 则拒收 𝔓. 依产品的形式不同, 拒收的决定, 可能意味着对未进入样本的其余全部产品进行检验, 也可能降低其等级等等. 标准也容许采用两阶段方案、多阶段方案和序贯方案. 两阶段方案(two-stage plane)由第一和第二样本的容量 n_1 和 n_2、接收数 c_1 和 c_2、拒收数 r_1 和 r_2($r_1 > c_1$, $r_2 = c_2 + 1$)表征. 如果第一个样本中不合格品数 $d_1 \leqslant c_1$, 则接收 𝔓; 若 $d_1 \geqslant r_1$, 则拒收 𝔓; 若 $c_1 < d_1 < r_1$, 则抽取第二个样本. 设 d_2 是第二个样本中的不合格品数, 那么, 若 $d_1 + d_2 \leqslant c_2$, 则接收 𝔓; 若 $d_1 + d_2 \geqslant r_2$, 则拒收 𝔓.

在控制二择一特征时, 设 $P(D)$ 表示根据对组成样本的产品检验的结果接收这批产品的概率, 其中 D 是 𝔓 中不合格品的件数. $P(D)$ 是统计验收控制方案的重要数字特征, 称为工作特征(operating characteristic). 对于一阶段方案,

$$P(D) = \sum_{d=0}^{c} h_{N,D}^{n,d},$$

其中

$$h_{N,D}^{n,d} = \frac{\binom{n}{d}\binom{N-n}{D-d}}{\binom{N}{D}}$$

是当 𝔓 中有 D 件不合格品时, 在容量为 n 的非还原随机样本中发现 d 件不合格品的概率. 由概率 $P_d = h_{N,D}^{n,d}$ $(d = 0, 1, \cdots, n)$ 决定的分布称为**超几何分布**(hypergeometric distribution). 计算控制方案的数值指标时, 超几何分布常用**二项分布**(binomial distribution)或 **Poisson 分布**(Poisson distribution)来逼近. 对于两阶段方案和序贯方案, 所检验产品的平均件数 $m(D)$ 是重要指标.

标准中的控制方案的表格, 含有具有(至少近似地具有)各种优良性的方案的参数. 设 $q = D/N$ 是不合格品率, q_H 是在平稳生产过程下的平均不合格品率. 最佳控制方案, 可以在 $q = q_H$ 且平均费用相同的方案中去找. 平均费用, 等于组成样本的产品的检验与误将合格品报废造成的损失二者费用之和. 有时宜将接收不合格品的损失也纳入平均费用. 在前苏联国家标准([1])中, 有一阶段方案的表格. 对于给定的平均检验费用水平和 q_H, 当接收含 D 件不合格品的一批 N 件产品时, 这些表格能在 $D > Nq_H$ 较宽的取值范围, 为消费者提供近似的最好的保护. 这指的是, 对于较宽范围的 D 值, 这样方案的工作特征, 接近在 $q = q_H$ 下具有相同平均检验费用的一切一阶段方案的、工作特征的下包络线. 标准中方案表格的编制, 需要耗费大量电子计算机机时.

根据对多批产品的统计验收控制结果, 可以建立反映所用标准的效率的、各种量的所谓逐次估计量. 例如, 可以对于提交验收的批产品, 求不合格品总数的无偏估计量; 在采用一阶段方案进行验收时, 可以建立消费者接收的不合格品总数的统计估计. 随着样本容量增大, 这些估计量的偏倚迅速减小. 在统计验收控制中采用逐次估计的思想, 是 A. H. Колмогоров 在[2]中提出的. 存在对二择一特征的统计验收控制方法的各种推广(见[3],[4]); 在某些应用中宜考虑这样的统计验收控制: 可能将不合格品错判为合格品或合格品错判为不合格品([5]). 在统计验收控制中广泛使用 **Bayes 方法**(Bayesian approach, [6]).

对于计量特征的统计验收控制标准基于如下假设: 在验收时样本中产品的被测定特征, 是独立同分布的随机变量, 其分布函数属于某个参数族. 在最常用的标准中, 这样的族是正态(Gauss)分布族. 在实际中, 应仔细的检定这些假设是否成立, 而且这项工作应在决定采用对计量特征的统计验收控制标准之前进行.

只有合理的使用对计量特征统计验收控制, 才可以提供比对二择一特征的统计验收控制更有效的结果.

参考文献

[1] ГОСТ 24660 – 24681.

[2] Колмогоров, А. Н., 《Изв. АН СССР, Сер. матем.》, 14(1950), 4, 303 – 326.

[3] Беляев, Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975.

[4] Лумельский, Я. П., Статистические оценки результатов контроля качества, М., 1979.

[5] Беляев, Ю. К.《Докл. АН СССР》, 231(1976), 3, 521 – 524.

[6] Hald, A., Statistical theory of sampling inspection by attributes, 1 – 2, Univ. Copenhagen, 1981.

Ю. К. Беляев 撰

【补注】

参考文献

[A1] Juran, J. M. (ed), Quality control handbook, McGraw-Hill, 1962.

周概容 王健 译

随机过程的统计分析 [**statistical analysis of stochastic processes**; **статистический анализ случайных процессов**]

数理统计和随机过程论的分支，研究和解决随机过程论中的统计问题（statistical problems in the theory of stochastic processes）.

И. А. Ибрагимов 撰 周概容 译

统计决策理论 [**statistical decision theory**; **статистических решений теория**]

统计观测结果的处理和运用的一般理论．在此术语更广泛意义下，统计决策理论是指在不确定条件下选择最优非决定性行动的理论．

数理统计的研究对象是概率论的反问题．考虑某种随机现象 φ，假设 φ 在质上由其一切基本事件 ω 的可测空间 $(\Omega, \mathscr{A})$ 描述，而 φ 从量上由其事件的概率分布 P 描述．统计研究人员只了解 φ 的质的描述，而关于 P 在试验之前只有其类型的不完全信息：$P \in \mathscr{P}$，其中 $\mathscr{P}$ 是已知概率分布律族．在对 φ 进行一次或若干次观测并整理所得资料后，统计研究人员应作出关于 P 的推断并采取最有利的行动（特别地，他可能决定：所搜集的资料不充分，在作最后推断之前需要再进行一系列观测）．在传统的数理统计问题中，独立观测次数（样本容量）固定并求未知概率律 P 的最优估计．现代统计决策的一般概念是 A. Wald 开创的（见 [2]）．假设每一试验需要支付一定费用；而由于错误的决策，统计人员则蒙受损失——向其索取与错误相应的"罚款"．因此，从统计人员的角度，决策规则（程序）Π 最优，如果它使风险 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(P, \Pi)$（即全部损失之和的数学期望）最小化．A. Wald（[1]）以此方法作为**统计序贯分析**（sequential analysis）的基础，并导致**统计质量控制**（statistical quality control）中一种决策规则的创立：这种规则在同样推断精度下所用观测次数，比传统决策规则平均几乎少一半．在上述情形下，任何统计决策问题可视为两选手在 J. von Neumann（[3]）意义下比赛，其中一名选手是统计人员，而另一选手是自然界．其实，P. Laplace 早在 1820 年就把获得统计估计比作赌博，并把估计不佳视为统计人员失败．

风险 $\mathfrak{R}(P, \Pi)$ 的值既依赖于决策规则 Π，又依赖于被观测现象的结局的概率分布 P．由于 P 的"真"值未知，故对于给定的 Π 把 $\mathfrak{R}(P, \Pi)$ $(P \in \mathscr{P})$ 视为 P 的函数，并将整个风险函数（risk function）关于 Π 最小化．称决策规则 Π_1 **一致较好**于规则 Π_2，如果对于一切 $P \in \mathscr{P}$，有 $\mathfrak{R}(P, \Pi_1) \leqslant \mathfrak{R}(P, \Pi_2)$，并且至少对于一个 $P \in \mathscr{P}$，有 $\mathfrak{R}(P, \Pi_1) < \mathfrak{R}(P, \Pi_2)$．决策规则 Π 称为**容许的**（admissible），如果不存在一致较好的决策规则．称决策规则类 C 为**完全的**（complete）或**本质完全的**（essentially complete），如果对于任意决策规则 $\Pi \notin C$，存在一致较好的（不比 Π 差的）决策规则．最小的（minimal）完全决策规则类最重要．它（只要存在）与一切容许决策规则的集合重合．假如最小完全类只含一个决策规则，则此规则将是最优的．在一般情形下，对应于容许决策规则的风险函数，必须再与某泛函（例如最大风险）的值作比较．在此意义下的最优决策规则 Π_0：

$$\sup_{P \in \mathscr{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi_0) = \inf_{\Pi} \sup_{P \in \mathscr{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi) = \mathfrak{R}^*,$$

称为**极小化极大规则**（minimax rule）．可以用 Bayes 风险作比较：

$$\mathfrak{R}_\mu(\Pi) = \int_{\mathscr{P}} \mathfrak{R}(P, \Pi) \mu\{dP(\cdot)\},$$

其中关于族 $\mathscr{P}$ 上某先验概率分布求平均风险．这样选择泛函是自然的，特别是对进行多系列试验且以固定边缘分布 P_m 进行第 m 系列试验的情形，而 $\{P_1, P_2, \cdots\}$ 是具有未知分布 μ 的随机测度序列（见 **Bayes 方法**（Bayesian approach））．在此意义下的最优决策规则 Π_0：

$$\mathfrak{R}_\mu(\Pi_0) = \inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\mu(\Pi),$$

称为关于**先验分布**（a priori distribution）μ 的 **Bayes 决策规则**（Bayesian decision rule）．最后，先验分布 ν 称做（对于该问题）**最不利的**（least favourable），如果

$$\inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\nu(\Pi) = \sup_{\mu} \inf_{\Pi} \mathfrak{R}_\mu(\Pi) = \mathfrak{R}_0.$$

在相当一般的条件下可以证明：1) 对于任一先验分布 μ，都存在 Bayes 决策规则；2) 一切 Bayes 决策规则及其极限的全体组成完全类；3) 极小化极大决策规则存在，它是关于最不利先验分布的 Bayes 决策规则，并且 $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}_0$（见 [4]）．最优决策规则的具体形式，本质上依赖于统计问题的类型．不过，在传统的统计估计问题中，当样本容量很大时，最优决策规则微弱依赖所选用比较风险函数的方法．

在统计决策理论中，决策规则可以是确定性的，也可以是随机化的．确定性规则由函数决定，例如由容量为 n 的一切样本 $(\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(n)})$ 的空间 Ω^n 到决策 δ 的可测空间 $(\Delta, \mathscr{B})$ 的可测映射决定．随机化规则由 $(\Omega^n, \mathscr{A}^n)$ 到 $(\Delta, \mathscr{B})$ 的形如 $\Pi(\omega^{(1)}, \cdots, \omega^{(n)}; d\delta)$ 的 Марков 转移概率分布给出，后者描述一种概率分布律，使所采用的值 δ 也可以按照这种分布律独立地"选取"（见**统计试验法**（statistical experiments, method of）；**Monte-Carlo 法**（Monte-Carlo method））．容许采用随机化方法，可使问题的决策规则的集合为凸集，从而使理论分析很大程度上变得容易．此外，在有些问题中，最优决策规则就是随机化的．不过，在实际中，统计人员尽量回避随机化规则，因为使用随

机数表或随机数发生器，会使"确定"推断的工作复杂化、甚至失去其科学性．

根据定义，统计决策规则是，由某试验结局的可测空间（Ω, $\mathscr{A}$）到决策的可测空间（Δ, $\mathscr{D}$）的转移概率分布．反之，每一个转移概率分布 $\Pi(\omega; d\delta)$，可视为结局可测空间为（Ω, $\mathscr{A}$）和决策可测空间为（Δ, $\mathscr{D}$）的任何决策问题中的决策规则（亦可视为入口字母表为 Ω 而出口字母表为 Δ 的无记忆通讯信道）．统计决策规则 Π 构成代数范畴，其对象是：Cap（Ω, $\mathscr{A}$）——在一切可能可测空间（Ω, $\mathscr{A}$）上的所有概率分布的全体，射——转移概率分布 Π．该范畴的不变量和同变量决定数理统计中许多自然的概念和定律（见[5]）．例如，在范畴的对象上，（精确到乘一因子）存在唯一不变 Riemann 度量．它决定于 Fisher **信息矩阵**（information matrix）．对于参数化的概率分布族及统计决策问题，该范畴的射产生等价关系和序，由此可以给出**充分统计量**（sufficient statistic）的自然定义．表征概率分布 P 和 Q 的不相似性的、Kullback 非对称信息离差 $I(Q:P)$（见**信息距离**（information distance）)，是范畴中的单调不变量：如果（Q_1, P_1）$\geqslant$（Q_2, P_2），即如果对于某个 Π，$Q_2 = Q_1\Pi$，$P_2 = P_1\Pi$ 时，有

$$I(Q_1:P_1) \geqslant I(Q_2:P_2).$$

在根据固定容量 N 的样本进行统计估计的问题中，假设要求估计观测结果的实际边缘分布律 P，如果事先已知 P 属于光滑分布族 $\mathscr{P}$，则在选 $2I(Q:P)$ 作决定 Q 的不变损失函数的情形下，极小化极大风险为

$$\mathfrak{R}^* = N^{-1}\dim\mathscr{P} + o(N^{-1}).$$

量子事件的逻辑不是 Aristoteles 的；因此微观世界的随机现象不服从古典概率论的定律．为描述微观世界而设计的体系，承认非交换随机变量的存在，并作为退化交换概形包括古典理论．在相应的解释下，量子力学测量理论的许多问题，是统计决策理论问题的非交换类似（见[6]）．

参考文献

[1] Wald, A., Sequential analysis, Wiley, 1947.

[2] Wald, A., Statistical decision function, Wiley, 1950（中译本：A. 瓦尔特，统计决策函数，上海科学技术出版社，1960）.

[3] Neumann, J. von and Morgenstern, O., The theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1944.

[4] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[5] Ченцов, Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972（英译本：Chentsov, N. N., Statistical decision rules and optimal inference, Amer. Math. Soc., 1982）.

[6] Холево, А. С., Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории, М., 1980（英译本：Kholevo, A. S., Probabilistic and statistical aspects of quantum theory, North-Holland, 1982）． Н. Н. Ченцов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, J., Statistical decision theory and Bayesian analysis, Springer, 1985. 周概容 王健 译

统计系综 [statistical ensemble; статистический ансамбль]

统计物理学中对任何物理系统的相空间（态空间（space of states））及该系统物理量（可观察量（observable quantities））的求平均方法所采用的一个名词（见**统计物理学中的数学问题**（statistical physics, mathematical problems in））．在具有相空间 Ω 的经典系统中，可观察量是定义于 Ω 上的实函数，其平均值借助于在相空间 Ω 上按某个概率测度 μ 进行积分而求得．在由 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中向量所描述的量子系统中，可观察量由作用于 $\mathscr{H}$ 的自伴算子予以定义，其平均值则借助作用于 $\mathscr{H}$ 的算子代数 $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ 上所定义的某个正的归一化泛函 ρ 进行运算而求得（$\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ 上这样的泛函称为态（states））．一个态通常给出为下列形式：

$$\rho(A) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}A),\ A \in \mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tag{1}$$

其中 $\hat{\rho}$ 是 $\mathscr{H}$ 上正的（迹类）算子，使 $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$（算子 $\hat{\rho}$ 称为态 ρ 的密度矩阵（density matrix of the state ρ））．

若物理系统的时间演化（系统的动力学（dynamics of the system））为给定，即（对具有某个 Hamilton 函数 $H(\omega)$，$\omega\in\Omega$（系统的能量（energy of the system））的经典系统）由 Hamilton 运动方程所生成的相空间映上自身的一一映射群 $\Gamma_t: \Omega\to\Omega$，$t\in\mathbf{R}$，或者（对量子系统）由 Hamilton 算子 H（系统的能量算子（energy operator of the system））所生成的 Hilbert 空间映上自身的酉映射 $U_t: \mathscr{H}\to\mathscr{H}$，$t\in\mathbf{R}$；于是对这个系统所定义的任何统计系综，它的时间演化自然地定义为：

$$\left.\begin{aligned} &\mu_t(C) = \mu(\Gamma_t^{-1}C),\ C\subset\Omega\ （经典情况）,\\ &\rho_t(A) = \rho(U_t A U_t^{-1})\ （量子情况）. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

为了描述系统的平稳性质，人们研究平衡系综（equilibrium ensemble），即相空间测度或量子态相对于演化（2）是不变量．虽然一般说有许多平衡统计系综，但在统计物理学中所研究的仅是特殊的一些——所谓 Gibbs 正则系综（canonical Gibbs ensembles）（分布）（亦见 **Gibbs 统计系综**（Gibbs statistical aggre-

gate)).

经典 Gibbs 系综(classical Gibbs ensembles). 假设 Hamilton 量中除 $H=H_0(\omega)$ 外，还有 Ω 上函数的独立集合，$H_1(\omega), \cdots, H_k(\omega), k=0, 1, \cdots$，它们相对于动力学 Γ_t 是不变量(在由一种或多种类型有限但任意数目粒子组成的系统中，$H_i(\omega)$ 例如等于相空间位形 $\omega\in\Omega$ 中无论何种类型粒子的数目；在磁偶极子系统的情况中，$H_i(\omega)$等于它们的总磁矩；等等). 测度

$$d\mu_{\beta, \nu_1, \cdots, \nu_k} = (\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(H_0+\nu_1 H_1+\cdots+\nu_k H_k)\}d\omega \quad (3)$$

称为 Gibbs 巨正则系综(grand canonical Gibbs ensemble)，其中 $d\omega$ 是由 Ω 上辛结构所生成的一个测度；$\beta>0$ 和 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 是实参数；而 Ξ 是归一化因子，称为巨统计和(grand statistical sum)(或巨配分函数(grand partition function)，见**统计和**(statistical sum)),

$$\Xi=\int_\Omega \exp\{-\beta(H_0+\nu_1 H_1+\cdots+\nu_k H_k)\}d\omega. \quad (4)$$

测度(3)所生成的测度 $\mu_{h_0, \cdots, h_k}$，集中于集合$\{\omega: H_i(\omega)=h_i, i=0, \cdots, k\}$，$h_i\in\mathbf{R}$，$i=0, \cdots, k$，与这个集合上的条件分布一致，称为 Gibbs 微正则系综(micro-canonical Gibbs ensemble). 也曾研究过"中间"系综，所谓 Gibbs 小正则系综(small canonical Gibbs ensemble)，它们是以类似方式由(3)通过固定全部或一些函数 $H_i(\omega)$ $(i=1, \cdots, k)$的值而获得的.

量子 Gibbs 系综(quantum Gibbs ensemble). 令 $\hat{H}_1^*, \cdots, \hat{H}_k$($k$ 为任意)为两两对易的算子，与算子 $\hat{H}=\hat{H}_0$ 亦对易("守恒量"). $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ 上的态通过**密度矩阵**(density matrix)予以定义；密度矩阵

$$\hat{\rho}_{\beta, \nu_1, \cdots, \nu_k} = (\Xi)^{-1}\exp\{-\beta(\hat{H}_0+\nu_1\hat{H}_1+\cdots+\nu_k\hat{H}_k)\},$$

其中

$$\Xi=\mathrm{Tr}(\exp\{-\beta(\hat{H}_0+\nu_1\hat{H}_1+\cdots+\nu_k\hat{H}_k)\})$$

是巨统计和(grand statistical sum)(巨配分函数(grand partition function))和 $\beta>0$，$\nu_1, \cdots, \nu_k$ 是参数，这样所定义的态称为 Gibbs 巨正则系综(grand canonical Gibbs ensemble). 令 $P_{H_i}^{h_i}$，$i=0, \cdots, k$，为 $\mathscr{H}$ 上的投影算子，投上具有本征值 h_i 的算子 H_i 的本征子空间. 具有密度矩阵

$$\hat{\rho}_{h_0, h_1, \cdots, h_k}=(Q)^{-1}P_{H_0}^{h_0}\cdots P_{H_k}^{h_k}$$

的态，其中 $Q=\dim(\mathrm{Im}\hat{\rho}_{h_0, \cdots, h_k})$，称为 Gibbs 微正则系综(micro-canonical Gibbs ensemble). 可以类似方式引入 Gibbs 小正则系综(small canonical Gibbs ensemble)，例如，作为统计系综具有密度矩阵

$$\hat{\rho}_{\beta, h_1, \cdots, h_k}=(Z)^{-1}\exp(-\beta\hat{H}_0)\prod_{i=1}^{k}P_{H_i}^{h_i},$$

其中 Z 是归一化因子(小统计和(small statistical sum)，小配分函数(small partition function)).

有时还研究这些统计系综的某些模型修正(例如，位形或格点系统中的 Gibbs 系综)，如所谓极限 Gibbs 系综，即，无穷系统(例如，在整个空间运动的无穷粒子系统)的相空间(或态)上的概率分布. 这些统计系综是由上述有限系统的系综通过热力学极限过渡而得出的(见[3]).

存在一个假设——所谓系综的极限等价原理(principle of limit equivalence of ensembles)——它这样阐述，当满足某些正常条件时(粗略地说，当没有相变时)，应用不同(巨正则，小正则，微正则)Gibbs 系综所获得的极限 Gibbs 统计系综，在给定各系综参数间的特定对应下是一致的. 在某些特定情况下，曾经证明过这个假设(见[3]).

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Статистическая физика, часть 1, 3 изд., М., 1976 (Теоретич. физика, т. 5)(中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，统计物理学，人民教育出版社，1964).

[2] Минлос, Р. А., 《УМН》, 23 (1968), 133 - 190.

[3] Ruelle, D., Statistical mechanics. Rigorous results, Benjamin, 1969.

[4] Preston, K., Gibbs states and countable sets, Cambridge Univ. Press, 1974.

P. A. Минлос 撰

【译注】 文献中常用的三种统计系综指的是：微正则系综，描述能量 E 和粒子数 N 固定的孤立系统；正则系综，描述粒子数固定但可与大热源交换能量的系统；巨正则系综，描述可与大热源交换能量和与大粒子库交换粒子的系统. 例如，对于量子统计系综，它们的密度矩阵分别是：

微正则系综：$\hat{\rho}=\delta(\hat{H}-E)$；

正则系综：$\hat{\rho}=\frac{1}{Z}e^{-\hat{H}/kT}, Z=\mathrm{Tr}\,e^{-\hat{H}/kT}$；

巨正则系综：$\hat{\rho}=\frac{1}{\Xi}e^{-(\hat{H}-\sum\mu_i\hat{N}_i)/kT}$,

$$\Xi=\mathrm{Tr}\,e^{-(\hat{H}-\sum\mu_i\hat{N}_i)/kT};$$

其中 $\hat{H}$ 是 Hamilton 算子，$\hat{N}_i$ 是粒子数算子，而 μ_i 是化学势；Z 是配分函数，Ξ 是巨配分函数.

参考文献

[B1] 王竹溪，统计物理学导论，第二版，人民教育出版社，1965.

[B2] 郝柏林，见中国大百科全书，物理学(II)，统计物理学词条；中国大百科全书出版社，1987.

徐锡申 译

统计遍历定理[**statistical ergodic theorem**; **статистическая эргодическая теорема**]

von Neumann 遍历定理(von Neumann ergodic theorem)及其推广的另一名称.

统计估计[**statistical estimation**; **статистическое оценивание**]

数理统计的基本部分之一, 研究根据随机观测结果估计其分布的各种特征.

例 1. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立随机变量(观测结果), 其在直线上的共同分布 $\mathscr{P}$ 为观测者所未知. 设 $\mathscr{P}_n^*$ 是经验(样本)分布, 它赋于每个随机点 X 以权重 $1/n$, 则 $\mathscr{P}_n^*$ 是 $\mathscr{P}$ 的**统计估计量**(statistical estimator). 经验矩

$$a_r = \int x^r d\mathscr{P}_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

是矩 $\alpha_v = \int x^v d\mathscr{P}$ 的估计量. 特别地,

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

是均值的估计量, 而

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

是方差的估计量.

基本概念. 在一般估计理论中, X 的观测值是取值于可测空间 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ 的**随机元**(random element), 其未知分布属于给定的分布族 P. 分布族总是可以参数化并且表示为$\{\mathscr{P}_\theta: \theta \in \Theta\}$. 这里假设对参数的依赖形式及集合 Θ 已知. 由观测值 X 估计未知参数 θ 或函数 g 在点 θ 处的值 $g(\theta)$, 在于构造一观测值的函数 $\theta^*(X)$, 使其能充分好地逼近 θ 或 $g(\theta)$.

估计量的比较以如下方式进行. 假设在集合 $\Theta \times \Theta$(或 $g(\Theta) \times g(\Theta)$)上给定一非负损失函数 $w(y_1, y_2)$, 其含义是: 在实际参数为 θ 时, 采用估计量 θ^* 造成的损失为 $w(\theta^*; \theta)$. 对于给定的损失函数 w, 人们用平均损失, 即风险函数 $R_w(\theta^*; \theta) = \mathsf{E}_\theta w(\theta^*; \theta)$ 作 θ 的估计量 θ^* 之优劣的度量. 这样, 在估计量的集合上引进了半序: 估计量 T_1 优于估计量 T_2, 如果 $R_w(T_1; \theta) \leqslant R_w(T_2; \theta)$. 特别地, 参数 θ 的估计量 T(关于损失函数 w)称为**不容许的**(inadmissible), 如果存在估计量 T', 使对于一切 $\theta \in \Theta$, 有 $R_w(T'; \theta) \leqslant R_w(T; \theta)$, 并且至少对某 θ 有严格不等式. 在估计量质量的这种比较方式下, 结果许多估计量是不可比的, 况且损失函数的选取在很大程度上是任意的.

有时可以在某个更窄的估计量类中找到最优估计量. **无偏估计量**(unbiased estimator)就是重要一类估计量. 假如所作试验关于某个变换族是不变的, 则自然局限于考虑不破坏问题对称性的估计量(见**同变估计量**(equivariant estimator)).

可以按估计量在"不良"点的性质对其进行比较: 称 θ 的估计量 T_0 关于损失函数 w 为**极小化极大估计量**(minimax estimator), 如果

$$\sup_\theta R_w(T_0; \theta) = \inf_T \sup_\theta R_w(T; \theta),$$

其中下确界对一切估计量 $T = T(X)$ 来求.

在估计问题的 Bayes 提法中(见 **Bayes 方法**(Bayesian approach)), 未知参数视为随机变量, 它在 Θ 上有**先验分布**(a priori distribution) Q. 在这种情形下, 关于损失函数 w 的最优估计量 T_0 由以下关系式确定:

$$r_w(T_0) = \mathsf{E}_w(T_0; \theta) = \int_\Theta \mathsf{E}_\theta w(T_0; \theta) Q(d\theta) =$$

$$= \inf_T \int_\Theta \mathsf{E}_\theta w(T; \theta) Q(d\theta),$$

其中下确界对一切估计量 $T = T(X)$ 来求.

区分参数估计问题和非参数估计问题. 对于参数估计问题, Θ 是有限维 Euclid 空间的子集, 并且通常考虑形如 $l(|\theta_1 - \theta_2|)$ 的损失函数, 其中 l 是 $\mathbf{R}^+$ 上的非负不减函数. 最常用的平方损失函数 $|\theta_1 - \theta_2|^2$ 特别重要.

如果 $T = T(X)$ 对于族 $\{\mathscr{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ 是**充分统计量**(sufficient statistic), 则常可局限于考虑形如 $\theta^* = h(T)$ 的估计量. 例如, 假设 $\Theta \subset \mathbf{R}^k$, $w(\theta_1; \theta_2) = l(|\theta_1 - \theta_2|)$, 其中 l 是凸函数, 而 θ^* 是 θ 的某个估计量, 则存在不比 θ^* 差的估计量 $h(T)$; 如果 θ^* 是无偏的, 则 $h(T)$ 也可以选为无偏的(**Blackwell 定理**(Blackwell theorem)). 假如 T 对于族$\{\mathscr{P}_\theta\}$是完全充分统计量, θ^* 是 $g(\theta)$ 的无偏估计量, 则存在形如 $h(T)$ 的无偏估计量, 使其在无偏估计量类中有最小方差(**Lehmann-Scheffé 定理**(Lehmann-Scheffé theorem)).

一般, 在参数估计问题中, 假设族$\{\mathscr{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$的元素关于某 σ 有限测度 μ 绝对连续, 且密度为 $d\mathscr{P}_\theta / d\mu = p(x; \theta)$. 如果 $p(x; \theta)$ 是 θ 的充分光滑函数, 且 Fisher 信息矩阵

$$I(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} \frac{dp}{d\theta}(x;\theta)\left[\frac{dp}{d\theta}(x;\theta)\right]^T \frac{\mu(dx)}{p(x;\theta)}$$

存在, 则估计问题称为**正则的**(regular). 对于正则问题, 由 **Cramér-Rao 不等式**(Cramér-Rao inequality): 当 $\Theta \subset \mathbf{R}^1$ 时, 对于任意估计量 T, 有

$$\mathsf{E}_\theta |T - \theta|^2 \geqslant \frac{\left[1 + \frac{db}{d\theta}(\theta)\right]^2}{I(\theta)} + b^2(\theta),$$

$$b(\theta) = \mathsf{E}_\theta T - \theta,$$

可见估计量的精度有下界．

估计问题的例 2．最广的提法是：假设由观测得容量为 n 的样本 $X_1, \cdots, X_n$——取值于 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ 的独立同分布的随机变量，其共同的关于测度 ν 的密度为 $f(x;\theta)$．$\theta \in \Theta$．在正则问题中，如果 $I(\theta)$ 是一次观测的 Fisher 信息量，则全样本的 Fisher 信息量 $I_n(\theta) = nI(\theta)$．这时，Cramér-Rao 不等式形为

$$\mathrm{E}_\theta |T - \theta|^2 \geqslant \frac{\left[1 + \frac{db}{d\theta}(\theta)\right]^2}{nI(\theta)} + b^2(\theta),$$

$$T = T(X_1, \cdots, X_n).$$

2.1．设 X_j 是正态随机变量，其分布密度为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

其中未知参数是 $\theta = (a, \sigma^2)$，$\bar{X}$ 和 s^2 可以作 a 和 σ^2 的估计量，并且 $(\bar{X}, s^2)$ 是充分统计量．估计量 $\bar{X}$ 是无偏的，而 s^2 是有偏的．如果 σ^2 已知，则 $\bar{X}$ 是最小方差无偏估计量，也是关于平方损失函数的极小化极大估计量．

2.2．设 X_j 是 $\mathbf{R}^k$ 中的正态随机变量，其密度为

$$\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{|x-\theta|^2}{2}\right\}, \theta \in \mathbf{R}^k.$$

统计量 $\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量；如果 $k \leqslant 2$，则它关于平方损失函数是容许估计量；若 $k > 2$，则它是不容许的．

2.3．设 X_j 是 $\mathbf{R}^1$ 中的随机变量，其未知的分布密度 f 属于给定的密度族 F．对于充分广的密度类 F，这是非参数问题．密度在点 x_0 的值 $f(x_0)$ 的估计问题，是泛函 $g(f) = f(x_0)$ 的估计问题．

例 3．线性回归模型（linear regression model）．假设观测变量

$$X_i = \sum_{\alpha=1}^{p} a_{\alpha i} \theta_\alpha + \xi_i,$$

其中 ξ_i 是随机扰动；$i = 1, \cdots, n$；$\|a_{\alpha i}\|$ 是已知矩阵；$(\theta_1, \cdots, \theta_p)$ 是待估计参数．

例 4．观测平稳 **Gauss** 过程（Gaussian process）段 $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$，其有理谱密度为

$$\left|\sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j\right|^2 \cdot \left|\sum_{j=0}^{n} b_j \lambda^j\right|^{-2}.$$

待估计未知参数为 $\{a_j\}$，$\{b_j\}$．

建立估计量的方法．根据应用最广的**最大似然法**（maximum-likelihood method），用随机函数 $p(X;\theta)$ 的极大点 $\hat{\theta}(X)$ 作 θ 的估计量，称为最大似然估计量（maximum-likelihood estimator）．若 $\Theta \subset \mathbf{R}^k$，则在似然方程（likelihood equation）

$$\frac{d}{d\theta} \ln p(\theta; X) = 0$$

的根中求最大似然估计量．

在例 3 中，根据**最小二乘法**（least squares, method of），用函数

$$m(\theta) = \sum_{i=1}^{n} [X_i - \sum_\alpha a_{\alpha i} \theta_\alpha]^2$$

的极小点作 θ 的估计量．

还有一种建立估计量的方法，即关于给定损失函数 w 和先验概率分布 Q 的 Bayes 估计量 T，尽管原问题的提法并不是 Bayes 的．例如，设 $\Theta \subset \mathbf{R}^k$，则可以通过

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta p(X;\theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} p(X;\theta) d\theta}$$

来估计 θ．所得估计量是关于平方损失函数和均匀先验分布的 Bayes 估计．

矩法（moments, method of）．设 $\Theta \subset \mathbf{R}^k$，且 $\alpha_1(\theta), \cdots, \alpha_k(\theta)$ 有 k 个"好"估计量 $a_1(X), \cdots, a_k(X)$．矩法估计量是方程组 $\alpha_i(\theta) = a_i$ 的解．作为 a_i 常选用经验矩（见例 1）．

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是样本，则（见例 1）作为 $g(\mathscr{F})$ 的估计量可以选用 $g(\mathscr{F}_n^*)$．如果函数 $g(\mathscr{F}_n^*)$ 无定义，（例如，$g(\mathscr{F}) = (d\mathscr{F}/d\lambda)(x)$，其中 λ 是 Lebesgue 测度），则可选适当的修正 $g_n(\mathscr{F}_n^*)$．例如，对于密度的估计量可选用**直方图**（histogram）或形如

$$\int \varphi_n(x-y) d\mathscr{F}_n^*(y)$$

的估计量．

估计量的渐近性质．为便于叙述，考虑例 2 中的问题，设 $\Theta \subset \mathbf{R}^k$．可以期望，当 $n \to \infty$ 时，"好"估计量应当无限接近被估计特征．称估计量列 $\theta_n^*(X_1, \cdots, X_n)$ 为 θ 的相合估计量序列（consistent sequence of estimators），如果对于一切 θ 值依概率 P_θ 有 $\theta_n^* \to \theta$．在广泛的条件下，上面提到的估计方法都产生**相合估计量**（consistent estimator）．例 1 中的估计量是相合的．对于正则估计问题，最大似然估计量和 Bayes 估计量是渐近正态的，均值为 θ 而相关矩阵为 $[nI(\theta)]^{-1}$．在这些条件下，这些估计量，相对很广的一类损失函数是渐近极小化极大的，且可以视为渐近最优的（见**渐近有效估计量**（asymptotically-efficient estimator））．

区间估计（interval estimation）．集合 Θ 的随机子集 $E = E(X)$，称为 θ 的置信系数（confidence coeffi-

cient) 为 γ 的置信区域 (confidence rigion), 如果 $P_\theta\{E \supset \theta\} = \gamma (\geqslant \gamma)$. 通常, 具有给定 γ 的置信区域有多个, 问题在于选出具有某种最优性的 (例如, 对于 $\Theta \subset \mathbf{R}^1$ 的情形, 选出最小长度的) 区间. 假设在例 2.1 的条件下, $\sigma = 1$, 则区间

$$\left[\bar{X} - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right],$$

$$1 - \gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{u^2}{2} \right\} du,$$

是参数 a 的置信区间 (见区间估计 (interval estimator)), 置信系数为 γ.

参考文献

[1] Fisher, R. A., On the mathematical foundations of theoretical statistics, *Phil. Trans. Roy. Soc., London Ser. A*, 222 (1922).

[2] Колмогоров, А. Н., 《Изв. АН СССР》, сер. Матем., 6 (1942), 1.

[3] Cramér, H., Mathimatical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

[4] Kendall, M. G. and Stuart, A., The advanced theory of statistics, 2, Inference and relationship, Griffin, 1979.

[5] Ибрагимов, И. А., Хасьминский, Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979 (英译本: Ibragimov, I. A. and Has'minskii, R. Z., Statistical estimation: asymptotic theory, Springer, 1981).

[6] Ченцов, Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972 (英译本: Chentsov, N. N., Statistical decision laws and optimal inference, Amer. Math. Soc., 1982).

[7] Zacks, S., The theory of statistical inference, Wiley, 1975.

[8] Grenander, U., Abstract inference, Wiley, 1981.

И. А. Ибрагимов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Lehmann, E. L., Theory of point estimation, Wiley, 1986.

周概容 王健 译

统计估计量 [statistical estimator; оценка статистическая]

用来估计理论概率分布的未知参数的, 随机变量的函数. 统计估计理论的方法是现代误差理论的基础. 通常, 未知参数是被测定的物理常量, 而受误差影响的直接测量结果是随机变量. 例如, 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立同正态分布随机变量 (含独立同正态分布随机误差的等精度测量结果), 则用算术平均值

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \tag{1}$$

作未知平均值 a 的统计估计量 (a 是一个可近似测量的物理常数的值).

统计估计量作为随机变量的函数, 通常用某个公式表示, 公式的选取由实际的要求决定. 这里, 要区分点估计和区间估计.

点估计. 统计量称为点估计量 (point estimator), 因为其值可表示为未知参数值空间的点 (空间的维等于待估计参数的个数). 正是用点估计量的值作未知物理量的近似值. 下面, 为简便计, 假设要估计一个自然参数. 这时, 统计估计量是观测结果的函数, 取实数为值.

点估计量称为无偏的 (unbiased), 如果其数学期望等于被估计的量, 即如果统计估计量不含系统误差. 算术平均值 (1) 是同分布随机变量 X_i 的数学期望的无偏估计量 (其中 X_i 未必服从正态分布). 然而, 样本方差

$$\hat{s}^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{n} \tag{2}$$

是方差 $\sigma^2 = \mathrm{D} X_i$ 的有偏统计估计量, 因为 $\mathrm{E}\hat{s}^2 = (1 - 1/n)\sigma^2$; 通常, 用函数

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \hat{s}^2$$

作 σ^2 的无偏统计估计量.

亦见**无偏估计量** (unbiased estimator).

参数 a 的无偏估计量 α 的精度多用方差 $\mathrm{D}\alpha$ 来度量.

最小方差的无偏统计估计量称为最优的 (best). 在上面的例中, 算术平均值 (1) 是最优统计估计量. 不过, 如果随机变量的概率分布不是正态的, 则统计估计量 (1) 未必是最优的. 例如, 若观测结果 X_i 在区间 (b, c) 上均匀分布, 则数学期望 $a = (b + c)/2$ 的最优统计估计量, 等于两极端值之和的一半:

$$\alpha = \frac{\min X_i + \max X_i}{2}. \tag{3}$$

通常采用相对效率 (relative efficiency) 作为对不同统计估计量作比较的准则, 相对效率即最优估计量的方差与给定无偏估计量的方差之比. 例如, 如果观测结果 X_i 服从均匀分布, 则估计量 (1) 和 (3) 的方差相应为

$$\mathrm{D}\bar{X} = \frac{(c-b)^2}{12n}$$

和

$$\mathrm{D}\alpha = \frac{(c-b)^2}{2(n+1)(n+2)}. \tag{4}$$

因为估计量 (3) 是最优的, 故在此情形下估计量 (1)

的相对效率为

$$e_n(\bar{X}) = \frac{6n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{6}{n}.$$

随着观测次数 n 增大，通常要求所选统计估计量 α 依概率趋向参数 a 的真值，即对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{|\alpha - a| > \varepsilon\} = 0;$$

这样的估计量称为相合的（consistent）．例如，当 $n \to \infty$ 时方差趋向 0 的任何无偏估计量是相合统计估计量（亦见**相合估计量**（consistent estimator））．由于这里趋向极限的阶有重要意义，故渐近有效统计估计量（asymptotically efficient statistical estimator）是渐近最优估计量；所谓渐近有效估计量，即满足如下条件的估计量 α：当 $n \to \infty$ 时，有

$$\frac{\mathrm{E}(\alpha - a)}{\sqrt{\mathrm{E}(\alpha - a)^2}} \to 0 \text{ 且 } e_n(\alpha) \to 1.$$

例如，设 $X_1, \cdots, X_n$ 是同正态分布，则（2）是未知参数 $\sigma^2 = \mathrm{D}X_i$ 的渐近有效估计量，因为当 $n \to \infty$ 时，估计量 $\hat{s}^2$ 的方差和最优估计量 $\hat{s}^2 n/(n-1)$ 的方差渐近等价：

$$\frac{\mathrm{D}\hat{s}^2}{\mathrm{D}[\hat{s}^2 n/(n-1)]} = \frac{n}{(n-1)^2}, \ \mathrm{D}\hat{s}^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1},$$

并且

$$\mathrm{E}(\hat{s}^2 - \sigma^2) = \frac{-\sigma^2}{n}.$$

对于统计估计量及其应用有重要意义的是，统计估计量对参数 a 的平方偏差以某个量为下界（Fisher 提出用包含在观测结果中关于未知参数 a 的信息量来表征此量）．例如，设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，密度为 $p(x;a)$，而 $\alpha = \varphi(X_1, \cdots, X_n)$ 是参数 a 的某个函数 $g(a)$ 的统计估计量，则在一类广泛的情形下，有

$$\mathrm{E}[\alpha - g(a)]^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{nb^2(a)I(a) + [g'(a) + b'(a)]^2}{nI(a)}, \quad (5)$$

其中

$$b(a) = \mathrm{E}[\alpha - g(a)], \ I(a) = \left[\frac{\partial \ln p(X;a)}{\partial a}\right]^2.$$

函数 $b(a)$ 称为偏倚（bias）；而不等式（5）右侧量的倒数，称为观测结果中关于函数 $g(a)$ 的 Fisher 信息量（Fisher information）．特别地，如果 α 是参数 a 的无偏统计估计量，则

$$g(a) = a, \ b(a) = 0,$$

而且

$$\mathrm{E}[\alpha - g(a)]^2 = \mathrm{D}\alpha \geqslant \frac{1}{nI(a)}, \quad (6)$$

且在此情形下信息量 $nI(a)$ 与观测次数成正比（函数 $I(a)$ 称为一次观测中所含的信息量（information））．

不等式（5）和（6）成立的基本条件是，估计量 α 作为 X_i 的函数的光滑性，以及使 $p(x,a) = 0$ 的点 x 的集合与参数 a 无关．这后一条件并非总成立．例如，对于**均匀分布**（uniform distribution），这后一条件不成立，因此统计估计量（3）不满足不等式（6）（根据（4），此方差的量级为 n^{-2}，而在（6）中其无穷小的阶不高于 n^{-1}）．

对于离散型分布随机变量 X_i，不等式（5）和（6）也成立，这时只需将信息量 $I(a)$ 的定义中密度 $p(x,a)$ 换为事件 $\{X = x\}$ 的概率．

如果参数 a 的无偏统计估计量 α^* 的方差等于不等式（6）右侧，则 α^* 是最优估计量．逆命题一般不成立：最优统计估计量的方差可能大于 $[nI(a)]^{-1}$．不过，当 $n \to \infty$ 时，最优估计量的方差 $\mathrm{D}\alpha^*$ 渐近等价于（6）的右侧，即 $n\mathrm{D}\alpha^* \to 1/I(a)$．这样，基于 Fisher 信息量可以定义无偏统计估计量 α 的渐近效率

$$e_\infty(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}\alpha^*}{\mathrm{D}\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nI(a)\mathrm{D}\alpha}. \quad (7)$$

统计估计量理论的信息处理方法特别富有成效，如果随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的联合分布密度（在离散型情形下为联合概率）可以表示为两个函数的乘积：

$$h(x_1, \cdots, x_n)q[y(x_1, \cdots, x_n); a],$$

其中函数 h 与 a 无关，而函数 g 是某个随机变量 $Z = y(X_1, \cdots, X_n)$ 的分布密度．这时，称随机变量 Z 为**充分统计量**（sufficient statistics）．

矩法（见**矩法（概率论中的）**（moments, method of (in probability theory)））是建立点估计量的最常用方法之一．按矩法，依赖于未知参数的理论分布与一离散型样本分布相对应；该样本分布，由观测结果决定，是设想的以概率 $1/n$ 取 $X_1, \cdots, X_n$ 为值的随机变量的分布（样本分布可视为理论分布的点估计量）．以样本分布的矩作理论分布相应矩的统计估计量；例如，矩法为数学期望 a 和方差 σ^2 所提供的统计估计量，即样本均值（1）和样本方差（2）．未知参数通常可以（精确或近似地）表示为理论分布的若干个矩的函数．将这些函数中的理论矩换成相应的样本矩，即可得到所求统计估计量．实际中，矩法，通常计算比较简便，它所提供的统计估计量一般有不高的渐近效率（见上面均匀分布数学期望的估计量的例）．

最大似然法（maximum-likelihood method），从理论的角度看是更现代的一种求统计估计量的方法．最大似然法基于似然函数（likelihood function）．似然函数 $L(a)$，作为未知参数 a 的函数，由联合分布密度 $p(x_1, \cdots, x_n; a)$ 将其中自变量 x_i 换成随机变量本身 X_i 得到；如果 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，概率密度为

$p(x;a)$，则

$$L(a)=p(X_1;a)\cdots p(X_n;a)$$

（当 X_i 服从离散型分布时，在似然函数 L 的定义中需将密度换成事件 $\{X_i=x_i\}$ 的概率），用使 $L(\alpha)$ 达到最大值的量 α 作未知参数 a 的最大似然统计估计量（这时，常用对数似然函数 $l(\alpha)=\ln L(\alpha)$ 取代 $L(\alpha)$；由于对数函数的单调性，函数 $L(\alpha)$ 和 $l(\alpha)$ 的极大值点相同）．

最大似然估计量的基本优点是，在某些一般性条件下，最大似然估计量是相合的、渐近有效的，并且有渐近正态分布．上述性质是指：如果 α 是最大似然估计量，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\mathrm{E}\alpha\sim a,\ \mathrm{E}(\alpha-a)^2\sim\mathrm{D}\alpha\sim\sigma_n^2(a)=$$
$$=\frac{1}{\mathrm{E}\left[\frac{d}{da}l(a)\right]^2}$$

（如果 X_i 独立，则 $\sigma_n^2(a)=[nI(a)]^{-1}$）．这样，对于规范化的统计估计量 $(\alpha-a)/\sigma_n(a)$ 的分布函数，有极限关系：

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left\{\frac{\alpha-a}{\sigma_n(a)}<x\right\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt\equiv\Phi(x).\qquad(8)$$

最大似然估计的优良性使求函数 L（或 l）之最大值的计算量得以补偿．在某些情形下，由于如下性质使计算量大为简化：一、如果估计量 α^* 使（6）式化为等式，则最大似然估计量唯一且等于 α^*；二、如果存在充分统计量 Z，则最大似然估计量是 Z 的函数．

例如，设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同正态分布，密度为

$$p(x;a,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right\},$$

则

$$l(a,\sigma)=\ln L(a,\sigma)=$$
$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2.$$

函数 $l(a,\sigma)$ 的极大值点 $a=a_0$ 和 $\sigma=\sigma_0$ 满足方程组

$$\frac{\partial l}{\partial a}\equiv\frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i-a)=0,$$
$$\frac{\partial l}{\partial\sigma}\equiv-\frac{n}{\sigma^3}\left[\sigma^2-\frac{1}{n}\sum(X_i-a)^2\right]=0.$$

从而 $a_0=\overline{X}=\sum X_i/n$，$\sigma^2=\hat{s}^2=\sum(X_i-\overline{X})^2/n$；并且在此情形下，（1）和（2）式是最大似然估计量，其中 $\overline{X}$ 是参数 a 的最优统计估计量，服从正态分布（$\mathrm{E}\overline{X}=a$，$\mathrm{D}\overline{X}=\sigma^2/n$）；$\hat{s}^2$ 是参数 σ^2 的渐近有效统计估计量，当 n 充分大时近似服从正态分布（$\mathrm{E}\hat{s}^2\sim\sigma^2$，$\mathrm{D}\hat{s}^2\sim2\sigma^4/n$）．两个估计量是相互独立的充分统计量．

再看一个例子，设

$$p(x;a)=\{\pi[1+(x-a)^2]\}.$$

该密度满意地描述到达平面屏幕的微粒的一个坐标的分布，而这些微粒是从位于屏幕外的一点射出的（假设该点在屏幕上射影的坐标 a 未知）．由上述密度决定的分布无数学期望、因为相应的积分发散．因此不能用矩法得 a 的统计估计量．形式上用算术平均值（1）作 a 的统计估计量没有意义，因为这时 $\overline{X}$ 的分布有与单个观测值相同的密度 $p(x;a)$．为估计 a 可利用如下事实：所述分布关于点 $x=a$ 对称，因此 a 是理论分布的中位数．对矩法略加改变，常用样本中位数 μ 作 a 的统计估计量；对于 $n\geqslant3$，样本中位数 μ 是 a 的无偏估计量；当 n 较大时，μ 近似服从正态分布，其方差为

$$\mathrm{D}\mu\sim\frac{\pi^2}{4n}.$$

同时

$$l(a)=-n\ln\pi+\sum_{i=1}^{n}\ln[1+(X_i-a)^2],$$

因此 $nI(a)=n/2$，而这说明，根据（7）渐近效率 $e_\infty(\mu)$ 等于 $8/\pi^2\approx0.811$．这样，为使样本中位数 μ 作为 a 的估计量，具有与其最大似然估计量 α 相同的精度，需要增加 25% 观测．假如用于试验的费用很高，则为确定 a 应使用统计估计量 α：在此情形下，α 是如下方程的根

$$\frac{\partial l}{\partial a}\equiv-2\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-a}{1+(X_i-a)^2}=0.$$

取 $\alpha_0=\mu$ 为初始逼近，以下按公式

$$\alpha_{k+1}=\alpha_k+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\alpha_k}{1+(X_i-\alpha_k)}$$

用逐次逼近法解上面的方程．亦见**点估计量**（point estimator）．

区间估计．几何上表示为参数空间中点集的统计估计称为*区间估计*（interval estimator）．区间估计可以看作点估计量的集合．该集合依赖于观测结果，因此是随机的；于是，每一个区间估计对应着一个概率——该区间估计“覆盖”未知参数点的概率．此概率一般依赖于未知参数；因此，把该概率的最小可能

值当作区间估计可信度的特征，称作置信系数(confidence coefficient)．内容丰富的统计推断只寻求置信系数接近 1 的区间估计．

假如被估计的是一个参数 a．则区间估计一般是某一个区间 (β,γ)，其端点 β 和 γ 是观测结果的函数；这样的区间 (β,γ) 称为置信区间(confidence interval)；这时，置信系数 ω 是事件 $\{\beta<a\}$ 和 $\{\gamma>a\}$ 同时出现的概率的下确界：

$$\omega=\inf_a \mathrm{P}\{\beta<a<\gamma\},$$

其中下确界对参数 a 的一切可能值来求．如果取此区间的中点 $(\beta+\gamma)/2$ 作参数 a 的点估计量，则以不小于 ω 的概率可以断定，此估计量的绝对误差不大于区间长度的一半 $(\gamma-\beta)/2$．换句话说，如果用上述估计绝对误差的标准，则在平均小于 $100(1-\omega)\%$ 的情形下将得出错误的结论．在置信系数 ω 固定的情形下，选最短的置信区间为好，即选使长度的数学期望 $\mathrm{E}(\gamma-\beta)$ 达到最小值的置信区间．

如果随机变量 X_i 的分布只依赖于一个参数 a，则构造置信区间通常借助某个点估计量 α 来实现．对于多数实际中感兴趣的情形，适当选择的估计量 α 的分布函数 $\mathrm{P}\{\alpha<x\}=F(x;a)$ 对参数 a 的依赖是单调的．在这些条件下，为建立置信区间，应将 $x=\alpha$ 代入 $F(x;a)$，并求出方程

$$F(\alpha;\ a_1)=\frac{1-\omega}{2} \text{ 和 } F(\alpha+0;\ a_2)=\frac{1+\omega}{2} \quad (9)$$

的两个根 $a_1=a_1(\alpha;\omega)$ 和 $a_2=a_2(\alpha;\omega)$；(9) 式中

$$F(x+0;a)=\lim_{\Delta\to 0}F(x+\Delta^2;a)$$

(对于连续型分布，$F(x+0;a)=F(x;a)$)．以 $a_1(\alpha;\omega)$ 和 $a_2(\alpha;\omega)$ 为坐标的两个点，分别为置信系数为 ω 的置信区间的两个端点．显然，用这样相对简单的方法构造的区间，在许多情形下不是最优的(最短的)．不过，如 α 是 a 的渐近有效估计量，当观测次数充分大时，这样的区间估计与最优区间估计无本质差异．特别地，这对于最大似然估计量是对的，因为最大似然估计量是渐近正态的(见 (8))．在求解方程 (9) 困难时，则可以利用最大似然点估计量和 (8) 式，近似求置信区间：

$$\beta\approx\beta^*=\alpha-x\sigma_n(\alpha) \text{ 和 } \gamma\approx\gamma^*=\alpha+x\sigma_n(\alpha),$$

其中 x 是方程 $\Phi(x)=(1+\omega)/2$ 的根．

当 $n\to\infty$ 时，区间估计 (β^*,γ^*) 的实际置信系数趋向于 ω．在更一般的情形下，观测结果 X_i 的分布依赖于多个参数 $a,b,c,\cdots$．在这些情形下，上述建立置信区间的方法常不再适用，因为点估计量 α 的分布不仅依赖于 a，而且一般还依赖于其他参数．不过，在实际中感兴趣的情形下，统计量 α 可以用观测结果 X_i 和未知参数 a 的这样的函数代替，它使其分布不依赖(或"几乎不依赖")于所有未知参数．规范化最大似然估计量 $(\alpha-a)/\sigma_n(a,b,\cdots)$ 就是这样函数的一个例子；如果将分母中参数 $a,b,\cdots$ 的值换成其最大似然估计量 $\alpha,\beta,\cdots$，则极限分布仍然与 (8) 式相同．所以，每个参数单独的置信区间，可以像一个参数的情形那样构造．

上面已经指出，如果随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同正态分布，则 $\bar{X}$ 和 s^2 分别为 a 和 σ^2 的最优估计量．估计量 $\bar{X}$ 的分布函数为

$$\mathrm{P}\{\bar{X}<x\}=\Phi\left[\frac{\sqrt{n}\ (x-a)}{\sigma}\right],$$

因此它不仅依赖于 a，而且也依赖于 σ．但是，所谓 Student 统计量(Student statistic)

$$\frac{\sqrt{n}\ (\bar{X}-a)}{s}=\tau$$

的分布与 a 和 σ 无关，且

$$\mathrm{P}\{|\tau|\leqslant t\}=\omega_{n-1}(t)=$$

$$=C_{n-1}\int_0^t\left(1+\frac{v^2}{n-1}\right)^{-n/2}dv,$$

其中常数 C_{n-1} 应选使 $\omega_{n-1}(\infty)=1$ 者．于是，置信系数为 $\omega_{n-1}(t)$ 的置信区间为：

$$\bar{X}-\frac{st}{\sqrt{n}}<a<\bar{X}+\frac{st}{\sqrt{n}}.$$

估计量 s^2 的分布只依赖于 σ^2，且 s^2 的分布函数为

$$\mathrm{P}\left\{s^2<\frac{\sigma^2x}{n-1}\right\}=G_{n-1}(x)=$$

$$=D_{n-1}\int_0^x v^{(n-3)/2}e^{-v/2}dv,$$

其中常数 D_{n-1} 决定于条件 $G_{n-1}(\infty)=1$ (称为自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布(chi-squared distribution)．因为概率 $\mathrm{P}\{s^2<\sigma^2x/(n-1)\}$ 随 σ^2 增大而单调增大，故 (9) 式可以用来构造区间估计．这样，设 x_1 和 x_2 相应为方程 $G_{n-1}(x_1)=(1-\omega)/2$ 和 $G_{n-1}(x_2)=(1+\omega)/2$ 的根，则置信系数为 ω 的置信区间为

$$\frac{(n-1)s^2}{x_2}<\sigma^2<\frac{(n-1)s^2}{x_1}.$$

特别地，由此可见，相对误差的置信区间为

$$\frac{x_1}{n-1}-1<\frac{s^2-\sigma^2}{\sigma^2}<\frac{x_2}{n-1}-1.$$

在多数数理统计的参考书中，有 Student 分布函数 $\omega_{n-1}(t)$ 和 χ^2 分布函数 $G_{n-1}(x)$ 的详尽数值表.

以上假设，除若干参数值外，观测结果的分布函数已知．然而，实际中常有分布函数未知的情形．这时，估计参数可以采用**统计中的非参数方法** (non-parametric methods in statistics)，即不依赖于原概率分布的方法．例如，假设需要估计独立随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的连续型理论分布的中位数 m（对于对称分布，中位数等于数学期望，只要后者存在）．设 $Y_1 \leqslant \cdots \leqslant Y_n$ 是同一些变量 X_i 按其值递增顺序的排列．那么，若 $k(1 \leqslant k \leqslant n/2)$ 是任一整数，则

$$\mathrm{P}\{Y_k < m < Y_{n-k+1}\} =$$

$$= 1 - 2\sum_{r=0}^{k-1}\binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \omega_{n,k}.$$

于是，(Y_k, Y_{n-k+1}) 是 m 的区间估计，置信系数 $\omega = \omega_{n,k}$. 对随机变量 X_i 的任何连续型分布，此结果都成立．

前面曾指出，样本分布是未知理论分布的点估计量；并且样本分布函数 $F_n(x)$ 是理论分布函数 $F(x)$ 的无偏估计量．А. Н. Колмогоров 证明了统计量

$$\lambda_n = \sqrt{n}\max_{-\infty<x<\infty}|F_n(x) - F(x)|$$

的分布不依赖于未知的理论分布，且当 $n \to \infty$ 时，λ_n 的极限分布为 $K(y)$，称为 Колмогоров 分布 (Kolmogorov distribution)．因而，如果 y 是方程 $K(y) = \omega$ 的解，则以概率 ω 可以断定，函数曲线 $F_n(x) \pm y/\sqrt{n}$ 所夹带状区域，完全"覆盖"理论分布函数 $F(y)$ 的图形（当 $n \geqslant 20$ 时，统计量 λ_n 的精确分布和极限分布间的差异实际上不显著）．这样的区间估计称为置信区域 (confidence region)．亦见**区间估计** (interval estimator)．

误差理论中的统计估计．误差理论是数理统计的一个分支，研究根据观测结果数值估计未知量．由于测量结果的随机特性，或许还由于被测量现象的随机本性，使得并非所有测量结果都是平等的：在重复测量中，有些出现得较频繁，有些则较少见．

误差理论的基础是数学模型，根据模型把所有意料中的测量结果的全体，视为某一随机变量的值的集合．因此，统计估计理论具有重要作用．误差理论的结论具有统计的特性．这类结论的含义和内容（其实就是统计估计理论的结论）只能根据**大数律** (law of large number) 表出（上面对置信系数含义的说明，就是这种处理的一个例子）．

假设测量结果 X 是一随机变量，可以区分三种类型的测量误差：系统误差、随机误差和过失误差（在**误差理论** (errors, theory of) 中给出了这种误差的数量描述）．这里，差 $X - a$ 称为对未知量 a 的测量误差 (error)，其数学期望 $\mathrm{E}(X-a) = b$ 称为系统误差 (systematic error)（若 $b = 0$，则测量称为无系统误差的）；差 $\delta = X - a - b$ 称为随机误差 (random error) $(\mathrm{E}\delta = 0)$．这样，假如对量 a 进行了 n 次独立测量，则测量结果可以表示为等式：

$$X_i = a + b + \delta_i,\ i = 1, \cdots, n. \tag{10}$$

其中 a 和 b 是常数，而 δ_i 是随机变量．在更一般的情形下，有

$$X_i = a + (b + \beta_i) + \delta_i,\ i = 1, \cdots, n, \tag{11}$$

其中 β_i 是和 δ_i 相互独立的随机变量，它以十分接近 1 的概率为 0（故任何其他值 $\beta_i \neq 0$ 出现的可能性很小）．值 β_i 称为过失误差 (gross error) 或异常值 (outlier)．

系统误差的估计（和排除）通常超出数理统计的范围．有两个例外．一是标准方法 (standard method)，二是方差分析 (dispersion analysis)：根据标准方法，为估计 b，对已知量 a 进行一系列测量（在此模型中，b 是要估计的量，而 a 是已知系统误差；方差分析可以估价若干系列测量之间的系统差异）．

误差理论的基本问题，是求未知量 a 的统计估计和估计测量的精度．假如系统误差已排除 $(b = 0)$，而且不含过失误差，则 (10) 式化为 $X_i = a + \delta_i$；在这种情形下，估计 a 的问题归结为，求同分布随机变量 X_i 之数学期望在一定意义下最优的统计估计量．像前面几段中已指出的那样，统计估计（点估计或区间估计）的形状本质上与统计误差的分布律有关．假如除若干未知参数外此分布律是已知的，则为估计 a 可以采用最大似然法；否则应首先根据对 X_i 的观测结果求随机误差 δ_i 的未知分布函数的统计估计（前面已提到这样函数的"非参数"区间估计）．在实际工作中 $\bar{X} \approx a$ 和 $s^2 \approx \mathrm{D}\delta_i$ [见 (1) 和 (2)] 这两个估计量通常就够用了．如果 δ_i 同正态分布，则这些估计量是最优的；在其他情形下，这些估计量有可能是低效的．

过失误差的存在，使参数 a 的估计问题复杂化．通常，考虑 $\beta_i \neq 0$ 的观测的比率不大，而非零 $|\beta_i|$ 的数学期望明显超过 $\sqrt{\mathrm{D}\delta_i}$（过失误差的产生是由于偶发的计算错误、读错测量仪器的刻度 … 等）．含过失误差的测量结果往往是容易察觉的，因为它明显不同于其他测量结果．在这种情形下，发现和剔除过失误差最好的办法是，直接分析测量，仔细检查全部试验条件的变动情况、"用两支笔"记录结果等等）．只有在可疑情形下，才应使用统计方法揭示过失误差．

这种方法最简单的例子是，在可疑离群观测值为 $Y_1 = \min X_i$ 或 $Y_n = \max X_i$ 时，判定一个异常值的统计方法（这时，假设等式 (11) 中 $b = 0$，且变量 δ_i

的分布律已知）．为说明关于存在一个过失误差的假设是否成立，假设所有 β_i 等于 0，并求 Y_1 和 Y_n 的联合区间估计（置信区域）或预报区域（prediction region）．如果该统计估计“覆盖”坐标为 (Y_1, Y_n) 的点，则应认为关于存在过失误差的怀疑在统计上是没根据的；否则应认为关于存在过失误差的假设得到证实（这时，通常剔除被证实无用的观测值，因为根据一个观测值充分可靠地估计过失误差的值，统计上是不可能的）．

例如，设 a 未知，$b=0$，而 δ_i 独立且同正态分布（方差未知）．如果所有 $\beta_i=0$，则随机变量

$$Z = \frac{\max|X_i - \bar{X}|}{\hat{s}}$$

的分布不依赖于未知参数（统计估计量 $\bar{X}$ 和 $\hat{s}$ 由全部 n 个观测值按（1）和（2）式计算）．对于较大的 z 值，有

$$\mathrm{P}\{Z > z\} \approx n\left[1 - \omega_{n-2}\left(z\sqrt{\frac{n-2}{n-1-z^2}}\right)\right],$$

其中 $\omega_r(t)$ 是前面定义的 Student 分布函数．于是，以概率 ω（置信系数）：

$$\omega \approx 1 - n\left[1 - \omega_{n-2}\left(z\sqrt{\frac{n-2}{n-1-z^2}}\right)\right], \quad (12)$$

可以断定，在无过失误差的情形下，不等式 $Z > z$ 成立，即以概率 ω，有

$$\bar{X} - z\hat{s} < Y_1 < Y_n < \bar{X} + z\hat{s}.$$

（按（12）式估计置信系数的误差不大于 $\omega^2/2$）．因此，如果所有测量结果 X_i 位于界限 $\bar{X} \pm z\hat{s}$ 之间，则没有理由认为某个观测值有过失误差．

参考文献

[1] Cramér, H. and Leadbetter, M. R., Stationary and related stochastic processes, Wiley, 1967, Chapts. 33－34.

[2] Дунин-Барковский, И. В., Смирнов, Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике. (Общая часть), М., 1955.

[3] Линник, Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-станистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

[4] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[5] Arley, N. and Buch, K. R., Introduction to the theory of probability and statistics, Wiley, 1950.

[6] Колмогоров, А. Н., 《Изв. АН СССР. сер. матем.》, 6 (1942), 1－2, 3－32.

Л. Н. Большев 撰

【补注】 此条忽略了稳健估计（robust estimation）的可能性，借此可将过失误差（“异常值”（outlier））的处理方法归结为有关参数的估计．例如，见［A1］，及**稳健统计**（robust statistics）．

参考文献

［A1］Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., and Stackel, W. A., Robust statistics: the approach based on influence functions, Wiley, 1986.

［A2］Lehmann, E. L., Theory of point estimation, Wiley, 1983.

［A3］Cox, D. R. and Hinkley, D. V., Theoretical statistics, Chapman & Hall, 1974.

［A4］Nadaraya, E. A., Nonparametric estimation of probability densities and regression curves, Kluwer, 1989（译自俄文）．

周概容　王健 译

统计估计量［statistical estimator；статистическая оценка］

可观测随机变量（见**统计量**（statistics））的函数，用于估计概率分布的未知参数．亦见另一条**统计估计量**（statistical estimator）．

周概容 译

统计试验法［statistical experiments, method of；статистических испытаний метод］

一种数值计算方法，它把要求的未知值看作是一种有适当关联的随机现象 φ 的特征值：这种现象经数值模拟后，所要求的值是用对 φ 的观测的模拟来估计．通常，未知量 z 是以某个随机变量 $z(\omega)$ 的**数学期望**（mathematical expectation）$z = \mathrm{E}Z(\omega)$ 的形式求得，$Z(\omega)$ 是描述 φ 的概率空间 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ 上的随机变量．在对 φ 做了一些独立观测的模拟后（见**独立性**（independence）），按照**大数律**（law of large numbers），有

$$z \approx \zeta_N = \frac{Z(\omega^{(1)}) + \cdots + Z(\omega^{(N)})}{N}.$$

当 $\mathrm{E}|Z(\omega)|^2 < \infty$ 时，这个公式的随机误差可以粗略地用 **Чебышев 不等式**（Chebyshev inequality）做概率估计，或者依据**中心极限定理**（central limit theorem）做渐近估计：

$$\mathrm{P}\left\{|z - \zeta_N| < \frac{a\sigma(Z)}{N^{1/2}}\right\} \approx \mathrm{erf}(a), \qquad (1)$$

$$\sigma^2 = \mathrm{E}|Z(\omega)|^2 - |\mathrm{E}Z(\omega)|^2.$$

数学期望 $\mathrm{E}|Z(\omega)|^2$ 也可以用“模拟”来估计，它使人们能够作出计算精度的一个后验**置信估计**（confidence estimation）．这种随机现象通常用均匀分布在区间 $\{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 上的独立随机数序列来模拟（见**均匀分布**（uniform distribution）），为此，应用了由可数维单位超立方体（具有 Lebesgue 体积 $dV = \prod_k dx_k$）

$$H = \mathop{X}_{k=1}^{\infty}\{x_k : 0 \leqslant x_k \leqslant 1\}$$

到 $(\Omega, \mathscr{A}, \mathsf{P})$ 的可测映射 f: $\Omega = f(H)$, $P = Vf^{-1}$, 其中函数 f 本质上仅与具有小指标的坐标有关. 这样, 这个问题形式上化为积分

$$\int_H Z(f(x))dV$$

的计算, 其中应用了最简单的等权求积公式和随机横坐标 $\mathbf{X}^{(n)}$. 由 (1) 可见, 在给定的置信水平 $\mathrm{erf}(a)$ 下, 所计算的 z 要达到要求的精度 ε, 由乘积 $N\tau = \varepsilon^{-2}a^2\sigma^2(Z)\tau(Z)$ 决定了所要的计算量, 其中 τ 是为构造 $Z(\omega)$ 的一次单个实现所需计算量的数学期望; 当 ε 缩小时, 它迅速地增大. 所以成功地选择一个具有充分小 $\sigma^2\tau$ 的模型是有很大价值的. 特别地, 可以证明更为有效的做法是, 在原来的积分表达式中, 对某些变量 x_i 作先验的解析积分, 作某些变量替换, 把积分立方体分解为若干部分, 分离出积分的主要部分, 使用一些相关点组 x^n, 即对任何所要求的函数类可给出严格求积公式的相关点组 x^n, 等. 在少量预先做的数值试验中, 通过对 σ^2 和 τ 值的粗略的估计, 可以挑选出最优良的"模型". 在进行的一系列计算中, 通过对"观察值"的适当的统计处理和选择一个相应的"试验"程序, 可以得到相当高的精确度.

在统计试验方法中使用的一大类模型是与随机游动有关的, 在最简单的情况, B 是 m 阶方阵, $b_{ij} = r_{ij} \cdot p_{ij}$, 其中 $|r_{ij}| < 1$, $p_{ij} \geqslant 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$; $p_{i1} + \cdots + p_{im} < 1$, $i = 1, \cdots, m$. 研究一个经过 m 个状态 $\theta_1, \cdots, \theta_m$ 的 Марков 随机游动 (random walk) $w = \{\theta(0), \cdots, \theta(v)\}$, 它具有从 θ_i 至 θ_j 的转移概率 p_{ij}, 直至在第 $(v+1)$ 个随机步转移至一个特别的吸收态 θ_0, 且具有吸收概率 $p_{i0} = 1 - (p_{i1} + \cdots + p_{im})$, $p_{00} = 1$. 假定运动粒子按照法则 $\rho_k = \rho_{k-1}r_{ij}$ 改变它的权重, 如果第 k 次随机转移是从 θ_i 至 θ_j, $\rho_0 = 1$, 则应用 Neumann 级数, 方程 $(1-B)y = g$ 的解可以解释为等同于

$$y_e = g_e + (Bg)_e + (B^2g)_e + \cdots = \qquad (2)$$
$$= \mathsf{E}[g(\theta(0)) + \rho_1 g(\theta(1)) + \cdots + \rho_v g(\theta(v))],$$

其中 $\theta(0) = \theta_e$, $g(\theta_s) = g_s$, $s = 1, \cdots, m$. 每个"轨迹"$\omega^{(k)}$ 是用它的随机数序列 $x_n^{(k)}$ 来模拟的; 当 $p_{i,0} + \cdots + p_{i,j-1} \leqslant x_n^{(j)} \leqslant p_{i,0} + \cdots + p_{i,j}$ 时, 在第 n 步完成了从 $\theta(n-1) = \theta_i$ 到 θ_j 的转移, 在构造轨迹和由此轨迹计算泛函中所包含的工作量与轨迹的"长度"v 成比例; 在这个方案中, $\mathsf{E}v < \infty$.

当在连续时间里模拟随机游动时, 运动必须被构造成离散的. 假定需要计算从半径为 R 的一个球(球心放置一个源)放射的辐射分数 b. 辐射粒子的运动是直线的; 在路径 ds 上, 一个粒子以概率 $a\,ds$ 与介质相互作用, 从而, 它以 $1-q$ 的概率被吸收、以概率 q 作球对称扩散. 这个问题用模拟"粒子"轨迹的方法求解, 粒子轨迹相应于给定的粒子运动的随机微分描述. 不是把粒子的近似路径分解为许多步 Δs, 在每一步检验相互作用是否已经发生, 而是代之以根据指数密度分布 $p(s) = a\exp(-as)$, $s \geqslant 0$, 用一个单随机数产生第 n 个随机游程 s_n 的长度, 而且, 求出下一个相互作用点 $\mathbf{r}_n$. 此外, 也可以不采用与介质相互作用的类型, 而是允许以一个权重因子按法则 $\rho_n = q\rho_{n-1}$ 的吸收, 然后寻找运动新方向的极角和方位角 (θ, φ); $\cos\theta$ 具有区间 $[-1, 1]$ 上的均匀概率分布, 而 φ 是在半区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀概率分布, 它们定义了这个运动新方向的单位向量 $\mathbf{e}_n$. 这种模拟一直继续到"粒子"离开球体, 即直到首次出现 $s_n \geqslant l_n$ 的事件, 其中 l_n 是直至球边界的路径的长度, $|\vec{\mathbf{r}}_n + l_n\vec{\mathbf{e}}_n| = R$. 离开该球的一些"粒子"的权重的平均值提供了对 b 的一个估计. 对所要求的量得到的积分式(也由积分迁移方程得到)可以转换成沿着那些未离开球体的轨迹 ω 的积分. 那时游程 s_n 必须按照条件分布密度 $a[1-\exp(-al_n)]^{-1} \cdot \exp(-as)$ 实现; 新的权重由法则 $\rho_{n+1} = q\rho_n[1-\exp(-a\,l_n)]$ 定义, 而在每个轨迹上, 计算泛函 $\beta = \sum\rho_n\exp(-al_n)$. 这时 $b = \mathsf{E}\beta$, 其中 $\beta(\omega(\mathbf{x}))$ 是 H 中的一个连续函数. 在这个模型中, 这些轨迹是无限的, 可是后面一些段的轨迹(如果轨迹片段是从原点出发开始编号, 即指那些具有高编号的轨迹片段)的贡献是小的; 因此, 一旦 $\rho_n \leqslant \delta$, 轨迹的模拟便可终止, 只在 b 中引入一个小的系统误差. 当 $aR \sim 1$ 时, 上述这个方案给出了相当好的结果. 但是, 对大的 R, 使用这一方案可能导致错误的结果. 当 $aR \gg 1$ 时, 粒子难得离开球体, 而且平均说来, 一般地只能由那些"平均讲"长的轨迹片断达到, 如果 N 不是充分大, 则很大的可能是不出现一条典型的具有相对大 β 值的轨迹, 这可能导致所要求的平均值 b 和方差 $\mathrm{D}\beta$ (即误差的一个后验度量)偏低(即使不是零)的估计. 如果应用指数变换, 用增大平均游程的指数分布模拟轨迹, 而且对该分布使用一个额外的指数因子作权重加以补偿, 则其精度可以增加.

由公式 (2) 可知, 由统计试验法来解一个线性方程组时, 可能只是近似地求出一个未知变量而不计算其他量, 这个重要性质说明统计试验法的使用价值, 尽管它的收敛速度慢些. 例如, 在解二阶椭圆型微分方程的边值问题时, 当必须只在一个给定的点找出一个解时. 特别地, 对 Laplace 方程, 它的解可以表示

成在 Wiener 轨迹（即一个 Brown 运动的轨迹）上的积分形式．亚调和（包括双调和）方程某个边值问题的解可以写成具有矩阵权重的一个 Brown 粒子的随机轨迹空间上的积分形式．对于在任何时间区间里经历极大量碰撞的 Brown 运动、Brown 轨迹本身的模拟，大部分可以用明显特殊的方法来构造．

在用统计试验法解非线性方程时，常用更复杂的多粒子流模型，这些粒子随机地与介质作用且彼此相互作用，包括多重粒子级联．

除了它的收敛慢外，这个方法还有其他缺点，包括随机误差的一个后验估计（1）的不充分可靠．由于所用的随机数的"坏质量"（例如，相关）的结果和 ω 对积分的主要贡献的"非典型性"（例如低概率），有可能导致这个方法不太可靠．

统计试验法的另一个名字——**蒙特卡罗方法**（Monte-Carlo method）——很大程度上与修正的统计试验法理论有关．

参考文献见**蒙特卡罗方法**． H. H. Ченцов 撰

【补注】 在西方文献中，这个方法几乎通称为**蒙特卡罗方法**（Monte-Carlo method）．

参考文献

[A1] Ripley, B., Stochastic simulation, Wiley, 1987.

[A2] Marsaglia, G., Zaman, A. and Tsang, W. W., Toward a universal random number generator, *Statistics and Prob. Letters*, 9(1990), 1, 35－39.

[A3] Ermakov, S. M., Nekrutkin, V. V. and Sipin, A. S., Random processes for the classical equations of mathematical physics, Kluwer, 1989（译自俄文）．

袁国兴 张宝琳 译

统计对策［statistical game; статистическая игра］

一种二人**零和对策**（two-person zero-sum game），其中局中人 Ⅰ 被解释为自然，局中人 Ⅱ 被解释为统计学家；局中人 Ⅰ 的策略是随机过程，局中人 Ⅱ 的策略是决策法则（决策函数），局中人 Ⅰ 的支付函数是统计学家的损失函数（"风险"）．局中人 Ⅰ 的混合策略因而将是随机过程集上的概率测度，局中人 Ⅱ 的混合策略将是随机化的决策法则，而局中人 Ⅰ 的支付函数定义为统计学家的损失函数的数学期望．统计对策是由其中运用极小化极大判据的**数理统计**（mathematical statistics）问题（例如，参数估计问题，假设试验问题等等）所引起的．数理统计问题（包括序贯分析问题）作为统计对策的系统叙述首先由 A. Wald 引入，他对一大类统计对策证明了极小化极大定理成立（见[1]）．这一定理提供了求解数理统计问题的一种方法，因为在许多情形下，求极大化极小比求极小化极大更容易、更方便，从而就较容易地求得最优随机化法则．

参考文献

[1] Wald, A., Statistical decision functions, Wiley, 1950（中译本：A．瓦尔特，统计决策函数，上海科学技术出版社，1960）．

[2] Blackwell, D. and Girshick, M. A., Theory of games and statistical decisions, Dover, reprint, 1979.

A. H. Ляпунов 撰

【补注】 统计对策在从事最坏情形设计（worst case design）时也被考虑．统计决策的一种现代文本在 H^∞ 控制（自动控制中的主题，也见 **H^∞ 控制理论**（H^∞ control theory））的中心出现，见[A1]．

参考文献

[A1] Doyle, J., Glover, K., Khargonfkar, P. and Francis, B., State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC34(1989), 8, 831－847.

[A2] Savage, J. L., The foundation of statistics, Wiley, 1954.

[A3] Milnor, J., Games against nature, in R. M. Thrall, et al. (ed.): Decision Processes, Wiley, 1954, 49－59.

史树中 译

统计假设检验［statistical hypotheses, verification of 或 statistical hypotheses testing; статистических гипотез проверка］

数理统计的基本分支之一，研究试验数据及其概率特征的假设间一致性的统计检验思想和方法．

假设被观测随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 在可测空间 $(\mathfrak{X}_n,\mathscr{B}_n)$ 中取值 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，已知 X 的概率分布属于给定概率分布族 $H=\{\mathrm{P}_\theta:\theta\in\Theta\}$，其中 Θ 是某个参数集．H 称为容许假设集（set of admissible hypotheses），其中任意非空子集 H_1，称为统计假设（statistical hypothesis），或简称假设（hypothesis）．如果 H_1 恰好含一个元素，则称为简单假设（simple hypothesis），否则称为复合假设（compound hypothesis）．其次，如果 H 分为两个相互对立的假设：

$$H_0=\{\mathrm{P}_\theta:\theta\in\Theta_0\subset\Theta\}$$

和

$$H_1=H\setminus H_0=\{\mathrm{P}_\theta:\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0\},$$

则其中之一，如 H_0 称为原假设（null hypothesis），而另一个称为备择假设（alternative hypothesis）．统计假设检验的基本问题，可以通过 H_0 和 H_1 很好地用 Neymann-Pearson 模型表述（见[1]，[2]）．具体地讲，对于假设 $H_0:\theta\in\Theta_0$，即随机向量 X 的分布属于集合 $H_0=\{\mathrm{P}_\theta:\theta\in\Theta_0\}$），和备选假设 $H_1:\theta\in\Theta_1$，即 X 的分布属于集合

$$H_1=\{\mathrm{P}_\theta:\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0\},$$

寻求基于 X 的实现检验假设 H_0 成立还是 H_1 成立的最优方法．

例 1．设被观测随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的分量，是相互独立服从同一正态律 $N_1(\theta,1)$ 的随机变量，其数学期望 $\theta=\mathsf{E}X_i(|\theta|<\infty)$ 未知，而方差为 1，即对于任意实数 x，有

$$\mathsf{P}\{X_i<x|\theta\}=\Phi(x-\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(t-\theta)^2/2}dt,$$

$$i=1,\cdots,n.$$

在此条件下，可以考虑假设 $H_0:\theta=\theta_0$ 对备选假设 $H_1:\theta\neq\theta_0$ 的检验问题，其中 θ_0 是某给定数．在此例中，H_0 是简单假设，而备选假设 H_1 是复合假设．

形式上，两个互相排斥的假设 H_0 和 H_1 在区分假设问题中是平等的，而 H 中两个不相交且互补集合中，哪个作为基本假设并不重要，而且不影响统计假设检验理论本身的构造．然而，基本假设的选取，通常要综合试验者对问题本身的态度，因此常根据试验者的意见、所研究现象的本性或某种物理的考虑，把一切容许假设的集合 H 中，能最符合试验者期望的试验数据的子集 H_0 视为基本假设．正因如此，假设 H_0 常称为被检验假设．理论上，假设 H_0 和 H_1 的区别常表现为 H_0 的结构比 H_1 简单，这正符合试验者希望处理较简单模型的愿望．

在统计假设检验理论中，关于 H_0 还是 H_1 成立的推断基于随机向量 X 的观测实现；这里，用于作出决定"假设 H_i 成立"$(i=0,1)$ 的决策规则，称为**统计检验**（statistical test）．任何统计检验的结构，完全决定于所谓临界函数 $\varphi_n(\cdot):\mathfrak{X}_n\to[0,1]$．根据以 $\varphi_n(\cdot)$ 为**临界函数**（critical function）的检验，以概率 $\varphi_n(X)$ 否定被检验假设 H_0 接受 H_1，以概率 $1-\varphi_n(X)$ 否定 H_1 接受 H_0．从实际观点看，最感兴趣的是所谓非随机化检验，其临界函数只取 0 和 1 为值．无论运用何检验来区分假设 H_0 和 H_1，其结果或者作出正确决定，或者作出错误决定．在统计假设检验理论中，错误的推断按下面叙述的方式分类．

如果被检验假设 H_0 事实上成立但却被检验否定了，则称犯了第一类错误．相反，在被检验假设 H_0 事实上不成立的情形下，如果统计检验不否定 H_0（从而，根据检验接受 H_0），则称犯了第二类错误．假设 H_0 对 H_1 的检验问题希望这样实施，以使这些错误最小．然而，在观测向量 Y 的维数 n 固定的情形下，同时控制两类错误的概率是不可能的：一种错误概率的减小通常导致另一种错误概率的增大．两类错误的概率，数值上通过所谓功效函数（power function）$\beta_n(\cdot)$ 表示，$\beta_n(\cdot)$ 在集合 $\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$ 定义为：

$$\beta_n(\theta)=\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)=\int_{\mathfrak{X}}\varphi_n(x)d\mathsf{P}_\theta(x),$$

$$\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1.$$

由功效函数 $\beta_n(\cdot)$ 的定义可见，如果随机向量 X 服从分布律 $\mathsf{P}_\theta(\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1)$，则基于临界函数 $\varphi_n(\cdot)$ 的统计检验以概率 $\beta_n(\theta)$ 否定被检验假设 H_0．相反，功效函数 $\beta_n(\cdot)$ 自 Θ 到 Θ_1 的收缩，称为统计检验的功效（power of the statistical test），它指出统计检验的另一重要质量特征——当事实上备选假设 H_1 成立时，否定假设 H_0 的概率．有时称数

$$\beta=\inf_{\theta\in\Theta_1}\beta_n(\theta)=\inf_{\theta\in\Theta_1}\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)$$

为统计检验的功效．由功效的补余，即定义在集合 Θ_1 上的函数 $1-\beta_n(\cdot)$，可以计算第二类错误概率．

在经典的 Neyman-Pearson 模型中，假设 H_0 对 H_1 的检验问题，从错误地否定假设 H_0 的概率，即第一类错误概率的上界 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的选取开始，并在上界 α 给定的情形下，力求建立具有最大功效的检验．鉴于假设 H_0 对试验者有特殊意义，数 α 称为检验的显著性水平（significance level），通常选为充分小的数，如 0.01，0.05，0.10 等．显著性水平 α 的选取意味着，用于检定 H_0 对 H_1 的一切统计检验的集合，收缩为满足如下条件的检验的集合：

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)=\sup_{\theta\in\Theta_0}\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)=\alpha \tag{1}$$

（有时用 $\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)\leqslant\alpha$ 代替条件（1），这对建立统计假设检验的一般理论不产生任何影响）．满足条件（1）的统计检验称为水平 α 检验．这样，假设 H_0 对 H_1 的检验问题的经典提法在于，构造一水平 α 的统计检验，使其功效函数满足条件

$$\beta_n^*(\theta)\geqslant\beta_n(\theta),\ 对于一切\ \theta\in\Theta_1, \tag{2}$$

其中 $\beta_n(\cdot)$是任意水平 α 检验的功效函数．在 H_0 和 H_1 都是简单假设的情形下，**似然比检验**（likelihood-ratio test）是这一最优问题的有效解．在 H_1 是复合假设的情形下，极少能构造出满足条件（2）的统计检验．不过，只要这样的检验存在，就把这样的检验视为检定假设 H_0 对 H_1 的最优检验，并且称之区分统计假设 H_0 对 H_1 的水平 α 的**一致最大功效检验**（uniformly most-powerful test）．由于存在一致最大功效检验的情形很少，因此不得不利用某些补充条件（如无偏性、相似性、完全性等）来压缩统计检验类，并在已经压缩的类中建立满（2）的最优检验．例如，检验无偏性条件是指，功效函数应满足关系式：

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)\leqslant\inf_{\theta\in\Theta_1}\beta_n(\theta).$$

例 2. 在例 1 的条件下，对于 H_0 对 H_1 的检定．对于固定的显著性水平 α，存在非随机化的水平 α 的一致最大功效无偏检验——似然比检验．该最优检验的临界函数为

$$\varphi_n(X)=\begin{cases}1, & 若\ |\overline{X}-\theta_0|>\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right),\\ 0, & 若\ |\overline{X}-\theta_0|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right),\end{cases}$$

其中

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n).$$

因为检验的统计量 $\overline{X}$ 服从正态分布 $N_1(\theta,1/n)$，参数为 $\mathsf{E}\overline{X}=\theta$, $\mathsf{D}X=1/n$，即对于任意实数 x，

$$\mathsf{P}\{\overline{X}<x|\theta\}=\Phi[\sqrt{n}(x-\theta)],$$

故检定 H_0 对 H_1 的最优检验的功效函数 $\beta_n(\cdot)$ 表示为

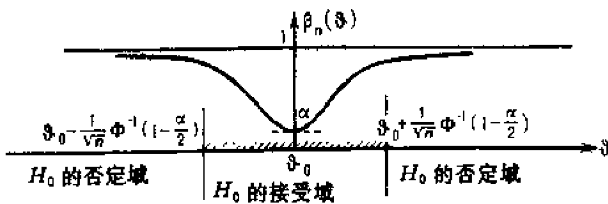
$$\beta_n(\theta)=\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)=$$

$$=\mathsf{P}\left\{|\overline{X}-\theta_0|>\frac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Big|\theta\right\}=$$

$$=\Phi\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{n}(\theta_0-\theta)\right]+$$

$$+\Phi\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sqrt{n}(\theta_0-\theta)\right],$$

其中 $\beta_n(\theta)\geqslant\beta_n(\theta_0)=\alpha$．下面的图形描绘出功效函数 $\beta_n(\cdot)$ 的特性：



函数 $\beta_n(\cdot)$ 在点 $\theta=\theta_0$ 达到最小值（等于显著性水平 α）；随着 θ 与 θ_0 间距离的增大，$\beta_n(\theta)$ 的值也随之增大，并且量 $|\theta-\theta_0|$ 越大，$\beta_n(\theta)$ 就越接近于 1．

统计假设检验理论，可以用统一的观点解释实际中提出的各种不同问题：未知参数区间估计的建立、概率分布的均值间的差异的估计、关于观测结果独立的假设的检验、统计质量控制等．例如，例 2 中假设 H_0 的接受域，是未知数学期望 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的最优置信区间．

除经典的 Neyman-Pearson 方法之外，还有其他解决区分假设的方法：**Bayes 方法**（Bayesian approach），**极小化极大**（minimax）方法、Wald 序贯检验法等．其次，在统计假设检验理论中还考虑近似方法．这些方法，基于检定 H_0 对 H_1 的统计检验功效函数列 $\{\beta_n(\cdot)\}$ 的渐近性质的研究、相应的统计检验用于区分 H_0 对 H_1 的检验；渐近性质在观测向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的维数无限增加时进行讨论．在这种情形下，一般要求所建立的统计检验列具有相合性，即

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n(\theta)=1\ (对于任意\ \theta\in\Theta_1),$$

这意味着，随着 n 的增大，可以以任意的可信程度区分假设 H_0 和 H_1．在例 2 中建立的是相合检验列（当 $n\to\infty$ 时）．

在任何情形下，在区分假设 H_0 和 H_1 的问题中，无论利用何种统计检验，接受假设 H_0（或 H_1）并不说明该假设 $H_0(H_1)$ 事实上成立，只能说明在研究的现阶段"所接受假设与观测结果不矛盾"这样一个事实．正是因为试验与理论的这种一致性，试验者没有理由不相信 $H_0(H_1)$ 的真实性，直到新的观测结果迫使他改变对已接受假设、甚至对整个模型总体的态度．

参考文献

[1A] Neyman, J. and Pearson, E. S., On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference Ⅰ, *Biometrika*, **20** A (1928), 175 - 240.

[1B] Neyman, J. and Pearson, E. S., On the use and interpretation of certain test criteria of purposes of statistical inference Ⅱ, *Biometrika*, **20** A (1928), 263 - 294.

[2] Neyman, J. and Pearson, E. S., On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses, *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **231** (1933), 289 - 337.

[3] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[4] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H．克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）.

[5] Hajek, J. and Sidák, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

[6] Nikulin, M. S., A result of Bolshev's from the theory of the statistical hypothesis testing, *J. Soviet Math.*, **44** (1989), 3, 522 - 529 (*Zap. Nauchn. Sem. Inst. Steklov.*, **153** (1986), 129 - 137).

М. С. Никулин 撰 周概容 王健 译

统计假设 [statistical hypothesis; статистическая гипотеза]

关于被观测随机现象的概率分布性质的特定假设．观测结果通常是有限或无限个随机变量的实现．在这种情形下，这些随机变量的联合分布不完全已知，而统计假设假定其联合分布属于某给定分布族．在这样条件下，提出**统计假设检验**（statistical hypotheses, verification of）问题． 周概容 译

统计力学中的数学问题 [statistical mechanics, mathematical problems in; статистической механики математические задачи]

试图精确地解释统计力学基本概念和事实而引起的数理物理问题的总体．这些问题可以按条件分成下列几组:

1）统计力学基本原理的基础;

2）热力学极限下的平衡系综，热力学关系的推导;

3）相变;

4）系综的演化，弛豫问题，动理方程和流体力学方程的研究;

5）（量子系统情况下的）基态，元激发．

统计力学中研究的是 $\mathbf{R}^3$ 空间（相对于粒子尺度为）大区域 V 内含大量（微观）粒子组成的系统，依据用来描述系统的方法的不同，而划分成经典统计力学和量子统计力学．

容器 V 中经典系统的描述涉及给出每个各别粒子可能态的空间 X（单粒子空间），以及 V 内有限数目粒子的容许位形 $\omega=\{x_1, \cdots, x_N\}(x_i\in X, i=1, \cdots, N, N=1, 2, \cdots)$ 的总体 $\Omega_V=\bigcup_{N\geqslant 0}X^N$，并定义每个位形 $\omega\in\Omega_V$ 的能量 $H=H_V(\omega)$ 和系统的时间演化定律（亦称为动力学（dynamics）），即对任何 $\omega\in\Omega_V$ 和任何 t 保持能量 H_V 不变:

$$H_V(U_t^V\omega)=H_V(\omega)$$

的使 Ω_V 映上自身的变换 $U_t^V\ (t\geqslant 0)$的半群（更经常是整群）．在许多情况下，Ω_V 自然具有辛结构（symplectic structure），而变换 U_t^V 则借助于由 Hamilton 函数 $H=H_V$ 生成的所谓 **Hamilton 系统**（Hamiltonian system）的运动方程组的解予以构造．此外，空间 X 中通常存在某种自然测度 dx 使得 Ω_V 中测度 $d^Vx=\oplus_N d^Nx(d^Nx=dx\times\cdots\times dx$ 是 X^N 中的积测度）相对于演化 U_t^V 是不变测度．然而，对于由大量粒子组成的宏观系统，对它们的态及其动力学的如此详细描述（即对每个各别粒子轨道的描述），判明是几乎不可能的；而且从研究整个系统的宏观性质的观点来说，也是无丝毫用处的．这些性质只能通过位形 ω 及其随时间演化 $\omega(t)\ (t>0)$的某些平均特征予以确定：例如，$\omega(t)$ 中粒子的态属于单粒子空间 X 的给定集合 S 的粒子分数 $\rho_1(S, t)$，$S\in X$，或者粒子的态在时刻 t_1 属于集合 $S_1\in X$，而在时刻 t_2 属于集合 $S_2\in X$ 的粒子分数 $\rho_2(S_1, S_2; t_1, t_2)$，等等．

这些考虑导致下列根本概念：宏观系统的态必须由相空间 Ω_V 上的某种概率分布 P 来定义，而这个分布的时间演化 P_t，$t>0$，则由系统本身的初始演化生成：

$$\mathsf{P}_t(A)=\mathsf{P}\{(U_t^V)^{-1}A\},\ A\subset\Omega_V; \qquad (1)$$

这里 $(U_t^V)^{-1}A$ 是在映射 U_t^V 下集合 $A\subset\Omega_V$ 的完全逆象．这个规定要补充以下列假设：对于相空间 Ω_V 上每个“好”概率分布 P 和一个适当的物理量 f（即 Ω_V 中的实值函数），这个量所取值接近于其（相对于 P 进行计算的）平均值 $\langle f\rangle_{\mathsf{P}}$ 的概率接近于一．与统计力学基础有关的问题之一是要将这个论断用严格形式来表达．可能结果之一是下述类型：令 Ω_V 上分布 P 具有急减依存关系（即对相互远离的两个子系统的位形，它生成的概率分布是几乎独立的），而物理量是可加的，即

$$f(\omega)=\sum\varphi(\omega|_S),\ S\subset[1, \cdots, N], |S|=n, \qquad (2)$$

其中 $n\leqslant\infty$ 是任意的，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 X^n 上某个对称“局部”函数（即，当点 $x_1, \cdots, x_n$ 相互远离时，φ 迅速趋于零），而 $\omega|_S=\{x_i: i\in S\}$，若 $\omega=\{x_i: i=1, \cdots, N\}$．在这个情况，$\langle f\rangle_{\mathsf{P}}\sim|V|$，而涨落 $\Delta f=f-\langle f\rangle_{\mathsf{P}}\sim|V|^{1/2}$（$|V|$很大时其概率接近于一），而量 $\Delta f/|V|^{1/2}$ 的分布接近为正态的（如前所述那样，当 $|V|\to\infty$ 时，见[2]）．

相空间的一个概率分布，如果它相对于动力学 U_t^V 是不变式，则称为一个**平衡分布**（equilibrium distribution）．除了能量 $H_V=H_V^0$ 以外，设还有几个所谓**运动积分** $H_V^1, \cdots, H_V^k$，即，Ω_V 上相对于 U_t^V 为不变量的函数（例如，系统中的粒子数，粒子的总动量，总自旋，等等）．Ω_V 上的每个分布为下列形式:

$$d\mathsf{P}=f(H_V^0, \cdots, H_V^k)d^Vx,$$

其中 d^Vx 是 Ω_V 上不变测度，而 $f>0$ 是一（或许广义）函数，它是一个平衡分布．一个平衡分布由以下形式的密度

$$f(\xi^0, \cdots, \xi^k)=Q^{-1}\prod_{i=0}^{k}\delta(\xi^i-\overline{\xi^i}),$$

$$\overline{\xi^i}\in\mathbf{R},\ i=0, 1, \cdots, k, \qquad (3)$$

予以定义（Q^{-1} 是归一化因子），称为**微正则分布**（microcanonical distribution）（或**微正则系综**（microcanonical ensemble）），它集中于第一积分为恒定的曲面上

$$S_{\overline{\xi^0}, \cdots, \overline{\xi^k}}=\{\omega\in\Omega_V: H^i(\omega)=\overline{\xi^i},$$

$$i = 0, 1, \cdots, k\}. \tag{4}$$

统计力学中假设微正则分布 (3) 是一平衡分布 (即通过 (3) 所计算的物理变量的平均值, 以很高准确度与实验测量值一致). 长期以来人们相信, 为了证明这个公理, 必须证明著名的遍历性假设: 如果 $H_V^0, \cdots, H_V^k$ 是 (光滑) 运动积分的完全集合, 则微正则分布是任何曲面 $S_{\xi^0 \cdots \xi^k}$ 的唯一 (光滑) 平衡分布. 证明这个假设的试图导致近代**遍历理论** (ergodic theory) (见 [3], [4]). 然而, 现在清楚的是, 有限系统的遍历性是一个过度严格的假设: 为了证明关于微正则分布的公理, 只要确立系统在热力学极限 $V \uparrow \mathbf{R}^3$ 下的遍历性就足够了. 除了微正则分布之外, 还经常研究 Gibbs 平衡分布 (Gibbs equilibrium distribution) (有时称为巨正则系综 (grand canonical ensemble)). 它由密度

$$f = \Xi^{-1} \exp\{-\beta(H_V^0 + \mu_1 H_V^1 + \cdots + \mu_k H_V^k)\} \tag{5}$$

予以定义, 其中 Ξ^{-1} 是归一化因子, $\beta > 0$ 而 $\mu_1, \cdots, \mu_k$ 是任意实参数 (参数 $\beta = 1/kT$, 其中 T 是绝对温度而 k 是一绝对常数, 所谓 Boltzmann 常数 (Boltzmann constant)). 有时也研究中间分布 (小正则系综 (small canonical ensemble)); 这些具有密度形式为

$$f = Z^{-1} \exp\{-\beta(H_V^0 + \mu_{i_1} H_V^{i_1} + \cdots + \mu_{i_s} H_V^{i_s})\} \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{k-s} \delta(H_{j_p} - \overline{\xi}_{j_p}), \tag{6}$$

其中 $i_1, \cdots, i_s$ 和 $j_1, \cdots, j_{k-s}$ 是 $(1, \cdots, k)$ 中指标的两个互补子集. Gibbs 分布 (5), 以及一个分布 (6) 在许多方面比微正则分布 (3) 更加方便, 而证明它们二者的运用为正确的是下列假设: 所谓系综的等价性原理 (equivalence principle of ensembles): 对于 Ω_V 上"适当的"物理量 (例如, 对于具有形式 (2) 的可加量), 在参数 $\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k$ 的给定值下只存在一个平衡相, 应用很大 V 下的 Gibbs 分布 (5) 所计算的平均值 $\langle f \rangle_{\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k}$ 接近于应用曲面 $S_{\overline{\xi^0}, \cdots, \overline{\xi^k}}$ 上的一个微正则系综所计算的平均值 $\langle f \rangle_{\overline{\xi^0}, \cdots, \overline{\xi^k}}$, 其中 $\overline{\xi^i} = \langle H_V^i \rangle_{\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k}$. 这个等价性的证明也构成统计力学和热力学的一般数学问题之一 (见 [5], [6], [7]).

统计力学中描述系统的一般常用方法, 当区域 V 具有充分大体积时证明是正确的, 换句话说, 统计力学研究系统在极限 $V \uparrow \mathbf{R}^3$ (即, 同一种粒子所组成的系统序列, 它们分别包含于体积 $V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ 内, 并且 $\bigcup_n V_n = \mathbf{R}^3$) 的渐近性质. 这个极限过渡通常称为热力学极限过渡 (thermodynamic passage to the limit). 与**热力学极限** (thermodynamic limit) 有关的主要问题之一是, 从平衡系综开始, 定义所谓热力学势 (thermodynamic potentials) 和热力学关系 (thermodynamic relations). 当 $V \uparrow \mathbf{R}^3$ 时, 证明有可能从系综 (3), (5), (6) 中归一化因子 Q^{-1}, Ξ^{-1}, Z^{-1} 的渐近解求得所有热力学势; 例如, Gibbs 热力学势 (Gibbs thermodynamic potential) 等于

$$\beta P(\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k) = \lim_{V \uparrow \mathbf{R}^3} \frac{\ln \Xi}{|V|}, \tag{7}$$

其中 Ξ^{-1} 是 Gibbs 系综 (5) 中的归一化因子. 同样方式可以引进其他热力学函数, 并建立它们之间的联系关系. 对这里引起的大多数学问题 (极限的存在性, 热力学势的性质, 等等) 曾经相当全面地进行过研究, 不过还有一些问题仍未解决 (例如, 见 [7]).

自从 20 世纪 60 年代末以来, 数理统计力学中得到确认的是下列一般处理方法: 人们不是去研究热力学极限过渡下有限系统的渐近性质, 而是应去研究以特定方式构造的理想化无限系统, 其特性与要研究的渐近性质一致 (在较早一些的工作中发现有过这种观点的较不明显形式). 研究无穷系统对于热力学极限过渡的有些形式化的步骤给出直观意义, 而且有可能全然不需要这个过渡. 无穷系统的相空间 Ω_∞ 由位于整个 $\mathbf{R}^3$ 的粒子的无穷位形 $\omega = \{x_1, x_2, \cdots\}$, $x_i \in X^V$, $i = 1, 2, \cdots$, 组成, 而它们的动力学 $U_t^\infty: \Omega_\infty \to \Omega_\infty$, $t \in \mathbf{R}$, 则被构造为有限系统的动力学 U_t^V 当 $V \uparrow \mathbf{R}^3$ 时的极限. 无穷系统的宏观态由空间 Ω_∞ 上的概率分布予以定义, 其发展与 Ω_∞ 中的动力学 U_t^∞ 一致 (见 [1]). 在相空间 Ω_∞ 可以引进极限 Gibbs 分布 $P_{\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k}^\infty$, 它们以特定方式通过有限系统上的 Gibbs 分布 (5), $P_{\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k}^V$ 予以构造 (见 [5], [9]). 尽管引进无穷系统是普遍确认的和富有成效的方法, 它导致复杂的内在数学问题, 其中大部分仍未解决. 这些问题包括, 例如, 动力学 U_t^∞ 的构造, 极限 Gibbs 分布的构造, 关于它们的性质的研究, 等等.

统计力学主要问题之一是所谓相变 (phase transition) 的研究; 相变指对于描述宏观系统平衡态的参数——温度, 粒子密度, 压强, 等等的给定微小变化, 引起系统宏观性质的急剧变化的现象. 在近代数学处理方法中, 相变问题可以通过极限 Gibbs 分布以下述方式予以描述: 给定参数 $\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k$ 的一定值, 一般有可能在 Ω_∞ 上构造出若干 Gibbs 分布, 它们相对于 $\mathbf{R}^3$ 中推移的群 T^3 (或其某些子群 $G \subset T^3$, 使得商群 T^3/G 是紧的) 的作用为不变量, 而且相对于这个群是遍历的 (所谓纯相 (pure phases)). 参数空间的一点 $(\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k)$, 如果它具有一个充分小的邻域, 在其中纯相集合的结构以及它们的基本定性性质 (例如, 关联渐减特性) 仍旧保持不变, 则该点

称为正则点(regular point). 并且假定,正则点邻域这些分布的所有数值特征(关联函数,半不变量,等等),解析地依赖于参数 $\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k$. 参量空间中所有其他(非正则)点也就是相变点. 因而,在相空间的这种点会发生或者在 Gibbs 分布的结构中(比如说新相的消失或出现)或者在它们的性质中(例如,关联衰减的变化从指数型变为渐进型)这样的急剧变化. 同时可以认为,分布的有些特性,作为 $\beta, \mu_1, \cdots, \mu_k$ 的函数,在相变点具有奇异性. 对每个具体系统,描述相的结构和它们的性质,确定相变点和在这些点的奇异性的特征,以及其他等等,这些也是相变范畴的问题. 虽然存在一大类模型系统,对于它们(在低温下)曾经创立出求解这个问题的若干一般方法(见[9]),相变理论离最终完成还相差甚远. 对于所谓临界点的研究尤其复杂(粗略地说,在这些点出现各相融合;见[10]). 这是因为在这些点 Gibbs 分布的关联衰减很慢.

统计力学的许多问题与相空间中分布的时间发展的研究有关,尤其是与弛豫(relaxation)问题,即趋向平衡的问题有关. 一般认为,经过很长时间后,相空间中的每个分布都可用平衡(Gibbs)分布作为近似. 尽管对于这个过程的机理曾经作出过许多一般描述,而且曾经研究过许多简化模型,迄今尚无完满理论. 弛豫过程的基本描述(很大程度上仍是假设的)归结为这个过程具有三个阶段. 在第一阶段(发生几个粒子的碰撞),分布 p_t 导致系统的发展完全由第一关联函数(即由单粒子空间 X 中的分布)的变化予以规定. 在第二阶段——动理学阶段,在粒子"自由程"的持续期间内——第一关联函数的变化转到这样的演化区,其中一切仅依赖于粒子的速度,密度,能量,等等这样一些量的平均值. 最后是流体力学阶段,在此(与宏观时间可比较的)期间,密度,速度,等等这些平均值均用平衡值予以近似(见[11],[12]). 对于这种情景作为整体或以其单独部分提出论据是一个复杂的数学问题,迄今远未完全解决. 各式各样动理方程组构成基本研究方法. 它们之中既有严格的,即直接根据 Liouville 方程的定义得出的(BBGKY(Боголюбов, Born, Green, Kirkwood, Yvon)级列方程),也有近似的(Boltzmann 方程,Chapman-Enskog 方程,Власов-Ландау 方程,流体力学方程组,等等). 这些方程以及它们与演化的真实图象之间的关系也是进行深入细致的数学研究的课题(见 **Боголюбов 方程系列** (Bogolyubov chain of equations); **Boltzmann 方程** (Boltzmann equation); **Chapman-Enskog 法** (Chapman-Enskog method); **Власов 动理学方程** (Vlasov kinetic equation)).

量子统计力学是以和经典统计力学同样的原理为基础的. 位于区域 V 内的粒子系统的量子描述需要给定一个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_V$(系统的态空间(state space)),并且需要给定在 $\mathscr{H}_V$ 上运算的一个自伴算子 H_V(系统的能量算子(energy operator)). 系统的动力学由在 $\mathscr{H}_V$ 上运算的酉算子的群 $U_t^V = \exp\{iH_V t/\hbar\}$ $(t \in \mathbf{R})$ 予以定义,而且动力学 $\{U_t^V: t \in \mathbf{R}\}$ 生成 $\mathscr{H}_V$ 上有界算子(可观察量)代数 $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ 的自同构 W_t^V 的群:

$$W_t^V A = U_t^V A (U_t^V)^{-1}.$$

转变到量子情况的统计描述,任务在于定义代数 $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ 上某个平均 $\langle A \rangle$,即这个代数上线性正泛函 $\rho(A) = \langle A \rangle$,通常称为一个态(state). $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ 上每个态可以写成下列形式

$$\rho(A) = \mathrm{Tr}\, A\hat{\rho},$$

其中 $\hat{\rho}$ 是 $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ 中正核型算子而且 $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$. 算子 $\hat{\rho}$ 通常称为态 ρ 的密度矩阵(density matrix). 态 ρ 随时间的演化由代数本身的演化 W_t^V 予以定义: $\rho_t(A) = \rho((W_t^V)^{-1}A)$. 相对这个演化为不变量的态如前所述那样称为平衡态(equilibrium state). 对于除了能量 $H_V = H_V^0$ 之外,还有几个按对可对易运动积分 $H_V^1, \cdots, H_V^k$ 的系统,具有密度矩阵为

$$\hat{\rho} = \Xi^{-1} \exp\{-\beta(H_V^0 + \mu_1 H_V^1 + \cdots + \mu_k H_V^k)\}$$

的平衡态,称为 Gibbs 态(Gibbs state)($\beta > 0$ 和 $\mu_1, \cdots, \mu_k$ 是参数,而 Ξ^{-1} 是归一化因子). 如同对于经典系统一样,通过热力学极限过渡 $V \uparrow \mathbf{R}^3$,可以引进无穷量子系统(见[5]). 为了描述这个系统,对 C^* 代数(C^*-algebra) $\mathfrak{A}_\infty = \overline{\bigcup_{V \subset \mathbf{R}^3} \mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)}$ 进行分析(上面的横线表示一致拓扑中的闭包),它称为拟局部可观察量代数(algebra of quasi-local observables),而 $\mathfrak{A}_\infty$ 中的演化 W_t^∞ 则定义为有限代数 $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_V)$ 上演化 W_t^V 的极限. 如同对于经典系统一样,有可能引进代数 $\mathfrak{A}_\infty$ 上的极限 Gibbs 态(见[5]). 量子系统中的相变问题,如同对于经典系统一样,可以用极限 Gibbs 态予以表述.

最后,在量子统计力学中也存在整个范围的动理问题;然而,量子力学中弛豫过程的机理要比经典力学中更加复杂而且研究较少.

量子情况中(对应于零温)还存在关于所谓系统的基态(ground state of a system)以及关于具有有限能量的基态的微扰这些方面的特殊结果. 低温下还出现与此有关的许多有兴趣的问题(超导电性,超流动性)([13]). 关于量子场的构造和研究的问题可以通过统计力学中所发展的 Gibbs 场的理论方法进行研究(见[14],[15]).

参考文献

[1] Арнольд, В. И., Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979 (中译本: В. И. Арнольд, 经典力学的数学方法, 高等教育出版社, 1992).

[2] Нахапетян, Б. С., в кн.: Многокомпонентные случайные системы, М., 1978, с. 276 – 288 (英译本: Nakhapetyan, B. S., The central limit theorem for random fields with mixing property, in Multi-component Random Systems, M. Dekker, pp. 531 – 547).

[3] Корнфельд, И. П., Синай, Я. Г., Фомин, С. В., Эргодичекая теория, М., 1980 (英译本: Cornfeld, I. P. [I. P. Kornfel'd], Fomin, S. V. and Sinai, Ya. G., Ergodic theory, Springer, 1982).

[4] Крылов, Н. С., Работы по обоснованию статистической физики, М.-Л., 1950 (英译本: Krylov, N. S., Works on the foundation of statistical physics, Princeton Univ Press, 1979).

[5] Ruelle, D., Statistical mechanics: rigorous results, Benjamin, 1966.

[6] Халфина, А. М., 《Матем. сб.》, **80** (1969), 3 – 51.

[7] Минлос, Р. А., Хаитов, А., 《Тр. Моск. матем. об-ва》, **32** (1975), 147 – 186.

[8] Lanford, O. E., Gibbs states in statistical physics, Moscow, 1978, 159 – 218.

[9] Синай, Я. Г., Теория фазовых перходов, Строгие результаты, М., 1980 (英译本: Sinai, Ya. G., Theory of phase transitions: rigorous results, Pergamon, 1982).

[10] Stanley, H. E., Phase transitions and critical phenomena, Clarendon Press, 1971.

[11] Libov, R., Introduction to the theory of kinetic equations, Wiley, 1969.

[12] Balescu, R., Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics, 1 – 2, Wiley, 1975.

[13] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Статистическая физика, 2 изд., М., 1964 (中译本: Л. Д. 朗道, Е. М. 栗弗席兹, 统计物理学, 人民教育出版社, 1964).

[14] Simon, B., The $P(\varphi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton Univ. Press, 1974.

[15] Euclidean quantum field theory. The Markov approach, Moscow, 1978.

[16] Glimm, J. and Jaffe, A., Quantum physics; a functional integral point of view, Springer, 1981.

[17] Malyshev, V. and Minlos, R. A., Gibbs random fields, Kluwer, 1991 (译自俄文). Р. А. Минлос 撰

【补注】

参考文献

[A1] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1988.

[A2] Cercignani, C., Mathematical methods in kinetic theory, Plenum Press, 1990.

[A3] Dobushin, R. L. (ed.), Mathematical problems of statistical mechanics and dynamics. A collection of surveys, Reidel, 1986.

【译注】 关于文献中常用的三种统计系综的内容和含义的补充, 见统计系综(statistical ensemble)词条的译注.

徐锡申 译

统计模拟 [**statistical modelling**; **статистическое моделирование**], 亦称统计建模

应用数学和计算数学中的一种方法, 它是用计算机实现根据所研究的现象或对象建立的各种特殊的随机模型. 由于技术的迅速发展, 特别是多处理器计算系统的迅速发展, 统计模拟的应用已经得到扩展, 多处理机系统可以同时模拟许多独立的统计试验. 而且, 为了研究问题中越来越复杂现象的数学模型, 在许多情况, 传统的计算方法不能令人满意, 这也提高了统计模拟的作用, 其有效性在于几乎不依赖于问题的维数和几何形状. 这个方法的其他优点是它的简捷性, 算法的自然性, 以及可以根据解的新的信息来进行修正(见**蒙特卡罗方法**(Monte-Carlo method); **统计试验法**(statistical experiments, method of)).

用统计模拟法解的问题可以有条件地分成两类. 第一类是随机性问题, 其中应用了自然概率模型的直接模拟. 第二类是确定性问题, 其中概率过程是人为构造的, 可求得这问题的一个形式解, 然后在一台计算机上模拟该过程, 用统计估计的形式来构造数值解. 在上述两类之间还存在一个中间类, 这类问题用确定性方程描述, 但它的系数或边界条件或右端是随机型的. 这种情况下"对偶随机化"(见[1])将是特别有效的手段, 即是说, 为完成随机参量的某一实现, 只需要构造出求解方程过程的少量轨迹.

下面说明应用统计模拟的范围.

辐射传输问题的解可以通过模拟粒子(中子, 光子, γ 量子, 电子等)轨道得到. 解大气光学(见[2])和中子物理(见[3])问题的统计模拟算法进展很快. 统计模拟在杂质扩散问题研究中也有用(见[4]), 特别是用于随机速度场研究(见[5]).

统计模拟应用于解统计物理中的许多问题(见[7])时, 常采用基于随机动力学的"时间平均"的某种模拟(往往是人为的), 在相变, 无序固体(特别在磁学中), 表面现象等有关理论中, 采用统计模拟已得到一些新的结果(见[7]). 在求解稀薄气体理论中的复杂问题时, 很有效的一种技巧是改进有关分解非线性动力学 Boltzmann 方程的直接统计模拟方法(见[6]). 该方程也同某一分支 Марков 过程有

关(见[1]).

统计模拟还可以用来求解以特殊概率模型为基础的数学物理边值问题(见[5]). 对于求解以下随机问题也有用: 随机曲面上的绕射波, 具有随机载荷的弹性理论等.

统计模拟广泛地应用于求解排队论和其他复杂随机系统有关的问题(例如, 见[1], [8]).

参考文献

[1] Ермаков, С. М., Михайлов, Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982.

[2] Марчук, Г. И., и др., Метод Монте-Карло в этмосферной оптике, Новосиб., 1976.

[3] Франк-Каменецкий, А. Д., Моделирование траекторий нейтронов при расчете реакторов методом Монте-Карло, М., 1978.

[4] Галкин, Л. М., Решение диффузионных задач методом Монте-Карло, М., 1975.

[5] Еленов, Б. С., и др., Решение краевых задач методом Монте-Карло, Новосиб., 1980.

[6] Белоцерковский, О. М., Ерофеев, А. И., Яницкий, В. Е., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, 20(1980), 5, 1174－1204.

[7] Binder, K. and Heermann, D. W., Monte-Carlo simulation in statistical physics, Springer, 1988.

[8] Бусленко, Н. П., и др., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), М., 1962.

Г. А. Михайлов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Bird, G. A., Molecular gas dynamics, Clarendon Press, 1976.

[A2] Cercignani, C., The Boltzmann equation and its applications, Springer, 1988.

[A3] Cercignani, C., Mathematical methods in kinetic theory, Plenum, 1990.

[A4] Bird, G. A., Direct simulation and the Boltzmann equation, *Phys. Fluids*., 13(1970), 2676－2687.

[A5] Koura, K., Transient Couette flow of rarefied binary gas mixtures, *Phys. Fluids*., 13(1970), 1457－1466.

[A6] Nanbu, K., Direct simulation scheme derived from the Boltzmann equation, *J. Phys. Soc. Japan*, 49(1980), 2042－2049.

[A7] Babovsky, H., A convergence proof for Nanbu's Boltzmann simulation scheme, *European J. Mech. B/Fluids*, 8(1989), 41－55.

[A8] Babovsky, H. and Illner, R., A convergence proof for Nanbu's simulation method for the full Boltzmann equation, *SIAM J. Numer. Anal*., 26(1989), 45－65.

[A9] Chorafas, D. N., Systems and simulation, Acad. Press, 1965.

[A10] Ermakov, S. M., Nekrutkin, V. V. and Sipin, A. S., Random processes for the classical equations for mathematical physics, Kluwer, 1989(译自俄文).

袁国兴 张宝琳 译

统计物理学中的数学问题[statistical physics, mathematical problems in; статистической физики математические задачи]

统计物理学中对数学工具的应用所引起的问题. 统计物理学的数学问题基本上与统计理论的两个方向相联系: 平衡统计力学, 它的主要数学问题与应用平衡 **Gibbs分布**(Gibbs distribution)计算平均值的方法的发展有关(见**统计力学中的数学问题**(statistical mechanics, mathematical problems in)), 和非平衡统计物理学, 它的主要困难在于获得表征系统各个发展阶段的分布函数的演化方程, 以及接着求解这些方程(见, 例如, **动理学方程**(kinetic equation); **Brown运动**(Brownian motion)).

平衡统计力学的数学方法问题包括(当应用 Gibbs 正则分布时)下列类型平均值的计算:

$$Z=\operatorname{Tr}e^{-H/\theta},\quad <A>=\frac{1}{Z}\operatorname{Tr}(Ae^{-H/\theta}),$$

$$<BA(t)>=\frac{1}{Z}\operatorname{Tr}(BA(t)e^{-H/\theta}),$$

等等, 其中 H 是系统的 Hamilton 量, $\theta=kT$ 是温度, $A(t)$ 是 Heisenberg 绘景中的算子, 而 Z 是通过关系式 $F=-\theta\ln Z$ 与系统的自由能 F 相联系的配分函数.(当应用巨正则分布时, 计算过程中代替算子 H 出现的是算子 $H-\mu N$, 其中 μ 是化学势而 N 是粒子数算子; 代替 Z 的是巨配分函数(见**统计和**(statistical sum)); 代替 F 的是热力学势 $\Omega=F-\mu N$, 等等).

不含时平均 Z 和 $<A>$ 的计算解决平衡理论的问题(所有平衡特性, 诸如内能, 热容量, 物态方程, 静态响应率, 等等是根据自由能 F 通过热力学方法予以确定), 以及涨落理论的问题; $<BA(t)>$ 类型量的计算使人们可以研究系统的动态(与频率有关的)响应率, 输运系数, 等等整个系列的问题, 以及系统的最简单微扰的性质(一般当 $\theta\neq0$ 时), 它们的能量, 阻尼, 等等.

仅在对于理想系统和对于某些特别模型这样一些特殊情况, 才能够完全地计算出这些平均. 这些计算可用作进一步研究的零级近似. 最经常研究的非理想统计系统的模型是粒子间具有直接相互作用(有限半径的相互作用, Coulomb 相互作用, 等等)的系统, 具有粒子和光子型场之间相互作用(固体中描述晶格热运动)的系统, 格点间具有有限作用半径的相互作用的铁磁体的 Ising 模型和 Heisenberg 模型这样的离

散系统，以及类似类型相互作用的组合．二次量子化表象中，以上这些情况的 Hamilton 量 $H = H_0 + H_1$ 是通过产生和湮没算子的二次型组合（无相互作用部分 H_0）及四次型组合（若 H_1 部分包括粒子间直接相互作用）予以表达，而在量子电动力学中（H_1 中的电子光子相互作用）则需用三次型组合予以表达，等等．

计算这些平均的近似方法，大多数情况下根据对 $H = H_0$ 的情况获得的结果（若物理上的零级近似确实如此）增补修正项，它们采取直接的或修正的按参数幂展开的形式，该参数规定 Hamilton 量 H_1 中相互作用的强度．当将所考虑形式化模型与真正系统进行比较时，在实际感兴趣的许多情况下，用以进行"展开"的相互作用参数，经判明并非很小．这类困难存在于金属中的电子气问题中，非理想 Bose 气体理论中，液体理论中，相变或邻近临界点这类领域研究的情况中，等等．

如果不管这些具有形式化性质的问题，而考虑到对于某些特殊情况，小参数的确存在，人们看到在发展相对于这个参数的微扰理论时，出现的困难为多体系统所特有，而当发散性出现在计及多粒子关联的项中时，这点就变得很明显．发散性的出现起因于下述事实：所应用的"小"参数整幂的简单级数，从某次幂开始，并不反映所研究系统特性对此参数的真正依存关系．这些困难纯粹是数学上的，原则上是可以克服的．为了查明"非解析地"依赖于小参数的修正，曾经研究出一些方法，它们基本上与相对于相互作用参数的微扰种类的研究有关，而且它们对微扰理论中形式化级数的每个具体情况是最本质的．

粒子间具有直接相互作用的经典系统的统计力学问题中，大多数情况下的研究是以 Боголюбов 方法（[1]）（见 **Боголюбов 方程系列**（Bogolyubov chain of equations））或以 Mayer 方法（[2]）为基础的．在第一种情况，根据对单粒子，双粒子，等等分布函数的积分微分方程系列的研究，作出近似的基本步骤是截断方程链．方程链中最后一个方程积分部分中的最高阶分布函数用较低阶分布函数的某种组合来表达．这种解链步骤是根据对系统的物理奇点和对给定情况下的典型小参数的分析得出的．因而，短程力相互作用的系统中，这个参数是相互作用半径与粒子间平均距离之比的立方（所谓位力展开（virial expansion），或按粒子平均体积 $v = V/N$ 的倒数幂展开之基础）；在具有 Coulomb 相互作用的系统中，该参数和粒子的 Coulomb 相互作用平均能量与其平均动能之比有关，等等．一旦方程链被截断，数学问题化为对非线性方程组（或者对一个非线性积分方程）的求解（在其积分部分关于分布函数是非线性的），假定分布函数满足归一化条件和关联弱化条件（多粒子分布函数，在其空间变数的给定"分离"下，分解为少粒子分布函数的乘积），它们在特定边界条件中起作用．

对于具有短程相互作用势

$$\Phi_{ij} = \Phi(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$$

（包括小距离时的无穷大排斥）的系统，Mayer 方法（Mayer method）（见 [2]）以经典位形配分函数 Z 的下列形式的表达式

$$\frac{Z}{Z_{\text{ID}}} = \frac{1}{V^N}\int_{(V)} d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_N \prod_{1 \leq i < j \leq N} (1 + f_{ij})$$

为基础，其中 Mayer 函数（Mayer function）$f_{ij} = \exp(-\Phi_{ij}/\theta) - 1$．对于粒子平均位形自由能

$$\frac{F}{N} = -\theta \ln Z^{1/N},$$

以及对于系统的其他特性，可以获得相应位力展开式，其系数通过递增数目的函数 f_{ij} 乘积的积分予以表达，它们按对地由其两变量之一 $\mathbf{r}_i$ 或 $\mathbf{r}_j$ 相联系（对于势 Φ_{ij} 的真正模型，这些积分要应用数值法予以计算）．应用位力展开时引起的数学问题，是要研究出对这些级数（即使仅仅部分地）求和的方法的问题，以便处理气液相变区或临界区，以及处理展开本身收敛性的一般问题．

对于非理想量子系统，动力学变量的算子用量子产生和湮没算子予以表达；为了研究该系统的统计力学问题，起初在量子场论中所发展的方法经证明是有效的．最常用的是零温多时因果 Green 函数方法，不含时温度 Green 函数方法，以及有限温度双时 Green 函数方法．对于前两种处理方法（[4]），按粒子相互间或粒子与任何场之间的作用强度展开的微扰论级数，在某种意义上类似量子场论中的相应展开（在纯粹温度 Green 函数中，温度倒数起"虚时间"的作用）．因而，这些形式体系在微扰论级数的图解法方面曾取得很大进展，它将对初始相互作用粒子系统的研究简化为对准粒子系统的研究，这些准粒子具有重正化能量和有限阻尼以及重正化有效相互作用（顶角部分），等等．关于准粒子的 Green 函数和顶角部分或有效相互作用的积分方程组一般通过以下方式构成：其求解应相当于微扰论形式化级数中按一定原则选择（例如，对于具体系统，微扰论各阶中最重要贡献）的项的无穷序列的计算．

在有限温度双时 Green 函数形式体系中（[1]，[4]－[6]），当考虑具有递增数目"粒子"的 Green 函数的 Боголюбов 型方程系列时，以及当作为实现解链步骤的结果而构成（一般是非线性的）闭合积分方程组时，会出现类似问题．与这些方程的研究有关的数学问题，基本上限于寻求或者其近似意义上的特定

渐近解，或者所有图形的类，或者解链方法.

这些方法用于研究诸如：具有 Coulomb 相互作用的电子气系统（按照微扰论仅计算各阶中最重要贡献相当于计算初始相互作用的屏蔽），具有短程力相互作用的低密度系统（第一阶段求和或与之相当的运算导致将初始相互作用用有效相互作用代替，后者通过求解类似于散射的 T 矩阵的量子力学方程的一个方程予以定义），电子光子系统，Heisenberg 铁磁模型系统，等等.

若干统计力学问题容许进行（**热力学极限**（thermodynamic limit）$N \to \infty$，$V \to \infty$ 而 $N/V=$ 常数意义上的）渐近精确研究；这些是具有四因子相互作用的系统，它推广了 Bardeen-Cooper-Schrieffer 型超导模型系统，以及其他．这个方法（见[8]）与构造容许严格解的近似 Hamilton 量有关，以及与接着证明用此量获得的结果渐近地迫近于相应初始系统的结果.

参考文献

[1] Боголюбов, Н. Н., Избранные труды, т. 1, К., 1969.

[2] Uhlenbeck, G. E. and Ford, G. W., Lectures in statistical mechanics, Amer. Math. Soc., 1963.

[3] Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F. and Bird, R. B., Molecular theory of gases and liquids, New York, 1954.

[4] Абрикосов, А. А., Горьков, Л. П., Дзялошинский, И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962（中译本：А. А. 阿布里科索夫，Л. П. 戈尔可夫，И. Е. 加洛辛斯基，统计物理学中的量子场论方法，科学出版社，1963）.

[5] Тябликов, С. В., Методы квантовой теории магнетизма, М., 1965 (Tyablikov, S. V., Methods in the quantum theory of magnetism, Plenum, 1967).

[6] Бонч-Бруевич, В. Л., Тябликов, С. В., Метод функций Грина в статистической механике, М., 1961.

[7] Зубарев, Д. Н., 《УФН》, 71 (1960), 71 – 116.

[8] Боголюбов, Н. Н. (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974（英译本：Bogolyubov, N. N., Jr., A method for studying model Hamiltonians, Pergamon, 1972）.

И. А. Квасников 撰

【译注】

参考文献

[B1] 郝柏林、于渌等，统计物理学进展，科学出版社，1981.

[B2] 蔡建华、龚昌德、姚希贤、孙鑫、李正中、吴萱如，量子统计的格林函数理论，科学出版社，1983.

徐锡申 译

随机过程论中的统计问题 [**statistical problems in the theory of stochastic processes; статистические задачи теории случайных процессов**]

数理统计学的一个分支，基于表示为一随机过程的观测来进行统计推断．最普通的提法是，观测了一个随机函数 $x(t)$ $(t \in T)$ 的值，基于这些观测要对 $x(t)$ 的某些特征作出统计推断．这样广的定义形式上也包含了所有独立观测的经典统计．事实上，随机过程统计通常只是取其相依观测的统计的意义，而把对一个随机过程的大量独立实现的统计分析排除在外．这里，统计理论的基础，问题的基本提法（见**统计估计**（statistical estimation）；**统计假设检验**（statistical hypotheses, verification of）），基本概念（如充分性，无偏性，相合性等），都是与经典理论相同的．但是，当解决具体问题时，就会时常产生一些显著的困难与新型的现象．这些困难部分是由于相依性的事实以及所考虑的过程有更复杂的结构，部分则是由于依连续时间观测的情形，必须考察无穷维空间中的分布.

事实上，当解决随机过程论中的统计问题时，所考虑的过程的结构是有决定意义的，因而在把随机过程分类时，Gauss 过程，Марков 过程，平稳过程，分支过程，扩散过程及其他过程的统计问题都有过研究．其中影响最深远的是平稳过程的统计理论（时间序列分析）.

随机过程统计分析的需求产生于 19 世纪气象与经济序列的分析以及关于循环过程（价格波动，太阳黑子）的研究．在近代，由随机过程统计分析所涵盖的问题数量越来越多．仅列举少数几例，就有随机噪声，振动，湍流，海洋波运动，心电图与脑电图等等的统计分析．从噪声背景中提取信号的理论研究，随机过程论的统计问题处于重要地位.

下面，假设观测了随机过程 $x(t)$ 的一段：$x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$，其中参数 t 或者跑遍整个区间 $[0, T]$，或者跑遍该区间中的整数．在统计问题中，过程 $\{x(t): 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 的分布 P^T 通常只知道是属于某个分布族 $\{P^T\}$．这个族总可以被表成参数形式.

例 1. 过程 $x(t)$ 或者是一个非随机函数 $s(t)$（"信号"）与一个随机函数 $\xi(t)$（"噪声"）之和，或者只是一个随机函数 $\xi(t)$．要检验假设 H_0: $x(t)=s(t)+\xi(t)$，其对立的备择假设是 H_1: $x(t)=\xi(t)$（在噪声中检测信号的问题），这是统计假设检验的例子.

例 2. 过程 $x(t)=s(t)+\xi(t)$，其中 $s(t)$ 是未知的非随机函数（信号），而 $\xi(t)$ 是随机过程（噪声）．要估计函数 s 或其在某个给定点 t_0 处的值 $s(t_0)$．类似地，可以假定 $x(t)=s(t;\theta)+\xi(t)$，而 s 是依赖于未知参数 θ 的已知函数，要通过 $x(t)$ 的观测来估计 θ（从噪声背景中提取信号的问题）．这是估计问题的例子.

随机过程的似然比．在统计问题中，似然比与似

然函数起着重要的作用（见 **Neyman-Pearson 引理**（Neyman-Pearson lemma）；**统计假设检验**（statistical hypotheses, verification of）；**统计估计**（statistical estimation））．两个分布 P_u^T 与 P_v^T 的似然比（likelihood ratio）是密度

$$p(x(\cdot);u,v)=p(x(\cdot))=\frac{dP_u^T}{dP_v^T}(x(\cdot)).$$

似然函数（likelihood function）是函数

$$L(\theta)=\frac{dP_\theta^T}{d\mu}(x(\cdot)),$$

其中 μ 是一个使所有测度 P_θ^T 相对于它都为绝对连续的 σ 有限测度．在离散情形下，即 t 跑遍 $[0,T]$ 的整数且 $T<\infty$，似然比当分布 P_u^T 与 P_v^T 都有正密度时总是存在的，而且就等于这两个密度之比．

如果 t 跑遍整个区间 $[0,T]$，那么就可能产生测度 P_u^T 与 P_v^T 彼此间不绝对连续的情形；甚至可能产生 P_u^T 与 P_v^T 相互奇异的情况，即在 $x(t)$ 的实现空间中存在集 A，使

$$P_u^T\{x\in A\}=0,\ P_v^T\{x\in A\}=1.$$

这时 $p(x;u,v)$ 不存在．测度 P_θ^T 的奇异性导致重要的和有点荒谬的统计结论，因为会引出关于参数 θ 的无误差推断．例如，令 $\theta=\{0,1\}$；测度 P_0^T 与 P_1^T 的奇异性意味着，用检验"若 $x\notin A$ 就接受 H_0；若 $x\in A$ 就拒绝 H_0"，则假设 H_0: $\theta=0$ 与 H_1: $\theta=1$ 是无误差地可区别的．这种完美检验的出现往往表明，该统计问题的提法不够完善，从中排除了某些本质的随机干扰．

例 3．令 $x(t)=\theta+\xi(t)$，其中 $\xi(t)$ 是零均值的平稳遍历过程，θ 是实参数．设 $\xi(t)$ 的实现以概率 1 在一包含实轴的带中解析．由遍历定理，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt=\theta,$$

且所有的测度 P_θ^∞ 又是相互奇异的．因为一个解析函数 $x(t)$ 完全由它在零点邻域中的值所确定，所以对任意 $T>0$，由观测 $\{x(t):0\leqslant t\leqslant T\}$ 估计参数 θ 时是无误差的．

当似然比存在时，其计算也是一个困难的问题．计算通常是基于极限关系式

$$p(x(\cdot);u,v)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p_u(x(t_1),\cdots,x(t_n))}{p_v(x(t_1),\cdots,x(t_n))},$$

其中 p_u, p_v 是向量 $(x(t_1),\cdots,x(t_n))$ 的密度，而 $\{t_1,t_2,\cdots\}$ 是 $[0,T]$ 中的稠集．上述等式右边的研究对于探讨 P_u 与 P_v 可能的奇异性也是有用的．

例 4．假定观测或者为 $x(t)=w(t)$，其中 $w(t)$ 为一 **Wiener 过程**（Wiener process）（H_0 假设），或者 $x(t)=m(t)+w(t)$，其中 m 为一非随机函数（H_1 假设）．如果 $m'\in L_2(0,T)$，则测度 P_0、P_1 是相互绝对连续的，而如果 $m'\notin L_2(0,T)$，则它们是相互奇异的．其似然比等于

$$\frac{dP_1^T}{dP_0^T}(x)=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t[m'(t)]^2dt+\int_0^T m'(t)dx(t)\right\}.$$

例 5．设 $x(t)=\theta+\xi(t)$，其中 θ 为实参数而 $\xi(t)$ 为一零均值的平稳 Gauss 的 **Марков 过程**（Markov process），且有已知的相关函数 $r(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$．此时测度 P_θ^T 是相互绝对连续的，且有似然函数

$$\frac{dP_\theta^T}{dP_0^T}(x)=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\theta x(0)+\frac{1}{2}\theta x(T)+\frac{1}{2}\theta\alpha\int_0^T x(t)dt\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{4}\theta^2\alpha T\right\}.$$

特别地，$x(0)+x(T)+\alpha\int_0^T x(t)dt$ 关于族 P_θ^T 是一**充分统计量**（sufficient statistic）．

随机过程统计中的线性问题．设观测了函数

$$x(t)=\sum_1^k\theta_i\varphi_i(t)+\xi(t),\qquad (*)$$

其中 $\xi(t)$ 是零均值且有已知的相关函数 $r(t,s)$ 的随机过程，φ_i 是已知的非随机函数，$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 是未知参数（θ_i 为回归系数），而参数集 Θ 是 $\mathbf{R}^k$ 的一个子集．θ_i 的线性估计是形如 $\sum c_jx(t_j)$ 或其均方极限的估计量．找寻均方意义下的最优无偏线性估计的问题归结为解与 r 有关的线性代数或线性积分方程．事实上，最优估计 $\hat\theta$ 由对任何形如 $\zeta=\sum b_jx(t_j)$ 且 $\sum b_j\varphi_i(t_j)=0$ 的 ζ 组成的联立方程 $\mathsf{E}_\theta(\hat\theta_i\zeta)=0$ 所确定．在若干情形下，当 $T\to\infty$ 时，用最小二乘方法渐近获得的 θ 的估计，并不比最优线性估计坏，但前者在计算上更简单且不依赖于 r．

例 6．在例 5 的条件下，$k=1$, $\varphi_1(t)\equiv1$．这时最优无偏线性估计量（linear estimator）为

$$\hat\theta=\frac{1}{2+\alpha T}\left[x(0)+x(T)+\alpha\int_0^T x(t)dt\right],$$

而估计量

$$\theta^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

渐近地与之有相同的方差.

Gauss 过程的统计问题. 设 $\{x(t): 0 \leqslant t \leqslant T, P_\theta^T\}$ 对所有 $\theta \in \Theta$ 为 **Gauss 过程**(Gaussian process). 关于 Gauss 过程, 有如下二者择一的结果: 任何两个测度 P_u^T, P_v^T 或者相互绝对连续或者奇异. 因为 Gauss 分布 P_θ^T 是由其均值 $m_\theta(t) = \mathrm{E}_\theta x(t)$ 及其相关函数 $r_\theta(s,t) = \mathrm{E}_\theta x(s)x(t)$ 完全确定的, 从而似然比 dP_u^T/dP_v^T 以一种复杂的方式由 m_u, m_v, r_u, r_v 表出. 当 $r_u = r_v = r$ 且 r 为连续函数的情形, 相对要简单些. 设 $\Theta = \{0, 1\}$, $r_0 = r_1 = r$; 令 λ_i 与 $\varphi_i(t)$ 是积分方程

$$\lambda\varphi(s) = \int_0^T r(s,t)\varphi(t)dt$$

的本征值及其在 $L_2(0, T)$ 中对应的正规化本征函数; 设均值 $m_0(t)$ 与 $m_1(t)$ 为连续函数; 并令

$$m_{ij} = \int_0^T m_i(t)\varphi_j(t)dt.$$

那么, 测度 P_0, P_1 相互绝对连续, 当且仅当

$$\sum_{j=1}^{\infty}(m_{0j} - m_{1j})^2\lambda_j^{-1} < \infty.$$

此时,

$$\frac{dP_1^T}{dP_0^T}(x) =$$

$$= \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{m_{1j} - m_{0j}}{\lambda_j}\left[\int_0^T x(t)\varphi_j(t)dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{m_{1j} - m_{0j}}{2}\right]\right\}.$$

这个等式可以用来设计一个关于假设 H_0: $m = m_0$ 对备择假设 H_1: $m = m_1$ 的检验, 当然要假定函数 r 对于观测者是已知的.

平稳过程的统计问题. 设观测 $x(t)$ 是一有均值 m 与相关函数 $r(t)$ 的平稳过程; 令 $f(\lambda)$ 与 $F(\lambda)$ 分别为它的谱密度与谱函数. 平稳过程统计的基本问题就在于对其特征 m, r, f, F 作假设检验和估计. 在遍历过程 $x(t)$ 的情形, m 与 $r(t)$ 的相合估计(当 $T \to \infty$ 时)分别由下两式给出:

$$m^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt,$$

$$r^*(t) = \frac{1}{T}\int_0^{T-t} x(t+s)x(s)ds.$$

当 r 已知时, 估计 m 的问题常作为线性问题来处理. 这类问题又包括通过形如 (*) 且有平稳 $\xi(t)$ 的观测来估计回归系数这样更一般的问题.

设 $x(t)$ 有零均值及依赖于有限维参数 $\theta \in \Theta$ 的谱密度 $f(\lambda; \theta)$. 如果过程 $x(t)$ 是 Gauss 的, 那么就可以导出关于似然比 dP_θ/dP_{θ^0}(若其存在)的公式, 从而在若干情形下便有可能得出极大似然估计量或它们的"好的"近似(对充分大的 T). 在相当宽的假定下, 这些估计是渐近正态 $N(\theta, c(\theta)/\sqrt{T})$ 且渐近有效的.

例 7. 设 $x(t)$ 为一连续时间的平稳 Gauss 过程, 有有理谱密度 $f(\lambda) = |Q(\lambda)/P(\lambda)|^2$, 其中 P 与 Q 是多项式. 对应于有理谱密度 f_0, f_1 的测度 P_0^T, P_1^T 是绝对连续的, 当且仅当

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f_0(\lambda)}{f_1(\lambda)} = 1.$$

这时参数 θ 是多项式 P, Q 的所有系数之集.

例 8. 一类重要的平稳 Gauss 过程是**自回归过程**(auto-regressive process) $x(t)$:

$$x^{(n)}(t) + \theta_n x^{(n-1)}(t) + \cdots + \theta_1 x(t) = \xi(t),$$

其中 $\xi(t)$ 是单位强度的 Gauss 白噪声而 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 为未知函数. 这时谱密度为

$$f(\lambda; \theta) = (2\pi)^{-1}|P(i\lambda)|^{-2},$$

其中

$$P(z) = \theta_1 + \theta_2 z + \cdots + \theta_n z^{n-1} + z^n.$$

似然函数为

$$\frac{dP_\theta^T}{dP_{\theta^0}^T} = \sqrt{\frac{K(\theta)}{K(\theta^0)}}\exp\left\{\frac{\theta_n - \theta_n^0}{T} + \right.$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[\lambda_j(\theta) - \lambda_j(\theta^0)]\int_0^T[x^{(j)}(t)]^2dt +$$

$$\left. - \frac{1}{2}(\lambda(\theta) - \lambda(\theta^0))\right\},$$

其中 $\lambda_j(\theta)$ 与 $\lambda(\theta)$ 是 θ 的二次型, 依赖于 $x^{(j)}(t)$ $(j = 1, \cdots, n-1)$ 在点 $t = 0$, T 处的值, 而 $K(\theta)$ 是向量 $(x(0), \cdots, x^{(n-1)}(0))$ 的相关矩阵的行列式.

自回归参数 θ 的极大似然估计是渐近正态且渐近有效的. 下述近似似然方程的解 θ_T^* 也同样具有这

些性质:

$$\frac{1}{2T}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{d\lambda_j(\theta)}{d\theta_i}\int_0^T[x^{(j)}(t)]^2dt=\begin{cases}0, & 1\leqslant i<n,\\ \frac{1}{2}, & i=n.\end{cases}$$

在关于平稳过程谱的统计研究中，**周期图**(periodogram) $I_T(\lambda)$ 起着重要的作用. 这个统计量定义为

$$I_T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\left|\sum_{t=0}^{T}e^{-it\lambda}x(t)\right|^2 \text{（离散时间）},$$

$$I_T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T e^{-it\lambda}x(t)dt\right|^2 \text{（连续时间）}.$$

周期图被广泛用于构造 $f(\lambda)$ 与 $F(\lambda)$ 的不同类型的估计量以及有关这些特征量的假设检验判据. 在宽广的假定下，统计量 $\int I_T(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda$ 是 $\int f(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda$ 的相合估计量. 特别地，$\int_\alpha^\beta I_T(\lambda)d\lambda$ 可以作为 $F(\beta)-F(\alpha)$ 的估计量. 如果序列 $\varphi_T(\lambda;\lambda_0)$ 以一种适当的方式收敛于 δ 函数 $\delta(\lambda-\lambda_0)$，那么积分 $\int\varphi_T(\lambda;\lambda_0)I_T(\lambda)d\lambda$ 将是 $f(\lambda_0)$ 的相合估计. 形如 $a_T\psi(a_T\cdot(\lambda-\lambda_0))$ $(a_T\to\infty)$ 的函数常被用来充当函数 $\varphi_T(\lambda;\lambda_0)$. 如果 $x(t)$ 为一离散时间过程，则这些估计量可以写成如下形式:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{t=-T+1}^{T-1}e^{-it\lambda}r^*(t)c_T(t),$$

其中经验相关函数是

$$r^*(t)=\frac{1}{T}\sum_{u=0}^{T-t}x(u+t)x(u),$$

而非随机系数 $c_T(t)$ 由 ψ 与 a_T 的选择所确定，而这种选择又依赖于有关 $f(\lambda)$ 的先验信息. 类似的表示对连续时间过程也成立.

平稳过程统计分析的问题有时还包括平稳过程的外推、内插与滤波的问题.

Марков 过程的统计问题. 设观测 $X_0,\cdots,X_T$ 属于一齐次 **Марков 链**(Markov chain). 在相当宽的假定下，其似然函数为

$$\frac{dP_\theta^T}{d\mu^T}=$$

$$=p_0(X_0;\theta)p(X_1|X_0;\theta)\cdots p(X_T|X_{T-1};\theta),$$

其中 p_0, p 是其分布的初始及转移密度. 这个表达式与独立观测序列的似然函数是类似的，因而当满足正则性条件(关于 $\theta\in\Theta\subset\mathbf{R}^k$ 的光滑性)时，可以类似于独立观测的对应理论建立起假设检验与估计的理论.

如果 $x(t)$ 为一连续时间 **Марков 过程**(Markov process)，就会发生更复杂的情况. 设 $x(t)$ 是有有限个状态 N 且有可微转移概率 $P_{ij}(t)$ 的齐次 Марков 过程. 其转移概率矩阵由矩阵 $Q=\|q_{ij}\|$, $q_{ij}=P'_{ij}(0)$, $q_i=-q_{ii}$ 所确定. 设在初始时刻 $x(0)=i_0$ 与 Q 无关. 选择任一矩阵 $Q_0=\|q_{ij}^0\|$，即可得出

$$\frac{dP_Q^T}{dP_{Q_0}^T}(x)=\exp\{(q_{i_n}^0-q_{i_n})T\}\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{q_{i_\nu i_{\nu+1}}}{q_{i_\nu i_{\nu+1}}^0}\times$$

$$\times\exp\{t_\nu(q_{i_n}-q_{i_\nu}-q_{i_n}^0+q_{i_\nu}^0)\},$$

其中统计量 $n(x)$, $t_\nu(x)$, $i_\nu(x)$ 由以下方式定义: n 是 $x(t)$ 在区间 $[0,T)$ 上的跳的次数; τ_ν 是第 ν 个跳的时刻，$t_\nu=\tau_{\nu+1}-\tau_\nu$，而 $i_\nu=x(\tau_\nu)$. 由此推出，参数 q_{ij} 的极大似然估计为 $q_{ij}^*=m_{ij}/\mu_i$，其中 m_{ij} 是 $[0,T)$ 上从 i 到 j 的转移次数，而 μ_i 是 $x(t)$ 花费在状态 i 上的时间.

例 9. 设 $x(t)$ 为一生灭强度分别为常数 λ 与 μ 的**生灭过程**(birth-and-death process). 这意味着 $q_{i,i+1}=i\lambda$, $q_{i,i-1}=i\mu$, $q_{ii}=1-i(\lambda+\mu)$，且当 $|i-j|>1$ 时 $q_{ij}=0$. 在这个例子中，状态的数目是无穷的. 令 $x(0)\equiv 1$. 似然比为

$$\frac{dP_{\lambda\mu}^T}{dP_{\lambda_0\mu_0}^T}(x)=$$

$$=\left[\frac{\lambda}{\lambda_0}\right]^B\left[\frac{\mu}{\mu_0}\right]^D\exp\left\{-(\lambda+\mu-\lambda_0-\mu_0)\int_0^T x(s)ds\right\}.$$

其中 B 为生(测度为 $+1$ 的跳)的总数，D 为灭(测度为 -1 的跳)的总数. λ 与 μ 的极大似然估计为

$$\lambda_T^*=\frac{1}{B}\int_0^T x(s)ds,\ \mu_T^*=\frac{1}{D}\int_0^T x(s)ds.$$

设 $x(t)$ 是一漂移系数为 a、扩散系数为 b 的扩散过程，使 $x(t)$ 满足**随机微分方程**(stochastic differential equation)

$$dx(t)=a(t,x(t))dt+b(t,x(t))dw(t),$$

$$x(0)=x_0,$$

其中 w 是 Wiener 过程. 那么，在某些特定的限制下有

$$\frac{dP_{a,b}^T}{dP_{a_0,b}}(x)=\exp\left\{\int_0^T\frac{a(t,x(t))-a_0(t,x(t))}{b(t,x(t))}dx(t)+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{(a(t,x(t))-a_0(t,x(t)))^2}{b(t,x(t))}dt\right\}$$

(其中 a_0 是一固定的系数).

例 10. 设

$$dx(t)=a(t,\ x(t);\ \theta)dt+dw,$$

其中 a 是已知函数而 θ 是未知实参数. 若以 μ 表示 Wiener 测度, 则似然函数为

$$\frac{dP_\theta^T}{d\mu}=\exp\left\{\int_0^T a(t,\ x(t);\ \theta)dx+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^T a^2(t,\ x(t);\ \theta)dt\right\},$$

且在正则性条件下, Cramér - Rao 不等式 (Cramér - Rao inequality) 成立: 对于一个有偏度 $\Delta(\theta)=\mathsf{E}_\theta\tau-\theta$ 的估计量 τ,

$$\mathsf{E}_\theta|\tau-\theta|^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{(1+d\Delta/d\theta)^2}{\mathsf{E}_\theta\int_0^T[(\partial/\partial\theta)a(t,\ x(t);\ \theta)]^2dt}+\Delta^2(\theta).$$

如果对 θ 的依赖是线性的, 则极大似然估计为

$$\theta_T^*=\frac{\int_0^T a(t,\ x(t))dt}{\int_0^T a^2(t,\ x(t))dt}.$$

参考文献

[1] Grenander, U., Stochastic processes and statistical inference, *Ark. Mat.*, **1** (1950), 195 – 277.

[2] Hannan, E. J., Time series analysis, Mathuen, London, 1960.

[3] Grenander, U., Rosenblatt, M., Statistical analysis of stationary time series, Wiley, 1957.

[4] Grenander, U., Abstract inference, Wiley, 1981.

[5] Розанов, Ю. А., Гауссовские бесконечномерные распределения, М., 1968.

[6] Ибрагимов, И. А., Розанов, Ю. А., Гауссовские случайные процессы, М., 1970 (英译本: Ibragimov, I. A., Rozanov, Yu. A., Gaussian random processes, Springer, 1978).

[7] Brillinger, D., Time series, Holt, Rinehart & Winston, 1975.

[8] Billingsley, P., Statistical inference for Markov processes, Univ. Chicago Press, 1961.

[9] Липцер, Р. Ш., Ширяев, А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974.

[10] Яглом, А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981 (英译本: Yaglom, A. M., Correlation theory of stationary and related random functions, 1 – 2, Springer, 1987).

[11] Anderson, T.. The statistical analysis of time series, Wiley, 1971.

И. А. Ибрагимов 撰

【译注】

参考文献

[B1] 安鸿志、陈兆国、杜金观、潘一民, 时间序列的分析与应用, 科学出版社, 1986.

[B2] 潘一民, 随机过程的线性统计理论与方法, 上海科学技术出版社, 1993.

[B3] 项静恬、史久恩等, 动态和静态数据处理——时间序列和数理统计分析, 气象出版社, 1991.

潘一民 译

统计质量控制 [statistical quality control; статистический контроль качества]

数理统计 (mathematical statistics) 的分支, 其方法在工业中用于确定质量实际达到的水平、质量变化的趋势及其对工艺过程的影响. 批量工业产品的质量, 可由一组数字或函数表示的性质的总和表征. 所要求的质量指标的水平由国家标准规定, 质量标准亦通过其他途径制定. 这些标准给出了质量指标的实际水平的估计方法. 必须采用有关标准, 因为根据控制结果所作的决定, 与实际费用相联系, 并且涉及生产单位的利益. 统计质量控制方法, 在批量工业产品质量控制的整个标准系统中占重要地位. 这首先是因为产品主要质量指标的变异性带有随机性. 为使控制更加客观且不含系统误差, 必须采用随机化方法, 从而必须运用概率和统计方法.

统计质量控制中使用的数学方法是多样的. 制造过程中批量产品连续流的统计质量控制方法最常用, 其目的在于发现异常偏差和对设备作相应调整, 而这是必要的.

设 $\{O_t\}$ 是产品序列, $t=1,2,\cdots$. 作为控制的结果, 将每件产品 O_t 与一数 ε_t 相对应. 对于二择一特征的控制, 若 O_t 为合格品, 则 $\varepsilon_t=0$; 若 O_t 为不合格品, 则 $\varepsilon_t=1$. 不合格品将被挑出. 按 Dodge 方案 $\pi(f,i)$ 进行的控制由如下规则体系描述. 控制从对序列产品的逐一检验开始, 直到连续出现 i 件合格品的系列; 然后每次以概率 $f(0<f<1)$ 随机抽选下一件产品进行检验; 当发现不合格品时, 重新进行逐一检验直到连续出现 i 件合格品, 再改为以概率 f 的抽样检验, 依此类推. 例如, ε_t 是 Bernoulli 序列: $\mathsf{P}\{\varepsilon_t=1\}=q$ (见 **Bernoulli 试验** (Benoulli trials)). 那么, 按方案 $\pi(f,i)$ 被检验的产品的平均比率等于

$$f(q)=f[f+(1-f)(1-q)^i]^{-1}.$$

对于适当选定的 f 和 i, 使用平均检出质量水平的值

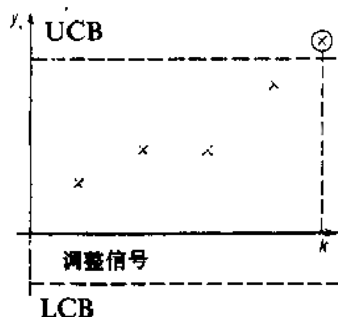
$$L^*=\max_{0\leqslant q\leqslant 1}L(q),$$

其中

$$L(q) = \frac{q[1-f(q)]}{1-qf(q)}$$

是一件产品在未经控制的条件下，是不合格品的条件概率（见[1]，[2]）.

在按数量特征对产品列 $\{O_t\}$ 进行控制时，控制结果的值 ε_t 视为**随机过程**（stochastic process）. 在前苏联的主要国家标准中，假设在正常情形下 $\{\varepsilon_t\}$ 值是独立同正态分布随机变量列．为有效地对数量特征进行控制，检验关于 ε_t 的分布类型的上述假设是必要的前提条件．不协调情形的存在，或者导致趋势（trend）的出现：ε_t 的均值的系统增大（或减小）；或者引起 ε_t 的方差的增大等等．为发现正态秩序的破坏（不协调），基于控制图的统计质量控制方法得到广泛运用．



在控制图（见上图）上，横坐标 k 是被控制样本 $O_{t_k+1},\cdots,O_{t_k+n}$ 的编号，纵坐标是由 $\varepsilon_{t_k+1},\cdots,\varepsilon_{t_k+n}$ 的值确定的量 y_k. n 通常较小，$n=3,4,5$. 作为指标 y_k 常使用均值 $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n$，中位数，方差的估计量 $s^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2/n$，极差等．在控制图上事先引两条线：上控制限（UCB）和下控制限（LCB）. 假如 y_k 的值高于 UCB 或低于 LCB，则为恢复工艺过程的稳定性需要对其进行调整．

控制图是 W. A. Shewhart（[3]）推出的．现在，使用各种不同类型的控制图（见[4]，[5]）. 之所以使用不同类型的控制图，是因为它们对发现各种不同异常的功效不同．例如，对于发现 ε_t 均值的跳跃式变化，所谓累积和控制图比插图所示的控制图更有效．控制图各种特征的精确估算，例如发现某种类型异常的平均时滞，是困难的问题，需要大量的计算，一般只能在电子计算机上实现．

在被控制产品划分为若干总体（批）的情形下，广泛应用**统计验收控制**（statistical acceptance control）方法．

参考文献

[1] Dodge, H. F., A sampling inspection plan for continuous production, *Ann. Math. Stat.*, **14**(1943), 264–279.

[2] Беляев, Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975.

[3] Shewhart, W. A., Economic control of quality of manufactured products, New York, 1931.

[4] Shindovskiǐ, E. and Shurtz, O., Statische methoden der kwalitätssteuerung, Moscow, 1976（俄文版译自德文）.

[5] Johnson, N. and Leone, F., Statistics and experimental design in engineering and the physical sciences, 1, Wiley, 1964.

Ю. К. Беляев 撰　周概容　王健 译

统计和［**statistical sum; статистическая сумма**］，配分函数（partition function）

平衡统计物理学中使用的一个函数（见**统计物理学中的数学问题**（statistical physics, mathematical problems in）），等于 Gibbs 正则系综（见 **Gibbs 统计系综**（Gibbs statistical aggregate）；**统计系综**（statistical ensemble））中概率密度（或量子系统中密度矩阵）表达式中的归一化常数.

1）经典系统中，Gibbs“巨”正则分布的密度 $p(\omega)$，$\omega\in\Omega$（Ω 是系统的相空间），相对于 Ω 上自然测度 $d\omega$，由下列公式

$$\rho(\omega)=(\Xi)^{-1}\exp\{-\beta[H_0(\omega)+\mu_1H_1(\omega)+ +\cdots+\mu_kH_k(\omega)]\}$$

予以定义，其中 $H_0(\omega)$ 是系统的 Hamilton 函数（能量）而 $H_i(\omega)$ $(i=1,\cdots,k)$ 是当由 Hamilton 函数 $H_0(\omega)$ 所定义的系统随时间演化时的一组守恒量；$\beta>0$ 和 $\mu_1,\cdots,\mu_k$ 是实参量. 归一化因子

$$\Xi(\beta,\mu_1,\cdots,\mu_k)= =\int_{\Omega}\exp\{-\beta[H_0(\omega)+\sum_{i=1}^{k}\mu_iH_i(\omega)]\}d\omega$$

亦称为统计和（或“巨”配分函数（“grand” partition function））.

2）量子系统中，“巨”正则 Gibbs 态由密度矩阵

$$\rho=(\Xi)^{-1}\exp\{-\beta[\hat{H}_0+\mu_1\hat{H}_1+\cdots+\mu_k\hat{H}_k]\}$$

予以定义，其中 $\hat{H}_0$ 是系统的 Hamilton 量（能量算子），而 $\hat{H}_i$ $(i=1,\cdots,k)$ 是对应于时间演化过程中守恒量的可对易算子，$\beta>0$ 和 $\mu_1,\cdots,\mu_k$ 是实参量. 归一化因子（称为统计和或巨配分函数）等于

$$\Xi(\beta,\mu_1,\cdots,\mu_k)= =\mathrm{Tr}\exp\{-\beta[\hat{H}_0+\sum_{i=1}^{k}\mu_i\hat{H}_i]\}.$$

对于其他 Gibbs（微正则和正则）系综，以及对于真实物理系统各种简化变型（格点系统，位形系统，等

等）所定义的 Gibbs 系综，可用同样方式来定义配分函数（或统计和）.

在下列典型情况，系统封闭于有界域 $V\subset\mathbf{R}^3$，而 Gibbs 系综定义中出现的能量 $H_0(\omega)$（或 $\hat{H}_0$），以及其他量 $H_i(\omega)$, $i=1,\cdots,k$（相应地，算子 $\hat{H}_i$, $i=1,\cdots,k$）相对于 $\mathbf{R}^3$ 中的移动是不变量，并且是近加性的，即（在经典系统中）

$$H_i(\omega_1,\omega_2)\approx H_i(\omega_1)+H_i(\omega_2),\ i=0,1,\cdots,k,$$

其中 ω_1 和 ω_2 是充分远离的两部分粒子的位形（关于这个条件及其量子类似条件的严格数学表述，见[2]），过渡到热力学极限（thermodynamical limit）$V\uparrow\mathbf{R}^3$ 时，巨配分函数 Ξ 具有下列渐近形式：

$$\Xi(\beta,\mu_1,\cdots,\mu_k)=$$
$$\exp\{V\chi(\beta,\mu_1,\cdots,\mu_k)+o(V)\},$$

其中函数 $\chi(\beta,\mu_1\cdots,\mu_k)$——所谓热力学势（thermodynamic potential）——是系统的重要的特性函数：许多其他热力学性质（比内能，密度，比熵，等等）均可通过它予以表达.

参考文献

[1] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Статистическая физика, часть 1, 3 изд. М., 1976 (Теоретич. физика, т. 5)（中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹，统计物理学，人民教育出版社，1964）.

[2] Ruelle, D., Statistical mechanics, Rigorous results, Benjamin, 1969.

[3] Balescu, R., Equilibrium and non-equilibrium statistical mechanics, Wiley, 1975.

P. A. Минлос 撰 徐锡申 译

统计检验 [statistical test; статистический критерий]

统计假设检验问题中，根据观测结果作出决定时所遵循的决策规则（见统计假设检验（statistical hypotheses, verification of））.

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是在样本空间 $(\mathfrak{X}_n,\mathscr{B}_n,\mathsf{P}_\theta^n)$ $(\theta\in\Theta)$ 中取 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 为值的随机向量．假定拟根据 X 的实现，检定假设 H_0: $\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ 对备选假设 H_1: $\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$. 其次，设 $\varphi_n(\cdot)$ 是任意一个将实现空间 $\mathfrak{X}_n$ 映射到区间 $[0,1]$ 的 $\mathscr{B}_n$ 可测函数．在这种情形下，以概率 $\varphi_n(x)$ 否定 H_0，以概率 $1-\varphi_n(x)$ 否定 H_1，并把这种规则称作检定 H_0 对 H_1 的统计检验（statistical test）；称 $\varphi_n(\cdot)$ 为检验的临界函数；称函数 $\beta(\theta)=\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)(\theta\in\Theta)$ 为检验的功效函数（power function）.

使用统计检验所作出的决定，或者正确，或者发生如下两类错误之一：H_0 本来成立，却否定了 H_0 从而接受 H_1（第一类错误）；或者本来 H_1 正确，却接受了 H_0（第二类错误）．统计假设检验经典理论的基本问题之一，就是构造一个检验，使对于给定的第一类错误的概率的上界 $\alpha=\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)$ $(0<\alpha<1)$，第二类错误的概率最小．该数 α 称为统计检验的**显著性水平**（significance level）.

实际中，最重要的是非随机化统计检验（non-randomized statistical tests），其临界函数 $\varphi_n(\cdot)$ 是 $\mathfrak{X}$ 中某一个 $\mathscr{B}_n$ 可测集 K 的示性函数：

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in K,\\ 0, & 若\ x\in\bar{K}=\mathfrak{X}_n\setminus K.\end{cases}$$

于是，如果事件 $\{X\in K\}$ 发生，则该非随机化统计检验否定 H_0；否则，如果事件 $\{X\bar{\in}K\}$ 发生，则接受 H_0．集合 K 称为统计检验的临界区域（critical region）.

作为一种规则，非随机化统计检验是建立在某一统计量 $T_n=T_n(X)$ 的基础之上，这样的统计量称为检验的统计量（test statistic）．这样，检验的临界区域的常见形式为：$K=\{x:T_n(x)<t_1\}$, $K=\{x:T_n(x)>t_2\}$, $K=\{x:T_n(x)<t_1\}\cup\{x:T_n(x)>t_2\}$，其中常数 t_1, t_2 由条件 $\alpha=\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_n(\theta)$ 决定，并称为检验统计量 T_n 的临界值（critical values of the test statistic）．前两种临界区域所对应的统计检验称为单侧统计检验，第三种临界区域所对应的统计检验称为双侧统计检验．T_n 的结构反映了两个二者必居其一的假设 H_0 和 H_1 的特性．在族 $\{\mathsf{P}_\theta^n:\theta\in\Theta\}$ 有充分统计量 $\Psi=\Psi(X)$ 的情形下，自然在充分统计量类中寻求检验统计量，因为对所有的 $\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$，有

$$\beta_n(\theta)=\mathsf{E}_\theta\varphi_n(X)=\mathsf{E}_\theta T_n(X),$$

其中 $T_n(X)=\mathsf{E}\{\varphi_n(X)|\Psi\}$.

参考文献

[1] Lehmann, E. L., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[2] Hajek, J. and Sidák, Z., Theory of rank tests, Acad. Press, 1967.

[3] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）.

[4] Waerden, B. L. van der, Mathematische statistik, Springer, 1957.

[5] Большев, Л. Н., Смирнов, Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., 1983.

[6] Nikulin, M. S., A result of Bol'shev's from the theory of the statistical testing of hypotheses, *J. Sovit. Math.*, 44 (1989), 3, 522－529 (*Zap Nauchn. Sem. Math. Inst. Steklov*, 153 (1986), 129－137).

М. С. Никулин 撰 周概容 王健 译

统计量 [**statistics**; **статистика**]

数理统计(mathematical statistics)中的术语,观测结果的函数的名称.

设随机变量 X 在样本空间 $(\mathfrak{X}, \mathscr{A}, \mathsf{P}^X)$ 中取值.那么,任一 $\mathfrak{X}$ 到可测空间 $(\mathfrak{Y}, \mathscr{A})$ 的 $\mathscr{A}$ 可测映射 $T(\cdot)$ 称为统计量(statistic),而统计量 T 的概率分布为

$$\mathsf{P}^T\{B\} = \mathsf{P}\{T(X) \in B\} = \mathsf{P}\{X \in T^{-1}(B)\} =$$

$$= \mathsf{P}^X\{T^{-1}(B)\} \quad (\forall B \in \mathscr{A}).$$

例.1)设 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立同分布、方差有穷随机变量,则统计量

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ 和 } s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

相应为数学期望 $\mathsf{E}X_1$ 和方差 $\mathsf{D}X_1$ 的无偏估计量(unbiased estimator).

2)基于观测结果 $X_1, \cdots, X_n$ 的**变列**(variational series)(即**顺序统计量**(order statistic)序列)的各项

$$X_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$$

都是统计量.

3)设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 形成**平稳随机过程**(stationary stochastic process),其**谱密度**(spectral density)为 $f(\cdot)$.在这种情形下,统计量

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-ik\lambda}\right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

称为**周期图**(periodogram);在关于 $f(\cdot)$ 的一定的正则性条件下,$I_n(\lambda)$ 是 $f(\cdot)$ 的渐近无偏估计量,即

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\, I_n(\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

在估计和统计假设检验理论中,**充分统计量**(sufficient statistic)的概念非常重要.利用充分统计量,在不丢失关于所研究分布(参数)族信息的情形下,可以简化数据.

参考文献

[1] Lehmann, E., Testing statistical hypotheses, Wiley, 1988.

[2] Войнов, В. Г. И Никулин, М. С., Несмещённое оценивание и его применения, М, 1989.

М. С. Никулин 撰 周概容 译

Steenrod 代数 [**Steenrod algebra**; **Стинрода алгебра**]

域 $\mathbf{Z}_p$ 上所有模 p 稳定**上同调运算**(cohomology operation)所成的分次代数 A_p.若 X 是任意空间或**空间的谱**(spectrum of spaces),群 $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ 是 Steenrod 代数 A_p 上的模.

Steenrod 运算(Steenrod operation)是 Steenrod 代数的一组代数生成元.因此 Steenrod 代数 A_2 是分次结合代数,其代数生成元是符号 Sq^i,其中 $\deg Sq^i = i$,并且它们之间满足 Adem 关系(Adem relation):

$$Sq^a Sq^b = \sum_t \begin{bmatrix} b-t-1 \\ a-2t \end{bmatrix} Sq^{a+b-t} Sq^t, \; a < 2b.$$

因此 Steenrod 代数 A_2 作为 $\mathbf{Z}_2$ 上的向量空间有一组加性基由运算 $Sq^{i_1} \cdots Sq^{i_s}$,$i_k \geqslant 2i_{k+1}$ 组成,这组基称为 Cartan-Serre 基(Cartan-Serre basis).当 $p > 2$ 时对 A_p 也有类似结果.此外,n 充分大时,

$$(A_p)^i \cong H^{i+n}(K(\mathbf{Z}_p, n); \mathbf{Z}_p),$$

其中 $K(\mathbf{Z}_p, n)$ 是一个 **Eilenberg-MacLane 空间**(Eilenberg-MacLane space).乘法

$$K(\mathbf{Z}_p, m) \wedge K(\mathbf{Z}_p, n) \to K(\mathbf{Z}_p, m+n)$$

诱导出 A_p 上的对角映射 $\Delta: A_p \to A_p \otimes A_p$,$\Delta$ 是一个代数同态,因而 A_p 成为一个 **Hopf 代数**(Hopf algebra).

参考文献

[1] Steenrod, N. E. and Epstein, D. B. A., Cohomology operations, Princeton Univ. Press, 1962.

[2] Milnor, J., The Steenrod algebra and its dual, *Ann. of Math.*, 67 (1958), 150-171.

[3] Mosher, R. E. and Tangora, M. K., Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968.

Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】 对由一个谱 E 定义的上同调论,类似于 Steenrod 代数的代数是 $E_*(E)$;见**广义上同调论**(generalized cohomology theories)以及**空间的谱**(spectrum of spaces).将同调群 $E_*(-)$ 当作 Hopf 代数 $E_*(E)$ 上的模,通过一个纯粹是同调代数的构造可得到 Adams 谱序列(Adams spectral sequence),见**谱序列**(spectral sequence),其 E_2 项是 $\mathrm{Ext}^{s,t}_{E_*(E)}(E_*(X), E_*(Y))$,并收敛到 $[X, Y]_*$.

参考文献

[A1] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology 1900-1960, Birkhäuser, 1989.

[A2] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975, Chapts. 18-19.

[A3] Adams, J. F., Stable homotopy and generalized homology, Univ. Chicago Press, 1974, Part III, Chapts. 12, 15.

潘建中 译 沈信耀 校

Steenrod 对偶性 [**Steenrod duality**; **Стинрода двойственность**]

球面 S_n 的紧子集 A 的 p 维同调群(homology

group）与相应补空间的 $(n-p-1)$ 维**上同调群**（cohomology group）之间的同构（同调及上同调群均为约化的）．N．Steenrod 在［1］中考察了这一问题．当 A 是开的或闭的子多面体时，上述同构就是 **Alexander 对偶性**（Alexander duality），当 A 是任一开子集时，则是 **Понтрягин 对偶性**（Pontryagin duality）．对任意子集 A，同构

$$H_p^c(A;G)=H^{n-p-1}(S^n\setminus A;G)$$

也成立（Ситников 对偶性（Sitnikov duality））；这儿 H_p^c 是 Steenrod-Ситников 带有紧支集的同调群，而 H^q 是 Александров-Čech 上同调群．Alexander-Понтрягин-Steenrod-Ситников 对偶性是 Poincaré-Lefschetz 对偶性以及空间偶的正合列的简单推论．这个对偶定理不仅对 S^n 成立，而且对 p 及 $p+1$ 维同调为零的任意流形也成立．

参考文献

［1］Steenrod，N.，Regular cycles on compact metric spaces，*Ann. of Math.*，41（1940），833－851．

［2］Ситников К．А．，《Докл．АН СССР》，81（1951），359－362．

［3］Скляренко Е．Г．，《Успехи матем．наук》，34（1979），6，90－118．

［4］Massey，W．，Notes on homology and cohomology theory，Yale Univ．Press，1964．

Е．Г．Скляренко 撰　潘建中 译　沈信耀 校

Steenrod-Eilenberg 公理［**Steenrod-Eilenberg axioms**；**Стинрода-Эйленберга аксиомы**］

描述同调群（上同调群）的基本性质的一组公理（见**上同调群**（cohomology group）；**同调群**（homology group）），它们唯一地确定了有关的同调论（上同调论）．给定了某个由拓扑空间偶 (X,A) 组成的范畴，一个公理同调论（axiomatic homology theory）是按下面的方式定义的：对任意整数 q，都给每个偶 (X,A) 配上一个交换群（或者某个环上的模）$H_q(X,A)$，而且给每个映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 配上一个同态 $f_*:H_q(X,A)\to H_q(Y,B)$，它们满足下述公理：

1）若 f 为恒等同胚，则 f_* 为恒等同构；

2）若 $g:(Y,B)\to(Z,C)$，则 $(gf)_*=g_*f_*$；

3）存在连接同态 $\partial:H_q(X,A)\to H_{q-1}(A)$，满足 $\partial f_*=f_*\partial$（这里 $A=(A,\phi)$，ϕ 为空集，而由 f 诱导的映射 $A\to B$ 也记作 f）；

4）正合公理（exactness axiom）：同调序列

$$\cdots\to H_{q+1}(X,A)\xrightarrow{\partial}H_q(A)\xrightarrow{i_*}H_q(X)\xrightarrow{j_*}H_q(X,A)\xrightarrow{\partial}H_{q-1}(A)\to\cdots$$

为正合序列，就是说每个同态的核都与前一同态的象相同，这里 $i:A\subset X$，$j:X\subset(X,A)$ 为包含映射；

5）同伦公理（homotopy axiom）：如果在所考虑的范畴中，$f,f':(X,A)\to(Y,B)$ 是同伦的映射，则 $f_*=f'_*$；

6）切除公理（excision axiom）：设 U 为 X 的开子集，若 U 在 X 中的闭包包含于 A 的内部，且包含映射 $i:(X\setminus U,A\setminus U)\subset(X,A)$ 属于所考虑的范畴，则 i_* 为同构；

7）维数公理（dimension axiom）：若 P 为单点组成的空间，则对任何 $q\neq0$ 都有 $H_q(P)=0$．群 $H_0(P)$ 常称为系数群．

用对偶的方式可以定义公理上同调论（对映射 f 配给同态 $f^*:H^q(Y,B)\to H^q(X,A)$，而连接同态的形式为 $\delta:H^q(A)\to H^{q+1}(X,A)$）．在紧多面体的范畴中，给定系数群之后，通常的同调论与上同调论就是唯一的公理化理论（这就是唯一性定理）．在一般多面体的范畴中，加上一个条件之后，唯一性定理也成立．这个条件就是，对于一族两两不交、既开且闭的子空间，它们并集的同调（上同调）应自然同构于这族子空间同调的直和（上同调的直积）（这就是 Milnor 加法公理）．在更一般的拓扑空间范畴中，也有一套公理方法来描述同调论与上同调论（见［2］，［3］）．**广义上同调论**（generalized cohomology theories）满足除了维数公理以外所有的 Steenrod-Eilenberg 公理，但是并不由这些公理唯一决定．

参考文献

［1］Eilenberg，S．and Steenrod，N．，Foundations of algebraic topology，Princeton Univ．Press，1966．

［2］Петкова，С．В．，《Матем．сб．》，90（1973），4，607－624．

［3］Massey，W．，Notes on homology and cohomology theory，Yale Univ．Press，1964．

Е．Г．Скляренко 撰

【补注】在西方，这组公理总是称作 Eilenberg-Steenrod 公理（Eilenberg-Steenrod axioms）．俄文中将两人的名字倒过来是俄文字母表的顺序造成的．常常将前面三条公理用来作为该公理组所用的一个函子的定义，而"Eilenberg-Steenrod 公理"一词则专指此函子所应满足的后面四条公理．后面四条有名字的公理是相互独立的．不过，若是将维数公理加强，使任意可缩空间的同调与单点空间的同调相同，那么同伦公理就是多余的了．另外，不用空间偶的范畴，而在以单个空间为对象的范畴上，也可以定义公理同调论；此时正合公理要换成 Mayer-Vietoris 公理（Mayer-Vietoris axiom），见［A1］．

参考文献

［A1］Kelly，G．M．，Single-space axioms for homology

theory, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 55 (1959), 10 – 22. 余建明 译

Steenrod 运算 [Steenrod operation; Стинрода операция]

N. E. Steenrod 对每个素数 p 所构造的稳定上同调运算(cohomology operation)的总称. 第一个这种运算出现在[1]中. $p=2$ 时这种运算是 **Steenrod 平方**(Steenrod square) Sq^i, $p>2$ 时是 **Steenrod 约化幂**(Steenrod reduced power) $\mathscr{P}^i$. 运算 Sq^i 是模 2 **Steenrod 代数**(Steenrod algebra)的代数生成元, 而运算 $\mathscr{P}^i$ 加上 Бокштейн 同态生成模 p Steenrod 代数.

参考文献

[1] Steenrod, N. E., Products of cocycles and extensions of mappings, *Ann. of Math.*, 48 (1947), 290 – 320.

[2] Steenrod, N. E. and Epstein, D. B. A., Cohomology, operations, Princeton Univ. Press, 1962.

[3] Mosher, R. E. and Tangora, M. K., Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968. Ю. Б. Рудяк 撰

【补注】

参考文献

[A1] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975, Chapt. 18.

[A2] Adams, J. F., Stable homotopy and generalized homology, Univ. Chicago Press, 1974, Part Ⅲ, Chapt. 12. 潘建中 译 沈信耀 校

Steenrod 问题 [Steenrod problem; Стинрода задача]

由 N. Steenrod ([1]) 提出的用奇异流形实现闭链(同调类)的问题. 设 M 为闭的定向(拓扑、分段线性、光滑等等)流形, 并设 $[M]\in H_n(M)$ 为其定向(这里 $H_n(M)$ 为 M 的 n 维同调群(homology group)). 则任一连续映射 $f: M\to X$ 均定义了一个元素 $f_*[M]\in H_n(X)$. Steenrod 问题要求描述 X 的所有可由此方式得到的同调类(称为可实现的(realizable)同调类), 亦即可表成 $f_*[M]$ 的类, 其中 M 为给定类中某个流形. 当 $i\leqslant 6$ 时, 群 $H_i(X)$ 中的所有元素均可由光滑流形实现. 当 $n\neq 3$ 时, 群 $H_n(X)$ 中的任一元素均可由 **Poincaré 复形**(Poincaré complex) P 的映射实现. 进一步, 所有闭链均可由**伪流形**(pseudo-manifold)实现. 还可以考虑不可定向流形. 此时, 每个模 2 同调类(即 $H_n(X, \mathbf{Z}/2)$ 中的元素)均可由不可定向的光滑奇异流形 $f: M^n\to X$ 实现.

对于光滑的 M, Steenrod 问题等价于描述同态 $\Omega_n(X)\to H_n(X)$ 的形式, 其中 $\Omega_n(X)$ 为空间 X 的定向下配边(bordism)群. R. Thom 在[2]中发现下配边群 Ω_* 与 **Thom 空间**(Thom space) $MSO(k)$ 的关系, 并通过将其归结为映射 $H^*(MSO(k))\to H^*(X)$ 的研究弄清了 Steenrod 问题. 由此导致 $H_7(X)$ 中不可实现类的发现, 其中 X 为 **Eilenberg-MacLane 空间**(Eilenberg-MacLane space) $K(\mathbf{Z}_3\oplus\mathbf{Z}_3, 1)$. 对于任何类 x, 均存在某个整数 n 使 nx 可由光滑流形实现, 此外 n 可取为奇数.

参考文献

[1] Eilenberg, S., On the problems of topology, *Ann. of Math.*, 50 (1949), 247 – 260.

[2] Thom, R., Quelques propriétés globales des variétés differentiables, *Comm. Math. Helv.*, 28 (1954), 17 – 86.

[3] Conner, P. and Floyd, E., Differentiable peridic maps, Springer, 1964.

[4] Stong, R., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[5] Rudyak, Yu. B., Realization of homology classes of *PL*-manifolds with singularities, *Math. Zametki*, 41 (1987), 5, 741 – 749.

Ю. Б. Рудяк 撰 李贵松 译 潘建中 校

Steenrod 约化幂 [Steenrod reduced power; Стинрода приведенная степень]

$(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}_p)$ 型稳定**上同调运算**(cohomology operation) $\mathscr{P}^i$, $i\geqslant 0$, 其中 p 是固定的奇素数. 它是 **Steenrod 平方**(Steenrod square)的模 p 类似, 且它是同态

$$\mathscr{P}^i: H^n(X, Y; \mathbf{Z}_p)\to H^{n+2i(p-1)}(X, Y; \mathbf{Z}_p),$$

对任何拓扑空间对 (X, Y) 以及任何整数 n 都有定义. Steenrod 约化幂除了具有通常的自然性 $f^*\mathscr{P}^i=\mathscr{P}^if^*$ 以及稳定性 $\delta\mathscr{P}^i=\mathscr{P}^i\delta$(其中 $\delta: H^q(Y;\mathbf{Z}_p)\to H^{q+1}(Y;\mathbf{Z}_p)$ 是余边界同态)外, 还具有以下性质:

1) $\mathscr{P}^0=\mathrm{id}$;

2) 若 $2i=\dim x$, 则 $\mathscr{P}^ix=x^p$;

3) 若 $2i>\dim x$, 则 $\mathscr{P}^ix=0$;

4) (Cartan 公式(Cartan formula))

$$\mathscr{P}^i(xy)=\sum_{j=0}^{i}(\mathscr{P}^jx)\cdot(\mathscr{P}^{i-j}y);$$

5) (Adem 关系(Adem relation))

若 $a<pb$, 则

$$\mathscr{P}^a\mathscr{P}^b=$$

$$=\sum_{t=0}^{[a/p]}(-1)^{a+t}\begin{bmatrix}(p-1)(b-t)-1\\ Q-pt\end{bmatrix}_p\mathscr{P}^{a+b-t}\mathscr{P}^t,$$

若 $a\leqslant pb$, 则

$$\mathscr{P}^a\beta\mathscr{P}^b=$$

$$= \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \left[\begin{array}{c} (p-1)(b-t) \\ a-pt \end{array} \right]_p \beta \mathscr{P}^{a+b-t} \mathscr{P}^t +$$

$$+ \sum_{t=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+t-1} \left[\begin{array}{c} (p-1)(b-t)-1 \\ a-pt-1 \end{array} \right]_p \mathscr{P}^{a+b-t} \beta \mathscr{P}^t,$$

其中 β 是对应于系数群的短正合列 $0 \to \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_{p^2} \to \mathbf{Z}_p \to 0$ 的 Бокштейн 同态，而 $(\ )_p$ 是二项式系数模 p 的同余数.

如果把运算 $\mathscr{P}^i$ 换成运算 Sq^{2i}，则上述性质就是 Steenrod 平方的类似性质. 正如 Steenrod 平方的情形，4) 中的乘法既可以是外积 (× 乘法) 也可以是内积 ($\cup$ 乘法). Steenrod 约化幂与纬垂 (suspension) 及超渡 (transgression) 均可交换.

性质 1) — 3) 唯一决定了 $\mathscr{P}^i$，和 Steenrod 平方一样，它也可以用极小零调自由 $\mathbf{Z}_p$ 链复形 W 来构造.

参考文献

[1] Steenrod, N. E. and Epstein, D. B. A., Cohomology operations, Princeton Univ. Press, 1962.

[2] Matematica, 5 (1961), no. 2, 3 − 11; 11 − 30; 30 − 49; 50 − 102.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников 撰

【补注】 要了解更多的文献，见 **Steenrod 代数** (Steenrod algebra).

潘建中 译 沈信耀 校

Steenrod 平方 [Steenrod square; Стинрода квадрат]

一个 $(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_2)$ 型的稳定**上同调运算** (cohomology operation) Sq^i $(i \geqslant 0)$ 将维数提高 i 维. 也就是说，对每个整数 n 以及每对拓扑空间 (X, Y)，都有一个同态

$$Sq^i: H^n(X, Y; \mathbf{Z}_2) \to H^{n+i}(X, Y; \mathbf{Z}_2),$$

满足 $\delta Sq^i = Sq^i \delta$，其中 δ 为上边缘同态 $\delta: H^q(Y; \mathbf{Z}_2) \to H^{q+1}(X, Y; \mathbf{Z}_2)$ (这就是稳定性)；另外，对任意连续映射 $f: (X, Y) \to (X', Y')$，都有 $f^* Sq^i = Sq^i f^*$ (也就是自然性). Steenrod 平方具有下述性质:

1) $Sq^0 = \mathrm{id}$;

2) $Sq^1 = \beta$，这里 β 是与系数群的短正合序列 $0 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2 \to 0$ 相应的 Bockstein 同态;

3) 若 $i = \dim x$，则 $\delta q^i x = x^2$;

4) 若 $i > \dim x$，则 $Sq^i x = 0$;

5) (Cartan 公式 (Cartan formula)) $Sq^i(xy) = \sum_{j=0}^{i} (Sq^j x) \cdot (Sq^{i-j} y)$;

6) (Adem 关系 (Adem relation)) 若 $a < 2b$，则

$$Sq^a Sq^b = \sum_{t=0}^{[a/2]} \binom{b-t-1}{a-2t}_2 Sq^{a+b-t} Sq^t,$$

其中 $(\ )_2$ 为模 2 的二项式系数.

Cartan 公式中的乘法可以看作是外乘法 (× 乘)，也可以看作内乘法 (上积). 这等价于说: 用下面公式

$$Sq x = x + Sq^1 x + \cdots + Sq^{n-1} x + x^2,$$
$$x \in H^n(X; \mathbf{Z}_2)$$

定义的映射 $Sq: H^*(X; \mathbf{Z}_2) \to H^*(X; \mathbf{Z}_2)$ 是一个环同态. 由稳定性条件可以推出，Steenrod 平方 Sq^i 与纬垂 (suspension) 以及超渡 (transgression) 交换.

1), 3) 与 4) 这三条公理唯一地确定了运算 Sq^i，因此可以当作定义此运算的公理. 基于链群 $C_*(X)$ 的单纯结构以及对角映射 $\Delta: X \to X \times X$ 的存在性，可以给出 Sq^i 的构造性定义. 设 W 为一极小的、零调的自由 $\mathbf{Z}_2$ 链复形，即一个满足下面条件的链复形:

$$W_i = \mathbf{Z}_2[e_i, Te_i],\ de_i = e_{i-1} + (-1)^i Te_{i-1},$$

其中 T 为 $\mathbf{Z}_2$ 的生成元. 用零调承载子 (acyclic carrier) 的方法，或者用直接构造的方法 (见 [4])，可以证明存在一个同变链映射:

$$\varphi: W \otimes C_*(X) \to C_*(X) \otimes C_*(X),$$

使得对任意单形 $\sigma = C_*(X)$ 都有

$$\varphi: (e_i \otimes \sigma) \in C_*(\sigma \otimes \sigma) \subset C_*(X) \otimes C_*(X) =$$
$$= C_*(X \times X).$$

在这里，符号 $C_*(\sigma \otimes \sigma)$ 表示链复形 $C_*(X) \otimes C_*(X)$ 中包含元素 $\sigma \otimes \sigma$ 的最小子复形. 设 $i \geqslant 0$. 任给两个上链 $u \in C^p(X)$, $v \in C^q(X)$，则用下面的公式

$$(u \underset{i}{\cup} v)\ (\sigma) = (u \otimes v)\ (\varphi(e_i \otimes \sigma))$$

可以定义一个上链 $u \cup_i v \in C^{p+q-i}(X)$，称为 u 与 v 的第 i 个上积 (cup-i-product)，其中 $\sigma \in C_{p+q-i}(X)$ 为任意单形. 上链 $u \cup_i v$ 的上边缘由下面公式给出:

$$\delta[u \underset{i}{\cup} v] = (-1)^i \delta u \underset{i}{\cup} v + (-1)^{i+p} u \underset{i}{\cup} \delta v +$$
$$+ (-1)^{i+1} u \underset{i-1}{\cup} v + (-1)^{pq+1} v \underset{i-1}{\cup} u.$$

由这个公式可以推出，用公式 $Sq^{p-i}\{u\} = \{u \cup_i u\}$ 确实定义了一个同态

$$Sq^{p-i}: H^p(X; \mathbf{Z}_2) \to H^{2p-i}(X; \mathbf{Z}_2).$$

它不依赖于映射 φ 的选取.

用同样的方式，可在其他有对角映射的单纯结构中定义运算 Sq^i，例如，在交换单纯群的上同调群中，在单纯 Lie 代数的上同调群中，等等. 不过，此

时 Steenrod 平方 Sq^i 的性质不一定全部都成立（例如，一般说来，$Sq^0 \neq \mathrm{id}$）. 目前（1991），对于一般的运算 Sq^i 还没有一个通用的理论（见 [5]，[6]）.

在系数群为 $\mathbf{Z}_2$ 与 $\mathbf{Z}_p$ 的上同调群上作用的许多上同调运算，都可用 Steenrod 平方或者类似的运算表达出来（见 **Steenrod 约化幂**（Steenrod reduced power））. 这一事实说明了 Steenrod 平方在代数拓扑学及其应用中的重要地位. 举例说来，下配边（bordism）群就是用 Steenrod 平方计算出来的.

Steenrod 平方运算是由 N. Steenrod 在 [4] 中引进的.

参考文献

[1] Steenrod, N. E. and Epstein, D. B. A., Cohomology operations, Princeton Univ. Press, 1962.
[2] Фукс, Д. Б., Фоменко, А. Т., Гутенмахер, В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., М., 1969.
[3] Mosher, R. E. and Tangora, M. K., Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper & Row, 1968.
[4] Steenrod, N. E., Products of cocyices and extensions of mappings, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 290 – 320.
[5] Epstein, D., Steenrod operations in homological algebra, *Invent. Math.*, **1** (1966), 2, 152 – 208.
[6] May, J., A general algebraic approach to Steenrod operations, in The Steenrod Algebra and Its Applications, Lecture notes in math., Vol. 168, Springer, 1970, 153 – 231.
[7] 《Математика》, **5** (1961), 2, 3 – 11, 11 – 30, 30 – 49, 50 – 102.

С. Н. Малыгин, М. М. Постников 撰

【补注】

参考文献

[A1] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology 1900 – 1960, Birkhäuser, 1989.
[A2] Switzer, R. M., Algebraic topology-homotopy and homology, Springer, 1975, Chapt. 18.
[A3] Adams, J. F., Stable homotopy and generalized homology, Univ. Chicago Press, 1974, Part III, Chapt. 12.
[A4] Spanier, E. H., Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966, Chapt. V, Sect. 9（中译本：E. H. 斯潘尼尔，代数拓扑学，上海科学技术出版社，1987）.

余建明 译

最速下降法 [steepest descent, method of; наискорейшего спуска метод]

下降法（descent, method of）的一个特殊情况，这时下降方向 g^k 是选取与 $\mathrm{grad} f(x^k)$ 相反的方向. 最速下降法的公式是

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k),\ k = 0, 1, \cdots,$$

其中参数 $\{\alpha_k\}$ 由在每一步函数 f 有最大减小这条件决定. 如果 f 是二次连续可微的且有常数 $M \geqslant m > 0$ 使得它的二阶导数矩阵 f'' 对所有 x, y 满足不等式

$$m\|y\|^2 \leqslant (f''(x)y, y) \leqslant M\|y\|^2,$$

则序列 $\{x^k\}$ 收敛于 f 的极小化问题的一个解 x^*，收敛速率相当于公比 $q < 1$ 的几何级数的收敛率（见 [2]，[4]）.

最速下降法已广泛地应用于解具有 Hermite 的或正定的矩阵 A 的线性代数方程组 $Ax = f$. 在实对称情形，解这个方程组的问题等价于在 n 维向量空间中求向量 x^* 使泛函

$$F(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (x, f) \qquad (*)$$

极小化. 应用于（*），最速下降法取形式

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k(Ax^k - f),\ k = 0, 1, \cdots,$$

其中 α_k 的值由泛函（*）的极小化，按公式

$$\alpha_k = \frac{(\xi^k, \xi^k)}{(A\xi^k, \xi^k)},\ \xi^k = Ax^k - f$$

决定. 如果 A 的谱位于实轴上的区间 $[m, M]$（$M \geqslant m > 0$）中，则序列 $\{x^k\}$ 收敛到解 x^*，按照公比 $q = (M - m)/(M + m)$ 的几何级数的收敛速率.

最速下降法可应用于解具有自伴正定有界算子 A 的算子方程 $Au = f$. 如果 A 不满足这些条件，该问题可对称化，化成问题

$$A^* Au = A^* f,$$

然后可用最速下降法（亦见**极小偏差法**（minimal discrepancy method））.

参考文献

[1] Канторович, Л. В., 《Докл. АН СССР》, **56** (1947), 3, 233 – 236.
[2] Канторович, Л. В., Акилов, Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977（中译本：Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, 泛函分析，上、下册，高等教育出版社，1984）.
[3] Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.-Л., 1963（中译本：Д. К. 法捷耶夫与 В. Н. 法捷耶娃，线代数的计算方法，上海科学技术出版社，1965）.
[4] Пшеничный, Б. Н., Данилин, Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975（英译本：Pshenichnyi, B. N. and Danilin, Yu. M., Numerial methods in extremal problems, Mir, 1978）.
[5] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numeri-

cal methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977). Ю. А. Кузнецов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Golub, G. H. and Loan, C. F. van, Matrix computations, John Hopkins Univ., 1989.

葛显良 译 吴绍平 校

Stefan-Boltzmann 定律 [Stefan-Boltzmann law; Стефана-Больцмана закон]

一个绝对黑体的总发射本领 u 正比于其绝对温度 T 的四次幂:

$$u=\sigma T^4,$$

其中 $\sigma=(5.67051\pm0.00019)\times10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}K^{-4}}$ (Stefan-Boltzmann 常数 (Stefan-Boltzmann constant)). 这个定律是由 J. Stefan (1879) 根据对实验数据的分析凭经验获得的, 而由 L. Boltzmann (1884) 用热力学术语来表达提出的. А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Born, M., Atomic physics, Blackie & Son, 1958.

徐锡申 译

Stefan 条件 [Stefan condition; Стефана условие]

描述在相变换下、表达为能量守恒律的、物质的两个不同相态之间边界运动法则的条件. 例如, 在凝固过程 (或融化过程) 中物质的固相和液相之间的边界, 在一维情形下, 可以用一函数 $\xi=\xi(t)$ 来描述, 此函数与温度分布 $u(x,t)$ 可以用下列 Stefan 条件来联系:

$$\lambda\rho_1\frac{d\xi}{dt}=k_1\frac{\partial u(\xi(t)-0,t)}{\partial x}-k_2\frac{\partial u(\xi(t)+0,t)}{\partial x},$$

$$t>0$$

(符号的含意, 见 **Stefan 问题** (Stefan problem)).

随着时间 Δt 的推移, 凝固 (或融化) 的质量是

$$\rho_1\Delta\xi=\rho_1[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)].$$

所需热量 $\lambda\rho_1\Delta\xi$ 等于通过边界 $\xi(t)$ 和边界 $\xi(t+\Delta t)$ 的热量之间的差:

$$\lambda\rho_1\Delta\xi=\left[k_1\frac{\partial u(\xi(t)-0,t)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.-k_2\frac{\partial u(\xi(t+\Delta t)+0,t+\Delta t)}{\partial x}\right]\Delta t.$$

因此, 当 $\Delta t\to0$ 时, 就得到 Stefan 条件. 又, 在两相边界上的温度 $\xi=\xi(t)$, 假定是连续的, 且它的值取作等于融化的已知温度.

在未知边界上的类似条件出现在关于某些其他过程的研究中, 且是由守恒律导出的, 这样的条件亦称为 Stefan 条件 (见**偏微分方程, 自由边界问题** (differential equation, partial, free boundaries)).

参考文献

[1] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972 (中译本: А. Н. 吉洪诺夫, А. А. 萨马尔斯基, 数学物理方程, 上、下册, 高等教育出版社, 1956).

Ф. П. Васильев 撰

【补注】 在液体－固体交界面处的热平衡条件的导出, 长时间来归功于 J. Stefan ([A1], [A2]). 但是, 它第一次出现在 B. D. Clapeyron 和 G. Lamé 的更早得多的工作中 ([A3]). Stefan 条件和相关问题的经典解释可在 [A4] 中找到.

在文献中考虑过 Stefan 条件的许多推广. 例如, 系数可以依赖于空间和时间, 或 u 的高阶导数可以出现在右端, 甚至是非线性方式的 (例如, 见 [A5], [A6]).

参考文献

[A1] Stefan, J., Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin Math. Kl.*, **98** (1889), 473－484.

[A2] Stefan, J., Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung in Polarmeere, *Ann. Physik Chemie*, **42** (1891), 269－286.

[A3] Lamé, G. and Clapeyron, B. D., Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide, *Ann. Chimie Physique*, **47** (1831), 250－256.

[A4] Rubinstein, L. I., The Stefan problem, Amer. Math. Soc., 1971 (译自俄文).

[A5] Fasano, A. and Primicerio, M., Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, **72** (1979), 247－273.

[A6] Fasano, A. and Primicerio, M., Classical solutions of general two-phase parabolic free boundary problems in one dimension, in A. Fasano and M. Primicerio (eds.), Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. 2, Pitman, 1983, 644－657.

孙和生 译 陆柱家 校

Stefan 问题 [Stefan problem; Стефана задача]

当研究与物质的相变换有关的物理过程时所提出的问题. 最简单的两相 Stefan 问题用热物理学的术语可叙述如下 ([1], [2]): 求温度分布 $u(x,t)$ 和分界面边界的运动规律 $\xi=\xi(t)$ (例如, 在结冰水中的冰－水边界), 满足下列等式: 热传导方程

$$c_1\rho_1\frac{\partial u}{\partial t}=k_1\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\ \text{当}\ 0<x<\xi(t),\ t>0,$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}，当 \xi(t) < x < +\infty, t > 0,$$

边界条件

$$u(0,t) = u_1 = 常数 < T, t > 0,$$

初始条件

$$u(x,0) = u_2 = 常数 > T, x \geqslant 0,$$

和冻结边界上的条件

$$u(\xi(t)_{-0},t) = u(\xi(t)_{+0},t), t > 0,$$

$$\lambda\rho_1 \frac{d\xi(t)}{dt} = k_1 \frac{\partial u(\xi(t)_{-0},t)}{\partial x} +$$

$$-k_2 \frac{\partial u(\xi(t)_{+0},t)}{\partial x}, t > 0, \xi(0) = 0,$$

其中 k_1 和 k_2 是热传导系数，c_1 和 c_2 是比热，ρ_1 和 ρ_2 是固相和对应的液相的密度，λ 是融化单位质量的潜热，T 是冻结温度．这个问题有自相似解 $u = u(xt^{-1/2}), \xi(t) = \alpha t^{1/2}, \alpha =$ 常数 > 0.

在三维空间情形下，Stefan 问题的非常一般的陈述可归结为二阶拟线性抛物型方程的边值问题，这方程的系数是逐段连续的，它们在原先未知但要寻找的曲面上有第一类间断，在此曲面上所求函数的值是有定义的且此曲面还满足微分 **Stefan 条件**（Stefan condition）．已研究了 Stefan 问题的古典解和广义解的存在性和唯一性（[3] − [6]）；Stefan 问题的近似解法，见 [2]，[4]，[6]．

J. Stefan 是首先研究这类型问题者之一（[1]）．

参考文献

[1] Stefan, J., Ueber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung, *Sitzungsber. Wiener Akad. Math. Naturwiss. Abt* 2^A, **98** (1889), 473 − 484.

[2] Тихонов, А. Н., Самарский, А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972 (中译本：A. H. 吉洪诺夫，A. A. 萨马尔斯基，数学物理方程，上、下册，高等教育出版社，1956).

[3] Олейник, О. А., 《Докл. АН СССР》, **135** (1960), 5, 1054 − 1057.

[4] Будак, Б. М., Успенский, А. Б., 《Ж. вычисл. матем. и матем. физ.》, **9** (1969), 6, 1299 − 1315.

[5] Будак, Б. М., Москал, М. З., 《Докл. АН СССР》, **191** (1970), 4, 751 − 754.

[6] Будак, Б. М., Васильев, Ф. П., Успенский, А. Б., Численные методы в газовой динамике, М., 1965, 139 − 183.

Ф. П. Васильев 撰

【补注】 问题是由 Stefan 在 [1] 和 [A1] 中提出的，但是，在很多年以前，G. Lamé 和 B. D. Clapeyron 就在 [A2] 中首次研究了这个问题．

一个空间维数的经典 Stefan 问题的数学理论，主要由 L. Rubinstein（见 [A3]），A. Friedman（见 [A4]），姜礼尚（见 [B1]，[B2]），J. R. Cannon 和 C. D. Hill（见 [A5]）在 1947 年到 1967 年间所发展的．

有关 Stefan 问题的广义解的其他基本的文献是 [A6] − [A8]．化为变分不等式问题亦得到了极大的注意 [A9]，[A10]．

在 70 年代和 80 年代研究了许多推广，不仅涉及到自由边界上的条件或微分方程（见 **Stefan 条件**（Stefan condition）），而且还考虑了过冷或过热的现象，可能产生解的奇性（例如，见 [A11] − [A13]）或出现这样的区域（称作粥样区域），其中温度等于融化温度而热能（或，更确切地，热焓）满足一个双曲型方程（见 [A14] − [A16]）．

重要的参考文献还有综述性文章 [A17]（一般理论），[A18] − [A19]（数值方法）．

Stefan 问题和许多其他的自由边界问题有关，如气流通过多孔介质的问题（见 [A20]）．在 [A21] 中对大量关于 Stefan 问题的文献作了有用的引导．

亦见**偏微分方程，自由边界问题**（differential equation, partial, free boundaries）；**偏微分方程，具有间断系数的问题**（differential equation, partial, discontinuous coefficients）；**奇异系数的偏微分方程**（differential equation, partial, with singular coefficients）．

参考文献

[A1] Stefan, J., Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere, *Ann. Physik Chemie*, **42** (1891), 269 − 286.

[A2] Lamé, G. and Clapeyron, B. P., Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide, *Ann. Chimie Physique*, **47** (1831), 250 − 256.

[A3] Rubinstein, L. I., The Stefan problem, Amer. Math. Soc., 1971 (译自俄文).

[A4] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964 (中译本：A. 弗里德曼著，抛物型偏微分方程，科学出版社，1984).

[A5] Cannon, J. R., The one-dimensional heat equation, Addison-Wesley, 1984.

[A6] Kamenomostskaya, S. L., On the Stefan problem, *Mat. Sb.*, **53** (1961), 489 − 514 (俄文).

[A7] Friedman, A., The Stefan problem in several space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 51 − 87.

[A8] Friedman, A. One dimensional Stefan problems with non-monotone free boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **133** (1968), 89 − 114.

[A9] Frémond, M., Variational formulation of the Stefan problem, Coupled Stefan problem-frost propagation in porous media, in Computational Methods in Nonlinear Mechanics, Univ. Texas at Austin, 1974, 341 −

349.

[A10] Duvaut, G., Résolution d'un problème de Stefan (Fusion d'un bloc de glace a zero degrées), *C. R. Acad. Sci. Paris*, **276** (1973), 1461 – 1463

[A11] Fasano, A. and Primicerio, M., New results on some classical parabolic free-bounded problems, *Quart. Appl. Math.*, **38** (1981), 439 – 460.

[A12] Fasano, A. and Primicerio, M., A critical case for the solvability of Stefan-like problems, *Math. Methods Appl. Sci.*, 5 (1983), 84 – 96.

[A13] Fasano, A., Howison, S. D., Primicerio, M. and Ockendon, J. R., On the singularities of the one-dimensional Stefan problems with supercooling, *Quart. Appl. Math.* (to appear).

[A14] Meirmanov, A. M., An example of nonexistence of a classical solution of the Stefan problem, *Soviet Math. Dokl.*, **23** (1981), 564 – 566 (*Dokl. Akad. Nauk USSR*, **258** (1981), 3, 547 – 550).

[A15] Primicerio, M., Mushy regions in phase-change problems, in K. H. Hoffmann and R. Gorenflo (eds.), Applied Nonlinear Functional Analysis, Variational Methods and Ill-Posed Problems, Verlag Peter Lang, 1983, 251 – 269.

[A16] Fasano, A. and Primicerio, M., A parabolic-hyperbolic free boundary problem, *SIAM J. Math. Anal.*, **17** (1986), 67 – 73.

[A17] Niezgodka, M., Stefan like problems, in A. Fasano and M. Primicerio (eds.), Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. 1 – 2, Pitman, 1983, 321 – 348.

[A18] Meyer, G. H., Numerical methods for free boundary problems, in A. Fasano and M. Primicerio (eds.), Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. 1 – 2, Pitman, 1983, 590 – 600.

[A19] Nochetto, R. H., Numerical solutions for free boundary problems, in K. H. Hoffman and J. Sprekels (eds.), Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol. 5 – 6, Longman, (to appear).

[A20] Aronson, D. G., The porous medium equation, in A. Fasano and M. Primicerio (eds.), Nonlinear Diffusion Problems, Lectur notes in math., Vol. 1224, Springer, 1986, 1 – 46.

[A21] Tarzia, D. A., A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation, Prog. Naz. 'Equazioni di evoluzione e applicazioni fisico-matematiche', Firenze, 1988.

【译注】

参考文献

[B1] 姜礼尚，二相 Stefan 问题 I，数学学报，**13** (1963)，4，631 – 646.

[B2] 姜礼尚，二相 Stefan 问题 II，数学学报，**14** (1964)，1，33 – 49.

孙和生 译 陆柱家 校

Stefan 反问题 [**Stefan problem, inverse; Стефана обратная задача**]

由某物质两相间的边界的运动来确定边界条件中的变化或（例如，对所考虑物质的温度的）微分方程系数中的变化的问题（见 **Stefan 问题**（Stefan problem））．例如，从条件：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<\xi(t),\ 0<t\leqslant T,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant\xi_0,$$

$$u(\xi(t)-0,t)=\mu(t),$$

$$\gamma(t)\frac{d\xi(t)}{dt}=-\frac{\partial u(\xi(t)-0,t)}{\partial x};$$

$$\xi(0)=\xi_0>0$$

来求流动 $q(t)=\partial u(0,t)/\partial x$，其中 $\varphi(x)$，$\mu(t)$，$\gamma(t)\geqslant\gamma_0>0$，和 $\xi(t)$ 均为已给函数．求这个问题的近似解常用变分法（见[1]）．

参考文献

[1] Будак Б. М., Васильева В. Н., Решения задач Стефана, М., 1971, 65 – 86.

Ф. П. Васильев 撰

【补注】 显然，Stefan 反问题与对应的抛物型算子的非特征 **Cauchy 问题**（Cauchy problem）有关．在[A1]中导出了一个解 Stefan 反问题的公式．

参考文献

[A1] Hill, C. D., Parabolic equations in one space variable and the non-characteristic Cauchy problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **20** (1967), 619 – 635.

[A2] Rubinstein, L. I., The Stefan problem, Amer. Math. Soc., 1971.

孙和生 译 陆柱家 校

Steffensen 插值公式 [**Steffensen interpolation formula; Стеффенсена интерполяционная формула**]

通过结点 x_0，x_0+h，x_0-h，…，x_0+nh，x_0-nh，在点 $x=x_0+th$ 处按照 **Stirling 插值公式**（Stirling interpolation formula），利用关系式

$$f_0^{2k-1}=\frac{1}{2}(f_{1/2}^{2k-1}+f_{-1/2}^{2k-1}),$$

$$f_0^{2k}=f_{1/2}^{2k-1}-f_{-1/2}^{2k-1},$$

而得到的一种插值多项式形式

$$L_{2n}(x_0+th)=f_0+tf_0^1+\frac{t^2}{2!}f_0^2+\cdots+$$

$$+\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}f_0^{2n-1}+$$

$$+\frac{t^2(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}f_0^{2n}.$$

合并同类项后可将 Steffensen 插值公式改写为

$$L_{2n}(x)=L_{2n}(x_0+th)=$$

$$=f_0+\frac{t(t+1)}{2!}f_{1/2}^1-\frac{t(t-1)}{2!}f_{-1/2}^1+\cdots+$$

$$+\cdots+\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}f_{1/2}^{2n-1}-$$

$$-\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}f_{-1/2}^{2n-1}.$$

参考文献

[1] Korn, G. A. and Korn, T. M., Mathematical handbook for scientists and engineers, McGraw-Hill, 1968

M. K. Самарин 撰

【补注】 中心差分 (central differences) $f_{i+1/2}^{2m+1}$, f_i^{2m} $(m=0,1,\cdots,i=\cdots,-1,0,1,\cdots)$ 由(表值(tabulated values)) $f_i^0=f(x_0+ih)$ 通过公式

$$f_{i+1/2}^{2m+1}=f_{i+1}^{2m}-f_i^{2m};\ f_i^{2m}=f_{i+1/2}^{2m-1}-f_{i-1/2}^{2m-1}$$

递推定义.

Steffensen 插值公式也称作 Everett 第二公式 (Everett second formula).

参考文献

[A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1956, 103 – 105.

[A2] Steffensen, J. F., Interpolation, Chelsea, reprint, 1950.

[A3] Froberg, C. E., Introduction to numerical analysis, Addison-Wesley, 1965, p. 157.

王仁宏 檀结庆 译

Stein 流形 [Stein manifold; Штейна многообразие], 全纯完全流形 (holomorphically-complete manifold)

一个仿紧复解析流形 (analytic manifold) M 具有下列性质:

1) 对任何紧集 $K\subset M$, 集合

$$\{x\in X:|f(x)|\leqslant\sup_{z\in K}|f(z)|\ (f\in\mathcal{O}(M))\}$$

是紧的 (全纯凸性 (holomorphic convexity)), 其中 $\mathcal{O}(M)$ 是 M 上全纯函数的代数;

2) 对任何两个不同点 $x,y\in M$, 存在一函数 $f\in\mathcal{O}(M)$ 使得 $f(x)\neq f(y)$ (全纯可分性 (holomorphic separability));

3) 在任一点的邻域中存在一全纯坐标卡, 它的坐标函数属于 $\mathcal{O}(M)$.

全纯凸性的要求可以由下面的一个代替: 对任何没有极限点的序列 $\{x_n: n=1,2,\cdots\}\subset M$ 存在一函数 $f\in\mathcal{O}(M)$ 使得 $\sup_n|f(x_n)|=\infty$.

Stein 流形类是由 K. Stein ([1]) 作为 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯域 (domain of holomorphy) 概念的自然拓广引进的. $\mathbf{C}^n$ 中的任何闭解析子流形是一 Stein 流形; 反之, 任何 n 维 Stein 流形在 $\mathbf{C}^{2n}$ 中都有一真全纯嵌入 (见真态射 (proper morphism)). 任何非紧 Riemann 曲面是一 Stein 流形. Stein 流形的直接拓广是一 **Stein 空间** (Stein space).

亦见 **Stein 空间** (Stein space) 的参考文献.

参考文献

[1] Stein, K., Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem, *Math. Ann.*, 123 (1951), 201 – 222.

A. Л. Онищик 撰 钟同德 译

Stein 空间 [Stein space; Штейна пространство], 全纯完全空间 (holomorphically-complete space)

一个仿紧复解析空间 (analytic space) $(X,\mathcal{O})$ 具有下列性质:

1) X 中的任何紧的解析子集是有限的 (见**解析集** (analytic set) 6));

2) 任何紧集 $K\subset X$ 在 X 中都有一开邻域 W 使得

$$\{x\in W:|f(x)|\leqslant\sup_{z\in K}|f(z)|,\ 对所有\ f\in\mathcal{O}(X)\}$$

是紧的 (弱全纯凸性 (weak holomorphic convexity)).

一复流形 M 是一 Stein 空间, 当且仅当 M 是一 **Stein 流形** (Stein manifold). 一**复空间** (complex space) 是一 Stein 空间, 当且仅当它的约化有这个性质. Stein 空间中的任一全纯凸开子空间是一 Stein 空间. 一约化复空间是一 Stein 空间, 当且仅当它的正规化是一 Stein 空间. Stein 空间中例如在 $\mathbf{C}^n$ 中的任一闭解析子空间是一 Stein 空间. 任何有限维的 Stein 空间都有一到某一 $\mathbf{C}^n$ 内的真单全纯映射 (见**真态射** (proper morphism)), 它在每一非奇点是正则的. Stein 空间的任一非分歧覆盖是一 Stein 空间. 两个 Stein 空间的直积是一 Stein 空间. 在许多情形下一个底和纤维都是 Stein 空间的全纯纤维空间是一 Stein 空间 (例如, 如果结构群是一具有有限个联通分支的复 Lie 群). 然而, 存在具有纤维 $\mathbf{C}^2$ 和底 $\mathbf{C}$ 的全纯纤维空间, 它们不是 Stein 流形 ([2]).

令 $\mathcal{S}$ 为 Stein 空间 $(X,\mathcal{O})$ 上的**凝聚解析层** (coherent analytic sheaf). 那么下列 H. Cartan 的定理 A 和 B 成立 (见 **Cartan 定理** (Cartan theorem)):

A) 空间 $H^0(X,\mathcal{S})$ 生成层 $\mathcal{S}$ 在任一点 $x\in X$

的茎 $\mathcal{O}_X$；

B）对所有 $q>0$，$H^q(X, \mathcal{F})=0$.

反之，如果对任何理想的凝聚层 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{O}$，$H^1(X, \mathcal{J})=0$，那么 X 是一 Stein 空间．一区域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 是一 Stein 流形，当且仅当 $H^1(D, \mathcal{O})=\cdots=H^{n-1}(D, \mathcal{O})=0$.

从 Cartan 定理可知，在 Stein 空间第一 Cousin 问题总是可解的，又如果 $H^2(X, \mathbf{Z})=0$，那么第二 Cousin 问题也是可解的（见 **Cousin 问题**（Cousin problems））．在任何 Stein 流形 X 上，Poincaré 问题（Poincaré problem），即任何亚纯函数都可表成形式 f/g，其中 $f, g\in\mathcal{O}(X)$ $(g\neq 0)$ 是可解的．再者，如果 $H^2(X, \mathbf{Z})=0$，那么 f 和 g 可选择为在任一点 $x\in X$ 芽 f_x, g_X 是互素的．一个不可约的约化 Stein 空间 X 的除子类的群同构于 $H^2(X, \mathbf{Z})$．对任何 n 维 Stein 空间 X，当 $q>n$ 时，同调群 $H_q(X, \mathbf{Z})=0$，并且群 $H_n(X, \mathbf{Z})$ 是无挠的．如果 X 是一流形，那么 X 同调等价于一 n 维胞腔复形．另一方面，对任何可数 Abel 群 G 和任何 $q\geqslant 1$ 存在一**全纯域**（domain of holomorphy）$D\subset\mathbf{C}^{2q+1}$ 使得 $H_q(D, \mathbf{Z})\cong G$.

Stein 空间理论的一个重要趋势是关于研究它们上面的多重下调和函数（见 **Levi 问题**（Levi problem）；**伪凸和伪凹**（pseudo-convex and pseudo-concave））．在此基本结果是一 Stein 空间刻画为一空间在其上存在一强 1 伪凸函数穷竭它．

在 Stein 空间 X 上全纯函数的代数 $\mathcal{O}(X)$（所谓 Stein 代数（Stein algebras））有下列性质．对于一极大理想 $I\subset\mathcal{O}(X)$ 下列条件是等价的：关于紧收敛拓扑 I 在 $\mathcal{O}(X)$ 中是闭的；对某点 $x\in X$，$I=\{f\in\mathcal{O}(X): f(x)=0\}$；并且 I 是有限生成的．如果 X 是有限维的，那么每一特征 $\chi: \mathcal{O}(X)\to\mathbf{C}$ 对某些 $x\in X$ 都是形式 $\chi(f)=f(x)$．如果 $(X, \mathcal{O}_X)$，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ 是两个有限维 Stein 空间具有同构代数 $\mathcal{O}_X(X)\cong\mathcal{O}_Y(Y)$，那么 $(X, \mathcal{O}_X)\cong(Y, \mathcal{O}_Y)$；而且，任何同构 $\mathcal{O}_X(X)\to\mathcal{O}_Y(Y)$ 都是连续的，并且是由复空间的某一同构 $Y\to X$ 所诱导．

所谓冈潔原理（Oka principle）在 Stein 空间理论中起了重要作用，该原理指出：一个问题在 Stein 空间上的解析函数类中可解，当且仅当它在连续函数类中是可解的．第二 Cousin 问题满足这个原理．下列陈述更为一般：具有一给定的约化 Stein 空间 X 为底，一给定的复 Lie 群 G 为结构群的**主解析纤维化**（principal analytic fibration）的分类和具有相同底空间及相同结构群的拓扑纤维化的分类一致．在解析和连续函数 $X\to G$ 群中的连通分支的群也是一致的．

参考文献

[1] Grauert, H. and Remmert, R., Theory of Stein spaces, Springer, 1977.

[2] Demailly, J.-P., Un example de fibré holomorphe non de Stein à fibre $\mathbf{C}^2$ ayant pour base le disque ou le plan. *Invent. Math.*, **48** (1978), 3, 293–302.

[3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. т. 11, М., 1974, 125–151, т. 15, М., 1977, 93–171.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 令 $X=(X, \mathcal{O}_X)$ 为一**复空间**（complex space）．令 $n(\mathcal{O}_X)=\bigcup n(\mathcal{O}_x)$ 为 $\mathcal{O}_X$ 的所谓诣零根（nil radical），即茎 $\mathcal{O}_x$ 的诣零根的并．它是一凝聚层（理想的）．空间 $X_{red}=(X, \mathcal{O}_X/n(\mathcal{O}_X))$ 称为 $(X, \mathcal{O}_X)$ 的约化，因为它是关联映射 $X_{red}\to X$．一复空间 X 称为在点 $x\in X$ 是约化的（reduced at a point），如果 $n(\mathcal{O}_X)=0$．空间 X 称为约化的（reduced），如果它在它所有的点都是约化的（即如果 $X=X_{red}$）．

集合 $N\subset\mathcal{O}_X$ 中不除零的元素是乘法的（multiplicative）（即 N 在 $\mathcal{O}_X$ 中是开的；$1\in N$；又 $a, b\in N$ 蕴含 $ab\in N$）．因此，$\mathcal{M}=\mathcal{O}_N$ $(\mathcal{M}_x=(\mathcal{O}_x)_N, x\in X)$ 是一有定义的 $\mathcal{O}_X$ 模．$\mathcal{M}$ 称为 X 上的亚纯函数的芽层（sheaf of germs of meromorphic functions）．复空间 X 称为在 $x\in X$ 是正规的（normal），如果 X 在 x 是约化的，又 $\mathcal{O}_x$ 在 $\mathcal{M}_x$ 中是整闭的．一复空间称为正规的（normal），如果它在每一点都是正规的．正规化定理（normalization theorem）指出：对每一约化复空间 X 都有一正规复空间 $\widetilde{X}$ 和一有限满全纯映射 ζ: $\widetilde{X}\to X$．数对 $(\widetilde{X}, \zeta)$ 称为 X 的正规化（normalization），它直到解析同构是唯一决定的．

最后，$(X, \mathcal{O}_X)$ 称为在 x 是不可约的（irreducible），如果 $\mathcal{O}_x$ 是整域，又它是不可约的．如果它在所有的点都是不可约的，见[1].

参考文献

[A1] Hörmander, L., An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland, 1973.

[A2] Kaup, L. and Kaup, B., Holomorphic functions of several variables, de Gruyter, 1983（译自德文）.

[A3] Gunning, R. C. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965.

钟同德 译

Steiner 曲线 [Steiner curve; Штейнера кривая]

半径为 r 的圆周上一点当该圆周内切于一个半径为 $R=3r$ 的圆周滚动时所描出的平面 4 次代数曲线：模数为 $m=3$ 的**内摆线**（hypocycloid）．在 Descates 直角坐标下，Steiner 曲线的方程是

$$(x^2+y^2)^2+8rx(3y^2-x^2)+$$
$$+18r^2(x^2+y^2)-27r^4=0.$$

它有三个尖点（见图）．

从 A 点量起的弧长是 $l=\frac{16}{3}r\sin^2\frac{t}{4}$. 整条曲线的长度是 $16r$. 曲率半径为 $r_k=8\sin\frac{t}{2}$. 曲线所围的面积是 $S=2\pi r^2$.

该曲线由 Jacob Steiner(1798－1863)所研究.

参考文献

[1] Steiner, J., Werke, 1－2, Springer, 1880－1882.

Д. Д. Соколов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Berger, M., Geometry, Springer, 1987, §9.14.34(译自法文).

[A2] Gomes Teixeira, F., Traité des courbes, 1－3, Chelsea, reprint, 1971.

陈维桓 译

Steiner 点 [Steiner point; Штейнера точка]

当凸体表面的密度分布等于其 Gauss 曲率时的质量中心. 对非光滑体, Steiner 点由混合体积定义(见**混合体积理论**(mixed-volume theory)). Steiner 点关于体的加法可加. 分布于平面变曲率周线上的质量的中心, 由 J. Steiner 于 1840 年首次研究.

参考文献

[1] Gruenbaum, B., Measures of symmetry for convex sets, in V. Klee (ed.): Convexity, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 7, Amer. Math. Soc., 1963, 238－270.

[2] Schneider, R., Krümmungsschwerpunkte konvexer Körper (Ⅰ), *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **37** (1972), no. 1－4, 112－132.

В. А. Залгаллер 撰

【补注】 Steiner 点的公理化特征在[A1], [A2]中有论及.

参考文献

[A1] Schneider, R., On Steiner points of convex bodies, *Israel J. Math.*, **9** (1971), 241－249.

[A2] Positsel'skiĭ, E. D., Characterization of Steiner points, *Math. Notes*, **14** (1973), 698－700 (*Mat. Zametki*, **14** (1973), 243－247).

[A3] Grünbaum, B., Convex polytopes, Wiley, 1967.

陆璇年 译

Steiner 系 [Steiner system; Штейнера система]

一个元素偶 (V, B), 其中 V 是 v 个元素的有限集且 B 是 V 的若干 k 子集(称为区组)的集合, 使得 V 的每一个 t 子集恰好包含在 B 的一个区组里 $(t<k)$. 数 v 称为 Steiner 系 $S(t, k, v)$ 的阶(order). Steiner 系是**区组设计**(block design)和**策略构形**(tactical configuration)的特殊情况. 当 $t=2$ 时的 Steiner 系是一个平衡不完全区组设计(BIB 设计), 而当 $v=s^2+s+1$, $k=s+1$ 时, 它是一个有限射影平面. 一个 Steiner 系 $S(t, k, v)$ 存在的必要条件是: 对所有满足 $0\leqslant s<t$ 的 s,

$$\frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}}$$

是一个整数. 当 $(k, t)=(3, 2), (4, 2), (5, 2), (4, 3)$ 时, 这个条件的充分性已证明(见[3], [4]).

W. Woolhouse 在 1844 年提出了 Steiner 系的存在性问题, 并且在 1847 年 P. Kirkman 解决了 $k=3$ (Steiner 三元系)的情况. 在 1853 年 J. Steiner 研究了 $S(t, t+1, v)$ 的情况.

通常对 Steiner 系所考虑的问题是: (1) 确定互不同构的 v 阶 Steiner 系的最大个数; (2) 具有给定自同构群的 Steiner 系的存在性; (3) 部分 Steiner 系(不含 V 的某些 t 子集)嵌入一个有限 Steiner 系; (4) 可分解 Steiner 系(B 可表示为 V 的划分之并)的存在性; (5) 以不相交的 $S(t, k, v)$ (Steiner 系)装入 V 的 k 子集的完全集的最大填装(最小覆盖).

关于 Steiner 系的大部分结果都是在 k 和 t 的值较小的情况下得到的(见[2]－[4]).

参考文献

[1] Steiner, J., Combinatorische Aufgaben, J. Reine Angew. Math., **45** (1853), 181－182.

[2] Hall, M., Combinatorial theory, Wiley, 1986.

[3] Lindner, C. C. and Rosa, A., Steiner quadruple System, A survey, Discrete Math., **22** (1978), 147－181.

[4] Hanani, H., Balanced incomplete block designs and related designs, Discrete Math., **11** (1975), 255－369.

Б. Т. Румов 撰

【补注】 因为 Steiner 在[1]中所研究的系统, 当 $t>2$ 时不是 Steiner 系 $S(t, t+1, v)$, 因此 Steiner 系这个名字有些不适当.

关于 Steiner 系和有关类型的关联结构的文献快速增长, 论文已有数千篇. 下面只引用很少几篇优秀独

创性原文．详细的讨论和完整的参考文献，建议读者参见教科书[2]，[A1]，[A2]，论文集[A3]－[A5]以及综述[A6]－[A8]．关于小 Steiner 系的存在，参见表[A9]－[A10]．

通常研究的主要问题如下：

存在性．只有上面列出的论文中的那些偶 (k, t)，其存在性问题才完全解决了．对 $t=2$，R. M. Wilson 得到了一个很强的渐近存在性结果[A11]－[A13]：对任意固定的 k，除有限多个 v 的值外，必要条件 $v-1\equiv 0 \bmod k-1$ 和 $v(v-1)\equiv 0 \bmod k\cdot(k-1)$ 也是充分的．遗憾的是，Wilson 的结果中得到的 v 的界非常大．对某些小的 k 值取得了一些进展，例如当 $k=6$ 时，只剩下 v 的 89 个值尚未确定 $S(2, 6, v)$ 的存在性，其中最大的一个是 $v=4221$．对 $k\in\{7, 8, 9\}$ 有类似的结果．对 $t\geqslant 3$，已知结果相当少．对 $t\geqslant 6$ 是否存在非平凡 Steiner 系这一著名问题仍未解决．对 $t=5$，只有 $(k, v)=(6, 12), (6, 24), (6, 48), (6, 72), (6, 84), (7, 28)$ 和 $(8, 24)$ 这 7 对值，其存在性已知．

计数．存在性一旦解决，人们就对 Steiner 系 $S(t, k, v)$ 的同构类个数 $N(t, k, v)$ 感兴趣．函数 $N(2, k, v)$ 随着 v 的增大（k 固定）而迅速增长；例如，$N(2, 3, 13)=2$，$N(2, 3, 15)=80$，而 $N(2, 3, 19)\geqslant 2395687$．Wilson（[A11]－[A13]）已证明，对充分大的所有允许的 v，$N(2, k, v)>c^{v^2}$（其中 $c=c(k)$ 是依赖于 k 的常量）．对 $k=3$ 有

$$\lim_{v\to\infty}\inf \frac{\ln N(2, 3, v)}{v^2\ln v}\geqslant\frac{1}{6}.$$

对 $t\geqslant 3$ 只知道 $N(3, 4, v)$ 的类似结果．对某些小的三参数组，完全计数是可能的．如不超过 8 阶的射影平面和仿射平面是唯一的，Witt 设计（Witt designs）$S(5, 8, 24)$ 和 $S(5, 6, 12)$ 也同样是唯一的（[A14]）．

自同构群．主要致力于构造具有“良好的”（通常指大的，至少点传递的）自同构群的 Steiner 系．看来大部分 Steiner 系是刚性的（rigid）（即没有非平凡的自同构），但这只对 $(t, k)=(2, 3)$ 证明确实如此（这时已知在所有 Steiner 三元系 $S(2, 3, v)$ 中，刚性 Steiner 三元系 $S(2, 3, v)$ 所占的比例随 $v\to\infty$ 而趋于 1）．特别有兴趣的循环 Steiner 系（cyclic Steiner systems）（即具有自同构的点传递循环群的 Steiner 系）的存在性问题也仅对 $(t, k)=(2, 3)$ 已完全解决；目前对 $(t, k)=(3, 4)$ 的情形进行着广泛的研究．

特征与分类．由上面提到的 $N(t, k, v)$ 的一些结果看，只有对一些小的参数值，所有 $S(t, k, v)$ 的完全分类才是可行的．因此人们的兴趣在于刻画一系列“经典”例子（特别地，在 $GF(q)$ 上 n 维仿射空间和射影空间中由点和线构成的 Steiner 系 $AG_1(n, q)$ 和 $PG_1(n, q)$，以及 $PG(2, q^2)$ 的酉配极的绝对点和绝对线构成的 Hermite 单位）和具有意义的自同构群的 Steiner 系的分类．例如，具有在点上的 2 齐次群的所有 Steiner 系 $S(2, k, v)$ 已被分类；除上面提到的三个经典系列外，只有两个另外的系列和几个零散的例子．目前人们在研究具有旗－传递或点－本原群的 $S(2, k, v)$ 的分类．

可分解的 Steiner 系．设 B 是平行类（即点集 V 的划分）的并．一个可分解的 $S(t, k, v)$，通常用 $RS(t, k, v)$ 表示，也称为 Kirkman 系（因为基本的 $RS(2, 3, 15)$ 等价于 1850 年 Kirkman 提出的著名女生问题（schoolgirl problem）的解）．显然，存在 $RS(t, k, v)$ 还有一个必要条件 $v\equiv 0(\bmod k)$．当 $t=2$ 时，已证必要条件 $v\equiv k(\bmod k(k-1))$ 对 $k=3$ 和 4 也是充分的；对任意固定的 k，它也是渐近充分的．$k=5$ 和 $k=8$ 的情况几乎解决了（在每一种情况，对大约 100 个 v 值存在性尚未确定）．对 $t\geqslant 3$ 的情况知道的很少，只是 $(t, k)=(3, 4)$ 的情况已几乎解决了．

子系．另一个有趣的问题是，具有子系 $S(t, k, u)$ 的三元系 $S(t, k, v)$ 的存在性．到目前为止，这个问题还只研究了 $t=2$ 的情形．其中人们得到了另外的必要条件 $v\geqslant(k-1)u+1$，已知对 $k=3$ 和 $k=4$ 这个条件也是充分的．类似地，存在具有子 $RS(2, 3, u)$ 的 $RS(2, 3, v)$，当且仅当 $u, v\equiv 3(\bmod 6)$ 和 $v\geqslant 3u$．

嵌入．一个问题是关于在某个 $S(t, k, w)$ 中嵌入一个“部分”的 $S(t, k, v)$ 的可能性．例如对所有的 $w\geqslant 4v+1$ 且 $w\equiv 1$ 或 $3(\bmod 6)$，部分 $S(2, 3, v)$ 能嵌入 $S(2, 3, w)$ 中．另一个问题是关于把部分 $S(2, k, v)$ 嵌入有限射影平面，现已研究了许多特殊的例子．这方面著名的问题是：猜想任意部分 $S(2, k, v)$ 能嵌入一个有限射影平面（甚至可能嵌入一个 Desargues 平面 $PG(2, q)$）．

Steiner 系的大集与填装．一个大集（large set）是把一个 v 集的所有 k 子集的集合划分为一些 Steiner 系 $S(t, k, v)$．这方面的一个著名的结果是，对一切 $v\equiv 1$ 或 $3(\bmod 6)$（6 可能例外），$S(2, 3, v)$ 的大集存在．这一结果是陆家羲在一系列文章（[A15]）中证明的．人们还知道 $S(2, 4, 13)$ 的大集存在．更一般地，人们对两两不交的 $S(t, k, v)$（即 $S(t, k, v)$ 的填装）的最大个数 $D(t, k, v)$（的界）感兴趣．

某些推广．Steiner 系已按多种方式进行了推广，并且模仿这里已讨论过的问题，研究这些问题的推广．最显然的是推广为 $S_\lambda(t, k, v)$，这里要求任意 t

点集含在恰好 λ 个公共区组中．一个 $S_\lambda(t,k,v)$ 称为简单的（simple），如果任何两个区组都不关联于相同的点集．L．Teirlinck 证明了对每个 t，都存在非平凡的简单 $S_\lambda(t,k,v)$，从而解决了一个著名的问题．另一种推广是允许有不同的区组规模；对此主要研究了情况 $(t,\lambda)=(2,1)$；得到的结构被称为成对平衡设计（pairwise balanced designs），并且是 $t=2$ 的 Steiner 系存在性理论的基本工具．人们还研究了用 k 子集填装和覆盖 v 集的所有 t 子集．最后，相互正交拉丁方（orthogonal Latin squares）集合可以认为是仿射平面，即 $S(2,n,n^2)$ 系统的推广．

与其他领域的联系．最后，Steiner 系及其推广的研究与数学的其他几个领域，如几何、群论和编码理论有密切联系．上面提到的 Witt 设计是最有名的例，这类设计本质上等价于 Mathieu 群和 Golay 码（[A1]，[A17]，[A18]）．另一方面，组合设计一般地也在诸如计算机科学和密码学中有重要应用，而 Steiner 系尤其如此（[A19]）．

参考文献

[A1] Beth, Th., Jungnickel, D. and Lenz, H., Design theory, Cambridge Univ. Press, 1986.

[A2] Hughes, D. R. and Piper, F. C., Design theory, Cambridge Univ. Press, 1985.

[A3] Lindner, C. C. and Rosa, A. (eds.): Topics on steiner systems, North-Holland, 1980.

[A4] Colbourn, C. J. and Mathon, R. A., (eds) Combinatorial design theory, North-Holland, 1987.

[A5] Hartman, A. (ed.): Combinatorial designs, North-Holland, 1989.

[A6] Doyen, J. and Rosa, A., An extended bibliography and survey of steiner systems, *Congressus Numerantium*, **20** (1978), 297 – 361.

[A7] Doyen, J. and Rosa, A., An extended bibliography of steiner systems, *Ann. Discr. Math.*, **7** (1980), 317 – 349.

[A8] Jungnickel, D.: Design theory: an update, *Ars comb.*, **28** (1989), 129 – 199.

[A9] Mathon, R. A. and Rosa, A.: Tables of parameters of BIBD's with $r \leqslant 41$ including existence, enumeration and resolvability results: an update, *Ars comb.* (to appear).

[A10] Chee, Y. M., Colbourn, C. J. and Kreher, D. L.: Simphe t-design with $v \leqslant 30$, *Ars comb.*, **29** (1990), 193 – 258.

[A11] Wilson, R. M., An existence theory for pairwise balanced derigns I, *J. Comb. Th. (A)*, **13** (1972), 220 – 245.

[A12] Wilson, R. M., An existence theory for pairwise balanced designs II, *J. Comb. Th. (A)*, **13** (1972), 246 – 273.

[A13] Wilson, R. M., An existence theory for pairwise balanced designs III, *J. Comb. Th. (A)*, **18** (1975), 71 – 79.

[A14] Witt, E., Über Steinersche Systeme, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 12 (1938), 265 – 275.

[A15] Lu, Jia-Xi. On large sets of disjoint steiner triple systems, VI. *J. Comb. Th. (A)*, 37 (1984), 189 – 192.

[A16] Teirlinck, L., Non-trivial t-designs without repeated blocks exist for all t, *Discr. Math.*, 65 (1987), 301 – 311.

[A17] MacWilliams, J. and Sloane, N. J. A., The theory of error-correcting codes, North-Holland, 1978

[A18] Lüneburg, H.: Transitive Erweiterungen endicher permutationsgruppen. Lecture notes in Math., 84, Springer, 1969.

[A19] Colbourn, C. J. and Oorschot, P. C. Van, Applications of Combinatorial designs in Computer science, *ACM Comp. Surveys*, **21** (1989), 223 – 250.

刘振宏 译　李　乔 校

Steinitz 定理［Steinitz theorem; Штейница теорема］

Euler 示性数（Euler characteristic）等于 2 的每一个**抽象多面体**（polyhedron, abstract）可以实现为一个凸多面体．这里，抽象多面体（abstract polyhedron）是指称为顶点、边和面的任意元素的一个有限集，其中对称和传递的关联关系定义为：边 a 与面 α 关联，如果 a 是 α 的边界的一部分；顶点 A 与边 a 关联，如果 A 是 a 的一个端点；顶点 A 与面 α 关联，如果 A 是 α 的一个顶点．抽象多面体的顶点、边和面的体系必须满足以下条件：

1）每一条边与且仅与两个顶点关联．每一条边与且仅与两个面关联．

2）对两个顶点，仅能有一条边与它们两个都关联．对两个面，仅能有一条边与它们两个都关联．

3）每一个顶点至少与三个面关联．每一个顶点至少与三条边关联．

这一定理由 Steinitz 于 1917 年证明．

А．Б．Иванов 撰

【补注】 高维和相关问题有许多部分的结果（如见［A1］和［A2］）．

已经证明不能希望对高维情形有 Steinitz 定理的直接类似（见［A1］）．

参考文献

[A1] Bokowski, J. and Sturmfels, B., Computational synthetic geometry, Lecture notes in math., 1355, Springer, 1989.

[A2] Grünbaum, B., Convex polytopes, Wiley, 1967.

陆璇年 译

Стеклов 函数 [Steklov function; Стеклова функция], 有界线段 $[a, b]$ 上可积函数的

函数

$$f_h(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f(u)\,du = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(t+v)\,dv. \qquad (*)$$

形如 (*) 的函数以及由它叠代地定义的函数

$$f_{h,r}(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f_{h,r-1}(u)\,du,\ r = 2,3,\cdots$$

$$f_{h,1}(t) = f_h(t),$$

是 B. A. Стеклов (见 [1]) 于 1907 年为解决将已知函数展成特征函数级数的问题时，首先引入的. Стеклов 函数 f_h 几乎处处有导数

$$f_h'(t) = \frac{1}{h}\left\{f\left(t+\frac{h}{2}\right) - f\left(t-\frac{h}{2}\right)\right\}.$$

若 f 在实轴上一致连续，则

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |f(t) - f_h(t)| \leqslant \omega\left(\frac{h}{2}, f\right),$$

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |f_h'(t)| \leqslant \frac{1}{h}\,\omega(h,f),$$

其中 $\omega(\delta, f)$ 为 f 的连续模. 当 $f\in L_p(-\infty,\infty)$ 时，类似的不等式依 $L_p(-\infty,\infty)$ 的度量也成立.

参考文献

[1] Стеклов, В. А., Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дефференциальным уравнением второго порядка, и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям, Хар., 1956.

[2] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965 (中译本: Н. И. 阿赫叶慈尔，逼近论讲义，科学出版社，1959).

A. B. Ефимов 撰

【补注】 Стеклов 的原始论文于 1907 年首先用法文发表于"哈尔科夫数学会通讯"上. [1] 是它的俄文译文，连同附注，是由 H. C. Ландков 完成的.

参考文献

[A1] Cheney, E. W., Introduction to approximation theory, Chelsea, reprint, 1982.

[A2] Müller, M. W., Approximationstheorie, Akad. Verlagsgesellschaft, 1978.

王斯雷 译

Стеклов 问题 [Steklov problems; Стеклова проблемы], 正交多项式理论中的

这样一些问题，其中依赖于权函数的性质特别是奇异性质以及正交性区域，研究正交多项式的渐近性质.

在研究区间 $[-1,1]$ 上的加权

$$h(x) = \frac{h_0(x)}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1) \qquad (1)$$

规范正交多项式 (orthonormal polynomials) $\{P_n(x)\}$ 时，出现了关于序列 $\{P_n(x)\}$ 在一个点、在某个集合 $A\subset[-1,1]$ 或在整个正交区间上有界的条件的问题. 这个问题是重要的，因为如果序列 $\{P_n(x)\}$ 有界，那么三角 Fourier 级数的某些性质就可转移到关于这些正交多项式的 Fourier 级数上来.

B. A. Стеклов ([1]) 猜测，不等式

$$|P_n(x)| \leqslant C_1,\ x\in A\subset[-1,1] \qquad (2)$$

成立的充分必要条件是

$$h_0(x) \geqslant C_2 > 0,\ x\in A\subset[-1,1]. \qquad (3)$$

在检验不等式 (2) 和 (3) 的点 x 处，函数 h_0 的值必定与它在 x 附近的点的值有关. 因此问题在于：给出了函数 h_0 在 x 的一个邻域内的下限，从 (3) 推出 (2) (Стеклов 第一问题). 已经得到了一些不同的局部条件和整体条件 (见 [2], [5])，由它们 (2) 可从 (3) 推得. 特别地，如果 (1) 中的函数 h_0 是正值连续的并满足某些附加条件，则对于多项式系 $\{P_n(x)\}$ 有一个渐近公式，由它对于 $A=[-1,1]$ 的情形推出不等式 (2).

另外，Стеклов ([1]) 还研究了权函数的代数零点的情形并建立了一系列的结果，作为以下两个研究方向的出发点，其中之一可以刻画为：在关于权函数的相当一般的条件下得到的正交多项式的增长的所谓整体的或一致的估计 (Стеклов 第二问题). 例如 (见 [2], 117 页)，如果不等式 (3) 在整个区间 $[-1,1]$ 上成立，则存在序列 $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$ 使得不等式

$$|P_n(x)| \leqslant \varepsilon_n\sqrt{n},\ x\in[-1,1]$$

成立.

Стеклов 第三问题是：已知权函数的光滑奇点，研究正交多项式的渐近性质. 这一研究课题还能包括 **Jacobi 多项式** (Jacobi polynomials) 的渐近性质. Jacobi 多项式的权函数的奇点是在正交区间的端点处，因而它在区间 $(-1,1)$ 内部和在端点处的渐近性质有差异. 从正交多项式的整体估计得到的后者的结果之间的差异，可以用这样的事实进行解释：在这种情形时，权函数在某些点上可能是零或者成为确定阶数的无穷；它也可以用这样的事实进行解释：权函数满足某些光滑条件. 在权函数的奇点 (零点、极点以及

正交区间的端点）处和在正交区间的其余部分，正交多项式的渐近公式及估计是分别建立的．

当多项式在圆上正交时，以上所有问题的提法尤其是证明，都是最自然不过的，同时，用三角多项式逼近周期函数的许多结果都可以应用（亦见**正交多项式（复域上的）**（orthogonal polynomials on a complex domain））．

参考文献

[1A] Стеклов, В. А., 《Изв. Российской Акад. наук》, 15 (1921), 267 – 280.

[1B] Стеклов, В. А., 《Изв. Российской Акад. наук》, 15 (1921), 281 – 302.

[1C] Стеклов, В. А., 《Изв. Российской Акад. наук》, 15 (1921), 303 – 326.

[2] Геронимус, Я. Л., Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, М., 1958.

[3] Szegö, G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., 1975.

[4] Суетин, П. К., 《Успехи матем. наук》, 21 (1966), 41 – 88.

[5] Суетин, П. К., в кн.: Итоги науки и техники Математический анализ, т. 15, М., 1977, 5 – 82.

П. К. Суетин 撰

【补注】 进一步的细节见**正交多项式**（orthogonal polynomials）．

朱学贤 译 娄元仁 校

恒星天文学的数学问题 [stellar astronomy, mathematical problems of; звездной астрономии матемантческие задачи]

关于恒星系统的结构、组成、动力学和演化的一般规律性的研究中出现的数学问题．

恒星统计学问题中所求解方程的主要类型是涉及天体视特性和真特性分布函数的方程．通常，这是关于真特性未知分布函数的积分方程．例如，研究银河系结构的一个重要方程是 Schwarzschild 方程（Schwarzschild equation）

$$A(m)=\omega\int_0^\infty \Delta(r)\varphi(M)dr, \qquad (1)$$

其中给定立体角 ω 内的未知量是恒星按距离 r 的分布函数 $\Delta(r)$，而恒星按目视星等 m 和按绝对星等 M 的分布函数 $A(m)$ 和 $\varphi(M)$ 根据观测是已知的（$M=m-5\log r+5$）．方程（1）具有通过特征函数表达的严格解．困难在于 $A(m)$ 仅对直到 m 的有限值为已知，此 m 值依赖于望远镜的可见度极限．

另一个例子是 Abel 类型方程

$$F(r)=2\int_r^R f(\rho)\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}},$$

它将实测半径为 R 的球对称星团或星系的恒星面密度（此后恒星密度意指恒星作为天体的分布密度）$F(r)$ 与空间密度 $f(\rho)$ 联系起来．

将三合星的目视位形分布函数 $\varphi(\xi,\eta)$ 与真位形分布函数 $f(x,y)$ 联系起来的方程提供了二维积分方程的一个例子．

$$\varphi(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_\eta^\infty\int_{-\infty}^\infty k(x-\xi,y,\eta)f(x,y)\,dx\,dy,$$

其中

$$k(x-\xi,y,\eta)=$$

$$=\eta^{-2}\left\{\left[1-\left[\frac{2y\eta}{y^2+\eta^2+(x-\xi)^2}\right]^2\right]^{-1/2}-1\right\};$$

这个方程建立在下列假设上：三合星目视位形平面的所有取向是等概然的；ξ 和 η（相应地 x 和 y）是三合星第三个子星的坐标，如果（0，0）是第一个的坐标而（0，1）是第二个的坐标．

恒星运动学中的一个特征问题是超定条件方程组的求解，其中每个方程是对个别恒星或对天空的个别截面推得的．

例子．1）确定太阳局部速度赤道分量 X, Y, Z 的方程组；给定恒星自行的观测 μ_α 和 μ_δ，其距离 r 及赤道坐标 α 和 δ：

$$X\sin\alpha-Y\cos\alpha=4.74\,r\mu_\alpha\cos\delta,$$

$$X\cos\alpha\sin\delta+Y\sin\alpha\sin\delta-Z\cos\delta=4.74\,r\mu_\delta,$$

以及恒星视向速度 v_r：

$$X\cos\alpha\cos\delta+Y\sin\alpha\cos\delta+Z\sin\delta=-v_r.$$

2）确定 Oort 系数（Oort coefficients）A 和 B 的方程组：

$$Ar\sin 2(l-l_0)=v_r,$$

$$Ar\cos 2(l-l_0)+Br=4.74\,\mu_l;$$

该系数表征太阳区域银河系自转的角速度 $\omega(R)$

$$A=-\frac{1}{2}R_0\omega'(R_0),\ B=A-\omega(R_0),$$

及银心经度 l_0（l 表示银道邻近恒星的银经）．

恒星动力学的一个基本方程是 **Boltzmann 方程**（Boltzmann equation）

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}+w\frac{\partial\psi}{\partial z}+$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial w}=$$

$$=\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]_{nr}, \qquad (2)$$

其中 ψ 和 Φ 分别是恒星系统的相密度和势．因为一个恒星系统是在其自身引力作用下的，方程（2）必须

与 **Poisson** 方程 (Poisson equation)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=$$

$$=-4\pi G\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi du\,dv\,dw$$

一起进行求解．如果注意力仅限于规则力（即由系统作为整体引起的力），(2) 的右端为零；如果还考虑不规则力（当系统中恒星相互接近引起的力），也必须考虑碰撞积分，仔细审查方程 (2) 和 (3) 表明，球系统中有两个运动积分，而在自转系统中有三个．

流体力学近似 (hydrodynamic approximation) 下考虑的是由 (2) 导出的流体力学方程．

在恒星系统的不规则力的理论中，恒星速度中的变化常被认为是一连续随机过程，人们求解 Fokker-Planck 方程

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\beta\,\mathrm{div}_v(fv)+q\nabla_v F,$$

其中 $F(x, y, t)dv$ 是在时刻 t 恒星具有速度 v 在区间 $[y, y+dy]$ 的概率，如果初速度为 x．这里 β 和 q 分别是动摩擦系数和扩散系数，由恒星场的特性确定．

通过考虑单纯不连续随机过程下恒星速度的变化，提供一个更精确近似．一旦已经求得转移概率密度 $P(x, y)$ 和跃变概率密度 $p(x)$，Колмогоров 方程

$$\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t}=-\int_{-\infty}^{y}p(z)d_zF(x, y, t)+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}p(z)P(z, y)d_zF(x, z, t) \qquad (4)$$

的解确定函数 $F(x, y, t)$．因为恒星系统具有临界速度，方程 (4) 也在带吸收屏下研究过．

为了研究恒星系统的稳定性，人们考虑平衡系统 Boltzmann 方程中相密度和势的变化．这产生类似于物理学中为研究等离子体不稳定性所使用的那些方程．具体到恒星系统的特色是自身引力作用和能量的非加性．

研究外星系中密度分布 $\rho(a)$ 时要求解积分方程

$$v^2(R)=4\pi G\sqrt{1-e^2}\int_0^R\frac{a^2\rho(a)da}{\sqrt{R^2-c^2a^2}},$$

其中 $v(R)$ 是观测到的星系自转的圆周速度，而 e 是其子午截面的偏心率．

参考文献

[1] Паренаго, П. П., Курс звездной астрономии, 3 изд., М., 1954.

[2] Зонн, В., Рудницкий, К., Звездная астрономия, М., 1959 (译自波兰文).

[3] Огородников, К. Ф., Динамика звездных систем, М., 1958.

Т. А. Агекян 撰

【补注】

参考文献

[A1] Chandrasekhar, S., Principles of stellar dynamics, Dover, reprint, 1960.

徐锡申 译

Степанов 殆周期函数 [**Stepanov almost-periodic functions; Степанова почти периодические функции**]

函数类 S_l^p，其中的函数可测，在每一个有限区间 $[x, x+l]$ 上本身及其 $p(p\geqslant 1)$ 次幂可积而且能被有限和

$$\sum_{n=1}^{N}a_n e^{i\lambda_n x}$$

（其中的 a_n 是复系数，λ_n 是实数）依 Степанов 空间中的度量（见下文）逼近．Степанов 空间中的距离定义为

$$D_{S_l^p}[f(x), g(x)]=$$

$$=\sup_{-\infty<x<\infty}\left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)-g(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

函数类 S_l^p 中的函数还可以用**殆周期** (almost-period) 的概念定义．

$S^p=S_l^p$ 中的函数具有 **Bohr 殆周期函数** (Bohr almost-periodic functions) 也具有的一些性质．例如．函数类 S^p 中的函数有界且一致连续（依度量 $D_{S_l^p}$），（依 S^p 中的度量）收敛的 Степанов 殆周期函数序列 $\{f_n\}$ 的极限函数 f 属于 S^p．如果 S^p 中的函数在整个实轴上（在通常意义下）一致连续，则它是 Bohr 殆周期函数．这一函数类由 В. В. Степанов 引进．

参考文献

[1] Stepanoff, W. [V. V. Stepanov], Sur quelques généralisations des fonctions presque périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 181 (1925), 90–92.

Б. М. Бредихин 撰

【补注】 也见**殆周期函数** (almost-periodic function).

不同的空间 S_l^p（带各自的度量 $D_{S_l^p}$）是拓扑等价的．

参考文献

[A1] Stepanoff, W. [V. V. Stepanov], Ueber einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen, *Math. Ann.*, 45 (1925), 473–498.

朱学贤 译

逐步语义系统 [**stepwise semantic system; ступенчатая семантическая система**]

一个由 Markov 在 [2], [3] 中提出的构造性语义学的变种．在这个系统的构造中对一个语义学问题——

蕴涵（implication）的构造性解释给予了特别的重视．传统的直觉主义对论断（$A \supset B$）的解释是，（$A \supset B$）表示结构 p 的可实现性，使得如果 q 是任意一个断言 A 的结构，那么 p 和 q 一起就可能找到一个断言 B 的结构．这个非形式的解释从很多方面考虑并不能引导到一个精确的定义．Markov 的想法是，蕴涵（$A \supset B$）可以被考虑成为用含有无限归纳法原则的理论（一个半形式化的理论（semi-formal theory））作为手段形成由前提 A 推导 B 的论断．因此，问题中的半形式化的理论以及公式 A 和 B 的语义可以在构造的早期阶段就得到解释．作为结果一个逐步语义系统产生了，其中作为下一步的公式的意义是用前一步的对象来定义的．

Markov 构造了两个互相等价的逐步语义系统的变种——“长塔”[2] 和“短塔”[3]．下面简单地在**谓词演算**（predicate calculus）的传统记号以及**形式算术**（formal arithmetic）的语言中对短塔作出解释（Markov 自己用了不带括号的公式记号）．语言 L_0 的初等公式采取（$t = r$）或（$t \neq r$）的形式，其中 t，r 为原始递归项（L_0 的项）．采用**逻辑运算合取**（conjunction）$\wedge$，**析取**（disjunction）$\vee$ 以及**限定量词**（restricted quantifier）（$\forall x \leqslant t$）φ，$(\exists x \leqslant t)\varphi$，其中 φ 是 L_0 中的一个公式，而 t 是 L_0 中的一个项，其他 L_0 的公式可以用通常方式构造出来．语言 L_0 在存在一个由全体 L_0 的式子中辨认出真的闭式子来的一般方法的意义之下是可判定的．L_0 的公式的语义是由对于公式的结构作归纳法来定义的．每一个 L_0 的公式都等价于一个没有量词的公式．

L_1 的公式是由 L_0 的公式利用任意数量的 $\vee$，$\wedge$ 以及存在量词构造出来的．语言 L_1 是不可判定的，但是可以构造一个演算 C，在它里面恰好真的闭式子可以推演出来．L_2 的公式是由 L_1 的公式通过一次使用运算 $\supset$ 和任意多次使用运算 $\wedge$ 和量词 $\forall$ 归纳地构造出来的．因此 L_2 的公式采取如下形式的一种：1）L_1 的公式；2）$(\varphi \wedge \psi)$，其中 φ，ψ 是 L_2 的公式；3）$\alpha \supset \beta$，其中 α，β 是 L_1 的公式；4）$\forall x\alpha$，其中 φ 是 L_2 的公式．蕴涵（$\alpha \supset \beta$）解释如下：（$\alpha \supset \beta$）表示一个一般的方法出现，它对于语言字母表中的任意字 Q，或者能确立 Q 不是 α 在 C 中的一个推演，或者能在 C 中给出 β 的一个推演．一个半形式化的理论 S_2 就这样地被构造出来，其中 L_2 的闭式子可以被推导出来（对 L_1 而言 S_2 的角色由 C 来扮演）．L_2 的真公式是 S_2 的公理．在通常的推演规则之间有带有无限多个前提条件的有效的 ω 规则：如果一个一般的方法存在，它对于每一个自然数 n 得以在 S_2 中推导出公式 $\varphi(n)$，那么公式 $\forall x\varphi(x)$ 就被认为是可以从 S_2 推导出来的．S_2 的健全性由下面的定理表示：每一个能从一个真的 L_2 式子或者从前提推导出来的 L_2 中的闭式子在 L_2 中是真的．

L_3 的公式是由 L_2 的公式通过一次使用运算 $\supset_1$ 和任意次使用 $\wedge$ 和 $\forall$ 归纳地构造出来的．蕴涵（$\alpha \supset_1 \beta$）表示 β 可以在理论 S_2 中由式子 α 推导出来．可以证明，两种形式的蕴涵在语言 L_3 中当两者都可以应用时是彼此相容的．半形式化理论 S_3 就这样地构造出来了，而它的健全性也就得到了证明．语言 L_4，L_5，… 以及半形式化理论 S_4，S_5，… 也可以同样的方式构造出来．L_{n+1} 的公式是由 L_n 的公式通过一次运用运算 $\supset_{(n-1)}$ 于前面语言 L_n 的公式以及任意多次运用 $\wedge$ 和 $\forall$ 于 L_{n+1} 的公式而得到．蕴涵（$\alpha \supset_{(n-1)} \beta$）表示 β 从 α 在 S_n 中可以从 α 推导出来．所有 S_n 都是健全的：在 L_n 中每一个能从真公式推导出来的闭式是真的．不同层次的蕴涵当它们两者都可以应用时，是相容的．

这个相容性使合并所有语言 L_n 于一个单一语言 L_ω 中成为可能，L_n 的式子可以由去掉所有在 L_n 中蕴涵的下标而得到．一个 L_ω 中的式子 φ 被认为是真的，如果它在某一个 L_n 中是真的，其中蕴涵的下标可以选择得使 φ 成为 L_n 的一个式子．

如果在 L_ω 中引入负式子 $\neg\varphi$ 作为（$\varphi \supset 0 = 1$）的简记号，那么式子 $\neg\neg\alpha \supset \alpha$ 在 L_ω 中对于 L_1 中每个式子都是成立的．因此**构造选择原理**（constructive selection principle）在 L_ω 中证明是成立的．语言 L_n，从它们的式子表示能力来看，形成了一个本质上不退化的等级．带有运算 $\wedge$，$\neg$，$\supset$，$\forall$ 的古典谓词演算对于 L_ω 的真值是完全的．

最后 $L_{\omega+1}$ 包含所有形式算术的公式．利用展示 Shanin 的构造性问题的算法（[4]），$L_{\omega+1}$ 的每一个闭公式可以被简化为 $\exists x\psi(x)$ 的形式，其中 ψ 是 L_ω 的一个公式．一个公式 φ 被认为是真的，如果可以给出一个自然数 n 使得 $\varphi(n)$ 在 L_ω 中是真的．这个算术的判断概念是与所有**构造数学**（constructive mathematics）的基本原则相容的．特别地，每一个 $L_{\omega+1}$ 的公式都等价于它的真递归 Kleene 实现（[5]）．

参考文献

[1] Heyting, A., Intuitionism: an introduction, North-Holland, 1970.

[2] Markov, A. A., Essai de construction d'une logique de la mathématique constructive. Logique et méthodologie des sciences en U. R. S. S., *Rev. Internat. Phil.*, **25** (1971), 4, 477 − 507.

[3] Марков, А. А., 《Докл. АН СССР》, **214** (1974), 1, 40 − 43; 2, 279 − 282; 3, 513 − 516; 4, 765 − 768; 5, 1031 − 1034; 6, 1262 − 1264; **215**, 1, 57 − 60; 2, 266 − 269.

[4] Шанин Н. А.,《Тр. Матем ин-та АН СССР》, 52 (1958), 226 – 311.

[5] Драгалин, А. Г., Математич интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979.

【补注】

参考文献

[A1] Markov, A. A. and Nagorny, N. M., The theory of algorithms, Kluwer, 1988, §16.

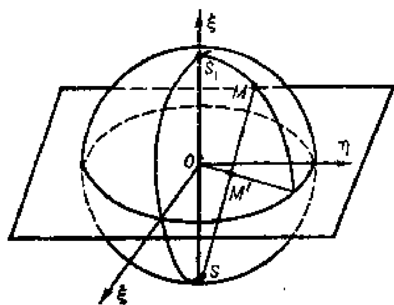
А. Г. Драгалин 撰 罗里波 译 王世强 校

立体弧度 [steradian; стерадиан]

立体角 (solid angle) 的度量单位. 一立体弧度是这样的立体角, 它在以角顶为球心所作的球面上截出的部分的面积等于球面半径的平方. 整个球面对应的立体角等于 4π 立体弧度. БСЭ-3 杜小杨 译

球极平面投影 [stereographic projection; стереографическая проекция]

球面上与平面上的点之间按以下方式得到的对应: 从球面上取一点 S (球极平面投影的中心), 球面上其他点由射线投射到与球面半径 SO 垂直的一个平面上 (图中, 这个平面是赤道面, 但它也可取成通过直径 SS_1 的端点 S_1). 球面上的每一点 M 变为平面上一确定点 M'.



如果假定平面的无穷远点对应点 S, 那么球面与平面的点之间的对应将是一个一一对应. 球极平面投影的基本性质是:

1) 平面上的圆对应球面上的圆, 而通过无穷远点的圆, 即直线, 对应通过球极平面投影中心的圆.

2) 直线间的夹角在球极平面投影下保持不变.

如果三维空间里的一点用齐次坐标 x_1, x_2, x_3, x_4 定义, 并且以 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ 作为球面方程, 同时平面内的一点用 Descartes 坐标 ξ, η 定义, 那么球面与平面的点之间的联系由公式

$$\sigma x_1 = \xi, \ \sigma x_2 = \eta,$$

$$\sigma x_3 = \frac{1 - (\xi^2 - \eta^2)}{2}; \ \sigma x_4 = \frac{1 + (\xi^2 + \eta^2)}{2}$$

定义. 坐标 x_1, x_2, x_3, x_4 可作为平面上点的坐标 (**四圆坐标** (tetracyclic coordinates)).

球极平面投影不仅建立了球面与平面上的点之间的对应, 也建立了球面外的点与平面上的圆之间的对应. 对于球面外的一点, 其极平面与球面沿一圆相交. 在球极平面投影下, 这个圆变换为平面上的一个圆, 这也被考虑成球面外一点在平面上的球极平面投影的象. 三维空间里一点的坐标考虑为平面上的圆的四圆坐标. 在球极平面投影下, 球面内部的点对应平面上的虚象.

球极平面投影也可更一般地研究: 代替球面, 可用任何的二阶曲面. 这个投影也称为一个 Hesse 映射 (Hesse mapping).

在多维情形, 一个球极平面投影是一个 Euclid 空间 E_{n+1} 的点到补充了一个无穷远点的空间 E_n 上的投影, 这个投影从 E_{n+1} 里的球面 S_n 上的一点 P (P 不属于 E_n) 发出. 所有的讨论与公式类似于上面所述.

应用球极平面投影, 扩充复平面被共形地一一映射到 **Riemann 球面** (Riemann sphere) 上.

参考文献

[1] Klein, F., Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 1926.

[2] Blaschke, W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3, Springer, 1929.

[3] Бушманова, Г., В., Норден, А. П., Элементы конформной геометрии, Казань, 1972.

Г. В. Бушманова 撰

【补注】

参考文献

[A1] Coxeter, H. S. M., Introduction to geometry, Wiley, 1961.

[A2] Struik, D. J., Differential geometry, Addison-Wesly, 1957.

[A3] Weatherburn, C. E., Differential geometry, I, Cambridge Univ. Press, 1961.

[A4] Berger, M., Geometry, Springer, 1987 (中译本: M. 贝尔热, 几何, 第一—五卷, 1987 – 1991).

[A5] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S., Geometry and the imagination, Chelsea, reprint, 1952 (中译本: D. 希尔伯特, S. 康福森, 直观几何, 上、下册, 高等教育出版社, 1964).

林向岩 译 陆珊年 校

基多面体 [stereohedron; стереоэдр]

空间分为相同的多面体的正则分解中的一个凸多面体 (polyhedron), 即任意 (Федоров) 运动群的凸基本域. 明显地, n 维空间的使得所有基多面体的边 (基本域的边) 相接的一个正则分解中不同格的个数仅依赖于空间的维数 n. 对 $n = 3$, 基多面体的边数不超过 390. 仅对特殊形式的基多面体, 如平行多面体 (parallelohedron) 完成了分类.

参考文献

[1] Узоры симметрии, М., 1980(译自英文).

[2] Делоне, Б. Н., Сандакова, Н. Н., «Тр. Матем ин-та АН СССР», 64(1961), 28—51.

А. Б. Иванов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Gruber, P. M. and Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, North-Holland, 1987.

[A2] Grünbaum, B. and Shephard, G. C., Tilings with congruent tiles, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 3(1980), 951—973.

[A3] McMullen, P., Convex bodies which tile space by translations, *Mathematika*, 27(1980), 113—121.

[A4] Delone, B. N., Proof of the fundamental theorem in the theory of stereohedra, *Soviet Math. Dokl.*, 2(1961), 3, 812—817. (Dokl. Akad. Nauk SSSR, 138(1961), 1270—1272.)

[A5] Coxeter, H. S. M., Regular polytopes, Macmillan, 1948.

陆珊年 译

Stiefel 流形 [**Stiefel manifold**; **Штифеля многообразие**], 实的

n 维 Euclid 空间中的规范正交 k 标架的流形 $V_{n,k}$. 可以类似方式定义复 Stiefel 流形 $W_{n,k}$ 和四元数 Stiefel 流形 $X_{n,k}$. Stiefel 流形是紧实解析流形，也分别是经典紧群 $O(n)$, $U(n)$ 和 $\mathrm{Sp}(n)$ 的齐性空间. 特别是，$V_{n,1}=S^{n-1}$, $W_{n,1}=S^{2n-1}$, $X_{n,1}=S^{4n-1}$ 均为球面，Stiefel 流形 $V_{n,2}$ 是切于 S^{n-1} 的单位向量的流形，Stiefel 流形 $V_{n,n}$, $W_{n,n}$ 和 $X_{n,n}$ 与群 $O(n)$, $U(n)$ 和 $\mathrm{Sp}(n)$ 相同，$V_{n,n-1}$ 与群 $\mathrm{SO}(n)$ 相同. 有时也考虑 $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{C}^n$ 和 $\mathbf{H}^n$ 的所有可能的 k 标架所成的非紧 Stiefel 流形.

这些流形是 E. Stiefel 在[1]中考查光滑流形上的线性无关向量场组时引人的. 由[1]开始，Stiefel 流形的拓扑研究后来引至完全地计算出其上同调环(见[2], [3]). 特别是

$$H^*(W_{n,k},\mathbf{Z})=\Lambda_{\mathbf{Z}}(x_{2n-1},x_{2n-3},\cdots,x_{2(n-k)+1}),$$

$$H^*(X_{n,k},\mathbf{Z})=\Lambda_{\mathbf{Z}}(x_{4n-1},x_{4n-5},\cdots,x_{4(n-k)+3}).$$

$H^*(V_{n,k},\mathbf{Z}_2)$ 是一个交换代数，其生成元是 x_{n-k}, $\cdots$, x_{n-1}，并有关系

$$x_ix_j=\begin{cases}x_{i+j}, & 若\ i+j\leqslant n-1,\\ 0, & 若\ i+j>n-1\end{cases}$$

(以上 x_l 表示阶数为 l 的元). 维数分别不超过 $n-k-1$, $2(n-k)$ 和 $4(n-k)+2$ 的实、复和四元数 Stiefel 流形是非球的，而且

$$\pi_{n-k}(V_{n,k})\cong\begin{cases}\mathbf{Z}, & 若\ k=1\ 或\ n-k\ 为偶,\\ \mathbf{Z}_2, & 若\ k>1\ 或\ n-k\ 为奇;\end{cases}$$

$$\pi_{2(n-k)+1}(W_{n,k})\cong\pi_{4(n-k)+3}(X_{n,k})\cong\mathbf{Z}$$

Stiefel 流形其他同伦群的计算见[5].

参考文献

[1] Stiefel, E., Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Comm. Math. Helv.*, 8, (1935—1936), 4, 305—353.

[2] Borel, A., 论文集 Расслоенные пространства и их приложения, (译自法文), M., 1958, 163—246.

[3] Steenrod, N. and Epstein, D., Cohomology operations, Princeton Univ. Press, 1962.

[4] Рохлин, В. А., Фукс, Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977 (英译本: Rokhlin, V. A. and Fuks, D. B., Beginner's course in topology. Geometric chapters, Springer, 1984).

[5] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, М. 1971, 71—122.

А. Л. Онищик 撰

【补注】 关于 Stiefel 流形的同伦群，亦见[A3].

Stiefel 流形 $V_{n,k}$, $W_{n,k}$ 和 $X_{n,k}$ 的另一个(更好的)常用的记号是 $V_k(\mathbf{R}^n)$, $V_k(\mathbf{C}^n)$, $V_k(\mathbf{H}^n)$，并可推广为 $V_k(E)$，其中 E 是一个适当的向量空间.

这些 Stiefel 流形作为齐性空间分别等于

$$V_k(\mathbf{R}^n)=\frac{O(n)}{O(n-k)}=\frac{\mathrm{SO}(n)}{\mathrm{SO}(n-k)},$$

$$V_k(\mathbf{C}^n)=\frac{U(n)}{U(n-k)}=\frac{\mathrm{SU}(n)}{\mathrm{SU}(n-k)},$$

$$V_k(\mathbf{H}^n)=\frac{\mathrm{Sp}(n)}{\mathrm{Sp}(n-k)}.$$

自然的商映射 $O(n)\to V_k(\mathbf{R}^n)$ 等等就是将一个规范正交等等的矩阵映为该矩阵前 k 行所成的 k 标架.

从 Stiefel 流形到 **Grassmann 流形**(Grassmann manifold)有典范的映射

$$V_k(E)\to\mathrm{Gr}_k(E),$$

它把一个 k 标架对应于它所张的 k 维子空间. 这就把 Grassmann 流形表为齐性空间，例如

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbf{R}^n)=\frac{O(n)}{O(k)\times O(n-k)}$$

等等.

给定空间 X 的一个 n 维(实、复、四元数)向**量丛**(vector bundle) E，相关的 Stiefel 丛(Stiefel bundle) $V_k(E)$ 在 $x\in X$ 上的纤维就是 $V_k(E_x)$，这里 E_x 是 E 在 x 上的纤维. 类似地，也有 Grassmann 丛(Grassmann bundle) $\mathrm{Gr}_k(E)$，它在 $x\in X$ 上的纤维是 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}_k(E_x)$.

参考文献

[A1] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.
[A2] Dieudonné, J., A history of algebraic and differential topology: 1900 – 1960, Birkhäuser, 1989.
[A3A] Paechter, G. F., The groups $\pi_r(V_{n,m})$, *Quarterly J. Math.*, 7, (1956), 249 – 268.
[A3B] Paechter, G. F., The groups $\pi_r(V_{n,m})$, *Quarterly J. Math.*, 9 (1958), 8 – 27.
[A3C] Paechter, G. F., The groups, $\pi_r(V_{n,m})$, *Quarterly J. Math.*, 10 (1959), 17 – 37, 241 – 260.
[A3D] Paechter, G. F., The groups $\pi_r(V_{n,m})$, *Quarterly J. Math.*, 11 (1960), 1 – 16.
[A4] Hirsch, M. W., Differential topology, Springer, 1976.
[A5] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.
齐民友 译

Stiefel 数 [Stiefel number; Штифеля число]

取值于整数模 2 域 $\mathbf{Z}_2$ 中的闭流形的**示性数** (characteristic number). 设 $x \in H^{**}(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 是一个任意稳定的**示性类** (characteristic class), 而 M 是闭流形. 由

$$x[M] = \langle x(\tau M), [M] \rangle$$

定义的模 2 剩余称为相应于类 x 的 M 的 Stiefel 数 (Stiefel number) (或 Stiefel - Whitney 数 (Stiefel - Whitney number)). 这里 τM 是 M 的切丛, $[M] \in H_*(M; \mathbf{Z}_2)$ 是**基本类** (fundamental class). 对 n 维流形, Stiefel 数只依赖于类 x 的第 n 个齐次分量. 群 $H^n(\mathrm{BO}, \mathbf{Z}_2)$ 同构于域 $\mathbf{Z}_2$ 上的一个向量空间, 其基与数 n 的所有的分拆 $\omega = \{i_1, \cdots, i_k\}$ 的集合形成一一对应, 这分拆就是使得 $i_1 + \cdots + i_k = n$ 的非负整数 $\{i_1, \cdots, i_k\}$. 类 $w_\omega = w_{i_1} \cdots w_{i_k}$ 应该是对 $H^n(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 的基的自然选取. 因此, 为用流形的 Stiefel 数表示它的特征, 考虑类 w_ω 就足够了, 其中 ω 是流形的维数的一个分拆.

由于每个示性类 x 决定一个同态 $x[\ ]: \mathfrak{N}^n \to \mathbf{Z}_2$, 故下配边流形有相同的 Stiefel 数, 其中, $\mathfrak{N}^n$ 是下配边的非定向 n 维流形的类的群. 如果对两个闭流形 M, N, 等式 $w_\omega[M] = w_\omega[N]$ 对所有 $n = \dim M = \dim N$ 的分拆 ω 成立, 则流形 M 和 N 是下配边的 (Thom 定理 (Thom theorem)).

设 A 是域 $\mathbf{Z}_2$ 上的向量空间 $\mathrm{Hom}(H^n(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2), \mathbf{Z}_2)$. 设 $\{e_\omega\}$ 是 A 中的基, 它对偶于 $H^n(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 中的基 $\{w_\omega\}$, $e_\omega(w_{\omega'}) = \delta_\omega^{\omega'}$, 这里, ω, ω' 是 n 的分拆, 且设映射 $\varphi: \mathfrak{N} \to A$ 是由 $\varphi([M]) = \sum_\omega w_\omega[M] e_\omega$ 定义的. 映射 φ 是同态, 为了通过 Stiefel 数得到对群 $\mathfrak{N}^n$ 的完全描述, 找到它的象是必要的. 这个问题, 类似于陈 (省身) 类 (Chern class) 的 Milnor - Hirzebruch 问题. 对闭流形 M, 设 $v \in H^*(M; \mathbf{Z}_2)$ 是所谓的吴 (文俊) 类 (Wu class), 它由 $\langle \alpha \cup v, [M] \rangle = \langle Sq\alpha[M] \rangle$ 对所有的 $\alpha \in H^*(M; \mathbf{Z}_2)$ 成立来唯一定义, 则 $W(\tau M) = Sqv$, 其中, τM 是 M 的切丛 (吴 (文俊) 定理 (Wu theorem)).

这个定理蕴涵着吴类可定义为示性类: 设

$$v = Sq^{-1}\omega \in H^{**}(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2),$$

其中 $\omega \in H^{**}(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 是完全 Stiefel - Whitney 类且 $Sq^{-1} = 1 + Sq^1 + Sq^2 + Sq^2Sq^1 + \cdots$ 是逆于完全的 **Steenrod 平方** (Steenrod square) Sq 的上同调运算. 设 $\alpha \in H^{**}(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 是任意示性类. 则对任何闭流形, 数 $(\alpha \cup v)[M]$ 和 $(Sq\alpha)[M]$ 相叠合. 这样, 元素 $a \in A$, $a = \sum a_\omega e_\omega$ 可在映射 φ 的象中仅当 $a(\alpha \cup v) = a(Sq\alpha)$ 对所有 $\alpha \in H^{**}(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 成立. 对于同态 $a: H^n(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2) \to \mathbf{Z}_2$, 存在流形 M^n, 使得对所有 $x \in H^n(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 有 $x[M^n] = a(x)$, 当且仅当对所有 $\alpha \in H^{**}(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 有 $a(\alpha \cup v) = a(Sq\alpha)$ (Dold 定理 (Dold theorem)).

关于参考文献, 见 **Stiefel - Whitney 类** (Stiefel - Whitney class). А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 按常例, $H^{**}(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 表示**分类空间** (classifying space) BO 的上同调群 $H^n(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 的直积, 而 $H^*(\mathrm{BO}; \mathbf{Z}_2)$ 是直和. 薛春华 译

Stiefel - Whitney 类 [Stiefel - Whitney class; Штифеля - Уитни класс]

对于实向量丛所定义的取值于 $H^*(\ ; \mathbf{Z}_2)$ 的一种**示性类** (characteristic class). Stiefel - Whitney 示性类的记号是 w_i, $i > 0$. 对于拓扑空间 B 上的实向量丛 ξ, 示性类 $w_i(\xi)$ 位于 $H^i(B; \mathbf{Z}_2)$ 中. 它们由 E. Stiefel 和 H. Whitney 在 [1]、[2] 中引进, 并且具有下述性质. 1) 如果 ξ 和 η 是同一底空间上的两个实向量丛, 则

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum w_i(\xi) w_{k-i}(\eta), \ w_0 = 1;$$

另一表述是 $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) w(\eta)$, 其中 $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$ 是完全 Stiefel - Whitney 类. 2) 对于 $\mathbf{R}P^\infty$ 上的 1 维万有丛 ζ_1, 等式 $w(\zeta_1) = 1 + y$ 成立, 其中 y 是 $H^1(\mathbf{R}P^\infty; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$ 的非零元. 这样两个性质以及关于诱导丛的自然性, 唯一地确定了 Stiefel - Whitney 类. Stiefel - Whitney 类具有稳定性, 即对于平凡丛 θ, 有 $w(\xi \oplus \theta) = w(\xi)$, 并且当 $i > \dim \xi$ 时, $w_i(\xi) = 0$. 对于空间 B 上的一个具有定向的 n 维向量丛 ξ, $w_n(\xi) \in H^n(B; \mathbf{Z}_2)$ 与 **Euler 类** (Euler class) 的模 2 归约一致.

对于 B 上的向量丛 ξ, 设 B^ξ 为 ξ 的 **Thom 空间** (Thom space), 并设 $\Phi: H^*(B; \mathbf{Z}_2) \to \tilde{H}^{*+n}(B^\xi;$

$\mathbf{Z}_2$) 为 **Thom 同构** (Thom isomorphism). 则完全 Stiefel-Whitney 类 $w(\xi)$ 等同于

$$\Phi^{-1} Sq\,\Phi(1) \in H^*(B; \mathbf{Z}_2),$$

其中 $Sq = 1 + Sq^1 + Sq^2 + \cdots$ 是完全 **Steenrod 平方** (Steenrod square). Stiefel-Whitney 类的这一性质可以作为它的定义. 同一底空间上两个保纤同伦等价的丛具有相同的 Stiefel-Whitney 类, 在这个意义下, Stiefel-Whitney 类是同伦不变量.

对于实向量丛而言, 任何一种取值于 $H^*(;\mathbf{Z}_2)$ 的示性类, 都可以用 Stiefel-Whitney 类表示出来. 环 $H^{**}(BO_n; \mathbf{Z}_2)$ 与 $H^{**}(BO; \mathbf{Z}_2)$ 是 Stiefel-Whitney 类的形式幂级数环

$$H^{**}(BO_n; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[[w_1, \cdots, w_n]],$$
$$H^{**}(BO; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[[w_1, \cdots]].$$

参考文献

[1] Stiefel, E., Richtungsfelden und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Comm. Math. Helv.* **8** (1935–1936), 4, 305–353.

[2] Whitney, H., Topological properties of differentiable manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 785–805.

[3] Milnor, J. W. and Stasheff, J. D., Characteristic classes, Princeton Univ. Press, 1974.

[4] Stong, R. E., Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, 1968.

[5] Steenrod, N. E., The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

А. Ф. Харшиладзе 撰

【补注】 记号 $H^{**}(X; G)$ 表示 Abel 群 $H^n(X; G)$ 的乘积, 而记号 $H^*(X; G)$ 则表示直和; 记号 $H^*(B; \mathbf{Z}_2) \to \tilde{H}^{*+n}(B^\xi; \mathbf{Z}_2)$ 是指一个 n 度分次同态. 至于分类空间 BO_n 与 BO, 见**分类空间** (classifying space).

参考文献

[A1] Husemoller, D., Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

段海豹 译 沈信耀 校

Stieltjes 积分 [Stieltjes integral; Стилтьеса интеграл]

Riemann 积分 (Riemann integral) 概念的一种推广, 体现了一个函数 f 关于另一函数 u 的积分概念. 设两个函数 f 与 u 在 $[a,b]$ 定义且有界, 并设 $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. 形如

$$\sigma = f(\xi_1)[u(x_1) - u(x_0)] + \cdots + f(\xi_n)[u(x_n) - u(x_{n-1})] \qquad (1)$$

的和称为 **Stieltjes 积分和** (Stieltjes integral sum), 其中 $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, $i = 1, \cdots, n$. 一个数 I 称为当 $\max_i \Delta x_i \to 0$ 时积分和 (1) 的极限, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$, 使得当 $\max \Delta x_i < \delta$ 时, 不等式 $|\sigma - I| < \varepsilon$ 成立. 如果当 $\max_i \Delta x_i \to 0$ 时, 极限 I 存在且有限, 则称函数 f 在 $[a,b]$ 上关于函数 u **是可积的**, 而称此极限为 f 关于 u 的 **Stieltjes 积分** (Stieltjes integral) 或 Riemann-Stieltjes **积分** (Riemann-Stieltjes integral), 记为

$$I = \int_a^b f(x)\,du(x); \qquad (2)$$

函数 u 称为**积分函数** (integrating function). 在研究由增函数 u 定义的直线上的正 "质量分布", 而 u 的不连续点对应着 "集中于一点" 的质量时, Th. J. Stieltjes ([1]) 想出了这种积分概念.

当积分函数 u 取函数 $x + C$, C 是常数时, 所得的特殊情形的 Stieltjes 积分就是 Riemann 积分.

当积分函数 u 为单调增加时, 可以研究上和下 Darboux-Stieltjes 和:

$$S = \sum_{i=1}^n M_i[u(x_i) - u(x_{i-1})],$$
$$s = \sum_{i=1}^n m_i[u(x_i) - u(x_{i-1})], \qquad (3)$$

其中 m_i 和 M_i 分别是 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的下确界与上确界.

为了 Stieltjes 积分存在, 下列任一条件都是充分的:

1) 函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 而函数 u 在 $[a,b]$ 上是有界变差的;

2) 函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 而函数 u 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件, 即 $|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$ 对 $[a,b]$ 中任意 x_1, x_2 均成立, 而 $C =$ 常数;

3) 函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 而函数 u 在 $[a,b]$ 上可表示为一个变动上限的积分

$$u(x) = C + \int_a^x g(t)\,dt,$$

其中 g 是 $a \leqslant t \leqslant b$ 上绝对可积的函数.

如果条件 3) 满足, 则积分 (2) 通过公式

$$\int_a^b f(x)\,du(x) = \int_a^b f(x) g(x)\,dx \qquad (4)$$

化为 **Lebesgue 积分** (Lebesgue integral). (当 g 为 Riemann 可积时, 上式右方是 Riemann 积分.) 特别, 当 u 在 $[a,b]$ 上具有有界的 Riemann 可积的导函数 u' 时, (4) 成立, 此时 $g = u'$.

若 u 在 $[a,b]$ 上关于 f 可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上关于 u 也可积. 由此定理可以推出另外一些关于 Stieltjes 积分存在的条件.

Stieltjes 积分关于被积函数以及积分函数均具有线性性质(假定右边每个 Stieltjes 积分存在):

$$\int_a^b [\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]du(x)=$$

$$=\alpha\int_a^b f_1(x)du(x)+\beta\int_a^b f_2(x)du(x),$$

$$\int_a^b f(x)d[\alpha u_1(x)+\beta u_2(x)]=$$

$$=\alpha\int_a^b f(x)du_1(x)+\beta\int_a^b f(x)du_2(x).$$

一般地说, Stieltjes 积分无可加性质: 积分 $\int_a^b f(x)du(x)$ 的存在性不能从积分 $\int_a^c f(x)du(x)$ 与 $\int_c^b f(x)du(x)$ 的存在性推出(若 $a<c<b$, 其逆成立).

若 f 在 $[a,b]$ 上有界, $m\leq f(x)\leq M$, 而 u 在 $[a,b]$ 上单调增加, 则存在 μ, $m\leq\mu\leq M$, 使得中值公式(mean-value formula)

$$\int_a^b f(x)du(x)=\mu[u(b)-u(a)] \qquad (5)$$

对 Stieltjes 积分成立. 特别, 当 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则存在点 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\mu=f(\xi)$.

当 u 为有界变差时, Stieltjes 积分 $\int_a^b f(x)du(x)$ 提供了 $[a,b]$ 上连续函数所成的空间上的线性连续泛函 $F(f)$ 的一般形式(Riesz 定理(Riesz theorem)).

若 u 为有界变差函数, 那么 Stieltjes 积分的值等于相应的 **Lebesgue-Stieltjes 积分**(Lebesgue-Stieltjes integral)的值.

参考文献

[1] Stieltjes, Th. J., Recherches sur les fractions continues, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 118 (1894), 1401 – 1403.

[2] Смирнов, В. И., Курс высшей математики, т. 5, М., 1959 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第五卷, 第一分册, 人民教育出版社, 1963).

[3] Гливенко, В. И., Интеграл Стильтьеса, М. -Л., 1936.

В. А. Ильин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Ross, K. A., Elementary analysis; The theory of calculus, Springer, 1980.

[A2] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976 (中译本: W. 卢丁, 数学分析原理, 人民教育出版社, 1979).

[A3] Apostol, T. M., Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1974.

王斯雷 译

Stieltjes 变换 [Stieltjes transform; Стилтьеса преобразование]

积分变换(integral transform)

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+t}\,dt. \qquad (*)$$

Stieltjes 变换是在 **Laplace 变换**(Laplace transform)迭代法中产生的, 它是卷积变换的特殊情况.

其逆变换公式之一如下所述: 如果函数 $f(t)\sqrt{t}$ 在 $(0,\infty)$ 上是连续的和有界的, 则对于 $x\in(0,\infty)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2\pi}\left[\frac{e}{n}\right]^{2n}[x^{2n}F^{(n)}(x)]^{(n)}=f(x).$$

广义 Stieltjes 变换是

$$F(x)=\int_0^\infty f(x)\frac{dt}{(x+t)^\rho},$$

其中 ρ 是一个复数.

积分 Stieltjes 变换(integrated Stieltjes transform)是

$$F(x)=\int_0^\infty K(x,t)f(t)dt,$$

其中

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\ln x/t}{x-t}, & t\neq x,\\[2mm] \dfrac{1}{x}, & t=x.\end{cases}$$

对于广义函数也引入了 Stieltjes 变换. Th. J. Stieltjes (1894 – 1895) 研究了变换 (*).

参考文献

[1] Widder, D. V., The Laplace transform, Princeton Univ. Press, 1972.

[2] Boas, R. P. and Widder, D. V., The iterated Stieltjes transform, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 45 (1939), 1 – 72.

[3] Titchmarsh, E. C., Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1948.

[4] Брычков, Ю. А., Прудников, А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977 (英译本: Brychkov, Y. A. and Prudnikov, A. P., Integral transforms of generalized functions, Gordon & Breach, 1989).

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников 撰 杜小杨 译

刚性微分方程组 [stiff differential system; жесткая дифференциальная система]

一常微分方程组, 当用 Runge-Kutta 或 Adams 类型的显式方法进行数值求解时, 尽管所求的变量变化很慢, 积分步长仍需取得很小. 试图减少计算

刚性微分方程组的解的时间而增加积分步长，会导致误差的急速增加（误差爆炸）.

一个自治的常微分方程组

$$\frac{dz(t)}{dt}=f(z(t)),\ f(z)\in C^p(G),\ G\subset \mathbf{R}^m,\ (1)$$

若对任意初始值 $z(0)=z^0\in G$，在一已给区间 $[0,T]$ 上满足以下条件，就称为刚性的，这里 $[0,T]$ 包含于（1）的一个解 $z(t)$ 的存在区间内：

a）Jacobi 矩阵的本征值的最大模（即谱半径）沿解 $z(t)$ 为有界：

$$0<L\leqslant\rho\left[\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right]\leqslant\left\|\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right\|=$$

$$=\left\|\frac{\partial K(t+\tau,t)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0}\right\|<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T;$$

b）存在数 τ_b, N, v 使得 若

$$0<\tau_b\ll T,\ \ 1\ll N,\ \ 1\leqslant v\leqslant p,$$
$$0<\tau_n\leqslant t+\tau_n\leqslant t+\tau\leqslant T,$$

则以下不等式成立：

$$\left\|\frac{\partial^v K(t+\tau,t)}{\partial\tau^v}\right\|\leqslant\left[\frac{L}{N}\right]^v.$$

这里

$$K(t+\tau,t)=X(t+\tau)X^{-1}(t),$$

$X(t)$ 是方程组（1）的**基本矩阵**（fundamental matrix），

$$\|A\|=\max_i\sum_{k=1}^m|a_{ik}|,$$

τ_b 是边界层的长度．所有（1）那种类型的方程组，若将每个解向量 $z(t)$ 的各个分量都按比例增减后，条件 a）和 b）就能同时满足的，就称为刚性的．

常微分方程的非自治的 m 阶正规方程组称为刚性的，是指与它等价的 $m+1$ 阶自治方程组是刚性的．下面的标量方程是刚性的非自治方程的例子：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dz(x)}{dx}=q[z(x)-\varphi(x)]+\frac{d\varphi(x)}{dx},\\&z(0)=z^0,\end{aligned}\right\}\ (2)$$

这里 $\varphi(x)\in C^p(0\leqslant x<\infty)$ 是一个已给的函数．下面的齐次线性方程组是刚性微分方程组的另一个例子：

$$\frac{dz(t)}{dt}=Az(t),\ \ z(0)=z^0,\qquad(3)$$

A 是一个 $(m\times m)$ 常数矩阵而有相异的本征值分为两组

$$\left.\begin{aligned}&|\lambda_i|\leqslant\beta,\ \max_i\operatorname{Re}\lambda_i\leqslant\alpha,\ \alpha\geqslant0,\ 1\leqslant i\leqslant S;\\&\max_i\operatorname{Re}\lambda_i<-\Lambda\ll-\beta,\ \max_i|\lambda_i|=L,\\&1\ll\frac{L}{\beta},\ S+1\leqslant i\leqslant m.\end{aligned}\right\}(4)$$

对于（3）条件 a）显然满足．其范数

$$\left\|\frac{\partial K(t+\tau,t)}{\partial\tau}\right\|=\|AeA\tau\|$$

当 $\tau\geqslant\tau_b=C_2/\Lambda$ 时以 $C_1\beta e^{\alpha\tau}$ 为上界，C_1 和 C_2 是某些常数．当 $C_1\beta e^{\alpha T}\ll L,\ N=L/(C_1\beta e^{\alpha t})$ 时，条件 b）也满足．若 $\tau\geqslant\tau_b$，则 $d^2z(t)/dt^2$ 上有界：

$$\left\|\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right\|\leqslant\left\|\frac{\partial K(t,0)}{\partial t}\right\|\left\|\frac{dz(t)}{dt}\bigg|_{t=0}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant C_1\beta e^{\alpha T}\left\|\frac{dz(t)}{dt}\bigg|_{t=0}\right\|.$$

所以，当 $t\geqslant\tau_b$ 时可以对向量 $dz(t)/dt$ 作出一个 0 次代数插值多项式，而有均匀分布的结点，并把插值步长写成 $H=C_3/C_1\beta e^{\alpha T}$，$C_3$ 是一个常数，依赖于已给的误差（见[1]）．另一方面，对（3）应用 Euler 的折线法需要积分步长在方程组解的整个区间上有一个上界（见[1]）：

$$|1+h\lambda_i|<1,\ h<-\max_i\frac{2\operatorname{Re}\lambda_i}{|\lambda_i|^2}\leqslant\frac{2}{L},\quad(5)$$

$$i=s+1,\cdots,m.$$

这里方程组（3）用 Euler 折线法的近似解的相应于（4）中第一组本征值的那些分量，可以充分准确地表示为（见[1]）：

$$h\beta\leqslant\frac{2\beta}{L}\ll1,\ \ 1\ll\frac{NC_3}{2}\leqslant\frac{H}{h}.$$

像（5）那样的对于积分步长的限制恰是 Runge-Kutta 型或 Adams 型外推法的特点．商 H/h 可以看作方程组（3）的刚度的定性度量，许多情况下可以达到 10^4-10^{10} 这样的值．物理学、化学、生物学、工程技术和经济学中的动态过程和现象的数学描述，涉及越来越多因素的计算，从而提高了微分方程组的阶数，均会导致刚度的增加．刚性微分方程组需要特殊的解法．

在有些情况下，原方程组（1）可以用最高阶导数前有小参数的微分方程的理论和渐近方法来变换，则它的解在边界层内的性态可以用指数阻尼函数来表示（见[2]）．然而要把一个刚性微分方程组化为相似的形式通常是困难的，此外，在渐近变换后，刚性不一定会有本质的减少．所以，对于求解一般形式的方程组，要用数值方法．这些方法的主要性质是它们保证

当积分步长的值与代数插值的步长值相近时，能在边界层以外把（1）的解的快速阻尼的分量压下去.

在求解刚性微分方程组时，用隐式方法是适当的（见[9]、[17]）. 为了作出隐式格式，可以使用待定系数法. 它以 Taylor 公式为基础，可以写为:

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu+1} \frac{d^\nu z(t)}{dt^\nu}\bigg|_{t=t_{n+1}} \cdot H^\nu$$

$$+ \int_0^H (-1)^{p+1} \frac{\tau^p}{p!} \frac{d^{p+1} z(t)}{dt^{p+1}}\bigg|_{t=t_n+\tau} d\tau, \quad (6)$$

其中 n 为正整数，$H>0$，$nH=t_n$. 例如，[9] 中讲述了这类方法:

$$\sum_{\chi=0}^{r} a_\chi y_{n+1-\chi} = Hf(y_{n+1}),\ y_n = y(t_n), \quad (7)$$

$r=1$，$a_0=1$，$a_1=-1$——隐式折线法，

$r=2$，$a_0=3/2$，$a_1=-2$，$a_2=1/2$ ——二阶隐式法，

$r=3$，$a_0=11/6$，$a_1=-3$，$a_2=3/2$，$a_3=-1/3$——三阶隐式法，

$r=4$，$a_0=25/12$，$a_1=-4$，$a_2=3$，$a_3=-4/3$，$a_4=1/4$——四阶隐式法.

方法的阶数（order of a method）即是将（7）按 H 之幂展开后最高次 H^k 的次数，其系数与（6）中相应的系数相同.

对方程组（3）应用隐式折线法就会给出差分方程

$$(E - HA)\, y_{n+1} = y_n,\ y_0 = z^0. \quad (8)$$

设方程组（3）是渐近 Ляпунов 稳定的，则矩阵 $\|E-HA\|$ 对一切 H 均为非奇异的. 可以用 Lagrange-Sylvester 公式将（8）的解写为

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} P_i(A, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) \frac{z^0}{(1-H\lambda_i)^n}. \quad (9)$$

对于隐式折线法（8），渐近稳定性条件

$$\left|\frac{1}{1-H\lambda_i}\right| < 1$$

对于一切 H 成立，而在（9）中相应于（4）中第二组本征值的解的那些分量随 n 之增加而迅速下降. H 之值只受近似解所要求的精确度限制. 提高线性多步法的阶的趋势肯定与稳定性矛盾（见[11]）.

若将 r 步法

$$\sum_{\chi=0}^{r} a_\chi y_{n+1-\chi} = H\sum_{\chi=0}^{r} b_\chi f(y_{n+1-\chi}) \quad (10)$$

用于标量方程

$$\frac{dz}{dt} = qz \quad (11)$$

（其中 q 为具有负实部的复常数）而（10）的一切解对于固定的正 H 当 $n\to\infty$ 都趋于 0，则称此法是 A 稳定的（A-stable）. 显式 r 步法不可能为 A 稳定的. A 稳定的线性多步法之阶数不会超过 2. 对于以下的隐式梯形法得到了其最小误差常数 $c_n = 1/12$（见[11]）:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{H}{2}\,[f(y_{n+1}) + f(y_n)]. \quad (12)$$

关于方法的 $A(\alpha)$ 稳定性的要求，不如 A 稳定性的要求严格. 所谓 r 步法（10）对固定的 $H>0$ 为 $A(\alpha)$ 稳定的，即指当应用（10）于方程（11）（但其中的 q 是集合

$$s_\alpha = \{z\in\mathbf{C},\ |\arg(-z)| < \alpha,\ z\neq 0\}$$

中的复常数，$\mathbf{C}$ 是复平面）时，其所有解当 $n\to\infty$ 时趋于 0. 显式 r 步法不可能是 $A(0)$ 稳定的. 只存在一个 $A(0)$ 稳定的 $r+1$ 阶 r 步法即（12）. 对于 $\alpha\in[0,\pi/2)$，存在 $r=3$，4 的 r 阶 $A(\alpha)$ 稳定方法（见[13]）.

在所谓 Gear 定义（Gear definition）（见[14]）中，A 稳定的要求可以减弱如下：（10）称为刚性稳定方法（stiffly-stable method），如果把（10）用于（11）时（10）的所有的解当 $n\to\infty$ 时均趋于 0，这里 Hq 是 $R_1\cup R_2$ 中的复常数:

$$R_1 = \{Hq\in\mathbf{C}:\ -a\leqslant \mathrm{Re}\,Hq\leqslant b,\ -d\leqslant \mathrm{Im}\,Hq\leqslant d\},$$

$$R_2 = \{Hq\in\mathbf{C}:\ \mathrm{Re}\,Hq < -a\}.$$

而当 $Hq\in R_1$ 时可以保证所给的精度.

方法（7）是刚性稳定的，从而也是 $A(\alpha)$ 稳定的. 在这些方法中 $a\leqslant 0.7$.

也可以作出任意阶显式 Runge-Kutta 方法之与（6）相一致的隐式类似物，且为 A 稳定与刚性稳定的. 例如二阶方法

$$y_{n+1} = y_n + Hf\left[y_{n+1} - \frac{H}{2}\,f(y_{n+1})\right]. \quad (13)$$

把（13）应用于（3）就给出差分方程

$$\left[E - HA + \frac{H^2A^2}{2}\right]y_{n+1} = y_n,$$

故知此法为 A 稳定的. 与此相似，3 阶方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\,(K_1 + 4K_2 + K_3), \quad (14)$$

$$K_1 = Hf(y_{n+1}),\ K_2 = Hf\left[y_{n+1} - \frac{K_1}{2}\right],$$

$$K_3 = Hf(y_{n+1} - 2K_2 + K_1),$$

类似地可以得出以下的差分方程

$$\left[E - HA + \frac{H^2A^2}{2} - \frac{H^3A^3}{6}\right]y_{n+1} = y_n.$$

可以用同样方法作出高阶的 A 稳定与刚性稳定方法．方法（13），（14）以及[5]中发表的方法与所谓隐式 Runge-Kutta 方法本质不同（见[16]），后者因计算更繁复而未能广为人知．应用隐式方法比之显式方法每一步的计算量更大，但对于刚性微分方程组，考虑到积分步数要急剧增加，应用隐式方法还是合理的．为了解（3），需要求一个矩阵之逆，即解一个线性方程组．这里会产生很不好的情况，因为对矩阵 $\|E-HA\|$ 所加的条件的数目会随 H 增加而增加．在一般情况（1）之下，每一步求积都要解一个关于向量 y_{n+1} 的非线性方程组．通常会应用一个修正的 Newton 法，而初始条件则由 y_n 用任意外推公式算出．于是这个外推法就称为一个预测子（predictor），而隐式方法称为一个修正子（corrector）．由于 LH 之值很大，在刚性微分方程组中不能用简单迭代法．因为 Newton 法是用隐式格式来求解方程 $F(y_{n+1})=0$，所以必须计算（1）的 Jacobi 矩阵，有时就把这个矩阵直接放人这个方法的公式中，此方法在求解线性方程组时也有 A 稳定性（见[12]，[15]）．在求解刚性微分方程组时，广泛地应用在每一步都可以自动控制误差的 Gear 方法（Gear procedure）（或称 Gear 法（Gear method）），其阶数和步长也在每一步中自动改变（[14]）．方法（7）也可用作 Gear 程序的修正子（见[9]）．构造刚性方程组的积分法的另一个途径是在解法公式中考虑到相应线性方程组之解（见[4]－[8]，[10]）．这个方向最初的工作中考虑的是矩阵 $(\partial f(z)/\partial z)$ 具有已给本征值的刚性方程组，并按这些本征值作出方法的矩阵系数．因为本征值问题很难解决，这个方法在相当长时期中没有发展起来．在[6]，[7]，[8]中提出了不需求解方程组（1）的矩阵 $(\partial f(z)/\partial z)$ 之本征值而构造方法的矩阵系数的办法．这个方向的各种方法可以用下式为基础作出（见[7]）：

$$z(t_{n+1})-z(t_n)+$$

$$-\left[\int_0^H \varphi^{-1}(t_n+\tau)d\tau+C\right]\varphi(t_{n+1})\frac{dz}{dt}\bigg|_{t=t_n}+$$

$$+C\varphi(t_n)\frac{dz(t)}{dt}\bigg|_{t=t_{n+1}}=\int_0^H\left[\int_0^\tau \varphi^{-1}(t_n+\rho)d\rho+\right.$$

$$\left.+C\right]\times\left[\varphi(t_n+\tau)\frac{d^2z(t)}{dt^2}+\right.$$

$$\left.-\frac{d\varphi(t_n+\tau)}{d\tau}\frac{dz(t)}{dt}\right]_{t=t_{n+1}-\tau}d\tau, \qquad (15)$$

这里 $\varphi(t_n+\tau)\in C^1(0\leqslant\tau\leqslant H)$ 是一个非奇异 $m\times m$ 矩阵，而 C 是一个不依赖于 τ 的矩阵．

若不考虑（15）的右方，矩阵 $\varphi(t_n+\tau)$ 和 C 的不同选取给出相应于各种数值积分方法的差分方程．令 $C=0$ 得出显式方法，$C\neq 0$ 得出隐式方法．设 $\varphi(t_n+\tau)=E$．隐式折线法（7）相应于 $C=-HE$；梯形法（12）相应于 $C=-(H/2)E$；显式折线法则相应于 $C=0$．若 $\varphi(t_n+\tau)=e^{A\tau}$，$A$ 是一个常数元 $m\times m$ 矩阵．即得一个广义折线法（见[7]）：

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+\int_0^H e^{A\tau}d\tau f(y(t_n)). \qquad (16)$$

$A=0$ 时，公式（16）就是显式折线法．方法（16）给出了微分方程组

$$\frac{dz(t)}{dt}=Az(t)+M,\ z(0)=z^0,\ M\in\mathbf{R}^m, \qquad (17)$$

在离散值 $t_n=nH$ 处的准确解．若矩阵

$$\Phi(A,h)=\int_0^h e^{A\tau}d\tau$$

已知，则对递推公式

$$\Phi(A,2^{q+1}h)=\Phi(A,2^q h)[2E+$$

$$+A\Phi(A,2^q h)] \qquad (18)$$

作 k 次迭代，就得到在（16）中所用的矩阵

$$\Phi(A,2^k h)=\int_0^{2^k h} e^{A\tau}d\tau.$$

对充分小的 $h\leqslant 1/\|A\|$，作为（18）的一次近似，以下的近似公式是适当的：

$$\left.\begin{aligned}\int_0^h e^{A\tau}d\tau &\cong h\left[E-\frac{hA}{2}\right]^{-1}=\Phi_0,\\ e^{AH}\cong\left[E-\frac{Ah}{2}\right]^{-1}\left[E+\frac{Ah}{2}\right]&=E+A\Phi_0,\end{aligned}\right\}(19)$$

而当矩阵 A 的本征值为实数时，

$$\int_0^h e^{A\tau}d\tau\cong h\sum_{\gamma=0}^{s}\frac{A^\gamma h^\gamma}{(\gamma+1)!}=\Phi_0. \qquad (20)$$

当 A 有实部很小的复本征值时，公式（19）给出了微分方程组（17）的解和差分方程组（16）的解之间的 Ляпунов 稳定的对应关系．若解的存在区域 $\overline{G}\subset G$ 对 z 为闭且凸的，并且近似解也在此区域中，则方法（16）的误差满足以下的差分方程（见[7]）：

$$\varepsilon_{n+1}=$$

$$=\left\{e^{AH}+\int_0^H e^{A\tau}d\tau\left[\int_0^1\frac{\partial f(y_n+\rho\varepsilon_n)}{\partial y_n}d\rho-A\right]\right\}\varepsilon_n+$$

$$+\int_0^H\int_0^\tau e^{A\xi}d\xi\left[\frac{d^2z(t)}{dt^2}-A\frac{dz(t)}{dt}\right]_{t=t_{n+1}-\tau}d\tau,$$

这里 $\varepsilon_n = z_n - y_n$，$z_n = z(t_n)$，$y_n = y(t_n)$ 分别为（1）与（16）之解．令 $\|y\| = \max_i |y_i|$ 为向量之范数（矩阵的范数从属于这个向量范数），并设以下不等式在 $\bar{G}$ 中满足：

$$\left\| \int_0^1 \frac{\partial f(y_n + \rho\varepsilon_n)}{\partial y_n} d\rho - A \right\| \leqslant \mu_1,$$

$$\left\| \frac{\partial f(z)}{\partial z} - A \right\| \leqslant \mu_2, \quad \left\| \frac{dz(t)}{dt} \right\| \leqslant l.$$

对于实矩阵 A 计算下数：

$$R = \max_i \left[a_{ii} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} |a_{ik}| \right], \ \|e^{At}\| \leqslant e^{Rt}.$$

于是，以下的估计式成立：

$$\|\varepsilon_{n+1}\| \leqslant \left[e^{RH} + \int_0^H e^{R\tau} d\tau \cdot \mu_1 \right] \|\varepsilon_n\| +$$

$$+ \int_0^H \int_0^\tau e^{R\xi} d\xi d\tau \cdot \mu_2 l,$$

$$\|\varepsilon_0\| = \|\varepsilon(0)\|;$$

$$R = 0, \ \|\varepsilon_{n+1}\| \leqslant (1 + \mu_1 H)\|\varepsilon_n\| + \frac{H^2}{2} \mu_2 l;$$

$$0 < \mu_1 \leqslant -R = \alpha, \ \|\varepsilon_{n+1}\| \leqslant \|\varepsilon_n\| +$$

$$+ \frac{\alpha H + e^{-\alpha H} - 1}{\alpha^2} \mu_2 l;$$

$$0 \leqslant \mu_1 \leqslant R, \ \|\varepsilon_{n+1}\| \leqslant e^{2RH}\|\varepsilon_n\| +$$

$$+ \frac{e^{RH} - 1 - RH}{R^2} \mu_2 l;$$

$$0 < R \leqslant \mu_1, \ \|\varepsilon_{n+1}\| \leqslant e^{2\mu_1 H}\|\varepsilon_n\| +$$

$$+ \frac{e^{\mu_1 H} - 1 - \mu_1 H}{\mu_1^2} \mu_2 l.$$

若 $0 \leqslant \alpha = -R \leqslant \mu_1$，可以在 $R = 0$ 的假设下估计误差 ε_n．估计式中也可以用别的向量范数以及相应的矩阵范数和对数范数（见[3]）．这些估计式证明了，在求解方程（1）时，积分步长 H 可以取得比在古典方法中长得多．矩阵 A 必须这样选取，使其元素接近于方程组（1）的 Jacobi 矩阵之元素．在边界层中，当变量急速变化时，对近似解粗略地估计 μ_1，μ_2，l 和 R，就可以改变 A 以达到必需的精度．因为（1）中的变量在穿过边界层时缓慢地变化，当 $\tau_b \leqslant t \leqslant T$ 时，时常是取一个 A 就可以计算所有的解．可以用 Runge 法则来检验精度（见[1]）．

为了提高精度，在[7]中以方法（16）为基础提出了一类数值积分方法．对于这一类方法以下要求是满足的：1）$A = 0$ 时 s 阶方法对于 $s-1$ 次代数多项式的积分是精确的；2）任意阶方法对于（17）的解必须是精确的．

一步 2 阶方法的形式是

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^{H/2} e^{A\tau} d\tau \times$$

$$\times \left[2f\left[y_n + \int_0^{H/2} e^{A\tau} d\tau f(y_n) \right] - A\int_0^{H/2} e^{A\tau} d\tau f(y_n) \right].$$

关于方程组的显式一步 3 阶方法和多步方法可以同样作出．已找到了误差的渐近估计．当 $A = 0$ 时，这些方法变成了 Runge-Kutta 型或 Adams 型公式．当用 A 的分式有理矩阵多项式去近似 $e^{A\tau}$ 的积分时，考虑到相应矩阵为非奇异的，关于方程组的方法就变成了使用 Newton 方法迭代所得的相应的隐式方法的显式公式．下面就是关于方程组的一个 1 阶隐式方法：

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^H e^{A\tau} d\tau f(y_n) +$$

$$+ \int_0^H e^{A\tau} d\tau [f(y_{n+1}) - f(y_n) - A(y_{n+1} - y_n)]. \quad (21)$$

它是由（15）中选取

$$\varphi(t_n + \tau) = e^{A\tau}, \ C = -\int_0^H e^{-A\tau} d\tau$$

得到的．方程（21）是用化微分方程为积分方程的方法得出的．（21）中 $e^{A\tau}$ 的积分是以（20）为初始条件按（18）来计算的．在求解过程中修正这个积分的方法也研究过．

参考文献

[1] Бахвалов, Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975（英译本：Bakhvalov, N. S., Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations, Mir, 1977）.

[2] Васильева, А. Б., 《Матем. сб.》, 50 (1960), 1, 43－58.

[3] Былов, Б. Ф., Виноград, Р. Е., Гробман, Д. М., Немыцкий, В. В., Теория показателей Ляпунова, М., 1966.

[4] Гаврурин, М. К., в сборнике, Методы вычислений, 1963, в. 1, 45－51.

[5] Ракитский, Ю. В., 《Докл. АН СССР》, 193 (1970), 1, 40－42.

[6] Ракитский, Ю. В., 《Докл. АН СССР》, 207 (1972), 4, 793－795.

[7] Ракитский, Ю. В., 《Труды, Ленингр. политехн. ин-та》, 1973, 332, 88－97.

[8] Павлов, Б. В., Повзнер, А. Я., 《Журн. выч. матем. и матем. физ.》, 13 (1973), 4, 1056－1059.

[9] Curtiss, C. F., Hirschfelder, J. O., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38 (1962), 235－243.

[10] Mah, R. H. S., Michaelson, S. and Sargent, R. W., *J. Chem. Eng. Sci.*, 17 (1962), 619 – 639.

[11] Dahlquist, G., A special stability problem for linear multistep methods, *Nordisk. Tidskr. Informationsbehandling*, 3 (1963), 27 – 43.

[12] Rosenbrock, H. H., Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations, *Comput. J.*, 5 (1963), 329 – 330.

[13] Widlund, O. B., A note on unconditionally stable linear multistep methods, *Nordisk. Tidskr. Informations-behandling*, 7 (1967), 65 – 70.

[14] Gear, C. W., The automatic integration of stiff ordinary differential equations (with discussion), in Information processing 68, Vol. 1, North-Holland, 1969, 187 – 193.

[15] Lambert, J. D. and Sigurdsson, S. T., Multistep methods with variable matrix coefficients, *SIAM J Numer. Anal.*, 9 (1972), 715 – 733.

[16] Lambert, J. D., Computational methods in ordinary differential equations, Wiley, 1973.

[17] Willoughby, R. A. (ed.), Stiff differential systems, The IBM research symposia series, Plenum, 1974.

Ю. В. Ракитский 撰

【补注】 在[2]中所讲的对方程组(1)应用渐近方法也在[A1]中研究过．关于刚性微分方程的数值方法的发展是受到[A2]的促进的．近年来，关于这个主题出现了许多论文．[A3]可以作为刚性微分方程理论的入门的参考文献．

参考文献

[A1] Flaherty, J. E. and O'Malley, R. E., Numerical methods for stiff systems of two-point boundary value problems, *SIAM J. Sci. and Statist. Comp.*, 5 (1984), 865 – 886.

[A2] Lininger, W. and Willoughby, R. A., Efficient integration methods for stiff systems of ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 7 (1970), 47–66.

[A3] Dekker, K. and Verwer, J., Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations, CWI Monograph, 2, North-Holland, 1984.

[A4] Mirankar, W. L., Numerical methods for stiff equations, Reidel, 1981.

齐民友 译

Stirling 公式 [Stirling formula; Стирлинга формула]

对于大的 n，给出阶乘 $n!=1\cdots n$ 的近似值的渐近表示式，具有形式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n} e^{\theta(n)}, \qquad (*)$$

其中 $|\theta(n)|<1/12n$．对于阶乘以及 Γ 函数(gamma-function)，渐近等式

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n},\ n\to\infty,$$

$$\Gamma(z+1)\approx\sqrt{2\pi z}\ z^z e^{-z},\ \mathrm{Re}\, z\to+\infty$$

成立，这意味着：当 $n\to\infty$ 或 $\mathrm{Re}\, z\to+\infty$ 时，左边与右边之比趋向于 1．

表示式(*)是 J. Stirling 建立的(1730)．

Е. Д. Соломенцев 撰

【补注】 关于相应的渐近级数(Stirling 级数(Stirling series))以及附加参考文献，见 Γ 函数(gamma-function)．

参考文献

[A1] Bruijn, N. G. de, Asymptotic methods in analysis, Dover, reprint, 1981.

[A2] Marsaglia, G. and Marsaglia, J. C. W., A new derivation of Stirling's approximation of $n!$, *Amer. Math. Monthly*, 97 (1990), 826 – 829.

[A3] Namias, V., A simple derivation of Stirling's asymptotic series, *Amer. Math. Monthly*, 93 (1986), 25 – 29.

杜小杨 译

Stirling 插值公式 [Stirling interpolation formula; Стирлинга интерполяционная формула]

在点 $x=x_0+th$ 关于结点 $x_0, x_0+h, x_0-h, \cdots, x_0+nh, x_0-nh$ 的向前插值的 **Gauss 插值公式** (Gauss interpolation formula)

$$G_{2n}(x_0+th)=f_0+f^1_{1/2}t+f^2_0\frac{t(t-1)}{2!}+$$

$$+f^3_{1/2}\frac{t(t^2-1^2)}{3!}+f^4_0\frac{t(t^2-1^2)(t-2)}{4!}+\cdots+$$

$$+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1^2)\cdots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}$$

和关于结点 $x_0, x_0-h, x_0+h, \cdots, x_0-nh, x_0+nh$ 的向后插值的同阶 Gauss 公式

$$G_{2n}(x_0+th)=f_0+f^1_{-1/2}t+f^2_0\frac{t(t+1)}{2!}+\cdots+$$

$$+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}$$

的半和．

应用符号

$$f^{2k-1}_0=\frac{1}{2}\left[f^{2k-1}_{1/2}+f^{2k-1}_{-1/2}\right],$$

Stirling 插值公式取以下形式

$$L_{2n}(x)=L_{2n}(x_0+th)=f_0+tf^1_0+\frac{t^2}{2!}f^2_0+\cdots+$$

$$+\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}f^{2n-1}_0+$$

$$+\frac{t(t^2-1)\cdots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}f^{2n}_0.$$

对小的 t，Stirling 插值公式比其他插值公式更精确.

参考文献

[1] Березин, И. С., Жидков, Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966 (英译本: Berezin, I. S. and Zhidkov, N. P., Computing methods. Pergamon, 1973).

М. К. Самарин 撰

【补注】 中心差分 $f_{i+1/2}^{2m+1}$ 和 f_i^{2m} ($m=0,1,\cdots$, $i=\cdots,-1,0,1,\cdots$) 是由（表值）$f_i^0=f(x_0+ih)$ 用公式

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{2m+1}=f_{i+1}^{2m}-f_i^{2m};\ f_i^{2m}=f_{i+\frac{1}{2}}^{2m-1}-f_{i-\frac{1}{2}}^{2m-1}$$

递归定义的.

参考文献

[A1] Hildebrand, F. B., Introduction to numerical analysis, Dover, reprint, 1987, p. 139.

袁国兴 张宝琳 译

[General Information]
□□=□□□□□□ □□□
□□=
□□=1045
SS□=11118423
□□□□=